HAL
open science

Mathématiques savonneuses

Paul Laurain

To cite this version:

Paul Laurain. Mathématiques savonneuses. Images des Mathématiques, 2011, http://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-savonneuses.html. hal-00583959

HAL Id: hal-00583959

https://hal.science/hal-00583959v1

Submitted on 7 Apr 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mathématiques savonneuses

To print higher-resolution math symbols, click the Hi-Res Fonts for Printing button on the toolbar tab panel.

Le 25 février 2011, par **Paul Laurain**

Agrégé Préparateur à L'ENS Lyon (**page web**)

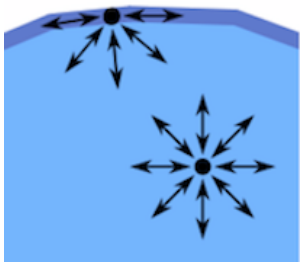
Il est question ici des surfaces minimisant leur aire sous contrainte, problème plus connu sous le nom de problème des « bulles de savon ». Après avoir étudié les propriétés de minimisation des films de savon dans une première partie, on cherchera à calculer le réseau le plus court reliant un ensemble de points donnés, problème connu sous le nom de problème de Steiner.

Les films de savon

La tension superficielle

CHACUN d'entre nous a déjà fait l'expérience qui consiste à remplir un verre d'eau légèrement au dessus du verre sans que celui-ci déborde. Mais qu'est ce qui rend cela possible ?

Pour comprendre cela, il suffit de voir l'eau comme un ensemble de molécules qui exercent des forces d'attraction entres elles. Au centre du liquide une molécule est attirée dans toutes les directions, par contre au bord du liquide une molécule ressent une attraction plus forte venant de l'intérieur que de l'extérieur du liquide. Et ainsi les molécules au bord du liquide sont retenues par celles de l'intérieur et agissent comme une fine peau. Cette propriété qu'a un liquide de maintenir sa surface tendue est la **tension superficielle**.



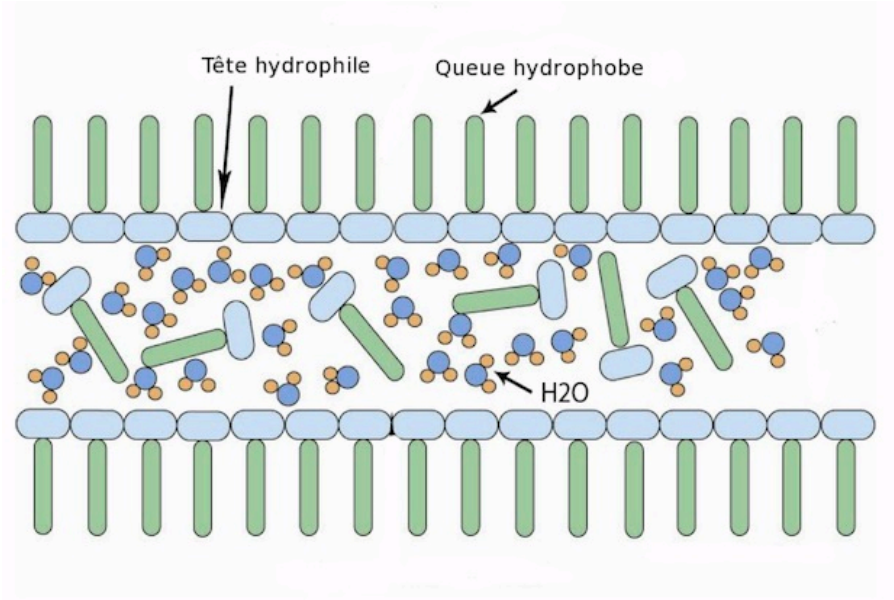
Forces s'exerçant sur une molécule d'eau à l'intérieur et au bord du liquide.

Illustration de l'effet de peau.

Solutions savonneuses et films de savon

Une solution savonneuse est constituée de molécules d'eau et de molécules de savon. La molécule d'eau est formée de deux atomes d'hydrogène (H^+) et d'un oxygène (O^{2-}) ce qui donne la formule H_2O. La structure d'une molécule de savon est plus compliquée. Elle est souvent constituée d'une chaîne hydrocarbonée (c'est-à-dire une suite d'atomes de carbone et d'hydrogène) qui se termine par un "acide gras" et surtout elle devient ionique dans l'eau, c'est-à-dire qu'elle se sépare en deux molécules dont la charge électrique n'est plus neutre. Par exemple le sel d'acide stéarique, $C_{17}H_{35}COO^-Na^+$, se sépare dans l'eau en $C_{17}H_{35}COO^-$ (chargé négativement) et Na^+ (chargé positivement). Maintenant ces deux molécules sont libres dans l'eau et interagissent avec les autres molécules de manière classique : les charges de signes opposés s'attirent et des charges de même signe se repoussent.

