HAL
open science

Fonctions fuchsiennes ou schwarziennes ? Mieux poincaréennes ! (2)

Rossana Tazzioli

To cite this version:

Rossana Tazzioli. Fonctions fuchsiennes ou schwarziennes ? Mieux poincaréennes ! (2). Images des Mathématiques, 2010, http://images.math.cnrs.fr/Fonctions-fuchsiennes-ou,700.html. hal-00586999

HAL Id: hal-00586999

https://hal.science/hal-00586999v1

Submitted on 19 Apr 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Fonctions fuchsiennes ou schwarziennes ? Mieux poincaréennes ! (II)

Le 15 août 2010, par **Rossana Tazzioli**
U.F.R. de Mathématiques, Laboratoire Paul Painlevé U.M.R. CNRS 8524.
Université de Sciences et Technologie Lille 1 (**page web**)

Cette deuxième partie esquisse la voie que Poincaré a frayée pour aborder la résolution des équations sur lesquelles Fuchs s'était concentré, en prolongeant les idées de Fuchs et en y ajoutant un nouvel outil : la géométrie non euclidienne.

LA théorie des équations fuchsiennes a été fondée par le jeune Henri Poincaré (1854-1912) autour des années quatre-vingts du XIXe siècle. Il a lui-même introduit la dénomination « équations fuchsiennes ». Cependant, on a vu dans la **première partie** de cet article que Lazarus Fuchs (1833-1902) avait déjà considéré cette classe particulière d'équations différentielles. On a aussi expliqué comment, en généralisant une méthode de Jacobi, Fuchs avait essayé de trouver la solution d'une équation fuchsienne, mais il n'avait pas réussi à atteindre son objectif.

Pourquoi avait-il échoué ? Si l'on met de côté des défauts de rigueur dans ses démonstrations, il lui manquait deux éléments fondamentaux : les groupes de transformations et la géométrie non euclidienne. En effet, c'est Poincaré qui, le premier, a compris le lien (tant profond qu'étonnant) entre la théorie des fonctions fuchsiennes et la géométrie non euclidienne, et pour comprendre ce lien il a dû passer par les groupes de transformations.

Cette deuxième partie de l'article est dédiée à esquisser le caractère novateur et passionnant de la démarche suivie par Poincaré. Une découverte qui a tout de suite donné au jeune Poincaré une célébrité mondiale.

Poincaré arrive !

En 1878, une bonne occasion est offerte à Poincaré de se pencher sur des questions qui l'amèneront à étudier les équations différentielles déjà introduites par Fuchs. L'Académie des Sciences de Paris propose en effet un prix de mathématiques dont le thème est : « Perfectionner en quelques points importants la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante ». La commission pour ce prix était composée de Bertrand, Bonnet, Bouquet, Puiseux et Hermite, le maître de Poincaré, qui était rapporteur. Hermite avait déjà montré un grand intérêt pour les travaux de Fuchs sur les équations différentielles.

Poincaré décide de concourir pour ce prix. Remarquons qu'il n'obtiendra pas le prix et qu'il sera classé second derrière Halphen. Poincaré envoie donc le 22 mars 1880 un mémoire à l'Académie mais il le retire le 14 juin avant que la commission du prix ne l'examine pour la compétition. En comparant ce premier texte avec le second mémoire que Poincaré lui substituera plus tard pour la

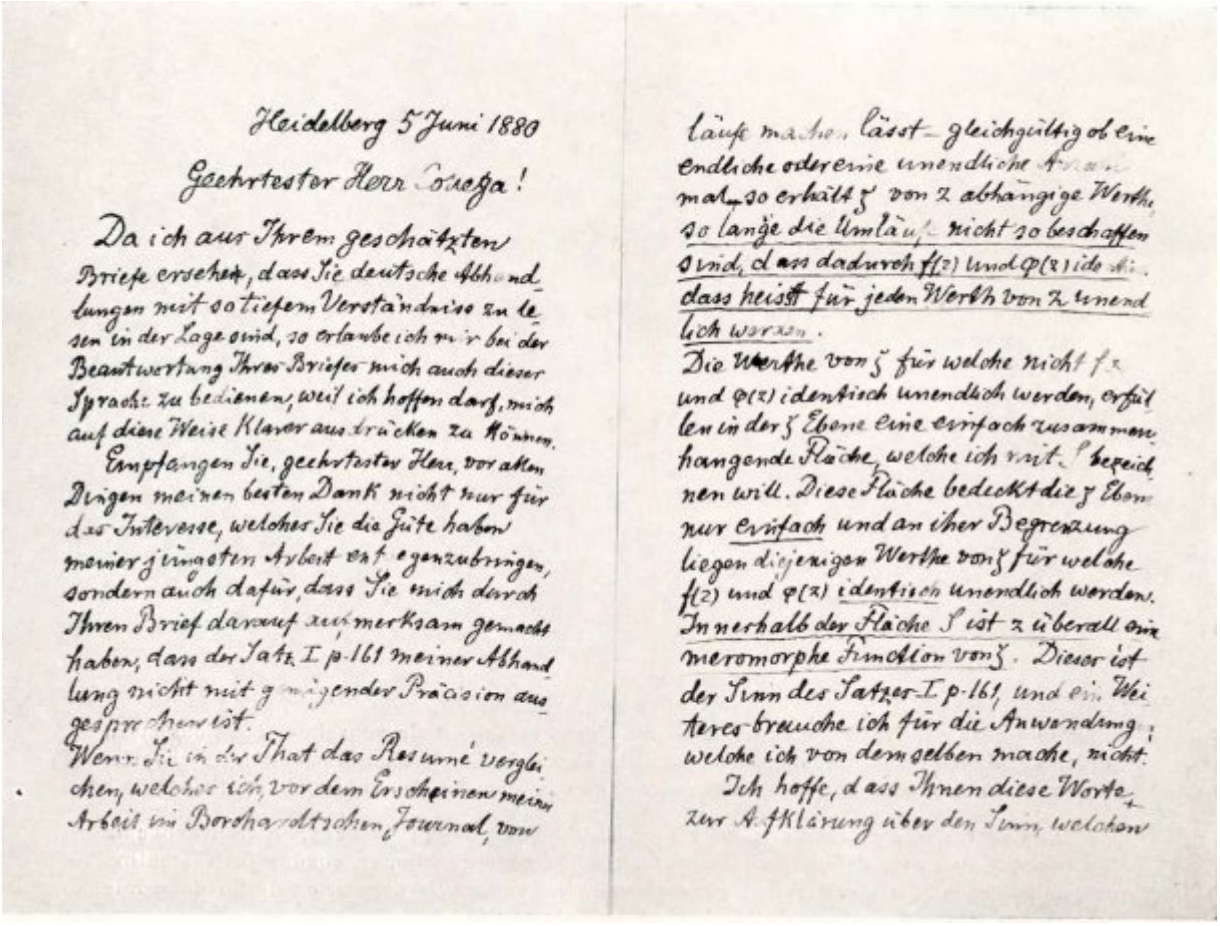
compétition, on peut faire l'hypothèse que le motif de ce retrait réside dans le fait que Poincaré employait de l'analyse réelle, c'est-à-dire la théorie mathématique qui s'occupe des fonctions dépendant de variables réelles. Or il développera ses recherches les plus intéressantes sur ce sujet des équations différentielles linéaires grâce à des techniques mathématiques relevant de l'analyse complexe : notamment grâce à une analogie très forte entre fonctions elliptiques et fonctions fuchsiennes [1].

