HAL
open science

Autour des équations de Navier-Stokes

Isabelle Gallagher

To cite this version:

Isabelle Gallagher. Autour des équations de Navier-Stokes. Images des Mathématiques, 2010, http://images.math.cnrs.fr/Autour-des-equations-de-Navier.html. hal-00586785

HAL Id: hal-00586785

https://hal.science/hal-00586785v1

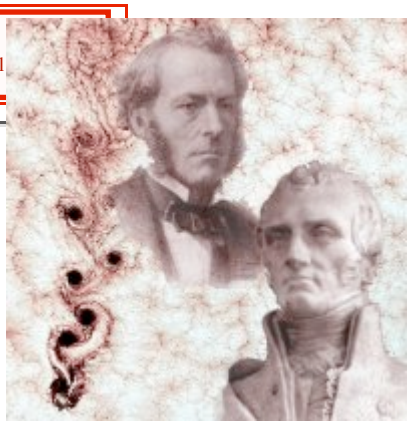
Submitted on 18 Apr 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Autour des équations de Navier-Stokes

To print higher-resolution math symbols, click the
Hi-Res Fonts for Printing button on the MathJax Math control panel.



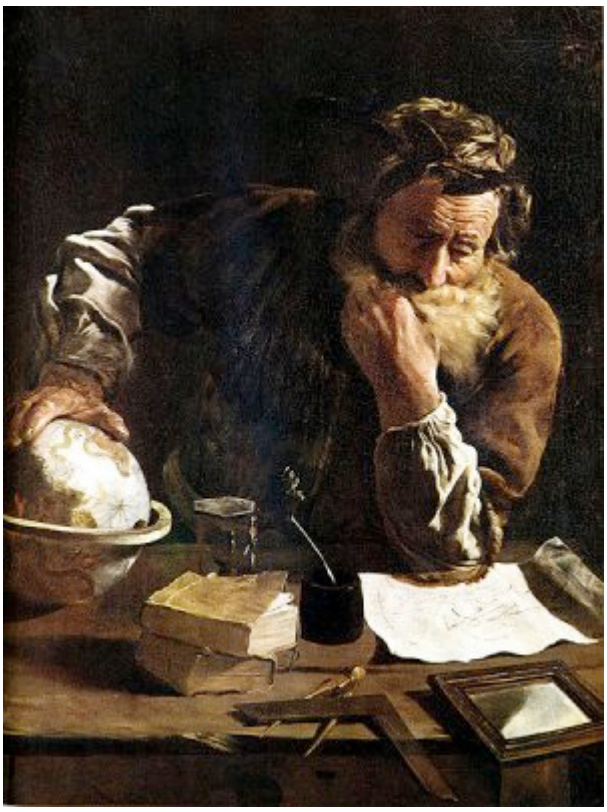
Le 28 janvier 2010, par **Isabelle Gallagher**

Professeur à l'Institut de Mathématiques de Jussieu Université Paris 7 (**page web**)

Dans cet article nous présentons des étapes de l'histoire de l'élaboration des équations de Navier-Stokes, puis les quelques avancées dans l'histoire (encore inachevée) de leur résolution.

La mécanique des fluides : des Grecs à Bernoulli (un bref aperçu historique)

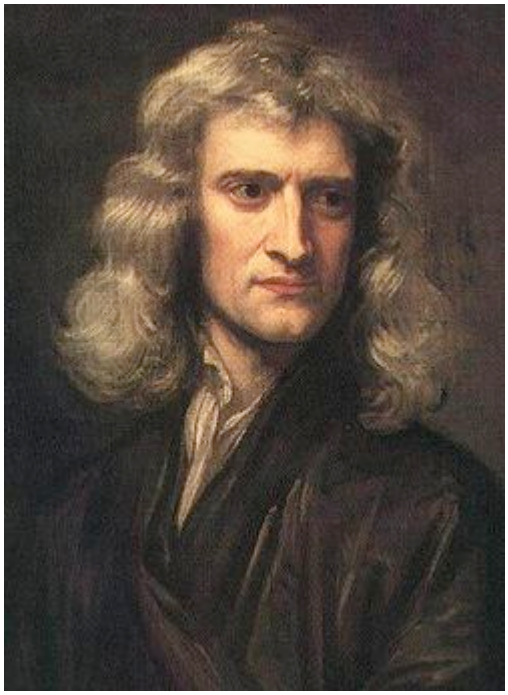
LA **mécanique des fluides** est l'étude du comportement de fluides (liquides et gaz). Leur étude remonte à l'Antiquité, avec **Archimède** (287-212 av. J.-C.), qui découvre notamment que tout corps plongé dans un liquide (ou un gaz) reçoit une poussée, qui s'exerce de bas en haut, et qui est égale au poids du volume de liquide déplacé.



