HAL open science

# Mélanges de cartes et mathématiques

Bruno Belhoste

**To cite this version:**

Bruno Belhoste. Mélanges de cartes et mathématiques. Images des Mathématiques, 2009, http://images.math.cnrs.fr/Melanges-de-cartes-et.html. hal-00583585

**HAL Id: hal-00583585**

**https://hal.science/hal-00583585v1**

Submitted on 6 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mélanges de cartes et mathématiques

Le 17 mars 2009, par **Bruno Belhoste**
Historien, Professeur à l'Université Paris I, Panthéon Sorbonne
(**page web**)

***Un joueur doit savoir mélanger les cartes et le magicien, comme le tricheur, les battre sans les mélanger ! Les mélanges de cartes permettent en effet de monter des tours de prestidigitation surprenants. Ils ouvrent aussi sur des mathématiques profondes, en probabilités, en combinatoire, en théorie des groupes et en mathématiques discrètes. On verra dans cet article comment la façon de mélanger des cartes pour jouer et pour s'amuser a inspiré des recherches mathématiques depuis le XVIII^e siècle.***

MATHEMATIQUES et magie peuvent faire bon ménage [1] ! Le mathématicien Persi **Diaconis** (**voir ici même**) , spécialiste des probabilités, a commencé par gagner sa vie comme prestidigitateur. Mieux : la magie a été pour lui une véritable source d'inspiration mathématique. En prestidigitation, le grand art de Diaconis, comme celui de son maître en magie Dai Vernon, ce sont les tours de cartes. Les cartes à jouer offrent mille possibilités pour le prestidigitateur : celui-ci peut les manipuler, pour les faire disparaître et réapparaître à volonté ; il peut aussi combiner et calculer, pour produire des effets spectaculaires et inattendus. Les tours de cartes sont particulièrement appréciés en magie rapprochée, ou *close-up*, un type de prestidigitation qui s'est considérablement développé au XX^e siècle, en particulier aux Etats-Unis. Ils sont aussi, hélas, très prisés des tricheurs, qui ont su développer des techniques frauduleuses pour forcer le destin dans les jeux d'argent.

Nous allons nous intéresser ici à l'histoire des relations entre tours de cartes et mathématiques en nous concentrant plus particulièrement sur la question des mélanges. Nous commencerons par la fin, avec l'œuvre de Diaconis, avant d'évoquer le rôle des mélanges de cartes dans les jeux de hasard qui font fureur sous l'Ancien régime. Dans une deuxième partie, nous verrons comment les mélanges de cartes utilisées dans les récréations mathématiques ont inspirés des mathématiciens comme Monge et Gergonne.

## Comment mélanger les cartes ?

Mélanger est une opération préalable indispensable dans presque tous les jeux de cartes. L'objectif est bien sûr de rendre aléatoire la distribution des cartes pour que la partie soit équitable entre les joueurs. En magie, on mélange aussi les cartes avant un tour pour rassurer les spectateurs. En principe, donc, un paquet mélangé est un paquet non préparé. Évidemment, pour le magicien comme pour le tricheur, il n'en est rien : le mélange des cartes, qu'il soit régulier, simulé ou truqué est un élément essentiel du tour.

C'est donc au mélange des cartes que Diaconis mathématicien s'est surtout intéressé. Il a considéré deux types de mélanges bien connus des joueurs et des magiciens, le mélange américain (*riffle shuffle*) et le mélange parfait (*perfect shuffle* ou *faro shuffle*). L'étude de ces deux mélanges conduit à deux types de problèmes très différents.

## Le mélange américain est-il aléatoire ?

C'est **Henri Poincaré** qui a posé le premier le problème du mélange aléatoire des cartes, au début du XX$^{e}$ siècle. Un mélange est aléatoire quand les cartes mélangées sont distribuées « au hasard », quel que soit l'ordre initial. On dit alors aussi que le jeu est bien mélangé. Plusieurs mathématiciens, dont Borel, Hadamard et Paul Lévy, ont étudié ce problème dans l'Entre-deux-guerres (voir Laurent Mazliak, ***Printemps ergodique***).

