HAL
open science

Trois mille deux cent soixante-quatre...

Etienne Ghys

To cite this version:

Etienne Ghys. Trois mille deux cent soixante-quatre.... Images des Mathématiques, 2008, http://images.math.cnrs.fr/Trois-mille-deux-cent-soixante.html. hal-00583356

HAL Id: hal-00583356

https://hal.science/hal-00583356v1

Submitted on 5 Apr 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Trois mille deux cent soixante-quatre…

To print higher-resolution math symbols, click the
Hi-Res Fonts for Printing button on the jsMath control panel.

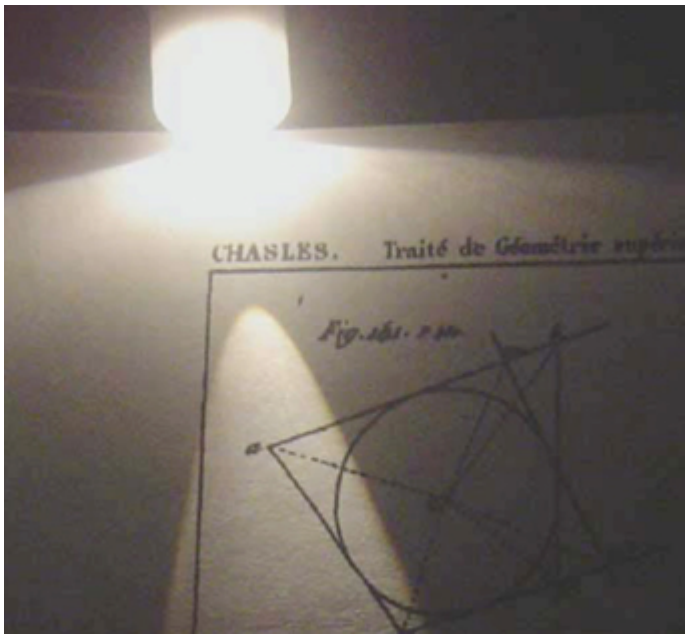
Comment Jean-Yves a récemment précisé un théorème de géométrie

Le 5 novembre 2008, par **Étienne Ghys**

Directeur de recherche CNRS, École Normale Supérieure de Lyon (**page web**)

UNE lampe-torche éclaire des zones limitées par des courbes qu'on appelle des *coniques*. Elles prennent diverses formes dont les noms sont plus ou moins familiers : *ellipses*, *paraboles* et *hyperboles*.

L'étude de ces courbes remonte aux grecs anciens (Appolonius, 3ème siècle avant notre ère) et elle a conservé un rôle central en géométrie pendant des siècles. Jusqu'en 1970, une bonne partie du programme de mathématiques des classes terminales était consacrée à ces courbes.



Intersection de coniques

Deux coniques peuvent se couper en 0, 1, 2, 3 ou 4 points comme le montrent ces figures :

Les mathématiciens considèrent que deux coniques se coupent toujours en 4 points, quitte à admettre que certains d'entre eux sont « imaginaires », ou « à l'infini » ou même « multiples » ! Jeu de mots ? Peut-être ! Mais ceux qui connaissent les nombres complexes se souviennent : on apprend au collège qu'il n'y a pas de nombre dont le carré est –1, mais une fois arrivé en terminale, on apprend l'existence d'un mystérieux nombre i « purement imaginaire » dont le carré est –1…

Pauvre Chasles !

Les lycéens connaissent la « relation de Chasles » : si A,B,C sont trois points sur une droite alors AB + BC = AC . Cette relation est certes utile mais elle ne rend pas justice à ce pauvre Chasles qui mérite une meilleure reconnaissance. De plus, la mémoire de Chasles est entachée d'une circonstance malheureuse : le brave savant s'est laissé abuser pendant de nombreuses années par un faussaire qui lui vendait à prix d'or des « manuscrits anciens » incroyables, dont une lettre d'amour de Cléopâtre à César, en français !!! Mais Michel Chasles était avant tout l'un des plus grands géomètres du 19ème siècle, « l'homme pour qui les coniques n'avaient pas de secrets », « l'empereur de la géométrie ». Nous allons lui rendre justice…