La géométrie de $C_{17}H_{35}COO^-$ est assez particulière, puisque la tête COO^- (chargée négativement) est attirée par les deux hydrogènes de la molécule d'eau (On pourrait penser que la tête peut aussi être attirée par les ions Na^+. C'est d'ailleurs le cas, mais vu qu'il y a beaucoup plus de molécules d'eau que d'ions Na^+, on ne considère que l'interaction avec les atomes d'hydrogène), on dit qu'elle est **hydrophile**. Alors que la queue est repoussée car elle comporte beaucoup d'atomes d'hydrogène, on dit qu'elle est **hydrophobe**. Et donc au niveau de la surface, les chaînes hydrocarbonées ont tendance à pointer vers l'extérieur du liquide.



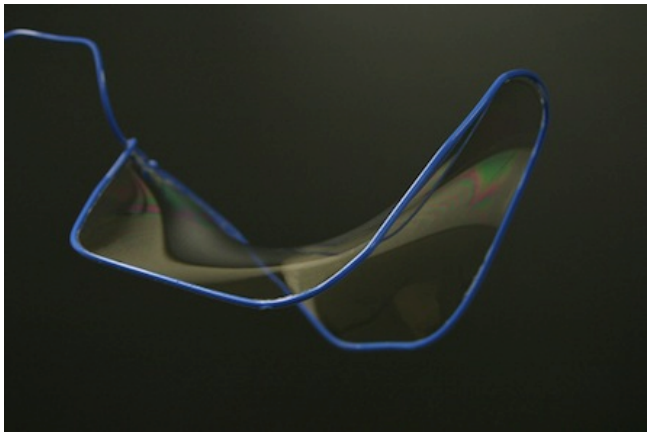
Structure d'un film de savon

C'est cette structure qui permet à l'eau savonneuse de former un film qui borde un anneau. Si vous trempez un anneau dans de l'eau pure et que vous le ressortez aussi prudemment que possible aucun film ne se forme. Par contre si vous ajoutez un peu de liquide vaisselle à l'eau et que vous renouvelez l'expérience alors, pourvu que l'anneau ne soit pas trop grand, vous observerez qu'un film de savon se forme à l'intérieur de votre anneau.

Film de savon

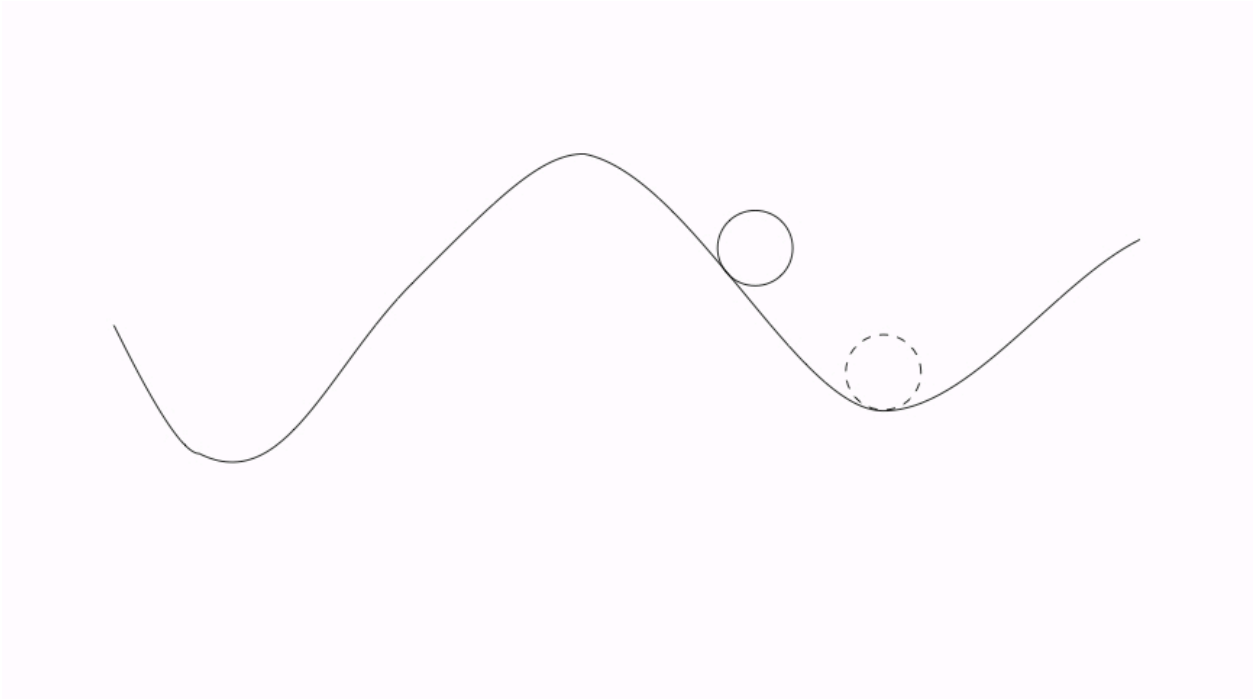
Forme des films de savon

Mais quelle est la forme du film ? Dans l'image précédente, sans trop de surprise, c'est un disque qui vient border le cercle. Mais ce cas est bien trop symétrique pour pouvoir prévoir ce qui va se passer pour un contour plus général.



