



HAL
open science

Écoulement de Klinkenberg et diffusion de Knudsen en milieu à double porosité : mise en évidence des effets d'échelles

J. Chastanet, Pascale Royer, J.L. Auriault

► **To cite this version:**

J. Chastanet, Pascale Royer, J.L. Auriault. Écoulement de Klinkenberg et diffusion de Knudsen en milieu à double porosité : mise en évidence des effets d'échelles. Microstructures et propriétés des matériaux, 2005, Paris, France. hal-00583016

HAL Id: hal-00583016

<https://hal.science/hal-00583016>

Submitted on 6 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Écoulement de Klinkenberg et diffusion de Knudsen en milieu à double porosité : mise en évidence des effets d'échelles.

J. Chastanet, P. Royer & J.-L. Auriant

Laboratoire "Sols, Solides, Structures" (UJF, INPG, CNRS)
BP 95 - 1025 rue de la piscine
38041 GRENOBLE Cedex
pascal.royer@hmg.inpg.fr

Résumé :

L'objectif de cette étude est de modéliser les écoulements de gaz à faible pression dans les milieux poreux et fracturés. En fonction du taux de raréfaction du gaz, l'écoulement peut être un écoulement de Klinkenberg ou de Knudsen. Nous considérons un volume élémentaire représentatif constitué d'une fracture entourée d'une matrice poreuse. Les deux régimes d'écoulement sont successivement étudiés dans la matrice poreuse, induisant un écoulement avec ou sans glissement du gaz sur les parois de la fracture. Dans chaque cas, l'homogénéisation conduit à des modèles macroscopiques dont la forme est similaire à ceux mis en évidence précédemment en régime de Darcy. Le régime d'écoulement influence alors les paramètres effectifs du modèle, les termes de couplage entre les échelles et les domaines de validité des modèles.

Mots-clefs : écoulement de gaz, homogénéisation, double porosité, effet Klinkenberg, nombre de Knudsen

1 Introduction

En général l'écoulement d'un gaz dans un milieu poreux est régi par la loi de Darcy. Cependant lorsque la pression du gaz est faible, l'écoulement de gaz est plus rapide que ce que prédit la loi de Darcy ; l'effet Klinkenberg intervient. Ceci provient du fait que, à faible pression, le libre parcours moyen des molécules de gaz λ peut atteindre la taille des pores l . Ainsi à l'échelle des pores, les molécules de gaz glissent sur la paroi solide au lieu d'y adhérer (6) :

$$\mathbf{v} = c\lambda(\mathbf{t}_1 \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{t}_1 \quad \text{sur la paroi,} \quad (1)$$

où \mathbf{v} est la vitesse du gaz, c est une constante et \mathbf{t}_1 et \mathbf{n} sont les vecteurs unitaires tangent et normal à la paroi. Afin de décrire un tel écoulement, Klinkenberg a introduit le concept de perméabilité au gaz (2). La loi de Darcy est alors modifiée comme suit :

$$\mathbf{v} = -\frac{K}{\mu} \nabla p, \quad K = k \left(1 + \frac{b}{p}\right), \quad (2)$$

où K est la perméabilité au gaz, μ est la viscosité, k est la perméabilité intrinsèque au matériau, b est une constante et p est la pression du gaz. L'occurrence de l'effet Klinkenberg est déterminé par la valeur du nombre de Knudsen $Kn = \lambda/l$, appelé aussi taux de raréfaction. Ainsi lorsque $Kn \ll 1$ la loi de Darcy est valable tandis que lorsque $Kn \sim 1$ l'effet Klinkenberg doit être pris en compte. Au delà, pour $Kn \gg 1$, le mode de transport devient diffusif et la loi de diffusion de Knudsen s'applique (3) :

$$\mathbf{v} = -\frac{D_{Kn}}{p} \nabla p, \quad (3)$$

où D_{Kn} est le coefficient de diffusion de Knudsen. Notons que le gaz étant très raréfié dans ce cas, la description continue du gaz à l'échelle des pores n'est plus possible.

