



HAL
open science

Triangulations : de la terre au noeud de trèfle

Julien Marché

► **To cite this version:**

Julien Marché. Triangulations : de la terre au noeud de trèfle. Images des Mathématiques, 2009, <http://images.math.cnrs.fr/Triangulations-de-la-terre-au.html>. hal-00585524

HAL Id: hal-00585524

<https://hal.science/hal-00585524v1>

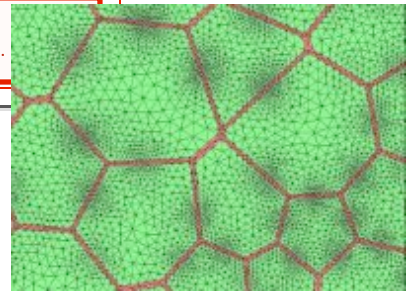
Submitted on 13 Apr 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Triangulations : de la terre au noeud de trèfle.

Le 25 février 2009, par **Julien Marché**



AUX alentours de l'année 1730 un vif débat agite la communauté scientifique : la Terre est-elle aplatie ou allongée aux pôles ? Des observations astronomiques de John Flamsteed en Angleterre et Jean-Dominique Cassini (dit Cassini I) en France en 1666 avaient montré que Jupiter et Saturne étaient fortement aplatis tandis que l'astronome et navigateur Jean Richer avait remarqué que son pendule battait moins vite à Cayenne qu'à Paris [1]. Sans compter les explications théoriques de Newton et Huygens, cela ne pouvait s'expliquer que par la forme aplatie de la terre : d'où est-donc née la polémique dite « querelle des têtes plates et des têtes allongées » ?

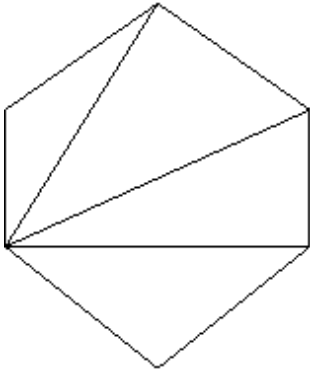


D'un livre de Jacques Cassini (dit Cassini II) paru en 1723 : le « traité de la grandeur et de la figure de la terre ». L'auteur y résumait les travaux de la vaste entreprise de la triangulation de la France commencée en 1669 (voir ci-contre [2]). En comparant ses mesures à celles qu'on trouverait si on supposait que la terre était une sphère parfaite, il en a déduit que cette dernière était allongée aux pôles. En fait, il s'était trompé dans ses calculs et fut contredit en 1737. Il abandonna ses activités au profit de son fils César-François dont on peut facilement imaginer le surnom !

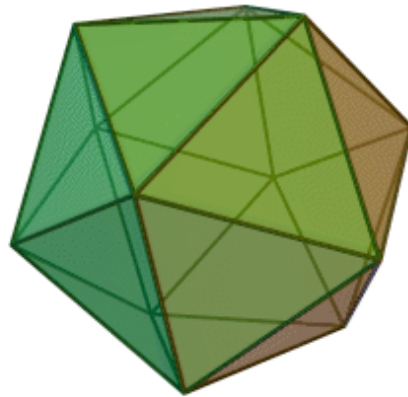
Cette histoire [3], quoiqu'assez typique du fonctionnement de la science, n'est qu'un prétexte pour introduire la question suivante : qu'est-ce que trianguler et pourquoi le faire ? Trianguler, c'est simplement diviser l'espace en triangles (plus généralement, en polyèdres, j'y reviendrai...). Cette définition suffisamment vague permet de considérer des exemples assez différents, et même tridimensionnels comme je le ferai à la fin de l'article. En ce qui concerne la terre, il s'agit simplement de choisir quelques points précis sur la surface (les sommets) et de relier ces points en ligne droite (par des arêtes) de telle sorte que les zones ainsi découpées soient des triangles. L'intérêt pratique de cette opération est le suivant : il est beaucoup plus facile de mesurer l'angle entre deux lignes droites - en se plaçant à leur intersection avec une sorte de « rapporteur » - que de mesurer la longueur d'un segment, ce qu'on faisait en comptant les pas dans l'antiquité et le nombre de tours de roues de calèche au XVIème siècle... En mesurant la base d'un triangle et les angles partant de la base, on peut déterminer la longueur des deux autres côtés. En procédant de proche en proche, on détermine toutes les longueurs à partir d'une seule. Dur travail ! Moqueur, Voltaire écrivait à propos des scientifiques partis en Laponie et au Pérou pour confirmer l'aplatissement de la terre : « vous avez confirmé dans ces lieux pleins d'ennui, ce que Newton connut sans sortir de chez lui ».