Film de savon bordé par un contour tordu

Pour se faire une idée plus précise de ce qui se passe, revenons aux raisons qui font que le film reste « tendu » : c'est la tension de surface, c'est-à-dire l'interaction entre les molécules au bord du film et celles à l'intérieur. Or le fait de maintenir la structure de notre film ainsi demande une certaine énergie [**1**] au système. Cette énergie est proportionnelle au nombre des molécules d'acide gras qui est nécessaire pour former la "peau" du film. Or tout système physique tend à être dans une position qui lui demande le moins d'énergie. On peut illustrer ce fait en considérant un ballon sur une surface vallonnée.



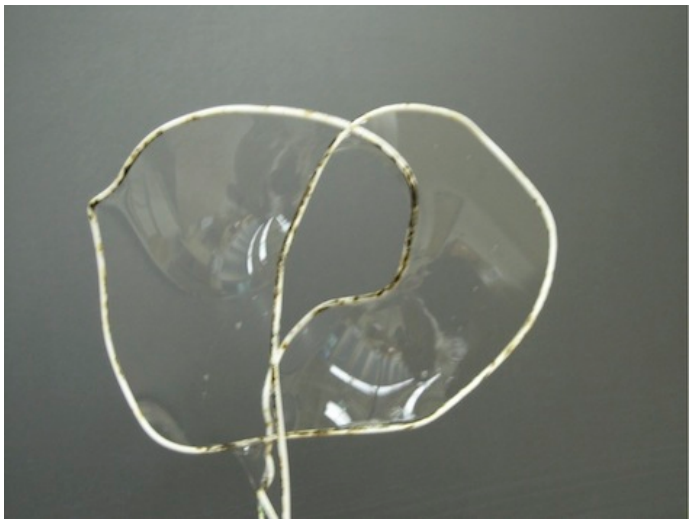
Ballon sur une région vallonnée

L'énergie de notre ballon est proportionnelle à la hauteur du ballon car plus le ballon est haut, plus il est susceptible de rouler vers le bas du vallon. D'ailleurs on peut observer que si on le lâche dans la pente il va immédiatement rouler vers le bas de la pente puis avec son élan remonter un morceau de pente pour le redescendre, remonter une partie de ce qu'il a descendu à l'aller, etc. Jusqu'au moment où il s'immobilisera au fond d'une vallée, là où son énergie est minimale, du moins localement, car il existe sur la gauche un creux encore plus bas mais il est inaccessible pour le ballon puisqu'il faudrait franchir le sommet qui est plus haut que son point de départ. Toutefois notre creux est un minimum local, c'est-à-dire que tout point à proximité est plus haut. La position est alors stable puisque si on déplace le ballon un petit peu il reviendra automatiquement à cette position. Reste la question de ce qui se passe si on place le ballon "pile" au sommet de la bosse. Dans ce cas il s'agit bien d'un équilibre mais il est instable, puisque toute perturbation fait glisser le ballon d'un côté ou de l'autre.

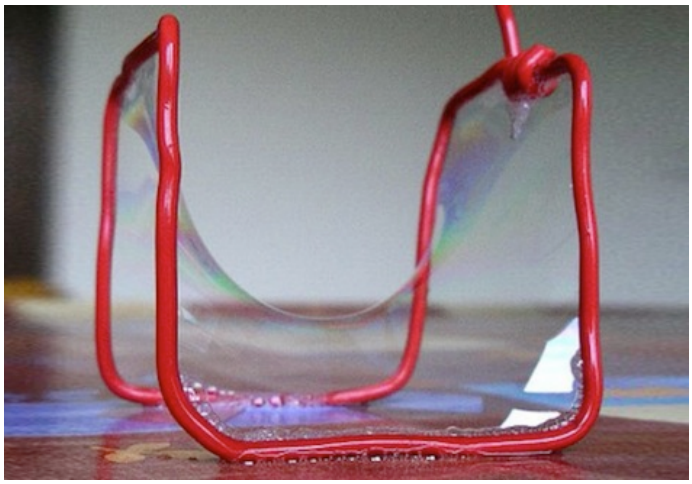
Revenons à notre film de savon qui, comme le ballon, cherche à minimiser son énergie. Donc pour savoir quelle sera la forme de notre film de savon il faut trouver quel est l'équivalent du "creux". Or son énergie, qui est sa capacité à changer d'état, est proportionnelle au nombre d'acides gras qui forment la "peau". On pourra penser à une chaîne dont la capacité à bouger augmente avec le nombre de mailles dont elle est constituée. Mais ce nombre est simplement proportionnel à la surface de notre film, donc notre film va tendre à minimiser son aire pour minimiser son énergie. **La forme du film de savon est celle qui minimise sa surface**. Ici encore il s'agit d'un

minimum local, c'est-à-dire qu'une petite perturbation du film de savon augmente nécessairement sa surface comme le ballon qui dans son creux ne peut que monter s'il bouge un peu. Par contre il ne s'agit pas nécessairement de la plus petite surface comme notre ballon qui n'est pas nécessairement dans le creux le plus bas.