Le mélange américain, pratiqué communément au poker par exemple, est un mélange aléatoire. Il comporte deux opérations : une coupe aléatoire du paquet initial, donnant deux paquets de coupe inégaux (mais généralement de tailles comparables), et le mélange proprement dit, consistant à imbriquer les deux paquets de coupe par insertion des cartes de l'un dans l'autre pour former le paquet final. Le mélange peut se faire sans grande difficulté sur la table, d'un coup de main assez spectaculaire :

**Sous ce lien, on en trouvera un exemple vivant…..**

L'imbrication des cartes y obéit à une seule règle : l'ordre des cartes de chaque paquet de coupe

doit subsister dans le paquet final. En revanche, plusieurs cartes successives du paquet initial peuvent très bien se suivre dans le paquet final, si l'imbrication est imparfaite. Après un seul mélange, le jeu est donc en général mal mélangé.

On peut se demander combien de mélanges américains successifs sont nécessaires pour obtenir un mélange aléatoire des cartes. Avec quelques hypothèses simples sur les probabilités associées à la coupe aléatoire et au mélange des cartes, on peut construire un modèle mathématique du mélange américain, testable expérimentalement. Diaconis a pu ainsi démontrer et vérifier qu'un jeu de 52 cartes est bien mélangé, c'est-à-dire mélangé de façon parfaitement aléatoire, après 7 mélanges américains successifs (voir Diaconis, 1992). En revanche, après seulement 2 ou 3 mélanges, il reste généralement dans le paquet final quelques suites de cartes ayant appartenu au paquet initial, ce qui suffit à un magicien imaginatif pour monter un tour ou à un tricheur pour forcer une distribution de carte avec une très forte probabilité de succès !

## Les mélanges parfaits

Avant de s'intéresser aux mélanges américains, Diaconis a étudié les mélanges parfaits (ou mélanges faro), utilisés par les magiciens pour des tours spectaculaires. Un mélange parfait est un mélange américain parfaitement réussi, en ce sens que la coupe partage le paquet initial en deux paquets de coupe égaux (si le jeu a un nombre pair de cartes) ou quasi-égaux (une carte de plus dans un des deux paquets si le jeu à un nombre impair de cartes) et que le mélange des deux paquets de coupe est parfaitement alterné, une carte d'un paquet succédant à une carte de l'autre dans le paquet final. On peut donc dire tout aussi bien que c'est un mélange américain complètement raté, puisqu'il n'a rien d'aléatoire ! Réussir un mélange parfait est en tout cas un tour extrêmement difficile. Seuls quelques prestidigitateurs, dont Diaconis, y parviennent (presque) à chaque coup :

**Voici, sous ce lien, un aperçu de son exécution concrète.....**

En revanche, on le réalise très facilement en comptant les cartes et en les mélangeant une par une, ce qui a peu d'intérêt pour le magicien ou le tricheur mais suffit au mathématicien expérimentateur.

## Mélanges de cartes et théorie des groupes

L'intérêt des mélanges parfaits tient à leurs propriétés mathématiques remarquables. Quelques notions préalables sont ici nécessaires. Généralisant la définition des mélanges parfaits, on admettra d'abord que le mélange résultant de deux mélanges parfaits successifs est encore un mélange parfait, ce qu'on écrira $M_1.M_2 = M$. Comme on peut toujours ramener un paquet à l'état initial en répétant un certain nombre de fois le même mélange, le mélange identique $id$, qui laisse toutes les cartes à la même place, est aussi un mélange parfait, ce qu'on écrira $M^n = id$. Il s'ensuit qu'à tout mélange parfait $M$ correspond le mélange parfait inverse $M^{-1}$, égal à $M^{n-1}$, tel que $M.M^{-1} = M^{-1}.M = id$. On peut résumer toutes ces propriétés en disant que les mélanges parfaits de $n$ cartes forment un groupe fini (lui-même sous-groupe du groupe $S_n$ de toutes les permutations possibles des $n$ cartes).

En fait, comme il existe deux manières distinctes de réaliser un mélange parfait de $n$ cartes, l'une extérieure, l'autre intérieure (out-shuffle noté $O$ et in-shuffle, noté $I$), selon que la première carte du paquet final appartienne à l'un ou à l'autre des paquets de coupe, tout mélange parfait est une suite finie de $O$ et de $I$. Donc, le groupe des mélanges parfaits est celui engendré par $O$ et $I$, autrement dit le plus petit sous-groupe de $S_n$ contenant $O$ et $I$. On le notera $\langle O, I \rangle$.

Diaconis, associé à Graham et Kantor, est parvenu pour tout $n$ pair à déterminer la structure de $\langle O, I \rangle$, qui dépend essentiellement de la valeur de $n/2$ *modulo* 4. Pour un jeu de 52 cartes, par exemple, $\langle O, I \rangle$, le sous-groupe a $26!2^{26}$ éléments et est isomorphe au groupe de Weyl $B_{26}$ ; pour un jeu de 24 cartes, cas très particulier, la structure du sous-groupe fait intervenir de façon surprenante un groupe bien connu des spécialistes, le groupe de Matthieu $M_{12}$.