Il n'empêche, mieux vaut une vérification laborieuse que pas de vérification du tout ! Seul le recours aux triangulations a validé définitivement l'aplatissement de la terre et éteint la polémique. Plus prosaïquement, elles ont permis d'établir la première carte de France précise (la

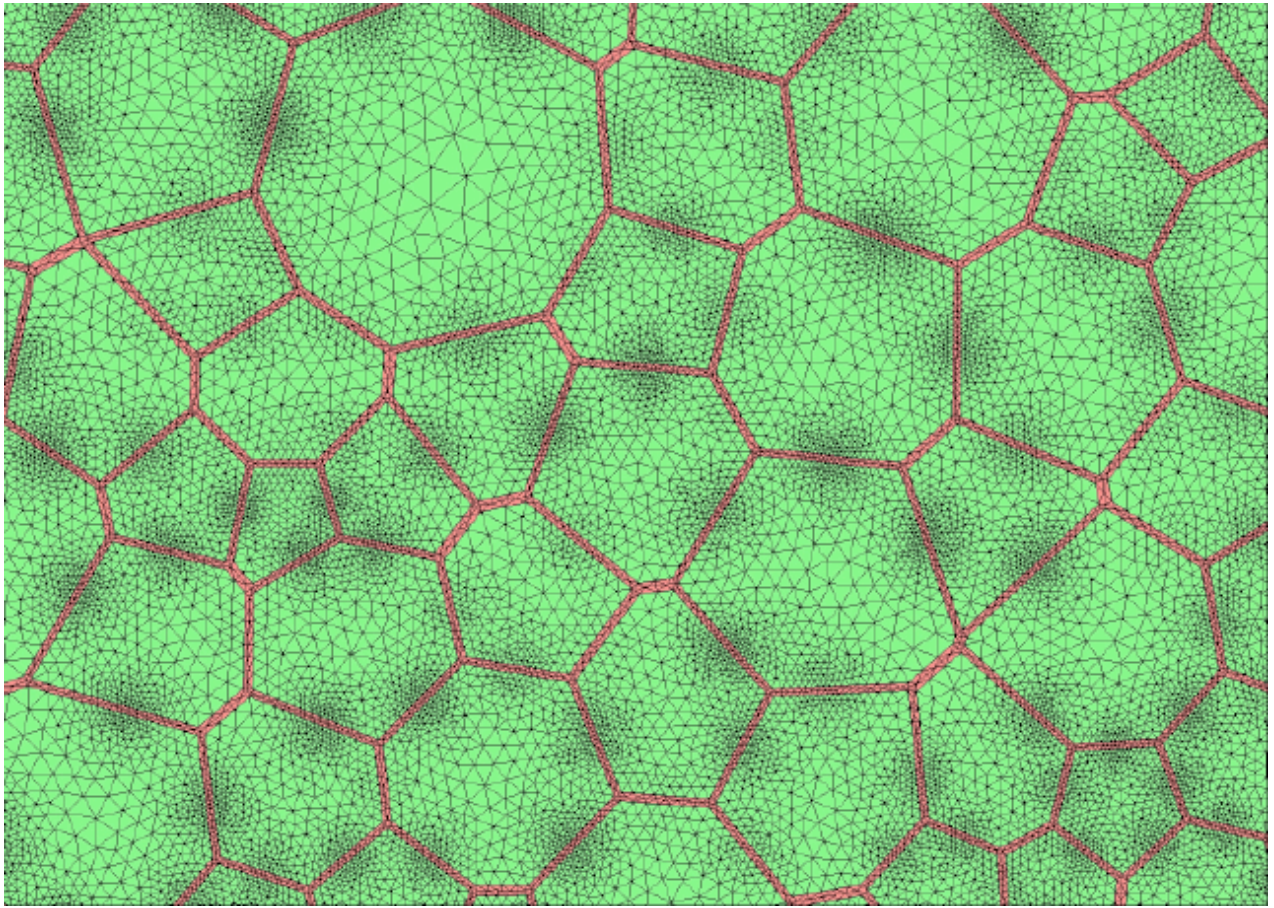
carte de Cassini) ce qui présente un intérêt administratif et militaire (et historique !) incontestable.



Allons plus loin et jouons un peu avec la notion de triangulation : on peut penser aux triangulations comme des triangles dessinés sur une feuille de papier, et la figure de gauche serait l'image simplifiée de la France triangulée par un Palois... Sortant du plan, on remarque que certains polyèdres comme le tétraèdre et l'icosaèdre ci-dessous sont des figures triangulées. Je précise qu'un polyèdre est une forme géométrique à 3 dimensions délimitée par des surfaces planes et qu'un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire. Enfin l'approximation de toutes les formes par des surfaces triangulées est à la base de l'ingénierie (pour le calcul des efforts d'une structure par exemple) ou de l'industrie du jeu vidéo et de l'animation. [4]



Deux généralisations sont possibles. La première est particulièrement naturelle : pourquoi se limiter aux triangles ? Après tout, les quadrilatères, les pentagones... existent aussi. Par abus de langage, on appellera aussi triangulations de telles décompositions. En particulier, le squelette rouge de la figure ci-dessous fait apparaître une triangulation où l'on voit des quadrilatères, des pentagones et des hexagones tandis que le squelette noir ne contient que des triangles. [5]



Dans la figure suivante, de nouveaux exemples sont représentés... On comprend que la liste n'est pas exhaustive. [6]



