



HAL
open science

Fonctions fuchsiennes ou schwarziennes ? Mieux poincaréennes ! (1)

Rossana Tazzioli

► **To cite this version:**

Rossana Tazzioli. Fonctions fuchsiennes ou schwarziennes ? Mieux poincaréennes ! (1). Images des Mathématiques, 2010, <http://images.math.cnrs.fr/Fonctions-fuchsiennes-ou.html>. hal-00586997

HAL Id: hal-00586997

<https://hal.science/hal-00586997v1>

Submitted on 19 Apr 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Fonctions fuchsiennes ou schwarziennes ? Mieux poincaréennes ! (I)



Le 12 avril 2010, par **Rossana Tazzioli**

U.F.R. de Mathématiques, Laboratoire Paul Painlevé U.M.R. CNRS 8524.
Université de Sciences et Technologie Lille 1 ([page web](#))

Cet article (en deux parties [1]) raconte comment Poincaré introduisit les fonctions qu'il baptisa fuchsiennes pour résoudre certaines équations différentielles. Il s'inspira pour cela des travaux de Fuchs en les associant de façon novatrice à de la géométrie non euclidienne.

ON connaît les équations : ces égalités qui lient des nombres et des inconnues de manière telle que l'on puisse déterminer les inconnues - dans les meilleurs des cas.

Il est d'autres types d'équations - les équations différentielles - dont les inconnues ne sont plus des nombres, mais des fonctions. Et ces équations « déterminent » - toujours dans le meilleur des cas - les fonctions par l'égalité qu'elles énoncent entre des fonctions connues, la fonction cherchée, la dérivée de cette fonction, etc.

Newton fut le premier à résoudre ce type d'équation lorsqu'il établit la trajectoire d'un corps (on dit aussi l'intégrale, c'est ici notre « fonction ») sur la base d'une relation que vérifiaient l'accélération du mouvement et des fonctions connues. Plus exactement, ces équations spécifiaient, pour un mouvement donné, l'ensemble des trajectoires possibles, sachant qu'il suffit de préciser la position et la vitesse du corps à un moment quelconque pour que la trajectoire soit alors déterminée de façon unique.

Le domaine des équations différentielles se développa par la suite de façon importante. L'article qui suit porte sur un moment clé de cette histoire. On y conte comment le jeune Poincaré a eu l'extraordinaire intuition d'utiliser la géométrie non euclidienne, et plus précisément la géométrie hyperbolique (voir [ici](#)), pour résoudre un type d'équations différentielles déjà bien connu qu'il a appelées « équations fuchsiennes ». Il eut ensuite l'idée d'utiliser les solutions de ces équations pour aborder des problèmes mathématiques tout autres, en géométrie algébrique et en théorie des nombres.

Outre le fait de résoudre des problèmes théoriques difficiles, Poincaré rencontra d'autres soucis, en particulier une polémique avec Klein, provoquée par une dissension sur l'attribution de ces résultats mathématiques aussi bien que par les choix malheureux que fit Poincaré pour nommer les objets de sa nouvelle théorie (comme lorsque il décida d'appeler ces nouvelles fonctions « fuchsiennes », du nom de Lazarus Fuchs).

Qu'est-ce que c'est une fonction fuchsienne ?

Les fonctions fuchsiennes sont un type particulier de fonctions (on parle aujourd'hui plus largement des **fonctions automorphes** qu'on rencontre à présent un peu partout en

mathématiques. Si on s'appuie sur les formulations mathématiques contemporaines, on peut définir les fonctions automorphes de la manière suivante.

Tout d'abord ce sont des **fonctions** qui ont pour variable un nombre complexe. Elles sont définies sur une partie D du plan complexe, et elles jouissent de deux types de propriétés. D'une part, on demande qu'elles soient dérivables sur D sauf en un nombre fini de points isolés (qu'on appelle les pôles de la fonction) où elles ne sont pas définies et tendent vers l'infini [2]. D'autre part, ces fonctions ne changent pas (on dit qu'elles restent invariantes) si l'on applique à leur variable un ensemble donné de transformations.