C'est ce que montre le second mémoire que Poincaré soumet à l'Académie le 29 mai [2]. Ce mémoire contient en germe quelques idées fondamentales que Poincaré publiera par la suite dans une série de notes et d'articles dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* de Paris et dans *Acta Mathematica* pendant les années 1881-1884. Cependant, le mémoire n'atteste pas encore les idées profondes que Poincaré développera par la suite sur les liens entre géométrie non euclidienne et équations fuchsiennes. Cette question fait l'objet des trois *Suppléments* envoyés par Poincaré à l'Académie entre juin et décembre 1880. Mais nous reviendrons sur les *Suppléments* dans la suite.

Esquissons l'approche mathématique de Poincaré. Son objet d'étude est constitué par les équations différentielles déjà considérées par Fuchs mais il part là où Fuchs s'est arrêté. Poincaré cherche tout d'abord à préciser les conditions pour lesquelles l'inverse du rapport entre deux solutions indépendantes de l'équation différentielle fuchsienne est bien défini. Selon lui, les conditions trouvées par Fuchs posaient problème.

Dans une lettre à Fuchs, datée du 29 mai 1880, Poincaré remarque que si Fuchs a raison, alors on devrait pouvoir en déduire que toutes les solutions devaient satisfaire à une propriété. Or l'article de Fuchs montrait explicitement qu'il n'en allait pas ainsi. Dans l'échange de lettres qui suit, les deux mathématiciens discutent de cette question de manière très technique et c'est de fait précisément ce quotient, introduit de façon incidente par Fuchs, dont Poincaré va comprendre toute l'importance. C'est ainsi que dans une de ces lettres (12 juin 1880) Poincaré demande à Fuchs [3] « la permission » d'appeler « fonction fuchsienne » la fonction inverse du rapport des deux solutions « puisque c'est vous qui l'avez découverte ».

http://images.math.cnrs.fr/Fonctions-fuchsiennes-ou,700.html



Heidelberg 5 Juni 1880

Geehrtester Herr Fuchs!

Da ich aus Ihrem geschätzten Briefe ersehe, dass Sie deutsche Abhandlungen mit so tiefem Verständniss zu lesen in der Lage sind, so erlaube ich mir bei der Beantwortung Ihres Briefes mich auch dieser Sprache zu bedienen, weil ich hoffen darf, mich auf diese Weise klarer ausdrücken zu können.

Empfangen Sie, geehrtester Herr, vor allem Dingen meinen besten Dank nicht nur für das Interesse, welches Sie die Güte haben meiner jüngsten Arbeit entgegenzubringen, sondern auch dafür, dass Sie mich durch Ihren Brief darauf aufmerksam gemacht haben, dass der Satz I p. 161 meiner Abhandlung nicht mit genügender Präcision ausgesprochen ist.

Wenn Sie in der That das Resumé vergleichen, welches ich vor dem Erscheinen meiner Arbeit im Borchardtschen Journal, von

läufe machen, lässt – gleichgültig ob eine endliche oder eine unendliche Anzahl – so erhält ζ von z abhängige Werthe, so lange die Umläufe nicht so beschaffen sind, dass dadurch $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch, dass heisst für jeden Werth von z unendlich werden.

Die Werthe von ζ für welche nicht $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden, erfüllen in der ζ Ebene eine einfach zusammenhangende Fläche, welche ich mit S bezeichnen will. Diese Fläche bedeckt die ζ Ebene nur einfach und an ihrer Begrenzung liegen diejenigen Werthe von ζ für welche $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden. Innerhalb der Fläche S ist z überall eine meromorphe Function von ζ. Dieser ist der Sinn des Satzes I p. 161, und ein Weiteres brauche ich für die Anwendung, welche ich von demselben mache, nicht.

Ich hoffe, dass Ihnen diese Worte zur Aufklärung über den Sinn, welchen

Le 30 juillet 1880, Poincaré écrit à Fuchs :

> Permettez-moi d'insister sur les fonctions auxquelles j'ai donné votre nom et que j'ai rencontrées dans ces recherches. Ces fonctions présentent avec les fonctions elliptiques les plus grandes analogies...

En effet, pour pousser plus loin ses recherches sur les fonctions fuchsiennes Poincaré emprunte une approche différente, et c'est encore une fois, comme cela avait été le cas pour Fuchs, mais ici de façon différente, l'analogie entre la théorie des fonctions elliptiques et la théorie des fonctions fuchsiennes qui lui servira « de guide » dans cette démarche - comme il l'écrira plus tard dans l'*Analyse des travaux faite par lui même* [**4**].