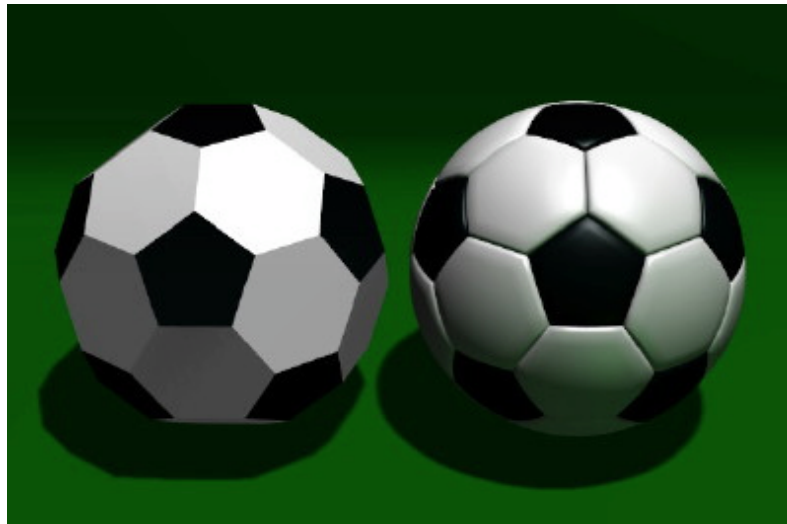
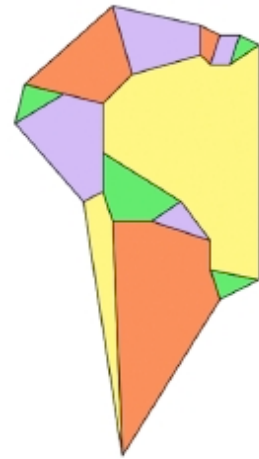
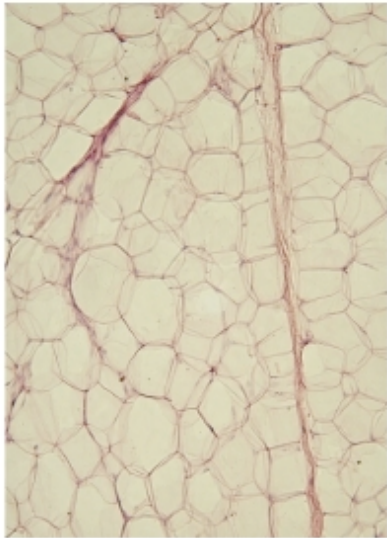
La deuxième généralisation est moins évidente car elle est plus l'expression d'un point de vue, le mien - ou plutôt celui d'un topologue [7]. Vous avez peut-être remarqué que la triangulation de la France de la première figure n'en est une que sur la figure... En effet, la surface de la terre n'étant pas tout à fait plane, trois points proches ne délimitent pas un triangle mais plutôt un triangle sphérique ou plus précisément encore un triangle « souple » qui reste à la surface de la terre. Dans l'animation ci-dessous, on peut observer une triangulation de la sphère par de tels triangles sphériques [8]



Triangulation de la Terre

Aussi rigides que leurs figures, les mathématiciens ne se satisfont pas de cette approximation et ont développé à la fin du 19^{ème} siècle et au début du 20^{ème} des concepts qui donnent un sens précis à la notion de triangle (ou de polygone) souple ou déformé : il s'agit de la notion d'homéomorphisme, pressentie par Möbius en 1858 sous le nom de corrélation élémentaire - c'est un peu technique... passons !

Une triangulation dite topologique devient une décomposition de l'espace en triangles (ou polygones) déformés. La nouvelle liste d'exemples doit vous convaincre que finalement, le concept de triangulation topologique est d'une part très diversement représenté et d'autre part, de nature plutôt « situationnelle » que géométrique. En effet, la position des sommets, la longueur et l'angle des segments n'importent pas puisque la figure est déformée. Seules importent la nature des polygones et la façon dont ils sont accolés les uns aux autres. Pour cette raison, la topologie s'est appelée « analysis situs » jusqu'aux années 1920. La figure de gauche présente un tissu adipeux humain tandis que celle de droite présente deux triangulations topologiquement équivalentes, tout comme le ballon de foot et sa version polyédrale dans la figure suivante [9].



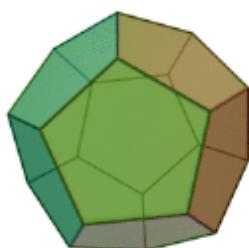
Du coup, de nombreuses questions apparaissent comme par exemple : peut-on colorier les régions de toute triangulation avec trois couleurs de telle manière que deux cellules voisines soient de couleurs différentes ? Pour une réponse, voir [ici](#). Autre type de question : peut-on trianguler un carré avec 5 triangles (sans subdiviser les côtés) ou la sphère avec 12 pentagones ? A la première question on peut répondre rapidement : supposons qu'une feuille carrée soit triangulée par 5 triangles et découpons cette figure imaginaire avec des ciseaux imaginaires. Quel est le nombre total de côtés ? Eh bien, il y en a 15 puisqu'il y a 5 triangles, mais parmi ces côtés, 4 forment les bords du carré initial. Or chacun des 9 côtés restants était adjacent avant la découpe à un autre côté restant, ces côtés sont donc en nombre pair, ce qui est impossible.

Cet argument élémentaire et astucieux ne contredit pas l'existence d'une décomposition de la sphère en 12 pentagones (soit pour les mêmes raisons $12 \times 5/2 = 30$ arêtes). Existe-t-elle ? Cette question nous amène au théorème fondateur de la topologie, le théorème d'Euler (1752) : ce dernier démontre que pour tout polyèdre comportant S sommets, A arêtes et F faces, la quantité $S-A+F$ est constamment égale à 2. Vérifions là pour le cube : ce dernier comporte 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces. On calcule : $8-12+6=2$! Vous pouvez vérifier la même relation pour les 3

polyèdres représentés dans cet article.