On peut citer aussi **Héron d'Alexandrie** (10-70) qui a étudié la **pression** des gaz, et a construit en particulier des machines à vapeur, et des automates de théâtre.

Après une longue interruption, l'étude des fluides reprend un essor véritable au XVème siècle, avec **Leonardo da Vinci** (1452-1519). Il propose de nombreuses descriptions d'écoulements (jets, tourbillons, ondes de surface) et formule, après Héron d'Alexandrie, le principe de conservation de la masse.

C'est au XVIème siècle que commence la *mathématisation de la physique*, avec notamment l'introduction d'outils algébriques destinés à rendre compte de réalités physiques. Par exemple **Galilée** (1564-1642) s'intéresse ainsi à la **mécanique céleste**, et étudie notamment le mouvement de la Lune, des planètes. En 1687, Isaac **Newton** pose dans *Principia mathematica* les fondements de la **mécanique classique**, qui ne seront modifiés qu'en 1905 avec **Einstein** et la relativité restreinte (même si ces principes restent justifiés et utilisés encore aujourd'hui, dans le cadre de la mécanique classique). Newton est notamment à l'origine du principe essentiel suivant, appelé « loi fondamentale de la dynamique » : $F = ma$, autrement dit le bilan des forces F agissant sur un solide est égal au produit de sa masse m par son accélaration a.



En 1738 enfin, Daniel **Bernoulli** étudie les fluides non visqueux, fondant son analyse sur la **conservation de l'énergie**.

Parallèlement, une nouvelle théorie mathématique est en train de naître qui va entre autres révolutionner la compréhension mathématique du mouvement des corps, solides et liquides. Il s'agit du **calcul différentiel**, avec d'abord **Leibniz**, mais aussi **Clairaut**, Jean, Jacques et Nicolas **Bernoulli**, Newton, et **d'Alembert**. Suivons d'Alembert dans sa découverte des premières *équations de la mécanique des fluides*.

Les contributions de d'Alembert à l'hydrodynamique : dérivées partielles et champ des vitesses

En 1748, l'Académie des sciences de Berlin propose le **Prix de Mathématiques** pour l'année 1750 : il est demandé de « *déterminer la théorie de la résistance que souffrent les corps solides dans leur mouvement, en passant par un fluide, tant par rapport à la figure et aux divers degrés de vitesse des corps qu'à la densité et aux divers degrés de compression du fluide*. » En d'autres termes, il s'agit d'établir une *théorie* permettant d'interpréter, voire d'anticiper, le mouvement des fluides (ici en présence d'un obstacle solide).

Jean **d'Alembert**, mathématicien et philosophe français, soumet le 25 novembre 1749 un manuscrit de 137 pages qui propose une nouvelle vision de l'hydrodynamique. L'académie lui refuse le prix, qui est attribué à un protégé de Leonhard **Euler**, un certain Jacques Adami (dont le manuscrit a aujourd'hui disparu). On doit néanmoins à d'Alembert, dans ce manuscrit, d'avoir introduit dans l'étude de la dynamique des fluides les notions suivantes :

- dérivées partielles
- champ de vitesses
- pression interne d'un fluide

Détaillons un peu ces points.