Tentons de mieux saisir la démarche de Poincaré, c'est-à-dire la manière spécifique dont il exploite, pour orienter sa recherche, les similarités entre les deux théories. Nous avons vu, dans la première partie de cet article, comment Fuchs s'était inspiré de l'approche des fonctions elliptiques par Abel et Jacobi, en introduisant l'idée clef d'une inversion. Poincaré, s'inscrivant dans ces traces, reprendra une seconde idée forte de la théorie des fonctions elliptiques : l'invariance de la valeur d'une telle fonction par application de transformations à son argument. Nous avons en effet expliqué, dans la première partie de cet article, qu'à chaque fonction elliptique on peut associer un groupe de translations $z \mapsto nT_1 + mT_2$ qui laisse la fonction invariante (T_1, T_2 sont les périodes de la fonction). Pour les fonctions fuchsiennes un autre groupe intervient : Poincaré appellera ces groupes *fuchsiens*.

Dans le cas des fonctions elliptiques, T_1 et T_2 définissent un parallélogramme qui permet de

paver le plan, comme on pave sa salle de bains, mais en ce cas à l'aide d'une infinité de parallélogrammes (dits *parallélogrammes des périodes*). La connaissance d'une fonction elliptique à l'intérieur d'un parallélogramme permet de la connaître dans tout le plan. Pour les fonctions fuchsiennes, Poincaré introduit des transformations plus compliquées (les transformations du groupe qu'il a appelé fuchsien). On peut leur associer des polygones curvilignes qui pavent cette fois non pas le plan, mais le disque. Le lien entre transformations et polygones curvilignes consiste en ce que l'on peut obtenir toutes les régions définies par ces polygones en appliquant à l'une d'elles toutes les transformations du groupe fuchsien [5].

La géométrie hyperbolique et ses modèles

Il nous faut à présent introduire quelques éléments d'histoire sur la géométrie non euclidienne dans la mesure où, nous l'avons dit, Poincaré mobilisera la géométrie hyperbolique qui était déjà bien connue quand il écrivait ses travaux sur les fonctions fuchsiennes.

Dans la géométrie usuelle (dite euclidienne), par un point extérieur à une droite donnée, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite. Il s'agit du *postulat de l'unicité de la parallèle*, qui est à la base de la géométrie euclidienne.

Dans la géométrie hyperbolique, cet axiome est remplacé par le suivant : par un point extérieur à une droite donnée, il passe une infinité de droites parallèles à cette droite. Avec ce nouvel axiome, on obtient une géométrie différente de la géométrie euclidienne. Dans la géométrie hyperbolique, par exemple, la somme des angles d'un triangle est plus petite que 180° et il n'est pas de triangles semblables (c'est-à-dire avec les mêmes angles) hormis les triangles égaux.

Nikolaj Lobachevski (1793-1856) fut le fondateur de la géométrie hyperbolique. Il avait rédigé des travaux fondamentaux sur ce sujet à partir des années 1820. Cependant ces travaux étaient très originaux et publiés dans des journaux russes peu diffusés. Ils sont donc restés longtemps méconnus de la plupart des mathématiciens.

En 1837, il publia un mémoire en français, « Géométrie imaginaire », dans le célèbre *Journal de Crelle* [6]. Cet article fut suivi en 1840 par un livre en allemand sur la théorie des parallèles, lequel fut traduit en français par Jules Hoüel et publié en 1866 dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles* de Bordeaux. Grâce à ces ouvrages, les idées et les résultats fondamentaux de la géométrie hyperbolique commencèrent à se répandre dans les universités de toute l'Europe.

C'est justement le mémoire français de Lobachevski intitulé « Études géométriques sur la théorie des parallèles » (1866) qui a conduit Eugenio Beltrami (1835-1900) à s'intéresser au sujet des géométries non euclidiennes. Beltrami eut l'excellente idée d'appliquer des méthodes classiques développées par Gauss à la géométrie hyperbolique.

Pendant les années 1870, Klein avait beaucoup travaillé sur les géométries non euclidiennes, en particulier, en approfondissant les travaux de Beltrami. En 1872 Klein avait aussi prononcé à l'université d'Erlangen son célèbre programme, selon lequel l'étude de la géométrie se réduit à l'étude des groupes de transformations qui laissent inaltérées des figures (qui sont dites invariantes par rapport à l'action du groupe). Après cette intervention de Klein, les deux concepts de groupe et d'invariant deviennent fondamentaux dans la recherche en géométrie [7]. Poincaré a appris le contenu du Programme d'Erlangen en 1882, lors du passage à Paris de Sophus Lie (1842-1899), le mathématicien norvégien qui avait collaboré avec Klein sur la théorie des groupes en géométrie.

Dans ses publications sur les fonctions fuchsiennes (1881-1884), Poincaré développe ce lien entre équations fuchsiennes et géométrie hyperbolique. Comme il l'a remarqué, les fonctions fuchsiennes sont pour la géométrie de Lobachevski ce que les fonctions elliptiques sont pour la géométrie euclidienne. On peut observer comment ce point de vue s'élabore au fil de la rédaction des trois *Suppléments* au mémoire que Poincaré avait envoyé à l'Académie en 1880 pour le Prix de l'Académie de Paris. Ces notes ont été découvertes et publiées seulement récemment [8].

Comment et quand Poincaré a-t-il découvert les travaux sur la géométrie non euclidienne, cela reste encore un problème historique ouvert. On a vu qu'une traduction française de l'ouvrage de Lobachevski sur la théorie des parallèles a été publiée en 1866 par Hoüel ; en outre, l'article de Beltrami contenant le modèle euclidien du plan hyperbolique a été traduit en français - encore par Hoüel, et publié dans les *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* en 1869. Peut-être, mais c'est seulement une supposition, Poincaré a-t-il lu la traduction française de l'article de Beltrami.

Le modèle de Poincaré

Dans son article, Saggio di interpretazione della geometria non euclidea (1868), Beltrami a introduit le premier modèle du plan hyperbolique [9]. En fait, dans ses notes sur les fonctions fuchsiennes, Poincaré introduit un modèle de la géométrie hyperbolique différent de celui de Beltrami.