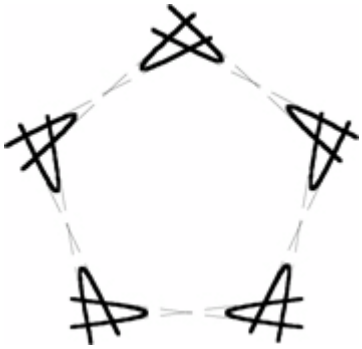
Un théorème difficile de Chasles (1864)

On sait depuis très longtemps que par 5 points du plan passe une unique conique. Au milieu du 19ème siècle, les géomètres se lancent un défi. Étant données 5 coniques dans le plan, combien peut-on tracer de coniques qui leur sont tangentes ? La question n'est pas facile… les solutions fausses sont nombreuses… Steiner affirmait à tort que la réponse est 7776. De Jonquières ne touvait pas le même résultat, mais il n'osait pas le publier, tant la réputation de Steiner était grande ! Finalement, Chasles trouve la solution correcte en 1864 : **Il y a 3264 coniques tangentes à 5 coniques données.** Bien sûr, Chasles travaille avec les points imaginaires et il est possible que parmi ces 3264 coniques certaines (peut-être toutes) soient de mythiques coniques

imaginaires et n'existent donc pas « réellement ». Tout ce qu'on peut dire à coup sûr, c'est qu'il y a au plus 3264 coniques qui sont tangentes à 5 coniques données.

Un exemple difficile de 1997

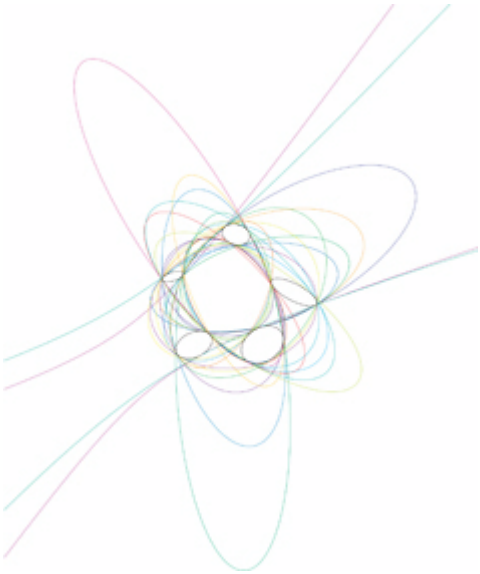
En 1997, trois mathématiciens, Ronga, Tognoli et Vust, ont réussi un tour de force. Ils ont trouvé un exemple de 5 coniques réelles bien choisies, telles que l'intégralité des 3264 coniques de Chasles existent bel et bien : elles sont « réelles ». C'est le cas pour les 5 hyperboles sur la figure suivante… Mais il ne s'agit que d'un **exemple**. Pour d'autres configurations des 5 coniques, combien parmi les 3264 sont réelles ?



Un joli théorème de 2005 : au moins 32 sur les 3264

Jean-Yves Welschinger, chercheur CNRS à Lyon, vient de montrer un très joli théorème. On considère 5 ellipses dans le plan dont les intérieurs ne se rencontrent pas, comme sur la figure. Alors, **parmi les 3264 coniques de Chasles, au moins 32 existent réellement !**

Voici une figure où on voit les 5 ellipses accompagnées de 32 autres qui leur sont tangentes.