Commençons par introduire ce que sont les **dérivées partielles**, objets mathématiques absolument fondamentaux encore aujourd'hui, aussi bien en Analyse Mathématique qu'en Géométrie par exemple. Supposons que l'on décrive la trajectoire d'une voiture sur une autoroute et que l'on veuille connaître la vitesse de cette voiture à un instant donné, t. Cette vitesse se calcule en *dérivant* le vecteur position lié à la voiture par rapport au temps : plus concrètement, on calcule la différence des positions de la voiture (en mètres) entre deux instants très proches (disons t et $t+h$, où h est très petit), et l'on divise le résultat obtenu par le petit intervalle de temps h (mesuré en secondes). Quand la longueur de cet intervalle devient infinitésimale (on dit qu'elle *tend vers zéro*) ce processus *tend* vers la valeur u de la vitesse de la

voiture à cet instant t (en mètres par seconde). En langage mathématique, la phrase précédente se traduit de la manière suivante (en écrivant $x(t)$ pour la position (en mètres) du véhicule à l'instant t, et $x(t+h)$ sa position à l'instant $t+h$, et de même en notant $u(t)$ la vitesse à l'instant t) :

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} \longrightarrow u(t) \quad \text{quand} \quad h \longrightarrow 0.$$

Pour alléger cette écriture encombrante on écrira plutôt (et il s'agit ici d'une *notation*, universellement utilisée)

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t).$$

Remarquons que dans cet exemple on peut avoir envie de remplacer la voiture par un avion, qui évolue dans un espace à trois dimensions plutôt que sur une autoroute (essentiellement unidimensionnelle). On s'aperçoit que la notion de vitesse doit être affinée pour prendre en compte toutes les directions possibles (en altitude, mais aussi en latitude ou longitude). La vitesse devient alors un *vecteur* et l'on calcule chacune des *composantes* de ce vecteur (c'est-à-dire la taille du vecteur dans chacune des trois directions) en procédant au calcul précédent dans chacune des directions. De même on calcule l'*accélération* de l'avion en dérivant le *vecteur vitesse* par rapport au temps.

Nous sommes en train ici de redécouvrir le **calcul infinitésimal**, dont **Leibniz** fut l'un des précurseurs, avec **Newton** ; on doit d'ailleurs à leur concurrence une « rupture mathématique » entre la Grande Bretagne et le reste de l'Europe qui dura fort longtemps... mais c'est une autre histoire.

Une **dérivée partielle** n'est rien d'autre que ce même processus quand la quantité que nous cherchons à dériver (on dit aussi la *fonction*) dépend de plusieurs paramètres, appelés aussi *variables*. Par exemple la vitesse d'un avion va dépendre bien sûr de l'instant auquel on la calcule, mais aussi certainement de la pression atmosphérique, du poids du chargement, de la quantité de carburant présente, et de nombreux autres facteurs. Calculer la dérivée de la fonction par rapport à l'un de ces facteurs, en laissant les autres inchangés, c'est précisément procéder à un calcul de *dérivée partielle*. Pour insister sur le fait que la fonction f dépend de plusieurs variables, disons que l'on considère une fonction $f(t,x)$ par exemple (dépendant du temps t et de la position x), on remplace la notation $\frac{df(t,x)}{dt}$ par $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ [1] . Il s'agit encore d'une simple notation, qui traduit en quelques lettres et symboles tout le processus évoqué plus haut.

Venons-en enfin à la notion de **champ de vecteurs**, en reprenant pour commencer l'exemple des voitures sur une autoroute. Supposons que l'on ne s'intéresse plus à la vitesse d'une certaine voiture pendant son trajet, mais que tel Bison Futé un jour de grand départ, nous souhaitons connaître la vitesse du *flot* de voitures sur l'autoroute à un instant donné (ou sur une plage horaire). Nous n'allons pas suivre individuellement chaque voiture, mais plutôt nous placer à un endroit donné du trajet et mesurer, à cet endroit et à chaque instant, la vitesse de la voiture en train de passer. Cela nous donnera un vecteur qui dépend de l'instant auquel on le calcule, mais aussi de la position où ce calcul est fait. Connaître ce vecteur en chaque point et à chaque instant, c'est avoir accès à l'ensemble de l'état de l'autoroute en question à chaque instant. Ce

vecteur est précisément un *champ de vecteurs*. Nous touchons ici du doigt la différence fondamentale entre le point de vue dit **lagrangien** (consistant à suivre en permanence la trajectoire de chaque voiture, ou plus généralement chaque particule d'un fluide) et le point de vue dit **eulérien** (qui consiste à calculer le champ de vitesse instantanée à chaque instant en chaque point).