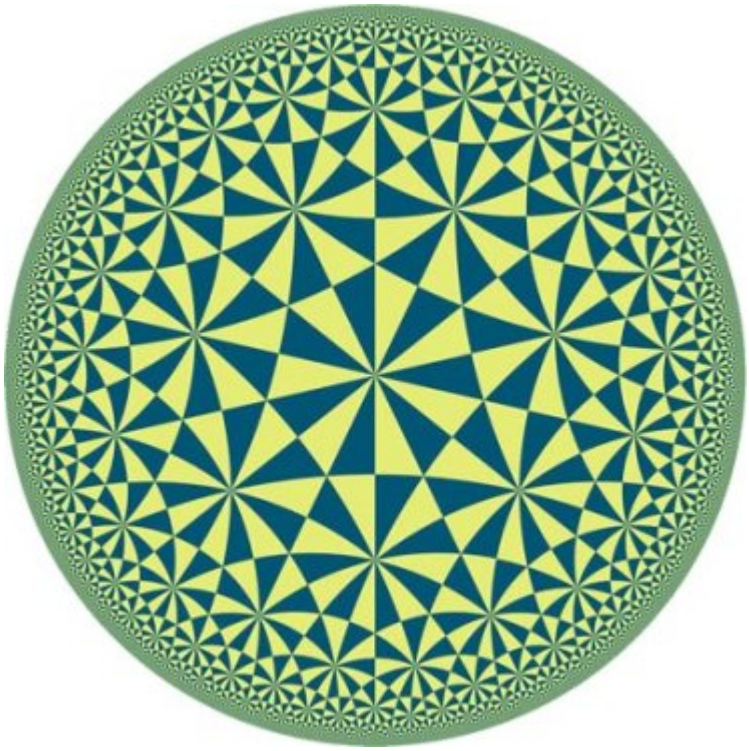
Dans le modèle proposé par Poincaré, les lignes géodésiques [10] du plan de Lobachevski deviennent des arcs de cercles perpendiculaires à un disque ou à un demi-plan. Le modèle du disque est bien connu aujourd'hui sous le nom de disque de Poincaré [11].

Insistons-y, l'objectif de Poincaré n'est pas d'étudier la géométrie non euclidienne pour elle-même mais de faire progresser la résolution d'une classe particulière d'équations différentielles : la classe des équations fuchsiennes.

The missing link

L'idée géniale de Poincaré pour atteindre cet objectif, nous l'avons déjà évoqué, est d'utiliser la géométrie non euclidienne. Avant cet usage de la géométrie hyperbolique, ces développements mathématiques pouvaient paraître ne constituer qu'« un simple jeu de l'esprit », que des philosophes pouvaient juger intéressants mais qui n'auraient pas d'utilité pour les mathématiciens. Le travail de Poincaré dont nous parlons accorde à cette géométrie une place centrale dans sa théorie.

Dans le premier *Supplément* (reçu par l'Académie le 28 juin 1880) Poincaré montre déjà les liens entre la théorie des fonctions fuchsiennes et la géométrie non euclidienne de Lobachevski. Le biais par lequel il le montre est d'établir une connexion entre l'étude de la géométrie et l'étude de groupes de transformations qui laissent invariantes des figures. Poincaré s'est rendu compte que la géométrie non euclidienne est nécessaire pour trouver la solution des équations différentielles fuchsiennes en remarquant que les deux groupes de transformations - le groupe hyperbolique et le groupe fuchsien - sont le même groupe. La géométrie euclidienne est associée au groupe des rotations et des translations (une figure reste invariante quand on lui applique les transformations de ce groupe) ; en géométrie hyperbolique il faut considérer des groupes plus compliqués, mais - et c'est la découverte étonnante - il s'agit justement des groupes que Poincaré avait déjà trouvés dans sa théorie des fonctions fuchsiennes et qu'il avait appelés groupes fuchsiens.



Poincaré développe les idées fondamentales des *Suppléments* dans ses articles sur les fonctions fuchsiennes publiés de 1881 à 1884. Ces articles sont très techniques et difficiles à suivre [**12**] ; on se contentera ici d'évoquer la richesse et le mélange des méthodes utilisées par Poincaré qui appartiennent à plusieurs théories : à la théorie des équations différentielles, à l'analyse complexe,

à la théorie des groupes de transformations et à la géométrie hyperbolique. Cette dernière s'avère être en effet un outil essentiel pour progresser dans la théorie des fonctions fuchsiennes.

Avant Poincaré des cas très simples d'équations fuchsiennes avaient déjà été considérés par Riemann et surtout par Schwarz. Dans un article de 1872, Schwarz avait développé une méthode assez proche de celle utilisée par Poincaré ; mais bien sûr, il n'utilisait pas la géométrie hyperbolique dont il n'avait pas besoin pour analyser son cas particulier. Avec sa méthode, Schwarz avait été amené à considérer un pavage du disque formé par des triangles curvilignes. Cependant, comme J. Gray le remarque [**13**], Poincaré était très jeune et ignorait une grande partie de la littérature sur ce sujet – y compris les travaux de Riemann et de Schwarz – qui l'aurait bien aidé dans ses recherches. Le fait que Poincaré ne connaissait pas encore les travaux de Schwarz sur ce sujet motivera la réaction de Klein qui juge inapproprié le fait d'associer le nom de Fuchs à l'ensemble de ces développements (voir la correspondance avec Klein ci-dessous).