Précision sur la définition

Pour être plus précis, on demande à ces fonctions f qu'elles ne changent pas quand on applique certaines transformations de la forme

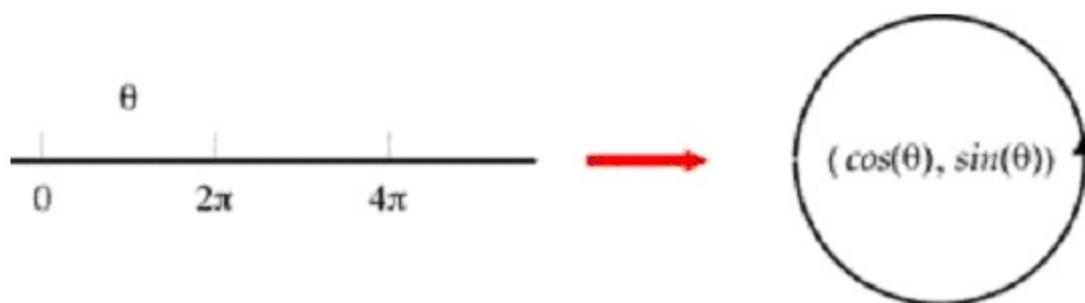
$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

La fonction présente ainsi une forme de périodicité généralisée :

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = f(z).$$

Voyons maintenant comment on a été amené à introduire ces fonctions dans l'histoire, ce qui offrira peut-être un chemin moins ardu pour les appréhender. C'est par le biais d'une analogie avec les fonctions circulaires (les célèbrissimes sinus et cosinus), puis avec des fonctions introduites plus tard sous le nom d'*elliptiques*, qu'on en est venu à parler des fonctions fuchsiennes.

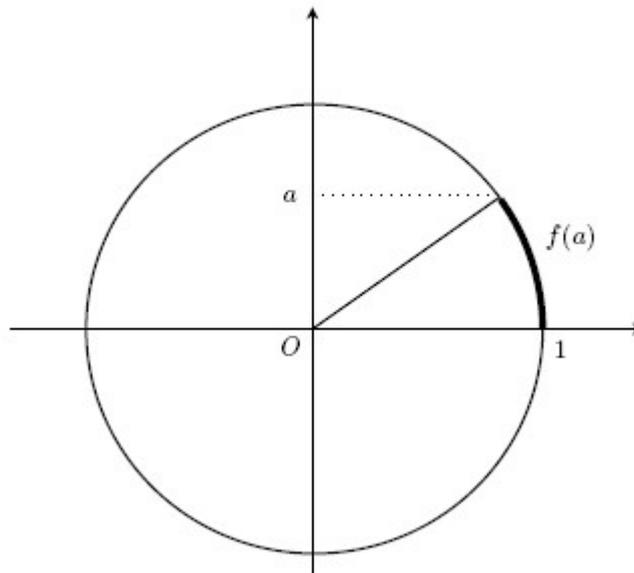
En effet, les fonctions elliptiques se sont présentées dans l'histoire comme une généralisation des fonctions dites circulaires. Ces dernières jouissent d'une forme de périodicité : chaque fois que l'on tourne d'un tour de plus sur un cercle de rayon 1 , la mesure de l'angle augmente de 2π , mais le sinus et le cosinus de l'angle ne changent pas de valeur (voir la figure 1 [3]). C'est pourquoi on parle de fonctions circulaires. Nous verrons que les fonctions elliptiques présentent une propriété de périodicité analogue. À leur tour, les fonctions fuchsiennes - et plus largement les fonctions automorphes - généralisent les fonctions elliptiques.



Mais procédons par ordre et revenons à nos sinus. Ils présentent une propriété clé pour notre histoire.

On peut calculer la longueur d'un arc de cercle avec une formule faisant intervenir l'angle au centre et le rayon du cercle. Mais, comme l'avait fait Jacobi, il est aussi possible d'exprimer la longueur d'un arc de cercle à l'aide d'une intégrale. Par exemple, pour un cercle de rayon 1 , on obtient l'intégrale :

$$f(a) = \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} .$$



Par conséquent, si on cherche à calculer la longueur d'un tel arc, on veut bien sûr calculer cette intégrale. Or la fonction sinus se présente comme la fonction inverse de cette intégrale. Outre le fait d'être périodique, comme nous l'avons vu, cette fonction satisfait aussi des relations comme la formule additive : $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$.

L'important, c'est que cette configuration de propriétés est apparue comme essentielle pour avancer dans un autre problème. Expliquons-nous. On a cherché, de façon similaire, à déterminer la longueur d'un arc d'ellipse. La formule obtenue fait alors intervenir l'intégrale (dite *elliptique*) suivante :

$$z = g(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} ,$$

où k est un nombre fixé qui dépend de l'ellipse que l'on considère. Dans un premier temps, on a cherché, sans succès, à calculer cette intégrale en essayant de l'exprimer à l'aide de fonctions « élémentaires » (comme $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$...).