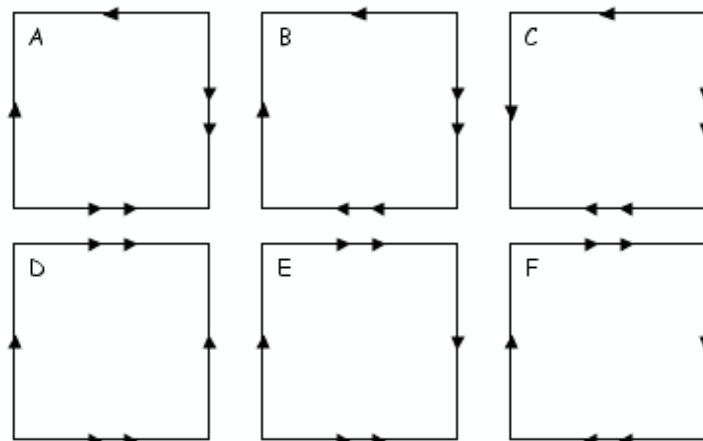
Après 100 ans de somnolence, ce théorème permit la naissance de la topologie en inspirant de nombreux travaux. Walter von Dyck généralisa ce résultat aux triangulations topologiques (à la suite de travaux fondateurs de Listing, Riemann et Möbius pour ne citer qu'eux) : étant donné une surface munie d'une triangulation topologique, la quantité $S-A+F$ ne dépend que de la surface (où S est comme précédemment le nombre de sommets, A le nombre de segments et F le nombre de polygones). Cette quantité qui ne varie pas quand on déforme la surface s'appelle la caractéristique d'Euler et impose des restrictions sur les triangulations d'un objet donné. Celle de la sphère vaut 2 comme le montre le théorème d'Euler tandis que celle du carré vaut 1 puisque le carré est une triangulation de lui-même avec 4 sommets, 4 arêtes et une face...



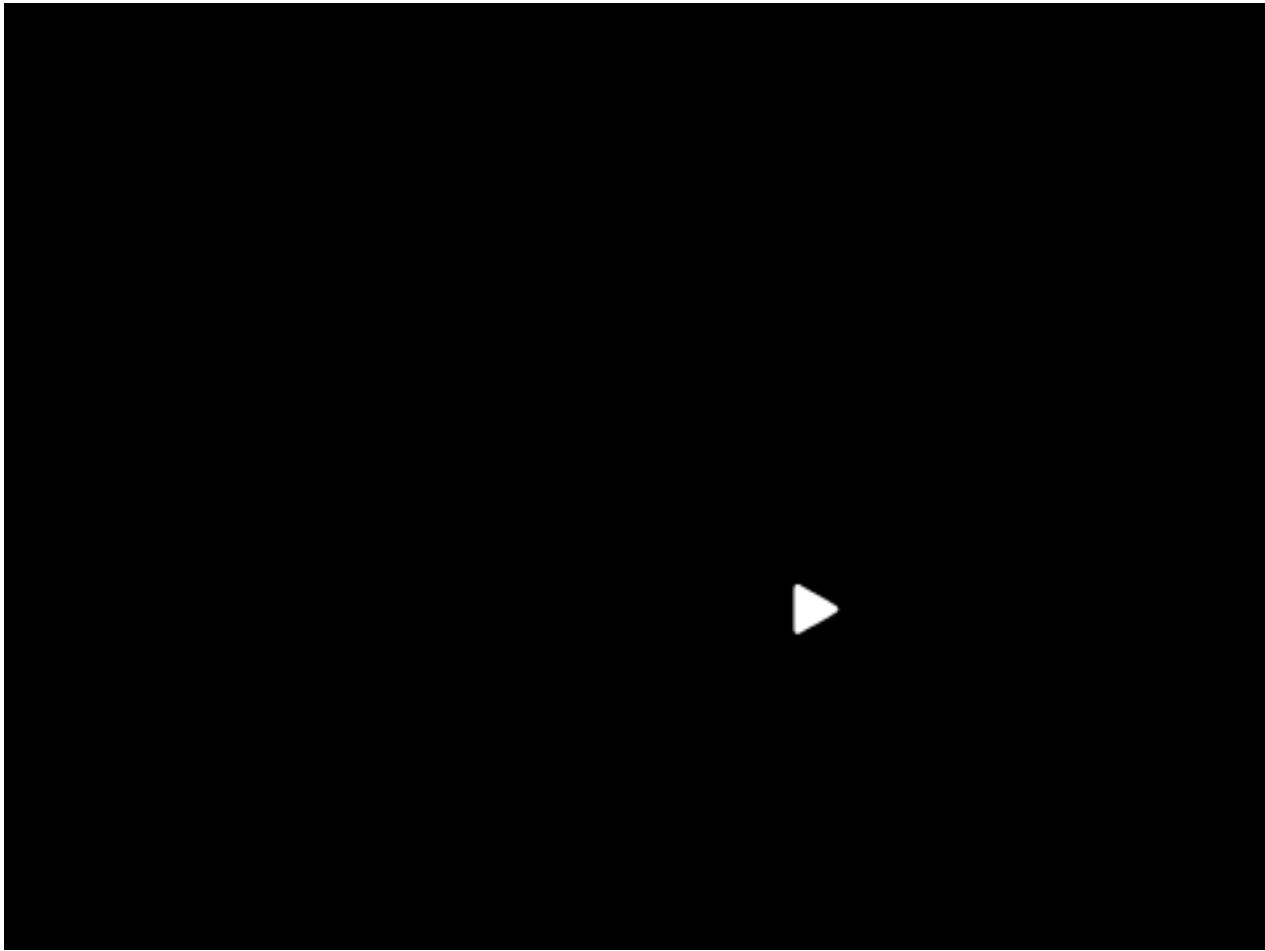
Ainsi, une décomposition de la sphère en 12 pentagones doit nécessairement avoir $S=2+A-F=20$ sommets. Une telle décomposition existe et était connue des Pythagoriciens et de Platon qui l'affectionnait particulièrement : il s'agit du dodécaèdre, mais une décomposition avec 8 sommets n'existe pas et la caractéristique d'Euler est le concept qui nous l'assure. [10]