Le troisième point auquel d'Alembert attache de l'importance dans son manuscrit est la notion de pression interne du fluide : néanmoins contrairement aux autres aspects de son manuscrit son analyse n'est pas complète, et c'est à **Euler** que l'on doit l'écriture finale des équations de la dynamique des fluides incompressibles.

Pour une analyse beaucoup plus approfondie de l'œuvre de **d'Alembert**, je renvoie le lecteur au billet de **Pierre Crépel**.

Les équations d'Euler et le paradoxe de d'Alembert

Nous avons déjà rencontré **Euler** dans le paragraphe précédent. Ce mathématicien suisse est certainement l'un des plus grands mathématiciens du XVIIIème siècle, voire de tous les temps. Il publie en 1755 un traité dans lequel apparaissent pour la première fois les équations aux dérivées partielles décrivant les **fluides parfaits incompressibles**. Il a incontestablement lu le manuscrit de d'Alembert, on l'a vu, et s'en est sans nul doute inspiré. Néanmoins son travail est complètement abouti, contrairement à celui de d'Alembert, et en outre il parvient à dégager la notion de *gradient de pression*, notion qui avait échappé à d'Alembert ; le terme *gradient* signifie simplement le vecteur formé par l'ensemble des dérivées partielles d'une fonction f, par rapport à toutes ses variables, il se note ∇f [2] . Même s'il n'est pas possible ici de rentrer dans les détails des différents termes constituant les **équations d'Euler**, nous pouvons néanmoins les écrire. Nous noterons u le champ de vitesse du fluide, qui dépend du temps t et de la position x (qui est lui même un vecteur, constitué comme dans le paragraphe précédent de la mesure de la longitude, la latitude et l'altitude). Nous notons alors ∇ pour le vecteur des dérivées partielles spatiales seulement (il y a donc trois composantes à ce vecteur). Si p est la pression du fluide, voilà les équations d'Euler :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \quad \nabla \cdot u = 0.$$

Dans ces équations, il manque la définition de la notation $u \cdot \nabla u$. Nous dirons simplement qu'il s'agit d'une opération dont l'esprit s'apparente à celui du produit scalaire des vecteurs [3] . Malgré les apparences peut-être, la première équation ci-dessus n'est rien d'autre que la relation fondamentale de la dynamique de Newton

$$ma = F$$

vue plus haut, écrite du point de vue eulérien. Nous avons que supposé que la « masse » du fluide (qui serait plutôt ici sa densité) est constante, égale à un, l'accélération est précisément l'ensemble des termes du côté gauche de l'égalité, et $-\nabla p$ correspond aux forces de pression. Pour simplifier, nous considérons qu'il n'y a pas d'autre force agissant sur le fluide. La seconde équation apparaissant au dessus, $\nabla \cdot u = 0$ [4], est la traduction au niveau du champ de vitesses de l'incompressibilité du fluide ; nous n'expliquerons pas cette traduction ici (mais disons qu'elle est associée à la conservation de la masse).

Dès 1752 cependant, d'Alembert s'aperçoit qu'un corps plongé dans un liquide satisfaisant aux principes décrits ici se meut sans se voir opposer aucune résistance, ce qui est manifestement contraire à l'intuition et à l'expérience physique. C'est ce qu'on appelle le « paradoxe de d'Alembert », qu'il formule ainsi (je traduis librement) : « Il me semble que la théorie, développée avec toute la rigueur possible, donne, au moins dans plusieurs cas, une résistance nulle, paradoxe singulier que je laisse les Géomètres futurs résoudre. »

Les équations de Navier-Stokes

Pour comprendre pourquoi un solide plongé dans un liquide va subir en général une force de résistance, tendant à le freiner, il faut en fait prendre en compte des phénomènes de **frottement** au niveau moléculaire dans le fluide : lors de son évolution, un fluide va en effet avoir tendance à **dissiper de l'énergie**, sous forme de chaleur, et ce simplement par le frottement d'une couche de fluide sur l'autre. Inclure un tel phénomène dans les équations d'Euler semble difficile puisque les équations d'Euler formulent l'écoulement de la vitesse *macroscopique* du fluide, alors que cette dissipation d'énergie a lieu à un niveau *microscopique*.