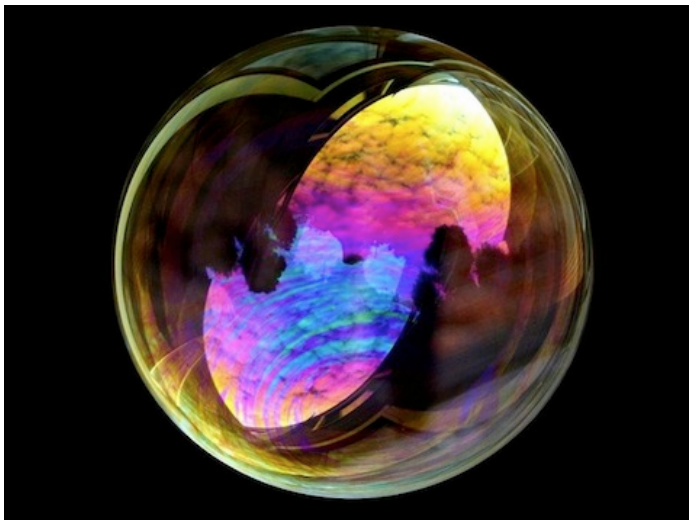
Voici quelques exemples :



Un fil tordu



Un autre fil tordu

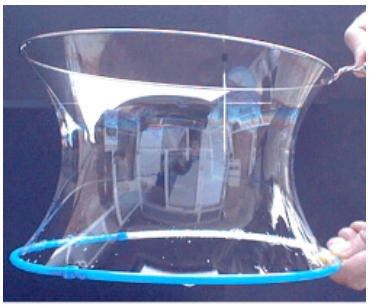


La bulle de savon

Dans le dernier exemple, la contrainte n'est plus donnée par le fil de fer, mais par l'air emprisonné dans la bulle. On en déduit [2] que la plus petite surface qui enveloppe un volume fixé est donnée par la sphère. En termes mathématiques notre problème revient à trouver pour un contour donné quelles sont les surfaces qui minimisent localement leur aire et ayant pour bord notre contour. Il se trouve que, malgré son énoncé relativement simple, ce problème reste largement ouvert. On sait depuis les années 30, grâce à Douglas [3] et Radó [4], que pour tout contour assez simple il existe un minimum global, c'est-à-dire une surface minimisante venant s'accrocher sur ce contour. Par contre il faut attendre les travaux de Meeks [5] et Yau [6] au début des années 80 pour savoir que cette surface minimisante n'est pas trop compliquée, par exemple qu'elle ne se coupe pas si le contour n'est pas trop compliqué lui-même. Par contre la question du nombre de minimums locaux est encore largement ouverte et fait intervenir des mathématiques assez pointues comme la théorie de Morse en dimension infinie (un gros mot pour dire que ça fait appel à une théorie assez générale et dont la complexité dépasse largement la simplicité de l'énoncé de notre problème). Cette dernière question n'est pas un problème purement mathématique, car n'oublions pas notre ballon qui trouve son équilibre dans des minimum locaux, il est en est de même de notre film de savon, les minima locaux (non globaux) sont physiquement possibles.

Un petit problème

Pour conclure ce paragraphe je propose un petit problème. Ici on considère un contour formé de deux cercles parallèles assez proches. Si on plonge notre contour dans l'eau savonneuse et qu'on le ressort délicatement, on observe la caténoïde. Attention, malgré ce qu'on pourrait imaginer, ce n'est pas le cylindre qui minimise l'aire entre les deux cercles mais bien cette surface légèrement incurvée. Il s'agit d'une surface de révolution, ce qui n'est pas très étonnant vu la symétrie du contour [7]. La génératrice (c'est-à-dire la courbe qu'il faut faire tourner autour d'une droite pour engendrer notre surface) de cette surface de révolution est la **chaînette** qui, elle aussi, trouve son origine dans un problème de minimisation sous contrainte.



La caténoïde

Mais revenons à notre caténoïde. Que se passe-t-il si on écarte progressivement les deux anneaux. Au départ la surface s'allonge et inéluctablement le film éclate pour ne plus former que deux disques. Pourquoi ? Simplement car la surface des deux disques devient plus petite que celle de la caténoïde. Et donc le problème est le suivant : Déterminer en fonction du rayon R de nos cercles quel est l'écartement maximal de nos deux cercles que la caténoïde peut tolérer avant d'éclater ? Première solution : faire l'expérience. Deuxième solution : faire un peu de mathématiques, c'est-à-dire calculer l'aire de la caténoïde (On trouvera **ici** les formules nécessaires) en fonction du rayon et de l'écartement et le comparer avec deux fois l'aire du disque. La seule notion requise ici est celle d'intégrale afin de faire le calcul de l'aire de la caténoïde.