Abel et Jacobi, deux mathématiciens du XIXe siècle qui ont créé la théorie des fonctions elliptiques, ont eu l'idée de considérer les fonctions non plus avec seulement des variables réelles, mais plus largement avec des variables complexes. C'est alors que l'analogie avec les fonctions circulaires a offert une piste de solution. En effet, dans ce contexte, une autre idée devenait efficace : Abel et Jacobi ont pensé à inverser la relation entre la variable complexe X et la fonction Z donnant la valeur de l'intégrale, en considérant la variable comme une fonction de l'intégrale ($X = g^{-1}(Z)$) - de la même manière la fonction sinus donne la valeur de la variable a en fonction de l'intégrale $f(a)$.

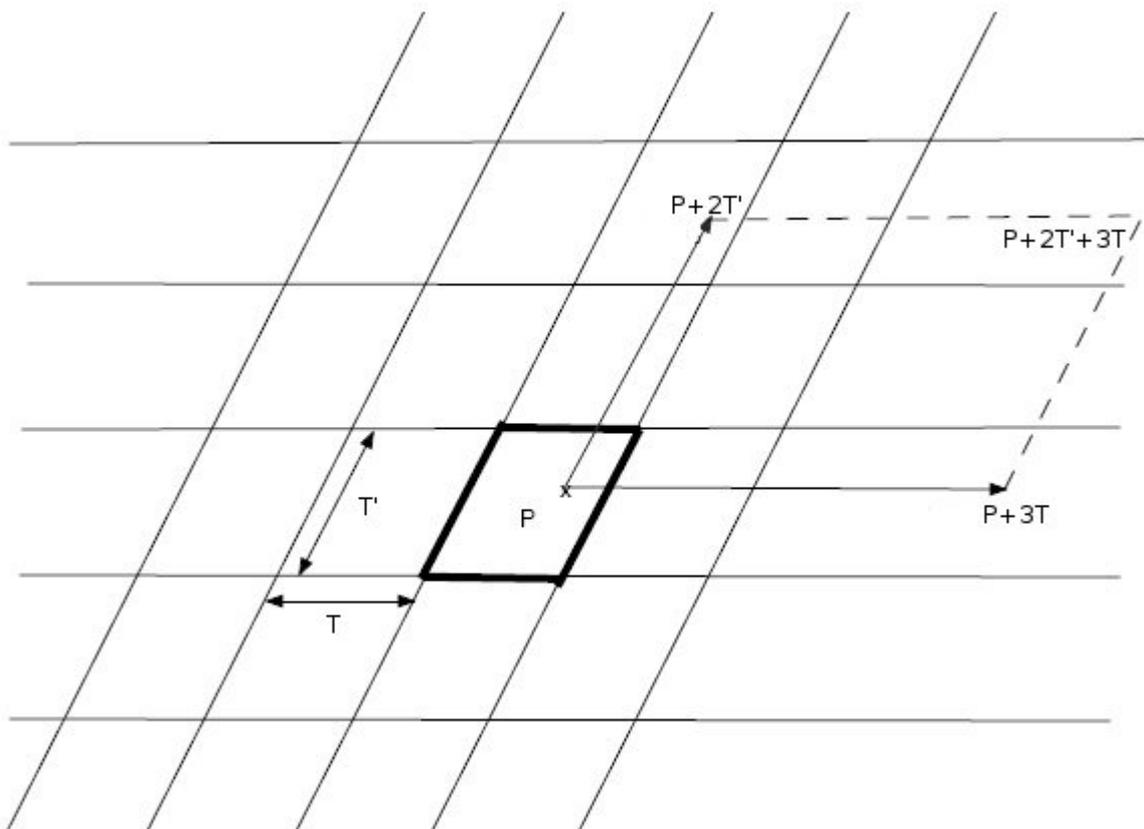
Le parallèle entre les deux situations ne se limitait pas à cette idée d'inversion. Il s'est trouvé que les fonctions obtenues en relation avec la seconde intégrale ci-dessus - on les a appelées *fonctions elliptiques* - présentaient elles aussi une forme de périodicité, mais différente de celle des fonctions circulaires. Nous avons vu, en effet, que si l'on augmentait la variable du sinus d'un tour de cercle,

le sinus ne changeait pas de valeur. Or pour chaque fonction elliptique, on a une forme de périodicité dans deux directions (voir la figure 2) : on peut trouver deux nombres T et T' - qui ne sont pas de même direction - et qui jouent le même rôle que 2π . Selon que l'on ajoute, dans une direction T ou, dans une autre direction, T' la valeur de la fonction en question ne change pas. Par ailleurs, de telles fonctions satisfont à des formules additives similaires à celles que nous avons rappelées ci-dessus pour la fonction sinus.