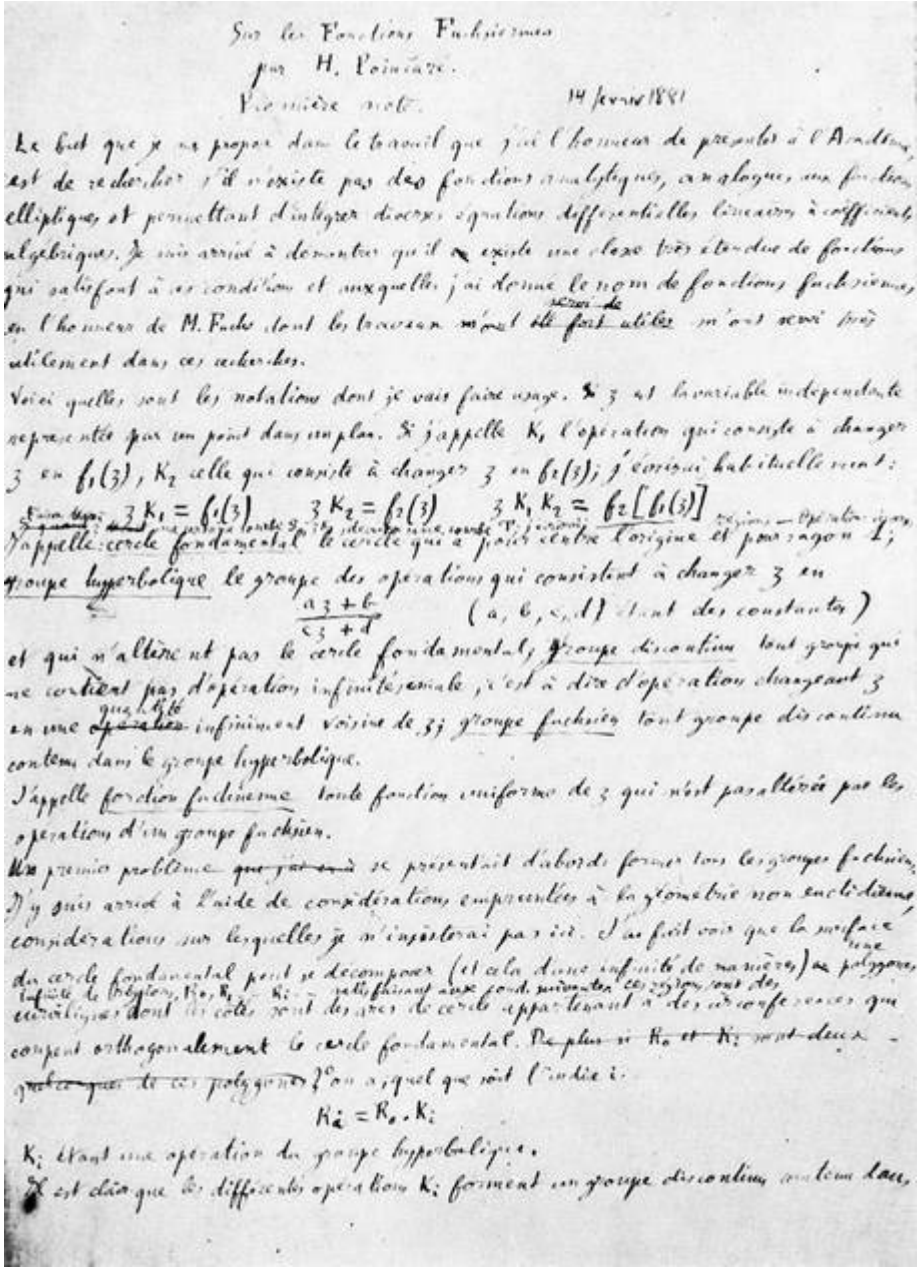
La découverte de Poincaré, et surtout l'intuition qui est à sa base, ont été rapportées par Poincaré dans son livre *Science et Méthode* (1908) dans le passage suivant qui est devenu un classique de l'invention mathématique :

> « À ce moment, je quittai Caen, où j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade. Au moment où je mettais le pied sur le marchepied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non euclidienne [hyperbolique]. Je ne fis pas la vérification, je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée, mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience. » [**14**]

Poincaré eut d'autres révélations similaires pendant sa carrière scientifique. Dans *Science et Méthode* il rappelle plusieurs souvenirs personnels afin « de pénétrer plus avant et de voir ce qui passe dans l'âme même du mathématicien » [**15**]. Les épisodes concernant la découverte des fonctions fuchsiennes sont bien expliqués dans son livre et jouent un rôle central dans son célèbre essai sur la psychologie de l'invention mathématique (*L'invention mathématique*, 1908 [**16**]).

« Les noms sont bruit et fumée »

En 1881, Poincaré commença à publier ses articles sur les fonctions fuchsiennes dans les *Comptes Rendus* : une douzaine de notes en une seule année !



Sur les Fonctions Fuchsiennes
par H. Poincaré.
Première note. 14 février 1881

Le but que je me propose dans le travail que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie est de rechercher s'il n'existe pas des fonctions analytiques, analogues aux fonctions elliptiques, et permettant d'intégrer des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Je suis arrivé à démontrer qu'il existe une classe très étendue de fonctions qui satisfont à ces conditions et auxquelles j'ai donné le nom de fonctions fuchsiennes en l'honneur de M. Fuchs dont les travaux m'ont servi très utilement dans ces recherches.

Voici quelles sont les notations dont je vais faire usage. Si z est la variable indépendante représentée par un point dans un plan. Si j'appelle K_1 l'opération qui consiste à changer z en $f_1(z)$, K_2 celle qui consiste à changer z en $f_2(z)$; j'écrirai habituellement :

$$z K_1 = f_1(z) \qquad z K_2 = f_2(z) \qquad z K_1 K_2 = f_2[f_1(z)]$$

J'appelle cercle fondamental le cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon 1;

groupe hyperbolique le groupe des opérations qui consistent à changer z en

$$\frac{az+b}{cz+d} \qquad (a, b, c, d \text{ étant des constantes})$$

et qui n'altèrent pas le cercle fondamental; groupe discontinu tout groupe qui ne contient pas d'opérations infinitésimale, c'est à dire d'opérations changeant z en une quantité infiniment voisine de z; groupe fuchsien tout groupe discontinu contenu dans le groupe hyperbolique.

J'appelle fonction fuchsienne toute fonction uniforme de z qui n'est pas altérée par les opérations d'un groupe fuchsien.