Solution :

> *L'aire de la caténoide de hauteur h est donné par $4\pi \operatorname{sh}\left(\frac{h}{2}\right)$ donc la caténoïde éclate lorsque $h = 2\operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{R^2}{2}\right) = 2\operatorname{Ln}\left(\frac{R^2}{2} + \sqrt{\frac{R^4}{4}+1}\right)$. Ici sh est une **fonction hyperbolique** et sh^{-1} sa réciproque. Même si ceci peut paraître calculatoire pour le profane, on pourra se souvenir que h est une fonction logarithmique de R et donc qu'il faut des cercles de très grand rayon si l'on veut observer une grande caténoïde, comme sur l'image ci-dessus.*

Il s'agissait d'une courte introduction au problème des « bulles de savon » que le lecteur chevronné pourra poursuivre dans [**Isen-78**] pour un point vue physique et [**Opr-00**] pour un point de vue mathématique.

La route la plus courte ou Problème de Steiner [8]

La problème auquel nous allons nous intéresser maintenant est le suivant :

Quel est le chemin le plus court reliant un ensemble de points donné ?

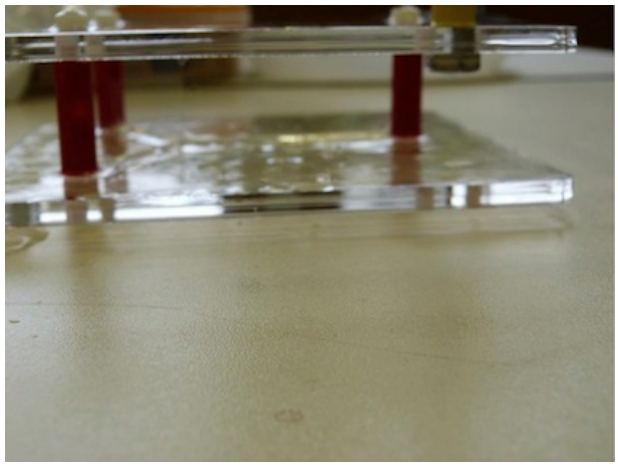
D'un point de vue pratique on peut imaginer le problème suivant : une compagnie de télécommunication souhaite créer un réseau reliant un certain nombre de villes. Elle cherche alors à minimiser le coût d'un tel réseau, en l'occurrence la longueur totale des câbles qu'elle devra utiliser pour relier toutes ces villes entre elles.

Il est bien connu que le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite. Par contre quel est le chemin le plus court reliant trois points du plan ? Ou encore quelle est la route la plus courte reliant trois villes ?

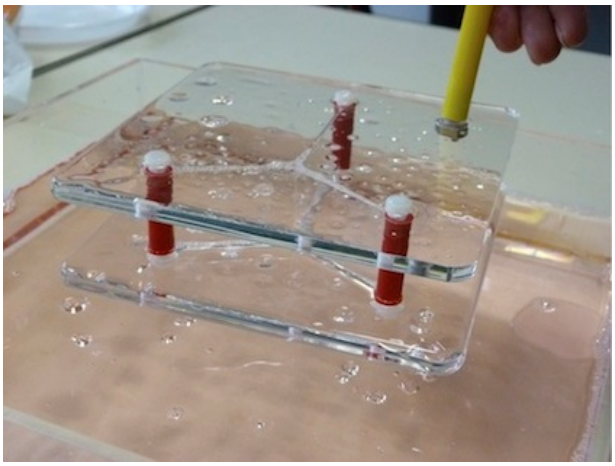
Première réponse : que dit le savon ?

Ici nous allons utiliser la propriété qu'a un film de savon de minimiser son aire. On prend deux plaques de plexiglas que l'on lie par trois boulons tout en faisant attention qu'elles ne soient pas trop proches l'une de l'autre (voir les figures ci-dessous). Lorsque l'on plonge cette construction dans un seau d'eau savonneuse et que l'on l'en ressort délicatement, un film de savon vient joindre nos trois boulons en essayant de minimiser son aire. Mais la largeur entre les plaques étant constante, le problème de minimisation de la surface devient équivalent à celui de la minimisation de la longueur de la trace de notre film sur le plexiglas. Voici alors la réponse :

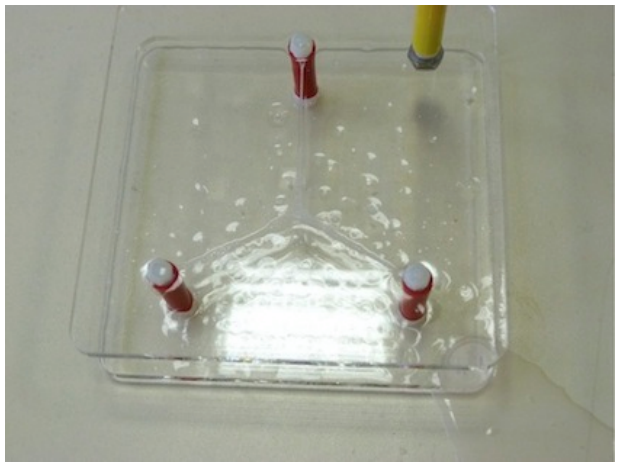
Le matériel.