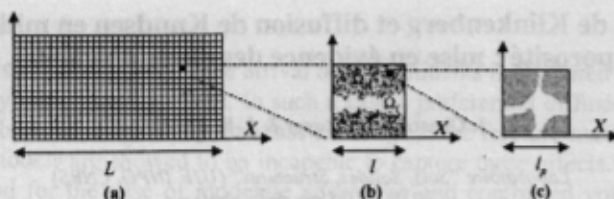


FIG. 1 – Schéma du milieu poreux et fracturé aux trois échelles : (a) volume macroscopique ; (b) cellule périodique à l'échelle des fractures ; (c) cellule périodique à l'échelle des micropores.

L'objectif de cette étude est d'étudier l'influence de l'effet Klinkenberg et de la diffusion de Knudsen sur l'écoulement d'un gaz dans un milieu poreux et fracturé. Pour cela, on utilise la méthode d'homogénéisation par développements asymptotiques introduite par Bensoussan *et al* (1) et Sanchez-Palencia (5). L'échelle microscopique considérée est celle des fractures. La description de la physique à cette échelle permet, en appliquant la méthode, d'obtenir le(s) comportement(s) macroscopique(s) du milieu. Après une brève présentation du milieu (section 2), nous rappelons l'étude de Royer & Auriault (4) sur la modélisation des écoulements de gaz en régime de Darcy dans les milieux à double porosité (section 3). La partie suivante (section 4) est dédiée au recensement des différents régimes d'écoulement (Klinkenberg, Knudsen...) qui peuvent prendre place dans les deux structures poreuses du milieu (pores et fractures) ; on en déduit trois situations d'écoulement à étudier. Pour chacune, le (ou les) modèle(s) macroscopique(s) obtenu(s) par homogénéisation sont ensuite présenté(s) et comparé(s) aux modèles de Royer & Auriault (section 5).

2 Problématique

Considérons un milieu à double porosité saturé par un gaz à faible pression. Le milieu est constitué d'une matrice microporeuse dont la taille caractéristique des micropores est l_p et d'un réseau de fractures de taille caractéristique l . Un gradient de pression est appliqué à ce milieu provoquant ainsi un écoulement de gaz isotherme et quasi-statique. Notons L la taille caractéristique de l'échantillon macroscopique ou de l'écoulement. Pour que le milieu soit à double porosité et que l'homogénéisation soit possible, deux conditions de séparation d'échelles doivent être vérifiées :

$$\alpha = \frac{l_p}{l} \ll 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1.$$

Notons :

$$\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon^n) \quad n > 0. \quad (4)$$

À l'échelle des fractures, dite échelle microscopique, le milieu est périodique de période Ω et sa taille caractéristique est celle des fractures l . La matrice poreuse et les fractures occupent les domaines Ω_m et Ω_f sur cette période et leur interface est notée Γ (figure 1). La matrice poreuse est supposée homogène sur la période.

Le régime d'écoulement dans la matrice poreuse (Klinkenberg ou Knudsen) est conditionné par l'ordre de grandeur du nombre de Knudsen dans les micropores de la matrice. Parallèlement, le régime d'écoulement dans les fractures (avec ou sans glissement à la paroi) est déterminé par l'ordre de grandeur du nombre de Knudsen dans les fractures. Ces deux nombres s'écrivent :

$$Kn_p = \frac{\lambda_p}{l_p} \quad \text{dans la matrice,} \quad \text{et} \quad Kn_f = \frac{\lambda_f}{l} \quad \text{dans les fractures,}$$

où λ_i est le libre parcours moyen dans le domaine Ω_i . On peut raisonnablement supposer que les libres parcours moyen λ_p et λ_f sont du même ordre de grandeur, on en déduit que :

$$Kn_f = \mathcal{O}\left(\frac{l_p}{l} Kn_p\right) = \mathcal{O}(\alpha Kn_p). \quad (5)$$

Cette relation indique que si on fixe le régime d'écoulement dans la matrice poreuse, celui-ci conditionne le régime d'écoulement dans la fracture. Posons :

$$Kn_p = \mathcal{O}(\alpha^q). \quad (6)$$

3 Régime de Darcy dans la matrice poreuse, $Kn_p \leq \mathcal{O}(1)$

Il s'agit des conditions de l'étude de Royer & Auriault (4), nous en présentons ici un résumé.