Le premier problème se présentait d'abord de former tous les groupes fuchsiens. J'y suis arrivé à l'aide de considérations empruntées à la géométrie non euclidienne considérations sur lesquelles je n'insisterai pas ici. J'ai fait voir que la surface du cercle fondamental peut se décomposer (et cela d'une infinité de manières) en une infinité de polygones, $K_0, K_1, \ldots K_i$ satisfaisant aux conditions suivantes ces polygones sont des curvilignes dont les côtés sont des arcs de cercle appartenant à des circonférences qui coupent orthogonalement le cercle fondamental. De plus si K_0 et K_i sont deux quelconques de ces polygones l'on a quel que soit l'indice i.

$$K_i = K_0 . K_i$$

K_i étant une opération du groupe hyperbolique.

Il est clair que les différentes opérations K_i forment un groupe discontinu contenu dans

Trois monumentaux Mémoires sur le même sujet furent ensuite publiés en 1882 et 1884 dans *Acta Mathematica*, la prestigieuse revue suédoise dirigée par Gösta Mittag-Leffler et fondée cette année là [**17**]. Ce n'était pas par hasard ! Mittag-Leffler savait bien que le succès d'une revue dépend de la valeur de ses articles. Il s'était donc fortement investi pour faire du premier volume de sa revue une vraie perle mathématique. Il réussit à convaincre Poincaré de lui confier pour ce numéro ses deux premiers articles sur les fonctions fuchsiennes, et parvient par ailleurs à obtenir d'autres travaux rédigés par des mathématiciens célèbres. La correspondance entre Poincaré et Mittag-Leffler témoigne bien des efforts de Mittag-Leffler pour atteindre ce but [**18**].

Mittag-Leffler appréciait les idées mathématiques de Poincaré, évoquant à son sujet le « génie de Poincaré ». Cependant il trouvait à redire sur le style du mathématicien français ; le 27 octobre 1887, Mittag-Leffler écrit à Hermite qui lui avait présenté le jeune Poincaré en 1881 :

> « Il [Poincaré] écrit avec trop peu de soin, c'est incontestable, et ses mémoires sont remplis d'inexactitudes ».

Mittag-Leffler reproche de surcroît à Poincaré une *erreur d'attribution*, lorsque ce dernier attribue à Hermite une idée mathématique qui ne lui revient pas – celle de fonction lacunaire. Mittag-Leffler, élève et admirateur de Weierstrass, demande à Poincaré de rectifier : c'est, souligne-t-il, Weierstrass et non Hermite qui, le premier, a parlé de ces fonctions dans son cours sur la théorie des fonctions ! La rectification fut faite mais, Mittag-Leffler la jugeait insuffisante et injuste envers Weierstrass.

La terminologie introduite par Poincaré à propos des fonctions fuchsiennes fut l'objet d'une autre polémique qui opposa Klein à Poincaré. Il est intéressant de lire l'*Analyse des travaux faite par lui-même*, que Poincaré rédige en 1921 et qui est une reconstruction historique *a posteriori*. Poincaré y cite les travaux de Schwarz qu'il ne connaissait pas au moment de la rédaction du mémoire présenté à l'Académie. Klein lui en avait fait le reproche, en jugeant, de ce fait, inapproprié le terme de « fonctions fuchsiennes ». Poincaré répond à Klein le 27 juin 1881 :

> « En ce qui concerne Fuchs et la dénomination de fonctions fuchsiennes, il est clair que j'aurais pris une autre dénomination si j'avais connu le travail de M. Schwarz ; mais je ne l'ai connu que par votre lettre, après la publication de mes résultats de sorte que je ne peux plus changer maintenant le nom que j'ai donné à ces fonctions sans manquer d'égards à M. Fuchs. » [**19**]

De plus, une note que Poincaré publia en 1881 dans les *Comptes Rendus* avait pour titre « Sur les groupes kleinéens ». Mais Klein n'était pas du tout d'accord avec cette attribution, avançant que Poincaré entendait par là se dédouaner du fait d'avoir lésé Schwarz dans sa priorité. Poincaré affirmait que les raisons de cette dénomination étaient scientifiques, mais Klein était d'un avis différent. Le 4 avril 1882, Poincaré écrivait à Klein :

> « Si j'ai donné votre nom aux fonctions kleinéennes, c'est pour les raisons que j'ai dites et non pas comme vous l'insinuez, *zur Entschädigung* [pour m'excuser] ; car je n'ai à vous dédommager de rien [...] Je réponds à une interrogation que je trouve à la fin d'une page de votre lettre ».

Il explique par la suite les raisons scientifiques de son choix et ajoute : « Name ist Schall und Rauch » (Les noms sont bruit et fumée), une citation de Goethe extraite de *Faust* (Acte I, Scène 16).

Il est difficile de dire si le choix du terme de kleinéens constitue un choix malheureux ou si la dénomination de Poincaré cache une intention malicieuse. Ajoutons que, par la suite, Klein a appelé *fonctions automorphes* l'ensemble des deux classes de fonctions fuchsiennes et kleinéennes définies par Poincaré. Il s'agit de la dénomination actuelle.