Il doit donc exister une surface (quitte à ce que cela ne ressemble pas aux surfaces qu'on a considérées jusqu'à présent) qui se décompose en 12 pentagones et qui a 8 sommets. Sa caractéristique d'Euler sera même $8-30+12=-10$. Elle n'est pas tellement compliquée à dessiner (on peut l'imaginer par exemple comme la surface d'une tasse avec 6 anses) mais je vais poser une question plus simple : quelles sont les surfaces qui peuvent être subdivisées en 2 triangles ? Pour répondre à cette question, imaginons une telle surface triangulée en papier. Après l'avoir découpée le long des arêtes, nous obtenons deux triangles comme prévu. Pour reconstruire la surface, il suffit donc de recoller les côtés des triangles avec du scotch. En fait, il y a trois collages à faire et le résultat dépend des choix que l'on fait pour coller. Comme un triangle a un nombre impair de côtés, il faudra bien coller les

deux triangles ensemble par un de leurs côtés (je rappelle qu'on peut coller deux côtés d'un même triangle). La figure que l'on obtient après ce premier collage est toujours la même : il s'agit d'un carré.



Les surfaces qu'on obtient sont donc précisément celles que l'on construit en recollant les côtés d'un carré. On obtient les 6 cas de la figure ci-dessus où les collages sont codés de la façon suivante : les côtés avec une flèche simple sont recollés entre elles dans le sens indiqué par la flèche de même que les côtés avec une flèche double. A-t-on rencontré ces surfaces auparavant ? La surface A, oui. C'est une sphère subdivisée en deux hémisphères avec les 3 sommets placés à l'équateur. La surface D, on ne l'a pas encore rencontrée mais elle reste facile à appréhender, il s'agit d'un tore (une chambre à air) subdivisé en deux triangles avec 1 seul sommet. Vous pouvez visualiser ces surfaces et le collage du carré initial dans les deux animations ci-dessous.



Triangulation de la sphère



Triangulation du tore

Les autres sont plus déroutantes, il s'agit de surfaces non orientables : le plan projectif (B,F) et la bouteille de Klein (C,E). Pour visualiser cette dernière et voir pourquoi la surface C est la même que la surface E, lisez le billet **Kit Klein** de ce site ! Pour essayer de visualiser la première, contemplez la **surface de Boy**. Pour cet article, peu importe le sens de « non orientable » ou « bouteille de Klein », ces objets sont une des grandes découvertes des topologues de la fin du 19ème siècle : ils sont très bien compris depuis au sein d'une théorie que l'on appelle la classification des surfaces. Peu importe aussi qu'on ne puisse les contempler aussi facilement que les tores ou les sphères : ils existent dans la nature sous des formes moins accessibles (le plan projectif s'identifie à l'ensemble des droites de l'espace passant par un point donné, par exemple) mais au moins aussi passionnantes.

La réponse du mathématicien à la question initiale « à quoi sert de trianguler » est donc « à construire et classer toutes les surfaces possibles ». Au début motivée par l'approche de Riemann des fonctions analytiques, cette question est apparue comme intéressante pour elle-même et elle motive/a motivé/motivera beaucoup de recherches ! Pour sortir des mathématiques du 19ème siècle tout en prolongeant les considérations précédentes, je vous propose un petit tour en dimension supérieure. Les triangulations existent en dimension quelconque mais notre espoir de les visualiser s'arrête à la dimension 3. A la notion intuitive de surface que j'ai utilisée jusqu'à présent correspond la notion de variété (de dimension 3, je ne le dirai plus par la suite). Il s'agit d'un espace (topologique) qui ressemble à l'espace ambiant de dimension 3 pourvu qu'on le regarde d'assez près, et ce quel que soit l'endroit où on le regarde. Cela généralise bien la notion

de surface : pour un acarien suffisamment myope, la surface d'une pomme de terre ou d'une chambre à air doit paraître parfaitement plane.