Tout ceci ne nous explique pas pourquoi les mélanges parfaits intéressent autant les magiciens. Pour un prestidigitateur, l'important est la manière dont les cartes se déplacent dans le jeu. L'objectif est de faire aller, par des mélanges successifs, une carte à une certaine position déterminée à l'avance, par exemple au sommet du paquet, pour la faire apparaître à volonté. Or, justement, le groupe $\langle O, I \rangle$ est tel qu'on peut toujours passer une carte par une suite de $O$ et de $I$ d'une position donnée à une position quelconque dans le jeu (on dit qu'il agit transitivement). Encore faut-il, pour que cette propriété soit utile pratiquement, savoir construire une telle suite de $O$ et de $I$. C'est là que le mélange parfait révèle des propriétés étonnantes.

## Déplacer les cartes en les mélangeant

En 1957, l'informaticien et prestidigitateur amateur Alex Emsley découvrit expérimentalement qu'il suffit, pour obtenir la suite demandée, de numéroter en base 2 les cartes dans le paquet initial en commençant par le sommet du paquet. On donne ainsi à la première carte le numéro 0, à la deuxième le numéro 1, à la troisième le numéro 10 (2 en base 2), à la quatrième le numéro 11 (3 en base 2), et ainsi de suite. Pour amener la première carte à une position quelconque, il ne reste plus qu'à remplacer chaque 0 par $O$ et chaque 1 par $I$ dans le numéro exprimé en base 2 et à effectuer successivement les mélanges parfaits correspondants, en allant de la gauche vers la

droite. Cette propriété remarquable, qui peut se démontrer par des moyens élémentaires, fournit par la même occasion la preuve que le groupe $\langle O, I \rangle$ est transitif. Par exemple, pour déplacer la première carte à la position de la $12^{\text{e}}$ carte, 1101 en base 2, il suffit d'effectuer successivement les mélanges parfaits $I, I, O, I$. Ce « truc » permet aussi de réaliser de magnifiques tours de carte, à la condition, bien sûr, de savoir réaliser des mélanges parfaits, ce qui n'est pas donné à tout le monde.

Il est beaucoup plus difficile, malheureusement, de déterminer une suite de $O$ et de $I$ qui réalise l'opération inverse, c'est à dire qui permette de ramener la carte en haut du paquet. Diaconis, encore lui, a récemment donné une méthode systématique pour trouver dans chaque cas la plus courte suite de ce genre. Dans un jeu de 52 cartes, par exemple, la plus courte suite pour ramener une carte de la 30e position au sommet du paquet est $O, I, I, I, I$. Il est d'ailleurs possible, via une transformation, d'interpréter le déplacement d'une carte sous l'effet des mélanges successifs comme sa trajectoire sur une orbite discrète située dans l'espace des phases $[0, 1]$, ce qui fournit d'autres résultats. Ces méthodes sont néanmoins trop compliquées pour être utilisables en prestidigitation.

## Comment battre des cartes sans les mélanger

Parmi les sous-groupes de $\langle O, I \rangle$, on peut considérer, pour un $n$ donné, les groupes cycliques $\langle O \rangle$ et $\langle I \rangle$, engendrés respectivement par $O$ et par $I$. Leur étude est beaucoup plus facile. Limitons-nous au cas du sous-groupe $\langle O \rangle$ pour *n* pair. Son ordre, c'est-à-dire le nombre de ses éléments, est égal au nombre minimum de mélanges $O$ qui ramènent le paquet à son état initial. On montre facilement que ce nombre est égal à l'ordre de 2 modulo $n-1$, c'est-à-dire au plus petit entier $k$ pour lequel $2^k - 1$ est divisible par $n-1$. Le calcul montre que $k$ ne croît pas avec $n$ : dans un jeu de 13 cartes, il faut 12 mélanges extérieurs successifs pour revenir à l'état initial, alors que dans un jeu de 52 cartes, il en suffit de 8. On voit donc qu'un prestidigitateur, ou un joueur mal intentionné, peut battre 8 fois de suite un jeu de cartes sans en modifier l'ordre (alors que le même jeu, après 7 mélanges américains, est bien mélangé !). C'est cette propriété remarquable, connue depuis longtemps, qui paraît avoir justifié l'introduction du mélange parfait dans l'arsenal de l'escroc, puis du magicien.