Quatre (bonnes ?) raisons qui font que ce théorème est intéressant

- La démonstration est vraiment jolie. Elle a sans aucun doute procuré un vif plaisir esthétique à Jean-Yves, ainsi qu'à ses lecteurs…
- Ce théorème complète et éclaire un théorème qui date de près de 150 ans.
- La preuve utilise des méthodes extrêmement récentes en mathématiques fondamentales, encore inaccessibles il y a dix ans, qui ont bénéficié de l'aide indispensable de physiciens théoriciens ! Il ne s'agit pas d'un théorème que Chasles aurait pu montrer, mais le résultat d'un travail collectif d'une communauté de mathématiciens qui ont accumulé de nouvelles idées depuis plusieurs siècles.
- De nouvelles questions se posent : peut-on généraliser ce résultat pour d'autres configurations des 5 coniques ? à d'autres types de courbes, à des surfaces ? On sait par exemple que le nombre de courbes de degré 4 tangentes à 14 courbes données de degré 4 est 23 011 191 144. Jean-Yves ou l'un de ses successeurs sauront-t-ils relever le défi et déterminer combien d'entre elles sont réelles ???

Une amusette ?

Cet article peut laisser l'impression que le mathématicien Jean-Yves s'est intéressé à un problème un peu poussiéreux et qui ressemble plus à une énigme ou une amusette qu'à un vrai problème sérieux et profond. Ce serait une erreur, dont l'auteur de cet article serait entièrement responsable. La Science cherche à trouver des solutions à des problèmes d'une variété extraordinaire. Souvent, pas toujours, ces problèmes s'expriment sous la forme d'équations qui peuvent porter des noms divers, parfois barbares : équations algébriques, équations différentielles, équations aux dérivées partielles, équations diophantiennes etc. Presque toujours, écrire l'équation n'est pas trop difficile mais ce qui est autrement plus difficile, c'est de la résoudre c'est-à-dire de trouver les solutions ! Souvent même, ce qui importe est de savoir si le problème a une solution, peut-être même quitte à ne pas la rendre explicite. Mettre en place des méthodes pratiques qui permettent non pas de trouver les solutions mais au moins de les

compter, voilà un enjeu majeur.

Au fil du développement des mathématiques, des critères de plus en plus puissants ont permis de répondre à ce genre de questions pour des équations de plus en plus générales. Par exemple, on apprend au lycée qu'une équation du premier degré à une inconnue a une solution, qu'une équation du second degré a deux solutions (en général complexes), et à l'université qu'une équation du n-ème degré a n solutions (complexes) en général. Trouver les solutions d'une équation qui vous est donnée, disons de degré 1000, n'est vraiment pas facile ! mais savoir a priori qu'il y a 1000 solutions (et donc au moins une !), voilà une information utile pour le scientifique. La discussion que nous avons eue dans cet article consistait à étudier le nombre de solutions réelles d'un système d'équations de grands degrés avec beaucoup d'inconnues. C'est le domaine classique de la géométrie algébrique qu'on appelle traditionnellement la « théorie de l'intersection ». Il y a une vingtaine d'années des mathématiciens-physiciens Gromov-Seiberg-Witten ont mis au point des techniques extrêmement puissantes pour compter les solutions d'équations bien plus générales encore, qui sortent du cadre des braves équations entre polynômes... mais ils comptaient des solutions complexes. La contribution de Jean-Yves s'inscrit dans cette démarche, et cherche à compter le nombre de solutions réelles à un système d'équations très général. Bien sûr, compter les coniques tangentes à cinq coniques données n'est pas la motivation principale : ça n'aurait pas grand intérêt ! Et d'ailleurs, ce n'était pas non plus la motivation de Chasles, c'est sûr ! Il s'agit d'être capable face à un problème difficile de dire « Je ne connais pas les solutions du problème, mais je sais combien il y en a ». Attaquer une question majeure de ce genre sur un exemple simple mais significatif, c'est bien souvent la démarche du mathématicien.

Tout reste à faire…

Pour en savoir plus

On pourra lire **l'article Jean-Yves Welschinger** dans Images des Mathématiques.

Cet article a été écrit initialement pour une brochure accompagnant l'exposition « Pourquoi les Mathématiques » à Lyon en 2006.

Crédits images

Pour citer cet article : **Étienne Ghys**, **Trois mille deux cent soixante-quatre…**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2008. En ligne, URL : `http://images.math.cnrs.fr/Trois-mille-deux-cent-soixante.html`