Deux plaques de plexiglas reliées par 3 boulons.

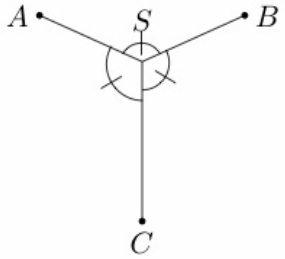


La solution.



La solution.

On peut observer deux choses. La première est qu'au point d'intersection les trois droites se rencontrent avec des angles égaux.



D'autre part si on choisit une configuration de points de sorte que l'angle formé par deux côtés du triangle soit supérieur à $120°$, alors la solution est simplement composée par les deux côtés formant cet angle.

Deuxième solution : que disent les Mathématiques ?

Mathématiquement, le problème est le suivant : étant donné trois points A, B et C, trouver un point S qui minimise la quantité suivante :

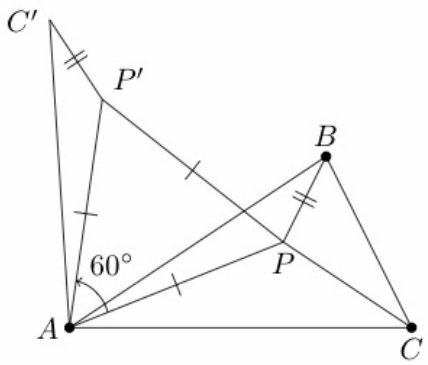
$$L(S) = AS + BS + CS.$$

Ici encore plusieurs approches sont possibles. La plus naturelle pour un amateur de calcul différentiel serait de chercher un extremum de la fonction L en la différenciant. Mais nous allons présenter une méthode purement géométrique [9] pour montrer que le point S est soit un sommet de notre triangle, soit les trois segments joignant S aux sommets du triangle forment entre eux des angles de $120°$.

Preuve :

Supposons qu'aucun angle de ABC n'est supérieur à $120°$. Soit P un point à l'intérieur du triangle.

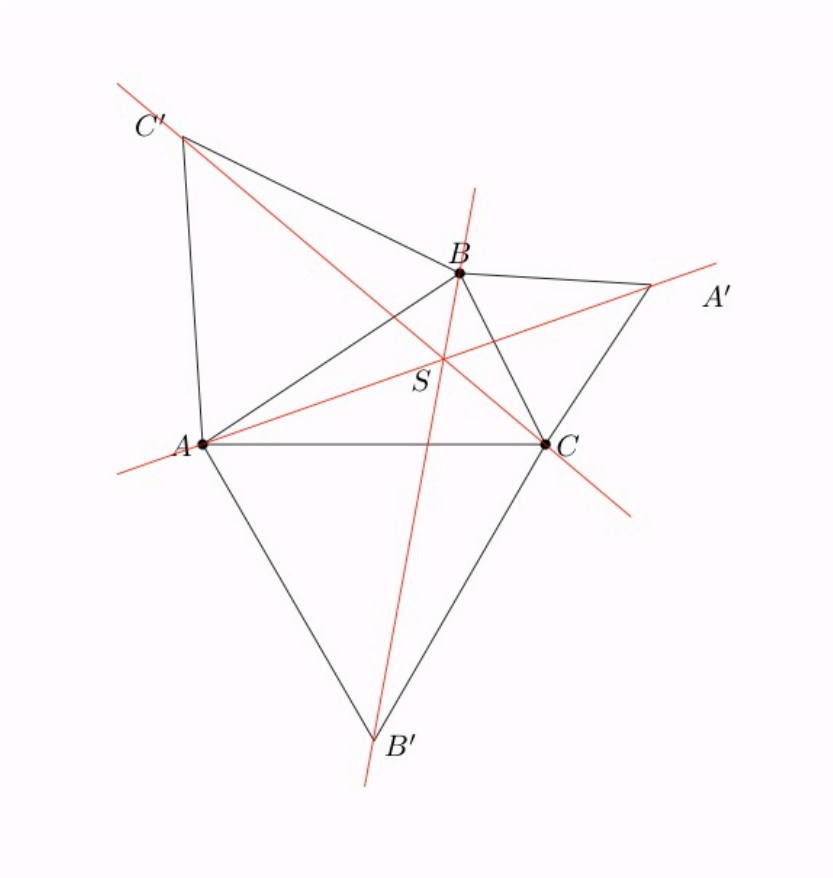
On considère alors l'image de APB par la rotation de centre A et d'angle $60°$. On note $AP'C'$ l'image de APB par cette rotation.