## Les mélanges parfaits généralisés

Les mélanges parfaits à une seule coupe peuvent être généralisés à des mélanges parfaits à

plusieurs coupes. Par exemple, supposons qu'après avoir divisé par deux coupes un jeu de $3p$ cartes en trois paquets égaux, on reforme le jeu en prenant successivement et toujours dans le même ordre les premières cartes des trois paquets de coupe, puis les deuxièmes, et ainsi de suite jusqu'à épuisement desdits paquets. Selon l'ordre des paquets, on obtiendra ainsi six mélanges parfaits différents. On peut alors généraliser à ces mélanges parfaits d'un nouveau genre les résultats obtenus précédemment, en particulier pour l'étude des trajectoires de cartes. On verra plus loin que le tour des trois paquets, connus depuis bien longtemps, et ses généralisations utilisent des propriétés de ces mélanges parfaits.

## Mathématiques et magie

L'exemple des mélanges parfaits illustre assez bien ce qui peut rapprocher un joli problème de mathématiques d'un joli tour de magie : un énoncé simple, une réponse surprenante et, entre les deux, une démarche subtile. Les mathématiques y ajoutent le souci de la généralité, tandis qu'en magie l'important est surtout la virtuosité, car ce qui distingue toujours un beau tour d'un beau problème, y compris de récréation, c'est l'illusion qui doit accompagner son exécution. Cette illusion s'obtient généralement par le moyen d'une grande dextérité manuelle ou d'un discours trompeur, le plus souvent encore par les deux à la fois. Si l'on reprend le cas des mélanges parfaits, leur beauté en prestidigitation tient ainsi tout autant à l'extrême difficulté de leur exécution qu'aux effets surprenants qu'ils peuvent produire.

En s'inspirant de la magie, le mathématicien introduit ainsi dans son art des dimensions corporelles, matérielles et sociales qu'on pourrait croire lui être étrangères. Mais les mathématiques ne se sont jamais épanouies dans un univers éthéré, sans matière, ni corps, ni société. Au contraire, c'est au contact des réalités et en réponse aux besoins et aux désirs des hommes qu'elles ont pu naître et se développer. Comme l'histoire le prouve abondamment, elles sont le produit du pouvoir, de l'argent, du commerce et de la guerre, mais aussi du plaisir. Cette origine toute humaine se traduit dans l'activité mathématique elle-même : celle-ci se fait avec le corps, avec la main qui trace, les yeux qui voient et les doigts qui comptent, autant qu'avec l'esprit ; elle se fait en société, par l'éducation, la discussion, la communication et la publication, plutôt qu'en solitaire ; elle se fait enfin au moyen de multiples auxiliaires matériels, tels les objets, les figures, les instruments et les ordinateurs. Quant à la montée en abstraction qui caractérise une partie des mathématiques aujourd'hui, il s'agit d'un phénomène récent, qui n'exclut en rien des sociabilités et des matérialités spécifiques, comme le montre d'ailleurs l'intérêt suscité chez les mathématiciens eux-mêmes par les recherches de Diaconis sur les mélanges parfaits.

Dans les rapports entre magie et mathématiques intervient souvent un troisième domaine d'activité : le jeu. Parce que la magie est souvent un jeu et les mathématiques aussi quelquefois ; parce qu'entre le mathématicien et le magicien, le joueur oscille : il doit respecter les règles, comme le premier, mais il lui arrive de tromper, comme le second ; parce qu'enfin le tricheur et l'illusionniste peuvent tirer le même profit des mathématiques. L'exemple des mélanges de cartes illustrent parfaitement ces relations complexes entre les univers ludique, magique et mathématique.

## Jeux de hasard avec des cartes

Les cartes à jouer ont probablement été inventées en Chine sous la dynastie des Tang, avant de passer au Proche-Orient, d'où elles sont arrivées en Europe au XIV$^{e}$ siècle. Mais c'est au XVII$^{e}$ siècle que la passion des cartes s'y répand dans la société, en Italie, puis en France et ailleurs, en

même temps que les types de jeux se multiplient.

Parmi ces jeux, ceux de hasard occupent une place grandissante. Les dés, avec ou sans accessoires, dominent alors les jeux de hasard. Une réflexion mathématique commence à se développer pour ces jeux, qui sont aussi des jeux d'argent. Le but est de prévoir le gain ou de forcer le destin, avec des préoccupations morales, ou immorales, évidentes. Les premières recherches sur les probabilités émergent dans ce contexte, d'abord en Italie, puis ailleurs, avec Pascal, Huygens, Leibniz et beaucoup d'autres.