Conclusion

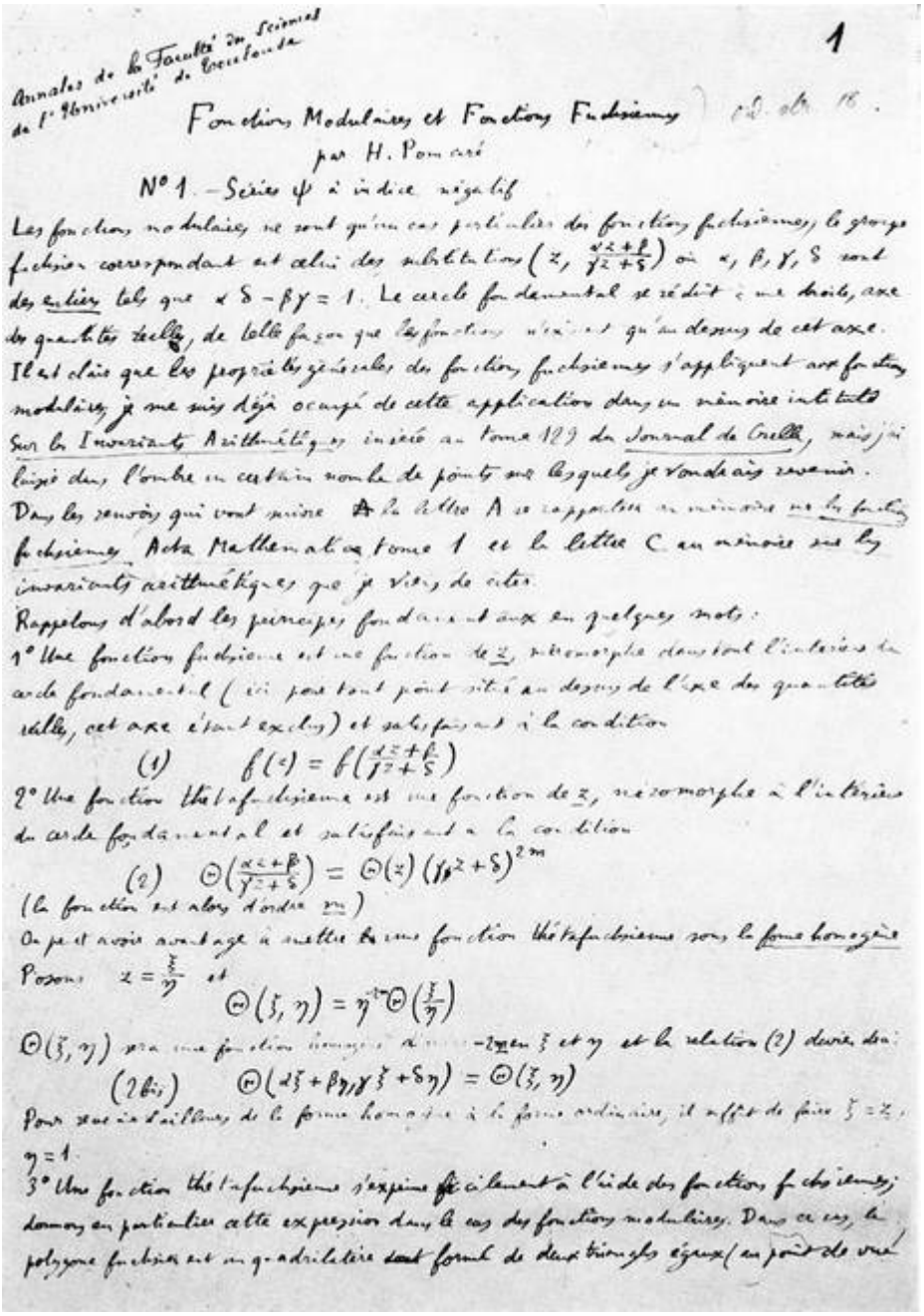
Dans un article dédié à l'œuvre mathématique de Poincaré et publié dans la *Revue du Mois* juste après la mort du mathématicien français, Vito Volterra écrivait :

> « On a demandé plusieurs fois : les fonctions fuchsiennes ont-elles des applications ? Mais on peut répliquer : qu'est-ce que signifie pour une théorie avoir des applications ? La pierre de touche d'une théorie consiste-t-elle dans son emploi en mécanique et en physique ? La théorie des coniques, que les Grecs ont élevée à un si haut degré de perfection, a-t-elle eu sa place d'honneur dans la géométrie le jour seulement où l'on a cru que ces courbes étaient les orbites des planètes ? Ne constituait-elle pas un monument artistique superbe, même en dehors de toute idée pratique [**20**] ? »

Pour nous, ce passage peut paraître surprenant. En fait, la théorie des fonctions automorphes a eu des développements extraordinaires pendant tout le XXe siècle. Il suffit de citer ses applications à la théorie analytique des nombres, à la théorie des équations différentielles et à la géométrie algébrique pour se convaincre de son importance dans les mathématiques d'aujourd'hui. Donc, au moins *a posteriori*, cette théorie n'a besoin d'aucune justification d'existence.

Poincaré lui-même a fait des contributions remarquables à diverses disciplines mathématiques en utilisant sa nouvelle théorie. Je renvoie au livre *L'héritage scientifique de Poincaré* et à l'article sur *Images des Mathématiques* : Etienne Ghys, **Géométriser l'espace : de Gauss à Perelman** pour constater la puissance que la théorie des fonctions fuchsiennes a montrée dans les mains de Poincaré.

http://images.math.cnrs.fr/Fonctions-fuchsiennes-ou,700.html



Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse

1

Fonctions Modulaires et Fonctions Fuchsiennes

par H. Poincaré

N° 1. – Séries ψ à indice négatif

Les fonctions modulaires ne sont qu'un cas particulier des fonctions fuchsiennes, le groupe fuchsien correspondant est celui des substitutions $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers tels que $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Le cercle fondamental se réduit à une droite, axe des quantités réelles, de telle façon que les fonctions n'existent qu'au dessous de cet axe.

Il est clair que les propriétés générales des fonctions fuchsiennes s'appliquent aux fonctions modulaires, je me suis déjà occupé de cette application dans un mémoire intitulé Sur les Invariants Arithmétiques inséré au tome 129 du Journal de Crelle, mais j'ai laissé dans l'ombre un certain nombre de points sur lesquels je voudrais revenir.

Dans les renvois qui vont suivre A la lettre A se rapportera au mémoire sur les fonctions fuchsiennes Acta Mathematica tome 1 et la lettre C au mémoire sur les invariants arithmétiques que je viens de citer.