On doit à **Navier** (mathématicien et ingénieur français) l'idée, en 1820, d'introduire un terme supplémentaire à l'équation d'Euler, censé représenter cette perte d'énergie dans le fluide. En

simplifiant à outrance sa démarche, on peut considérer qu'il a cherché à incorporer aux équations d'Euler précisément une équation dite *de la chaleur*. Cette dernière équation repose sur la **loi de Fourier**, établie mathématiquement par **Biot** en 1804 puis expérimentalement par **Fourier** en 1822 et s'écrit ainsi : si T est la température d'un solide, son évolution au cours du temps obéit à la loi

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nu \Delta T = 0,$$

où $\Delta T = \nabla \cdot \nabla T$ (attention, les triangles sont différents !) et où ν est un coefficient positif censé décrire le taux de dissipation de la chaleur.

Ainsi Navier, suivi par **Stokes** (mathématicien irlandais) en 1845 propose-t-il le modèle suivant pour décrire l'évolution d'un fluide **visqueux** (ce terme rendant compte précisément de cette dissipation d'énergie sous forme de chaleur) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = -\nabla p, \quad \nabla \cdot u = 0.$$

Que signifie résoudre ces équations ?

Le premier réflexe que l'on peut avoir à la vue de cette équation est de chercher à obtenir des **solutions analytiques** explicites. Malheureusement hormis quelques configurations particulières extrêmement simplifiées, les chercheurs de l'époque de Navier et de Stokes se sont rapidement convaincus que cette démarche était vouée à l'échec.

L'étape suivante a alors consisté à chercher à constuire des **solutions approchées**, par exemple sous forme de série de fonctions trigonométriques ou polynomiales, à la manière de **Fourier** ou de **Cauchy**. Cela a conduit à développer une **théorie de résolution d'équations aux dérivées partielles**. Pour développer une telle théorie, il faut tout d'abord s'entendre sur ce que l'on entend par la *résolution de l'équation*, dès lors que l'on abandonne l'idée d'en trouver des

solutions explicites. En suivant **Jacques Hadamard** (1865-1963) nous dirons qu'une équation aux dérivées partielles est **bien posée** si les trois conditions suivantes sont satisfaites, **(existence, unicité, stabilité)** :

- l'état du fluide étant supposé connu à un instant donné (initialisons ce temps à $t = 0$), il *existe* une solution à l'équation à des instants futurs, coïncidant avec cet état initial à l'instant $t = 0$.
- il n'existe qu'*une seule* solution à l'équation coïncidant avec cet état initial à l'instant $t = 0$.
- cette solution est *stable sous perturbations*, ce qui signifie que si l'on modifie un tout petit peu l'état du fluide initial, les états ultérieurs ne seront que peu modifiés à leur tour, du moins pendant un certain temps.

D'un point de vue physique, ces trois principes correspondent au fait que

- il est effectivement possible de réaliser une expérience correspondant à l'évolution décrite par les équations
- si l'on réalise l'expérience deux fois, on trouvera deux fois le même résultat
- si l'on fait de petites erreurs de mesure, cela ne modifiera pas trop violemment la solution (pendant un temps fixé).

Ce dernier point est particulièrement important si l'on songe par exemple à des applications numériques : il est impossible d'implémenter l'équation *exacte* dans un ordinateur, on est obligé de la remplacer par une approximation (un ordinateur ne reconnaît que des quantités *discrètes*, et pas continues comme nos variables x et t qu'il faut donc discrétiser au préalable par exemple) et il est bon de vérifier tout d'abord que la solution ne sera pas trop sensible à ce type de procédé.

Sait-on résoudre ces équations ?