Bien sûr on peut ajouter T et T' autant de fois que l'on veut séparément ou ensemble : la valeur ne change pas non plus. En termes techniques, on dit qu'il existe deux nombres complexes T et T' (le rapport T/T' étant un nombre complexe non réel) tels que :

$$g^{-1}(z + mT + nT') = g^{-1}(z)$$

pour n et m des entiers. Par analogie avec le cas des fonctions circulaires, on appelle T et T' les *périodes* de la fonction.



Regardons d'un peu plus près cet ensemble de transformations qui laissent la fonction invariante. On voit que si on ajoute à z un nombre quelconque de T et de T' , on retrouve la même fonction. D'un point de vue géométrique, ajouter l'un ou l'autre ou une combinaison des deux, c'est faire une translation dans le plan.

En fait, cet ensemble de translations a une structure particulière : quand on combine deux translations, on voit bien qu'on a ajouté un certain nombre de fois T et/ou T' . On reste donc dans le même ensemble de transformations. On peut aussi facilement revenir à son point de départ - c'est-à-dire avoir ajouté T zéro fois et T' zéro fois - en soustrayant le même nombre de fois T et T' qu'on les avait ajoutés. C'est ce qu'on appelle avoir un groupe de transformations. En termes techniques, c'est le groupe de translations notées $z \mapsto z + mT + nT'$, où T et T' sont les périodes de la fonction [4].

On devine qu'il existe un parallélogramme qui a pour côtés T et T' (voir la figure 2) et qui a deux propriétés. D'une part, on peut recouvrir le plan en déplaçant ce parallélogramme dans la direction de T et T' autant de fois qu'on veut - c'est-à-dire en lui appliquant les translations introduites plus haut. Cela constitue ce qu'on appelle un « pavage » du plan.

D'autre part, on comprend bien qu'il suffit de savoir ce que vaut la fonction elliptique dans le parallélogramme pour savoir ce qu'elle vaut partout dans le plan puisqu'elle prend les mêmes valeurs pour les variables auxquelles on a ajouté T et T' autant de fois que l'on veut.

Nous pouvons sur cette base revenir aux fonctions automorphes. Exactement de la même manière que ce que nous venons de voir, ces fonctions sont définies aujourd'hui comme invariables par un groupe de transformations convenable, mais il s'agit cette fois-ci d'un groupe un peu plus compliqué que celui des translations du plan. C'est ici que Poincaré intervient dans notre histoire et nous suivrons sa démarche, pour mieux comprendre les raisons qui ont conduit à introduire ces fonctions, aussi bien que leur lien avec les fonctions elliptiques.

Le problème qui intéressait Poincaré était la résolution de certaines équations différentielles. C'est Fuchs qui le premier eut deux idées clés pour avancer dans le traitement de ce problème.

Jusqu'où alla Lazarus Fuchs ?



Lazarus Fuchs (1833-1902) a étudié à l'Université de Berlin avec Kummer et Weierstrass. Ses recherches concernaient principalement la théorie des équations différentielles pour laquelle on lui doit des contributions importantes.

Il avait un point de vue assez moderne sur l'analyse : quand la solution générale d'une équation différentielle (qui permet de déduire toutes les solutions de l'équation) était trop difficile à déterminer de manière explicite, il étudiait le comportement, dans le plan complexe, des solutions particulières de l'équation, au moins de celles qu'il pouvait aisément trouver. Il recherchait donc des méthodes qui lui permettaient de remonter à la solution générale de l'équation donnée.

Pendant les années 1880-1881, Fuchs a publié une série d'articles sur la théorie des équations différentielles. Dans un de ces articles, il considérait une classe

spéciale d'équations différentielles dont il voulait trouver la solution. Cette classe d'équation sera appelée *fuchsienne* par Poincaré.

Pour atteindre son but, Fuchs a généralisé la méthode de l'inversion qui avait déjà conduit Jacobi à introduire les fonctions elliptiques. Mais, alors que Jacobi avait considéré des intégrales (les intégrales elliptiques notamment), Fuchs manipulait lui des équations différentielles. Les difficultés techniques étaient très différentes, mais le procédé mathématique employé était le même : travailler avec des fonctions inverses, trouver leurs propriétés pour arriver finalement à la solution du problème.