Nous supposons que l'écoulement est barotrope et le gaz vérifie une équation d'état linéaire ($\rho = Ap$, où ρ est la masse volumique du gaz et A est un paramètre indépendant de la pression p). Dans la matrice, l'écoulement est supposé régi par la loi de Darcy. L'écoulement correspondant dans les fractures est décrit par l'équation de Navier-Stokes simplifiée et une condition d'adhérence à la paroi. La description locale (à l'échelle des fractures) est la suivante :

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v}_f + (\nu + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_f) - \nabla p_f = 0 \quad \text{dans } \Omega_f, \quad (7)$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla \cdot (p_f \mathbf{v}_f) = 0 \quad \text{dans } \Omega_f, \quad (8)$$

$$\mathbf{v}_m = -\frac{k_m}{\mu} \nabla p_m \quad \text{dans } \Omega_m, \quad (9)$$

$$\phi_m \frac{\partial p_m}{\partial t} + \nabla \cdot (p_m \mathbf{v}_m) = 0 \quad \text{dans } \Omega_m, \quad (10)$$

$$p_f = p_m \quad \text{sur } \Gamma, \quad (11)$$

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_m \quad \text{sur } \Gamma, \quad (12)$$

où \mathbf{v}_i et p_i sont respectivement la vitesse et la pression du gaz dans le milieu Ω_i , ν et μ sont les viscosités et k_m et ϕ_m sont respectivement la perméabilité intrinsèque et la porosité de la matrice poreuse. Dans (4), les auteurs montrent que cette description locale conduit à trois modèles macroscopiques dont les domaines de validité sont définis par l'ordre de grandeur relatif des rapports d'échelles *via* la valeur de n (voir équation (4)). Les trois modèles sont les suivants :

Modèle I, modèle de simple porosité avec terme de stockage ($n < 1$)

$$\phi^* \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(p \frac{\tilde{K}_f}{\mu} \nabla p \right) = 0, \quad (13)$$

où ϕ^* est la porosité effective de l'ensemble du milieu poreux fracturé et \tilde{K}_f est la perméabilité effective du réseau de fractures. Il s'agit d'un modèle à simple porosité (modèle à un champ : $p_f = p_m$), mais où l'influence de la matrice poreuse intervient dans le terme de porosité. On dit alors que la matrice joue le rôle de réservoir de fluide.

Modèle II, modèle de double porosité avec effets de mémoire ($n = 1$)

$$\phi_f \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{\partial \langle p_m \rangle}{\partial t} - \nabla \cdot \left(p_f \frac{\tilde{K}_f}{\mu} \nabla p_f \right) = 0, \quad (14)$$

$$\begin{cases} \phi_m \frac{\partial p_m}{\partial t} - \nabla \cdot (p_m \frac{k_m}{\mu} \nabla p_m) = 0 & \text{dans } \Omega_m \\ p_m = p_f & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (15)$$

où ϕ_f et \tilde{K}_f sont respectivement la porosité et la perméabilité effective du réseau de fractures. Il s'agit d'un modèle à double porosité (modèle à deux champs : $p_m \neq p_f$) non-linéaire. Il est fortement couplé dans le sens où l'équation (14), définie à l'échelle macroscopique, et le système (15), défini à l'échelle des fractures, sont liés et indique la présence d'effets de mémoire.

Modèle III, modèle de simple porosité ($n > 1$)

$$\phi_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - \nabla \cdot (p_f \frac{\tilde{K}_f}{\mu} \nabla p_f) = 0. \quad (16)$$

Il s'agit du modèle à simple porosité que l'on obtiendrait si la matrice était non-poreuse. L'écoulement dans la matrice n'a aucune influence dans ce cas.

4 Régimes d'écoulement lorsque la loi de Darcy n'est plus valable, $Kn_p > \mathcal{O}(1)$

Régimes d'écoulement dans la matrice. Lorsque $Kn_p > \mathcal{O}(1)$, deux régimes d'écoulement sont envisageables dans la matrice poreuse : régime de Klinkenberg (pour $1 < Kn_p < \mathcal{O}(\alpha^{-1})$) ou régime de Knudsen (pour $Kn_p \geq \mathcal{O}(\alpha^{-1})$).