La variété qui joue le rôle de la sphère en dimension 3 s'appelle sans surprise la sphère de dimension 3 (notée S^3). Avec quelques équations, c'est un jeu d'enfant de la définir mais cela n'aide pas à se la représenter car il faudrait pour cela vivre dans un espace à 4 dimensions. Cela dit, on peut penser à S^3 comme à l'espace tridimensionnel habituel (noté R^3) auquel on ajoute un point appelé infini. Les points extrêmement loin dans R^3 sont en fait extrêmement proches de l'infini. Ceci n'a rien d'ésotérique, la même chose se passe quand on représente la terre avec un planisphère : les points très hauts dans le planisphère semblent très éloignés les uns des autres alors qu'ils sont très proches d'un même point non représenté, le pôle nord ! Encore autre chose, le point à l'infini n'a aucun statut particulier, c'est notre mauvaise vue qui nous force à le considérer : de même sur une bille, il n'y a pas de pôle particulier, tous les points se valent. Le procédé dont je parle est expliqué en dimension 2 dans l'article [Géométriser l'espace : de Gauss à Perelman](#) de ce site.



Qu'est-ce qu'une triangulation dans le contexte des variétés de dimension 3 ? Simplement une décomposition en polyèdres. Le plus simple de ces polyèdres est le tétraèdre qui est représenté à gauche. Pour s'entraîner, regardons la triangulation suivante de la sphère en 16 tétraèdres. Pour s'y retrouver, il faut s'habituer au fait que l'extérieur d'une « boule » centrée dans R^3 est une « boule » centrée en l'infini, de la même manière que l'extérieur d'un « disque » sur une sphère est un « disque » dont le centre est l'antipode du premier. Dans l'animation, on voit apparaître 8 tétraèdres déformés qui remplissent progressivement une boule. Puis, les 8 octants restants se remplissent

successivement. Avec un peu d'imagination, on se convainc que chacun de ces octants est un tétraèdre dans S^3 dont un sommet est à l'infini !



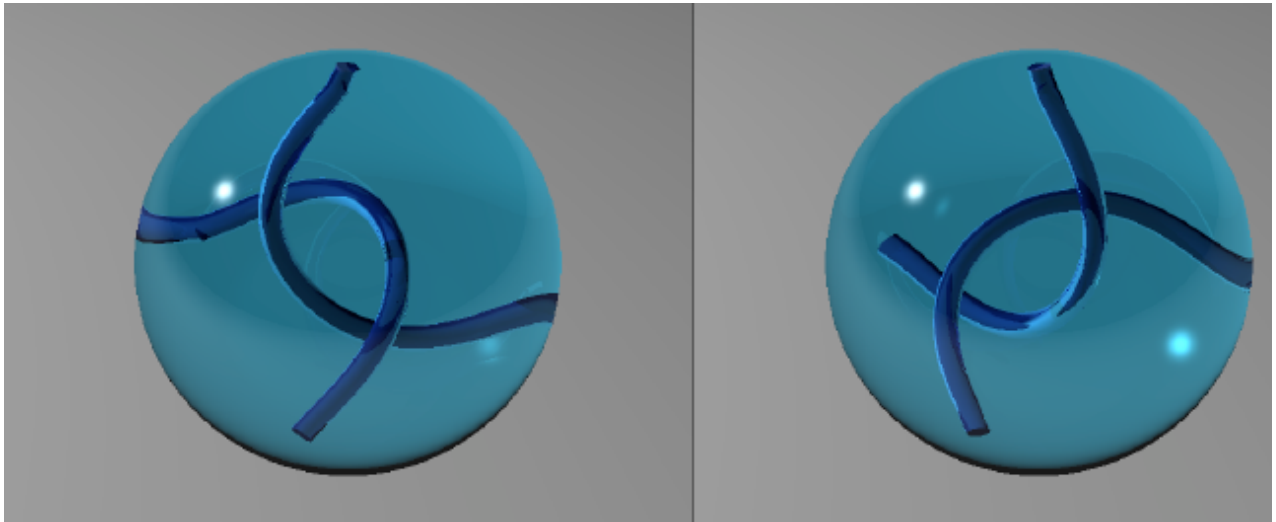
Décomposition de la sphère de dimension 3

À partir de là, je vais parler d'un exemple de triangulation qui a fait l'objet de développements mathématiques récents (à partir des années 1970). Il s'agit de construire une triangulation de l'extérieur du nœud de trèfle. Cette triangulation est plus difficile à comprendre que celles qui précèdent d'autant plus que je vais donner moins de détails. Je vous conseille de regarder plusieurs fois (peut être dès maintenant) les trois dernières animations...



Nous allons donc considérer un nœud dans la sphère de dimension 3 : c'est-à-dire une courbe fermée mais nouée. Ce nœud s'appelle nœud de trèfle car sa représentation usuelle (à gauche) fait apparaître une forme à 3 lobes qui ressemble à la feuille de trèfle. Il s'agit d'un symbole à la fois païen et chrétien représentant toute forme de trinité (les bretons auront reconnu le triskell). En tout cas, la fascination mystique qu'il exerce ne fait pas de doute... Si vous doutez qu'il existe d'autres façons de nouer une courbe fermée, jetez un coup d'oeil à cet **atlas des nœuds** !

Considérons 4 points placés à égale distance sur une sphère (comme les sommets d'un tétraèdre régulier inscrit dans cette sphère). Groupons ces points deux par deux et joignons les par des segments de droite, puis déformons ces segments vers le centre de la sphère jusqu'à ce qu'ils se croisent, nous obtenons deux arcs enchevêtrés comme sur la figure ci-dessous.