Le triangle PAP' est équilatéral ; en effet, par construction il est isocèle et possède un angle de $60°$. Donc $PP' = AP$ et, toujours par construction, $C'P' = BP$. On a donc

$$AP + BP + CP = PP' + P'C' + CP.$$

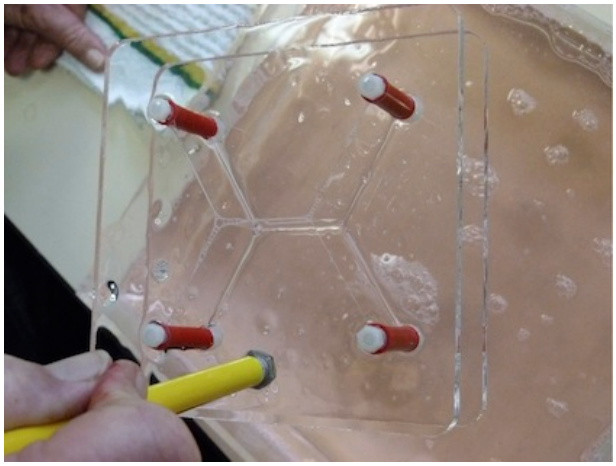
Donc minimiser $AP + BP + CP$ revient à minimiser $PP' + P'C' + CP$. Or cette dernière quantité est minimale si C', P', P et C sont alignés. En effet C et C' (sommet « du » triangle équilatéral de côté AB) sont indépendants du choix de P. On doit donc choisir P de sorte que la longueur de la ligne brisée $CPP'C$ soit minimale. Or le chemin le plus court entre C et C' est la ligne droite, donc il faut que P appartienne à la droite CC'. De façon analogue on construit les points A', B'. Le point de Steiner S est alors le point de concours des droites (AA'), (BB') et (CC').



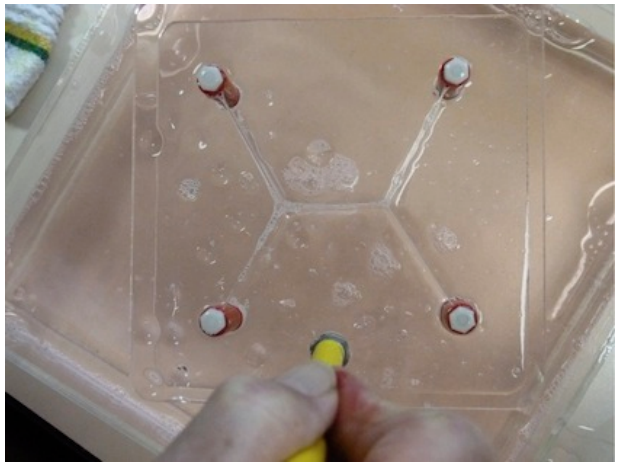
On peut vérifier que SA, SB et SC forment bien un angle de $120°$ avec les sommets du triangle ABC. Par exemple, l'angle ASC' vaut par construction $60°$, mais en réalisant la même construction autour de B on voit qu'on a également l'angle BSC' qui vaut $60°$. Finalement l'angle ASB vaut bien $120°$. Enfin il faut tout de même vérifier que cette construction ne fonctionne pas si l'un des angles du triangle est supérieur à 120 degré, ce que je laisse au lecteur...C.Q.F.D.

Ce problème étant résolu pour trois points, une question nous vient immédiatement à l'esprit. Quid du cas général ? C'est-à-dire que se passe-t-il si l'on considère non pas trois points mais un nombre arbitraire de points ?

Les choses se corsent. Pour quatre points, il existe encore une "formule". Dans un cas standard (c'est-à-dire lorsque les quatre points forment un quadrilatère dont les angles aux sommets ne sont pas trop grands), il se crée non pas un point, mais deux points intermédiaires comme le montre la figure suivante.



Solution pour 4 points.



Solution pour 4 points.

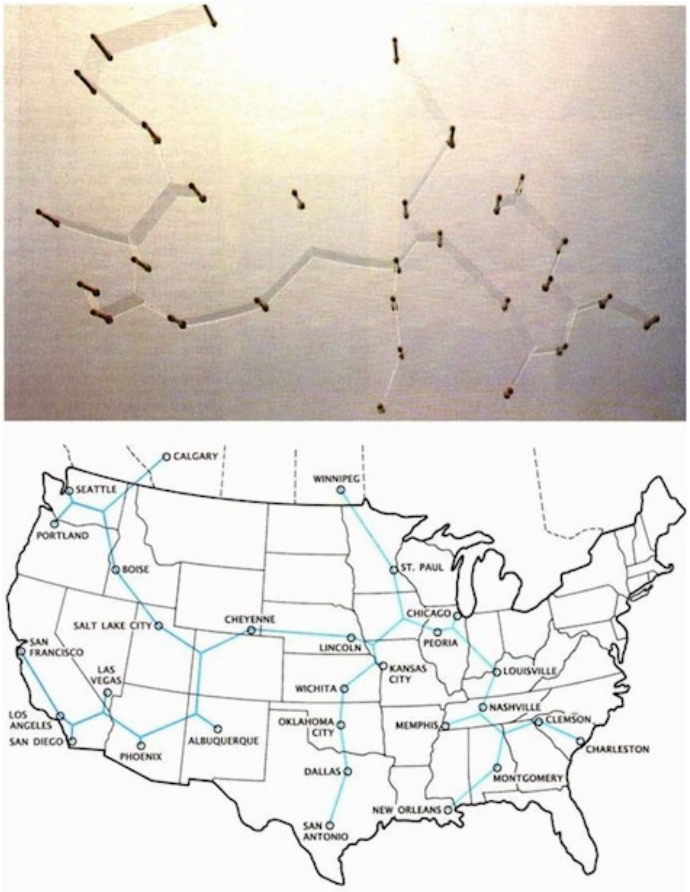
Au delà de quatre points, il n'existe plus de "formule" pour calculer effectivement la solution optimale. Par contre, un algorithme (dû à Melzak) permettant de trouver le réseau optimal en un nombre fini d'étapes a été inventé dans les années 60. Ce qui n'est pas du tout