La réponse est malheureusement en général non... Si le fluide évolue dans un plan (ce qui n'est certes pas très physique, mais aide beaucoup mathématiquement) alors on sait depuis les travaux fondamentaux de **Jean Leray** en 1934 que les équations sont bien posées au sens précédent. En trois dimensions d'espace en revanche la situation est beaucoup moins claire, et pour résumer l'état de nos connaissances sur la question (qui remontent presque toutes d'ailleurs aux travaux de Leray, du moins pour les idées fondamentales sous-jacentes) on peut dire que l'on ne sait résoudre ces équations, au sens du paragraphe précédent, que si l'état du fluide à l'instant initial est suffisamment proche du repos.

Dans le cas contraire (une mer un peu agitée par exemple) on n'est pas capable de décider si la solution de l'équation correspondant à cet état initial va « vivre » éternellement ou **exploser en temps fini**.

Cette dernière notion signifie qu'à un certain instant ultérieur, une des composantes de la vitesse va devenir plus grande que n'importe quel nombre donné à l'avance (on parle de **singularité** du champ de vitesse). Cela peut paraître physiquement peu concevable... la signification physique de ce fait est simplement qu'à partir d'un certain instant, la vitesse du fluide devient très grande et en particulier dépasse la vitesse du son. Mais alors l'hypothèse d'incompressibilité du fluide (que nous avons traduite par la relation un peu mystérieuse $\nabla \cdot u = 0$ dans les équations d'Euler et de Navier-Stokes ci-dessus) ne peut plus être satisfaite, et il faut simplement changer de modèle à cet instant. D'un point de vue physique, de telles solutions « explosives » sont donc une indication que le modèle mathématique choisi cesse d'être valable.

Pour conclure cette introduction aux équations de Navier-Stokes, nous pouvons indiquer que la **résolution des équations de Navier-Stokes** fait partie de l'un des sept **Problèmes du Millénaire** proposés par la Fondation Clay, et dont l'un a été résolu récemment (il s'agit de la conjecture de Poincaré). Pour gagner le million de dollars à la clef, il s'agit soit de démontrer que les équations de Navier-Stokes sont bien posées au sens rappelé au-dessus, pour toute donnée initiale « suffisamment régulière » (mais arbitrairement loin du repos, en un sens que je ne précise pas), soit de démontrer qu'il existe un état initial du fluide tel qu'à un certain instant ultérieur, il « explose en temps fini » comme expliqué ci-dessus.

P.S. :

*Je remercie chaleureusement **Michèle Audin** de m'avoir incitée à écrire ce texte, ainsi qu'**Etienne Ghys** pour ses nombreux conseils lors de son élaboration.*

***Note de la rédaction** : à voir également sur le site, le portrait d'**Emmanuel Ferrand** sur **Isabelle Gallagher**.*

Notes

[▲1] Pour distinguer les deux, elles se prononcent respectivement « d f sur d t » et « d *rond* f sur d *rond* t ».

[▲2] Ce triangle inversé se lit « Nabla ». Voici ce que dit **Wikipedia** sur son histoire : « La forme de Nabla vient de la lettre grecque delta majuscule Δ renversée, à cause d'une utilisation comparable, la lettre grecque à l'endroit étant déjà utilisée pour désigner un opérateur (le laplacien) en calcul différentiel. Le nabla a été introduit par Peter Guthrie Tait en 1867. D'abord surnommé avec malice « atled » (delta à l'envers) par James Maxwell, le nom Nabla lui fut donné par Tait sur l'avis de William Robertson Smith, en 1870, par analogie de forme avec une harpe grecque qui dans l'antiquité portait ce nom. »

[▲3] Rappelons que le *produit scalaire* de deux vecteurs a et b, noté $a \cdot b$, est défini par :

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

où a_1, a_2 et a_3 sont les composantes de a dans les trois directions rappelées ci-dessus.

[▲4] Prononcée « divergence de u égale à zéro ».

Crédits images

Pour citer cet article : **Isabelle Gallagher**, **Autour des équations de Navier-Stokes**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2010. En ligne, URL : `http://images.math.cnrs.fr/Autour-des-equations-de-Navier.html`