Maintenant en se rappelant que S^3 se décompose en deux boules (l'une centrée, et l'autre autour de l'infini) et en plaçant les deux figures ci-dessus dans chacune des boules, on obtient une courbe fermée. Il s'agit du nœud de trèfle ! On peut le visualiser dans l'animation ci-dessous qui comporte deux parties : la première consiste à placer chacune des boules de la figure ci-dessus suffisamment éloignées dans S^3 (mais pas à l'infini) puis à faire grossir ces boules jusqu'à ce que les sphères qui les contiennent se confondent. À ce moment, les deux enchevêtrements se raccordent pour former une courbe nouée : le nœud de trèfle. Le reste de l'animation consiste à faire rouler la sphère de dimension 3 comme une bille sur le plancher, le point à l'infini étant le point de contact avec le sol.



Construction du nœud de trèfle

La triangulation de l'extérieur du nœud de trèfle qu'on se propose de construire est un peu particulière : elle n'a pas de sommets ! Précisément, nous allons décomposer l'extérieur du nœud de trèfle dans S^3 en tétraèdres privés de leurs sommets. A priori, ce n'est pas bien méchant : dans les triangulations précédentes de la sphère et du tore, on peut très bien considérer que la surface que l'on a triangulée est la sphère (ou le tore) privée des sommets. Les morceaux de la décomposition seront donc des triangles privés de leurs sommets. Le problème dans l'exemple qui suit est qu'on n'ôte pas de points à S^3 mais toute une courbe alors qu'on n'ôte aux tétraèdres que leurs sommets ! J'espère que vous comprendrez par les images comment on parvient à réaliser ce tour de magie dû à Thurston qui me mystifie encore aujourd'hui. Comme on vient de le remarquer, la sphère de dimension 3 se découpe en deux boules et le nœud de trèfle se restreint dans chaque boule à l'enchevêtrement de la figure ci-dessus. Pour trianguler l'extérieur du nœud de trèfle, il suffit donc de trianguler l'extérieur de chaque enchevêtrement de telle façon que les triangulations induites sur le bord coïncident. Dans notre cas, il s'agira de la triangulation de la sphère identifiée à la surface d'un tétraèdre (voir la prochaine animation).

Concentrons nous donc sur l'un des deux enchevêtrements (qui se déduisent l'un de l'autre par une simple rotation). Dans l'animation suivante, on voit tout d'abord l'enchevêtrement dans sa boule, puis apparaît en rouge le tétraèdre dans lequel l'enchevêtrement est inscrit avec, un peu plus tard, un segment qui joint les deux morceaux de l'enchevêtrement. Il s'agira des arêtes de la triangulation. Puis apparaissent deux surfaces qui s'appuient sur l'enchevêtrement et sur une arête du tétraèdre. Si on découpe chacune de ces surfaces le long de l'arête centrale, on obtient un

pentagone avec trois côtés rouges et deux côtés bleus. En contractant les deux arêtes bleues (qui ne font pas partie de l'objet que l'on considère) on obtient un triangle qui sera une face de la triangulation. Enfin apparaissent quatre surfaces quadrilatérales qui s'appuient chacune sur l'arête rouge centrale, deux morceaux bleus de l'enchevêtrement et une arête rouge du tétraèdre. Après contraction de la partie bleue, on obtient une surface à deux côtés (appelée bigone). J'expliquerai par la suite pourquoi on n'a pas un triangle !

Une fois toutes les surfaces en place, imaginez que vous découpiez la boule de départ le long de ces surfaces : combien de morceaux obtenez-vous ? La réponse est quatre... à la fin de l'animation, une de ces régions est sélectionnée afin qu'on voie facilement les surfaces qui la délimitent : il s'agira d'une des régions de la triangulation. Il y a donc trois autres régions dans la boule (et quatre autres dans l'autre boule) mais toutes ont la même forme.



Décomposition d'une boule avec un enchevêtrement

Il nous reste à comprendre pourquoi les quatre parties ainsi découpées sont des tétraèdres. En fait, ce n'est pas le cas ! Regardons attentivement la dernière animation. Au début, on voit un tétraèdre déformé dont l'une des faces est un morceau de la sphère. Ce morceau disparaît pour nous laisser voir à l'intérieur, puis trois des sommets de ce tétraèdre s'étirent. Cette déformation est possible précisément parce que les sommets ont été retirés. Le long de la déformation, une des arêtes s'écrase progressivement en un sommet tandis que deux autres arêtes se rejoignent. La figure obtenue est précisément la dernière de l'animation précédente... la face sphérique réapparaît brièvement puis l'animation fait le chemin dans l'autre sens. Les morceaux de la triangulation sont donc à proprement parler des tétraèdres dont une arête a été écrasée. Un tétraèdre a quatre

faces triangulaires : si on réduit une arête en un point, deux triangles deviennent des bigones : les reconnaissez-vous ?