Rappelons d'abord les principes fondamentaux en quelques mots :

1° Une fonction fuchsienne est une fonction de z, méromorphe dans tout l'intérieur du cercle fondamental (ici pour tout point situé au dessous de l'axe des quantités réelles, cet axe étant exclu) et satisfaisant à la condition

$$(1) \qquad f(z) = f\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$$

2° Une fonction thétafuchsienne est une fonction de z, méromorphe à l'intérieur du cercle fondamental et satisfaisant à la condition

$$(2) \qquad \Theta\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) = \Theta(z)\,(\gamma z+\delta)^{2m}$$

(la fonction est alors d'ordre m)

On peut avoir avantage à mettre une fonction thétafuchsienne sous la forme homogène

Posons $z=\frac{\xi}{\eta}$ et

$$\Theta(\xi,\eta) = \eta^{-2m}\Theta\left(\frac{\xi}{\eta}\right)$$

$\Theta(\xi,\eta)$ sera une fonction homogène de degré $-2m$ en ξ et η et la relation (2) devient

$$(2\,\text{bis}) \qquad \Theta(\alpha\xi+\beta\eta, \gamma\xi+\delta\eta) = \Theta(\xi,\eta)$$

Pour revenir de la forme homogène à la forme ordinaire, il suffit de faire $\xi=z$, $\eta=1$.

3° Une fonction thétafuchsienne s'exprime facilement à l'aide des fonctions fuchsiennes; donnons en particulier cette expression dans le cas des fonctions modulaires. Dans ce cas, le polygone fuchsien est un quadrilatère formé de deux triangles égaux (au point de vue

Pour terminer, je voudrais insister sur une autre conséquence majeure de l'introduction des fonctions fuchsiennes. Jusqu'à Poincaré, la géométrie hyperbolique était étudiée par un petit nombre de mathématiciens. Poincaré a montré son importance dans un contexte - la théorie des équations différentielles - considéré comme prioritaire dans les sciences mathématiques. La découverte de Poincaré a donc assuré une très grande diffusion à la géométrie non euclidienne, considérée finalement comme un véritable outil mathématique et pas seulement comme une théorie philosophique ou une curiosité mathématique sans intérêt.

P.S. :

Pour un portrait de Poincaré voir ***Henri Poincaré*** *de Philippe Nabonnand.*

Notes

[▲1] Voir la première partie de cet article **ici**.

[▲2] Ce mémoire a été publié pour la première fois dans le premier volume de ses *Œuvres* en 1928. Les *Œuvres complètes* de Poincaré sont disponibles en ligne sur le site **http://www.archive.org/**, le premier volume est **ici**.

[▲3] La correspondance entre Poincaré et Fuchs est publiée dans le **volume XI** des *Œuvres* de Poincaré.

[▲4] *Œuvres* de Poincaré, vol. 1, p. I-XXXV.

[▲5] Des figures donnant des exemples intéressants de pavages sont disponibles dans l'article de Jos Leys **« Une chambre hyperbolique »**.

[▲6] Sur le *Journal de Crelle* et les journaux scientifiques au XIXe siècle voir l'article de Norbert Verdier sur ce site **ici**.

[▲7] Sur la contribution de Klein à la théorie des équations différentielles par rapport aussi aux travaux de Poincaré voir : Jeremy G. Gray, *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*, Birkhäuser, 2000, pp. 184-205.

[▲8] Les trois suppléments sur la théorie des fonctions fuchsiennes ont été publiés dans le livre : J. Gray et S. Walter (éd.), *Three Supplementary Essays on the Discovery of Fuchsian Functions*, Akademie Verlag, Berlin, and Blanchard, Paris, 1997.

[▲9] Sur la contribution de Beltrami à la géométrie non euclidienne voir le livre : L. Boi, L. Giacardi, R. Tazzioli, *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudoshère. Les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel (1868-1881)*, Paris, Blanchard, 1998. Le lecteur y trouvera une discussion approfondie de ce modèle.
Pour visualiser le modèle de Beltrami voir les sites : **http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/...** ; **http://www.reunion.iufm.fr/Dep/math...**.

[▲10] Étant donnés deux points sur une surface, une ligne tracée entre ces deux points sur la surface et de longueur minimale est une « ligne géodésique ». Par exemple, les lignes géodésiques du plan sont les droites ; les lignes géodésiques sur la surface sphérique sont appelées les **grands cercles**.

[▲11] Sur le disque de Poincaré voir **ici** ; une description assez simple des deux modèles de Beltrami et de Poincaré est disponible sur le site **http://serge.mehl.free.fr/anx/disqu...**.
Une analyse détaillée du disque de Poincaré se trouve dans le premier chapitre du livre de E. Charpentier, E. Ghys, A. Lesne, *L'héritage scientifique de Poincaré*, Paris, Belin, 2006.

[▲12] Pour une description soignée et détaillée du contenu de ces articles voir : Jeremy G. Gray, *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*, Birkhäuser, 2000, pp. 206-220.

[▲13] Voir la référence précédente.

[▲14] Poincaré, *Œuvres*, **vol. II**, p. 57. Le livre *Science et méthode* est en ligne **ici**.

[▲15] Poincaré, *Œuvres*, vol. II, p. 57.

[▲16] Ce livre est disponible sur le web : **http://www.archive.org/details/linv...**.

[▲17] Les articles de H. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes sont regroupés dans le **volume II** de ses *Œuvres*.

[▲18] Les lettres entre Poincaré et Mittag-Leffler ont été publiées dans le livre : Ph. Nabonnand (éd.), *La correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler*, Birkhäuser, 1999. Ces lettres éclairent bien les relations entre les deux hommes et les motivations scientifiques qui sont à la base de la théorie des fonctions fuchsiennes.

[▲19] Poincaré, *Œuvres*, vol. XI, p. 36.

[▲20] L'article de Volterra et trois autres articles consacrés aux divers aspects de l'œuvre de Poincaré, qui ont été publiés pour la première fois dans la *Revue du Mois* par Pierre Boutroux, Jacques Hadamard et Paul Langevin, sont réimprimés dans le livre *Henri Poincaré*, Paris, Libraire Félix Alcan, 1914. La citation de Volterra est aux pages 23-24.

Crédits images

Pour citer cet article : **Rossana Tazzioli**, **Fonctions fuchsiennes ou schwarziennes ? Mieux poincaréennes ! (II)**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2010. En ligne, URL : **http://images.math.cnrs.fr/Fonctions-fuchsiennes-ou,700.html**