évident puisqu'il existe a priori une infinité de configurations possibles pour les points de Steiner. L'idée de Melzak est somme toute assez simple même si sa réalisation s'avère très technique. Appelons **point de Steiner** un point que l'on doit rajouter pour obtenir le réseau optimal, comme le point au à l'intérieur du triangle ou les deux points dans la figure ci-dessus. L'idée de Melzak repose sur les deux faits suivants :

- Un point de base est relié à au plus trois autres points
- Un point de Steiner est relié à trois autres points et les angles formés par les arêtes sont tous égaux à $120°$.

Á l'aide de ces deux remarques Melzak démontre qu'il existe qu'un nombre fini de points de Steiner possibles. Pour démontrer cela il utilise des constructions géométriques du type de celle effectuée pour construire le point de Steiner d'un triangle. Cette preuve étant constructive, elle fournit en plus un algorithme pour construire ces points. Il existe alors un nombre fini de chemins possibles, on les calcule tous et on prend le plus court. Le coût de cet algorithme est pharaonique puisque le nombre d'opérations à réaliser pour calculer le réseau optimal reliant n points est proportionnel à $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$. Dans les vingt dernières années, de gros progrès ont été faits et on dispose de l'algorithme calculant la solution exacte pour $n < 10000$ en un temps raisonnable.

Pour finir on présente une application au réseau minimal reliant les grandes villes d'Amérique du Nord, l'une calculée avec du savon et l'autre à l'aide d'un algorithme exact. On observera que les solutions sont différentes puisque le savon donne simplement un minimum local.



Réseau optimal reliant des grandes villes d'Amérique du nord

Enfin voici **une petite application** [10] développée avec **Aurélien Pardon** et **Marc Lasson**, donnant une solution approchée au problème de Steiner. L'algorithme utilisé ici simule ce que fait le savon et donc trouve un minimum local. Par contre, il est beaucoup plus rapide que l'algorithme exact puisque, sur un ordinateur personnel, il fonctionne avec plus d'un 1 million de points en quelques minutes.

[Isen-78] **Isenberg, Cyril**, *The science of soap films and soap bubbles*, Tieto Ltd. , 1978

[Opr-00] **Oprea, John**, *The mathematics of soap films : explorations with Maple*, American Mathematical Society , 2000

P.S. :

Merci à Clémence, Joël Merker et François Gramain pour leur travail de relecture, mon texte original s'en est trouvé grandement amélioré.

Notes

[▲1] L'énergie d'un système physique est la capacité qu'a ce système à modifier son état.

[▲2] empiriquement, mathématiquement c'est une autre histoire, ce problème est connu sous le nom de problème isopérimétrique pour lequel il fallut attendre le 19ième siècle pour une solution rigoureuse

[▲3] Mathématicien américain 1897-1965, il reçu l'une des deux première médaille Fields en 1936 pour la résolution de ce problème connu sous le nom de problème de Plateau

[▲4] Mathématicien Hongrois 1895-1965

[▲5] Mathématiciens américain (1947-...)

[▲6] Mathématicien sino-américain (1949-...), médaille Fields en 1982

[▲7] En physique on a l'habitude de dire que « la symétrie des causes doit se retrouver dans la symétrie des effets ». En math, on se plaît à le penser aussi, mais rien d'évident à cela, en tout cas pas il n'existe pas de théorème général englobant la maxime physicienne mais des théorèmes examinant chaque cas particulier.

[▲8] Du nom d'un mathématicien suisse, Jakob Steiner (1796-1863).

[▲9] La preuve présentée est due à un mathématicien hongrois, Tibor Galai (1912-1992)

[▲10] Cliquer sur l'écran pour définir les points, puis sur « kruskal », puis sur « steiner ». Pour que les caculs se fassent rapidement il vaut mieux utiliser **Chrome** comme navigateur. L'application ne marche pas avec Internet Explorer.

Crédits images

Pour citer cet article : **Paul Laurain**, **Mathématiques savonneuses**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2011. En ligne, URL : `http://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-savonneuses.html`