Régimes d'écoulement dans les fractures. A l'échelle des fractures, dite échelle locale, trois régimes d'écoulement peuvent *a priori* être envisagés dans les fractures : i) écoulement sans glissement si $Kn_f \leq \varepsilon$; ii) écoulement avec glissement si $\varepsilon \ll Kn_f \leq 1$; iii) écoulement libre de Knudsen si $Kn_f > 1$.

Combinaisons de régimes d'écoulement. Comme il n'existe pas de modèle continu pour décrire l'écoulement libre de Knudsen dans les fractures, on restreint l'étude au cas $Kn_f \leq \mathcal{O}(1)$. D'après la relation (5), cette dernière condition restreint le domaine de validité du régime de Knudsen dans la matrice : $Kn_p = \mathcal{O}(\alpha^{-1})$. Compte tenu des estimations ci-dessus et des définitions (4) et (6) des indices n et q , on déduit les différentes combinaisons de régimes possibles :

Régime dans la matrice :

Régime dans la fracture :

$$\begin{array}{l} \text{Klinkenberg si } 1 < Kn_p \ll \alpha^{-1} \\ \text{Knudsen si } Kn_p = \mathcal{O}(\alpha^{-1}) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Écoulement sans glissement si } n \geq \frac{1}{1+q} \\ \text{Écoulement avec glissement si } \begin{cases} n \leq 1 \\ \text{ou} \\ 1 < n < \frac{1}{1+q} \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \text{Écoulement avec glissement}$$

5 Modèles macroscopiques

Ainsi nous considérons trois situations d'écoulement : i) régime de Klinkenberg dans la matrice - écoulement avec adhérence dans les fractures ; ii) régime de Klinkenberg dans la matrice - écoulement avec glissement dans les fractures ; iii) régime de Knudsen dans la matrice - écoulement avec glissement dans les fractures. Pour chaque cas, on précise les modifications à apporter par rapport à la description locale en régime de Darcy (7)-(12).

5.1 Effet Klinkenberg dans la matrice et écoulement sans glissement dans les fractures

Dans ce cas, la perméabilité intrinsèque k_m est remplacée par la perméabilité au gaz $K_m = k_m \left(1 + \frac{b}{p_m}\right)$ dans la description locale (7)-(12). L'homogénéisation conduit alors à un unique modèle macroscopique :

Modèle III, modèle de simple porosité ($n \geq \frac{1}{q+1}$). L'écoulement est décrit par l'équation (16). Ainsi l'effet Klinkenberg dans la matrice n'a aucune influence à l'échelle macroscopique.

5.2 Effet Klinkenberg dans la matrice et écoulement avec glissement dans les fractures

Comme précédemment, la perméabilité intrinsèque k_m doit être remplacée par la perméabilité au gaz K_m dans la description locale. De plus, la condition de glissement (1) doit être ajoutée à la condition de continuité des vitesses sur Γ (équation (12)) : $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_m - c_f \lambda_f (\mathbf{t}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) \mathbf{t}_1$. L'homogénéisation conduit alors à trois modèles macroscopiques qui ont la même forme que les modèles en régime de Darcy :

Modèle I_k, modèle de simple porosité avec terme de stockage ($n < \frac{2}{q+2}$). Le modèle à la forme de l'équation (13).

Modèle II_k, modèle de double porosité avec effets de mémoire ($n = \frac{2}{q+2}$). Le modèle est similaire au modèle II (équations (14)-(15)). Ce modèle se distingue par l'expression du système local définissant p_m ; dans (15), la perméabilité intrinsèque k_m est remplacée par la perméabilité au gaz K_m .

Modèle III_k, modèle de simple porosité ($\frac{2}{q+2} < n < \frac{1}{q+1}$). Il a la forme du modèle (16).