À partir des années 1660, les dés sont progressivement détrônés par les cartes, avec l'apparition de la bassette, du lansquenet et surtout du pharaon, tous nés en Italie et qui s'imposent à la cour de France.

## Le pharaon

Dans tous ces jeux de hasard, un banquier joue contre des joueurs, ou pontes, en nombre variable. Considérons le cas du pharaon, le plus populaire des jeux de hasard au XVIII$^{e}$ siècle, qui se joue avec 52 cartes. Les joueurs misent sur une ou plusieurs cartes de leur choix, supposons le roi (la couleur est indifférente). À chaque tour (ou taille), le banquier tire deux cartes, la première pour lui, la deuxième pour les pontes ; si sa carte est un roi, il gagne et il remporte les mises ; si celle des pontes est un roi, il perd et les pontes doublent leur mise. Si le roi sort deux fois de suite (c'est un doublet), le banquier gagne la moitié de la mise des pontes. La partie continue jusqu'à épuisement du jeu (il y a donc 26 tailles). Les joueurs ont la possibilité de miser à tout moment entre deux tailles. Enfin, le banquier ne peut pas perdre la dernière taille, car la 52e carte, qui est pour le ponte, est toujours déclarée nulle. Les doublets et la dernière taille assurent au banquier un avantage léger mais certain, que les mathématiciens du XVIII$^{e}$ siècle (Montmort, Euler) ont pu calculer. C'est pourquoi les grands joueurs de pharaon, comme Casanova, prennent toujours la place de banquier.

## Tricher en mélangeant

Au XVIII$^{e}$ siècle, le pharaon fait fureur à la cour et à la ville et les escrocs sont légion (on les appelle les « Grecs »). Pour tricher au pharaon, il leur suffit, en principe au moins, de placer à un rang impair la carte sur laquelle le ponte a misé. Plus facile à dire qu'à faire en cours de jeu. Mais si le ponte est naïf, l'opération peut réussir avec de l'habileté et des complices. Une façon radicale de tricher est bien sûr de préparer le jeu de cartes à l'avance, par exemple pour multiplier les doublets. La règle du pharaon prévoit qu'en début de partie, les cartes ont été bien mélangées, mais un faux mélange peut produire l'ordre désiré. C'est dans ce contexte que l'idée des mélanges parfaits paraît avoir émergé. La première mention d'un tel mélange, d'après Diaconis, se trouve dans un ouvrage anglais sur les jeux de cartes publié en 1726. L'auteur anonyme, qui l'évoque en trois lignes à propos du basset, le considère cependant comme honnête (fair). Il faut attendre le XIX$^{e}$ siècle pour que le mélange parfait soit explicitement décrit comme un moyen de tricher au pharaon, ou plutôt à une variante de ce jeu, le faro, qui connaît alors un grand succès aux Etats-Unis. Dès la fin du siècle, les prestidigitateurs s'en sont emparés pour en faire la base de tours de magie.

(Fin de la première partie, seconde partie à suivre.....)

## Références, pour aller plus loin

**E. Belmas**, *Jouer autrefois. Essai sur le jeu dans la France moderne*, Champ Vallon, 2006.

**S. Brent Morris**, *Magic Tricks, Card Shuffling and Dynamic Computer Memories*, The Mathematical Association of America, 1998.

**P. Diaconis, R. Graham et W. M. Kantor**, ***The Mathematics of Perfect Shuffle*** , *Advances in Applied Mathematics*, 4 (2) (1983) p. 175–196.

**P. Diaconis**, ***Trailing the Dovetail Shuffle to its Lair***, *Annals of Applied Probability*, (2) (1992), p. 294-313.

**P. Diaconis et R. Graham**, ***The Solutions to Emsley's Problem***, *Math Horizons*, 14 (fév. 2007), p. 22-27.

**J.-M. Lhôte**, *Histoire des jeux de société : géométries du désir*, Flammarion, 1994.

**L. Mazliak**, ***Printemps ergodique***, Notes de cours (ENS), 6 et 13 décembre 2006.

## Notes

[▲1] Dans cet article, la magie signifie toujours la magie blanche, c'est-à-dire l'art de l'illusion ou prestidigitation.

### Crédits images

Pour citer cet article : **Bruno Belhoste**, **Mélanges de cartes et mathématiques**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2009. En ligne, URL : **http://images.math.cnrs.fr/Melanges-de-cartes-et.html**