Fuchs a eu l'intuition de considérer non pas les fonctions solutions de ces équations, mais le

rapport entre deux solutions particulières : c'est ce qui amena Poincaré à appeler les fonctions en question fonctions fuchsiennes [5].

Ensuite, pour étudier le rapport entre deux solutions, Fuchs introduisit une méthode qui consistait à en prendre la fonction inverse. On peut montrer que c'est beaucoup plus facile de travailler avec cette fonction inverse et ses propriétés qu'avec la solution elle-même. On comprend maintenant le parallèle avec les fonctions circulaires et elliptiques. Notons cependant une différence entre ces dernières et les fonctions fuchsiennes, puisque l'objectif n'est plus de calculer une intégrale, mais de résoudre des équations différentielles.

Fuchs pensait que, « sous certaines conditions », la fonction inverse du rapport est bien définie [6]. À partir de ce résultat, Fuchs espérait trouver des propriétés importantes concernant la solution générale du problème. Mais son article et ses démonstrations sont très obscures et il mélange souvent des problèmes mathématiques différents [7].

Quelques années plus tard, les fameuses « conditions » dont parlait Fuchs seront durement critiquées par Poincaré et deviendront le point de départ de son analyse. En particulier, Poincaré réussira à démontrer que certaines considérations de Fuchs sur la nature de la fonction inverse étaient fausses. Il partira de cette critique pour développer ses recherches et créer la théorie des fonctions fuchsiennes.

Remarquons encore une fois que l'intuition de Fuchs - de considérer la fonction inverse du rapport entre deux solutions particulières de l'équation - était excellente. Mais alors, si l'idée clé de Fuchs était correcte - et Poincaré la reprendra - que lui manqua-t-il pour arriver à la solution du problème ? Est-ce que l'échec de la procédure de Fuchs était dû seulement au défaut de rigueur dans sa démonstration ? Non, ce qui manquait à Fuchs était bien plus important... Deux choses essentielles étaient nécessaires pour arriver à la solution correcte de son problème :

1. suivre la démarche de Jacobi jusqu'à la fin (remarquons qu'il fallait pour cela des techniques mathématiques très puissantes que Fuchs ne détenait évidemment pas) ;
2. comprendre le lien profond entre la théorie des fonctions fuchsiennes et la géométrie non euclidienne (et pour bien comprendre ce lien il fallait passer par les groupes de transformations).

On verra dans la seconde partie de l'article que Poincaré va réussir à développer ces deux aspects fondamentaux qui l'amèneront à la solution complète du problème [8]. [9]

P.S. :

Pour un portrait de Poincaré voir *Henri Poincaré* de Philippe Nabonnand.

Notes

[▲1] Voir [ici](#) la 2ème partie.

[▲2] Une telle fonction est dite *méromorphe* sur D

[▲3] Voir aussi l'animation concernant les fonctions circulaires dans cet [article](#) qui montre toutes les propriétés des fonctions circulaires, en particulier leur périodicité, c'est-à-dire le fait que $\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \dots$ et $\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \dots$

[▲4] Sur les groupes voir **ici** ou encore **là**.

[▲5] Les fonctions automorphes sur un disque ou un demi-plan sont appelées, après Poincaré, *fonctions fuchsiennes* ; quand le domaine n'est plus un disque (ou un demi-plan) Poincaré parle de *fonctions kleinéennes*.

[▲6] Plus précisément, Fuchs a montré que le rapport est une fonction méromorphe. Une fois établi que le rapport est une fonction méromorphe, il pouvait démontrer que sa fonction inverse était une bonne fonction, c'est-à-dire une fonction à une seule valeur. On trouve une analyse détaillée de l'article de Fuchs dans le livre de J. Gray, *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*, Boston, Birkhauser, 2000 (2^{de} édition) ; mais attention il s'agit d'un livre difficile.

[▲7] Pour les détails techniques de l'article de Fuchs et des commentaires sur l'obscurité de ses démonstrations on peut voir l'introduction du livre : J. Gray et S. Walter, *H. Poincaré : Three Supplementary Essays on the Discovery of Fuchsian Functions*, Akademie Verlag/Albert Blanchard, Berlin/Paris, 1997.

[▲8] Je remercie Sébastien Gauthier pour la correction de mon français.

► **Crédits images**

Pour citer cet article : **Rossana Tazzioli**, **Fonctions fuchsiennes ou schwarziennes ? Mieux poincaréennes ! (I)**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2010. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Fonctions-fuchsiennes-ou.html>