Ces modèles diffèrent des modèles I, II et III par l'expression du tenseur de perméabilité effective : il vérifie maintenant la loi de Klinkenberg

$$\tilde{K}_{f_j} = \tilde{K}_f \left(\tilde{I} + \frac{\beta}{p} \tilde{J} \right), \quad (17)$$

où \tilde{I} est le tenseur identité et \tilde{J} est un tenseur positif indépendant de la pression.

5.3 Effet Knudsen dans la matrice et écoulement avec glissement dans les fractures

La loi de Darcy (9) est remplacée par la loi de diffusion de Knudsen (3). Comme dans le cas précédent, la condition de glissement est ajoutée à la condition aux limites (12). On obtient à nouveau trois modèles, de même forme que les modèles I, II et III :

Modèle I_k^{}*, modèle de simple porosité avec terme de stockage ($n < 2$).

Modèle II_k^{}*, modèle de double porosité avec effets de mémoire ($n = 2$). Ici, la perméabilité k_m/μ dans le système (15) est remplacée par le coefficient de diffusion D_{Kn}/p_m .

Modèle III_k^{}*, modèle de simple porosité ($n > 2$).

Cette fois le tenseur de perméabilité effective \tilde{K}_f dépend de la pression mais ne vérifie plus la loi de Klinkenberg :

$$\tilde{K}_{f_j} = \mathcal{F}(p) \quad (18)$$

où \mathcal{F} est une fonctionnelle de p .

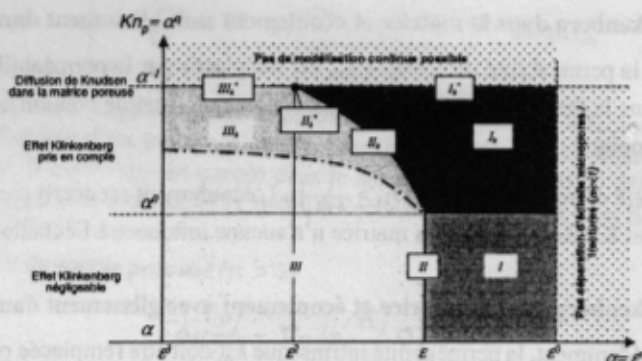


FIG. 2 – Domaines de validité des modèles d'écoulement en double porosité en fonction des ordres de grandeur relatifs de Kn_p et α .

6 Conclusion

Cette étude permet de mettre en évidence l'influence du régime de Klinkenberg et de Knudsen sur les écoulements de gaz en milieu poreux et fracturé.

Trois situations ont été étudiées : i) écoulement de Klinkenberg dans la matrice et écoulement sans glissement dans les fractures ; ii) écoulement de Klinkenberg dans la matrice et écoulement avec glissement dans les fractures ; iii) diffusion de Knudsen dans la matrice et écoulement avec glissement dans les fractures. Quelque soit le cas, les modèles macroscopiques ont la forme d'un des trois modèles mis en évidence en régime de Darcy. Les régimes d'écoulement influencent l'expression du tenseur de perméabilité effective (expressions (17) et (18)) ainsi que le terme d'interaction des échelles via les systèmes locaux définissant p_m dans les modèles de type II. Enfin l'influence majeure concerne les domaines de validité de ces modèles puisqu'ils dépendent non seulement des ordres de grandeur relatifs des paramètres de séparation des échelles mais également du nombre de Knudsen dans la matrice (voir figure 2).

Références

- [1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.
- [2] L.-J. Klinkenberg. The permeability of porous media to liquids and gas. *Drilling and Production Practice, American Petroleum Inst.*, pages 200–213, 1941.
- [3] M. Knudsen. Die gesetze der molecularströmung und der inneren reibungsströmung der gase durch röhren. *Annalen der Physik*, pages 75–130, 1909.
- [4] P. Royer and J.-L. Auriault. Transient quasi-static gas flow through a rigid porous medium with double porosity. *Transport in porous media*, 17 :33–57, 1994.
- [5] E. Sanchez-Palencia. Non-homogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag Berlin*, 127, 1980.
- [6] E. Skjetne and J.-L. Auriault. Homogenization of wall-slip gas flow through porous media. *Transport in Porous Media*, 36 :293–306, 1999.