Déformation d'un tétraèdre

Mais quel est donc la caractéristique d'Euler de l'extérieur du nœud de trèfle ? La formule généralisée est naturellement $S-A+F-R$ où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, F le nombre de faces et R le nombre de régions tridimensionnelles. Le décompte demande un peu de concentration : on trouve 8 régions, 16 faces (4 sur la sphère et 6 dans chaque boule) , 8 arêtes (4 sur la sphère et 1 dans chaque boule) et aucun sommet (car ils sont tous sur le nœud que l'on considère comme hors de l'espace). Que le résultat soit 0 ne doit rien au hasard : c'est pareil pour tous les nœuds et même pour toutes les variétés de dimension 3. Ce phénomène a pour nom « dualité de Poincaré » en l'honneur de ce mathématicien visionnaire qui révolutionna la topologie dans les années 1890 entre autres contributions majeures aux mathématiques. Sa plus célèbre conjecture est d'ailleurs l'objet d'un article déjà cité... [11]



De telles décompositions existent pour tous les nœuds et Thurston se rendit célèbre en découvrant celle du nœud de huit (représenté à gauche) qui fut la première pierre de son entreprise de géométrisation. On comprend que de telles structures en dimension 3 ne sont pas très facilement visualisables ni manipulables et quand Thurston les mit en évidence dans les années 1970, peu de gens le comprirent car sa preuve consistait essentiellement à déclarer : vous le voyez bien ! Dans ma recherche, ces décompositions sont très utiles et elles me fascinent particulièrement car elles échappent toujours à la force « trivialisante » des mathématiques qui épure et simplifie

parfois les concepts jusqu'à ce qu'ils semblent un peu vides. On peut se sentir frustrés par la disparition du mystère qui nous avait accroché quelques temps auparavant, tandis qu'en ce qui concerne les triangulations des extérieurs de nœuds, la magie est intacte !

Si par hasard vous éprouvez ce genre de frustration car ce que je raconte semble trop clair, voilà de quoi vous satisfaire... Que se passe-t-il en dimension supérieure, par exemple quatre ? En fait, deux théorèmes profonds de la topologie en dimension quatre - un théorème de V. A. Rokhlin de 1952 et un théorème de M. H. Freedman de 1982 - impliquent qu'il existe certaines variétés topologiques de dimension quatre qui **ne sont pas** triangulables. Comment appréhender de tels espaces ? C'est bien simple, faites de la topologie...

Quiz

1. Un pendule bat-il plus vite sur la face visible ou sur la face cachée de la lune ?
2. Un seul polyèdre régulier n'a pas été évoqué dans cet article, lequel ?
3. Qui a dit : « le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile ; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle » ?
4. Quelle est la caractéristique d'Euler d'un tore ?
5. Reconnaissez-vous le nœud de la figure ci-dessous ?



Pour aller plus loin

Dans l'ordre de difficulté et de concentration en mathématiques, voici des références qui m'ont servi pour écrire cet article, en plus des liens insérés dans le corps du texte. J'en profite pour remercier Erwan Brugallé pour sa relecture attentive !

- Un article complet et passionnant sur l'approche historique de l'évolution des idées à propos de la forme de la Terre <http://planet-terre.ens-lyon.fr/pla...>
- **Jean-Pierre Petit** : *Le topologicon, une bande dessinée topologique* <http://www.savoir-sans-frontieres.c...>
- **Jean-Claude Pont** : *La topologie algébrique, des origines à Poincaré*, Presses Universitaires de France, 1974.
- **Nikolai Saveliev** : *Lectures on the topology of 3-manifolds*, de Gruyter Textbook, 1999.
- **William P. Thurston** : *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, **version électronique**.

Notes

[▲1] Explication approximative : la période d'oscillation d'un pendule se calcule par la formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ où l est la longueur du pendule et g l'accélération de la pesanteur. Si la terre est aplatie aux pôles, on est plus loin de son centre à Cayenne qu'à Paris. Du coup, l'accélération est moindre, la période plus grande et le pendule plus lent.

[▲2] Image provenant de <http://planet-terre.ens-lyon.fr/planetterre/XML/db/planetterre/metadata/LOMhistorique.xml>

[▲3] Trois livres grand public qui évoquent l'épopée de la mesure de la Terre :

- « Mesurer la Terre » de Ken Adler
- « L'épopée du méridien terrestre » ou « Le procès des étoiles » de Florence Trystam.
- « Les Arpenteurs du monde » de Daniel Kehlmann.

[▲4] Images provenant de [wiki/Icosaedre](#)

[▲5] Image provenant de [Inria:Projet Gamma](#)

[▲6] Images provenant de [wiki/Rubik's_Cube](#), [wiki/Nid_d'abeille](#) et [wiki/Éléments_finis](#)

[▲7] Un topologue étudie la topologie, à savoir les propriétés des figures géométriques invariantes par déformation continue

[▲8] Cette triangulation est construite de la façon suivante : 100 points sont choisis au hasard sur la sphère, puis les triangles sont construits de telle sorte que leurs cercles circonscrits ne contiennent aucun sommet. Il s'agit de la triangulation de Delaunay, sujet très intéressant mais non abordé dans l'article, voir <http://fr.wikipedia.org/wiki/Triang...>

[▲9] Image provenant de <http://fr.wikipedia.org/wiki/Ballon...>

[▲10] Image provenant de [wiki/Dodecaedre](#)

[▲11] [Géométriser l'espace : de Gauss à Perelman](#)

► Crédits images

Pour citer cet article : **Julien Marché**, **Triangulations : de la terre au noeud de trèfle.. Images des Mathématiques**, CNRS, 2009. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Triangulations-de-la-terre-au.html>