



# Simulations numériques de l'évolution des fonds et effet du mélange turbulent sur le transport sédimentaire: Application au remplissage d'une fosse d'extraction

El-Amine Cherif, Rafik Absi, Abdellatif Ouahsine, Philippe Sergent

## ► To cite this version:

El-Amine Cherif, Rafik Absi, Abdellatif Ouahsine, Philippe Sergent. Simulations numériques de l'évolution des fonds et effet du mélange turbulent sur le transport sédimentaire: Application au remplissage d'une fosse d'extraction. IXèmes Journées Nationales Génie Côtier - Génie Civil, Sep 2006, Brest, France. pp.167-177. hal-00582673

**HAL Id: hal-00582673**

**<https://hal.science/hal-00582673>**

Submitted on 4 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Simulations numériques de l'évolution des fonds et effet du mélange turbulent sur le transport sédimentaire: Application au remplissage d'une fosse d'extraction

<sup>(a)</sup>El-Amine Cherif, <sup>(b)</sup>Rafik Absi, <sup>(c)</sup>Abdellatif Ouahsine, <sup>(d)</sup>Philippe Sergent  
Laboratoire Roberval, UMR-CNRS 6066,  
<sup>(a)</sup> (Doctorant), <sup>(c)</sup>(Professeur), UTC, B.P. 20529, 60205 Compiègne Cedex.  
<sup>(b)</sup>(Enseignant chercheur) EBI, IPSL, 32 Bd du Port, 95094 Cergy-Pontoise.  
<sup>(d)</sup>(Ingénieur chercheur) CETMEF, 2 Bd Gambetta, 60200 Compiègne.

## Résumé

Le profil linéaire de longueur de mélange  $l_m = \kappa z$  classiquement utilisé, ne permet pas d'obtenir le profil de vitesse logarithmique observé expérimentalement, et sa validité est limitée aux domaines de faible rugosité (conditions aux limites du type 'fond lisse'). Dans ce travail, nous proposons trois types de profils de longueur de mélange  $l_m(z)$  ainsi que les profils de vitesses de mélange associés. Les résultats obtenus, sont testés sur des cas académiques et comparés aux résultats expérimentaux de remplissage d'une fosse d'extraction issus des essais présentés dans le projet Européen Sandpit.

**Mots clés:** sédiments, turbulence, diffusion, mélange, éléments finis

## Abstract

The linear mixing length profile  $l_m = \kappa z$  classically used, does not allow to obtain the logarithmic profile of the velocity observed in experiments, and its validity is limited to the fields of low roughness (boundary conditions of the type 'smooth bed'). In the present paper, we propose three types of mixing length profiles  $l_m(z)$  as well the associated mixing velocities. The obtained results are tested on academic cases and compared with experimental results of filling of an extraction pit resulting from the tests presented in the European project Sandpit.

**Keywords:** sediments, turbulence, diffusion, mixing, finite elements

## 1 Introduction

La modélisation des processus de transport en milieux géophysiques est liée à la capacité des modèles numériques à prendre en compte de vrais paramètres physiques liés à la turbulence et à la vitesse de mélange turbulent. Souvent ces modèles numériques ne prennent pas en compte la distribution réelle de la vitesse de mélange, qui expérimentalement donne une décroissance exponentielle.

Dans ce travail, on se propose d'aider à améliorer cette modélisation en proposant de nouveaux modèles pour la description du mélange turbulent avec des outils phénoménologiques

(sans hypothèse arbitraire) accessibles en pratique. Le but de ce travail est de valider ces modèles de turbulence puis de les calibrer à partir de données de mesures afin de fournir aux ingénieurs des outils fiables et précis. L'accent est donc mis sur l'amélioration des paramètres physiques liés à la turbulence, en proposant des profils de la vitesse de mélange qui permettent de mieux estimer la concentration de sédiments en suspension lors du processus de transport.

Un modèle numérique aux éléments finis est alors utilisé pour modéliser les processus de transport sédimentaire sous les effets conjugués de la suspension et du charriage. Deux cas d'applications sont considérés. (i) Le premier cas correspondant à un cas test académique, a pour objet de simuler l'érosion d'un fond alluvionnaire initialement non chargé et soumis à un courant uniforme. (ii) Le deuxième cas est une application au remplissage d'une fosse d'extraction pour illustrer la diffusion et le transport de sédiments dans un cas réel. Les résultats de simulations sont comparés aux résultats expérimentaux issus des essais présentés dans le Projet Européen Sandpit.

## 2 Formulation du problème

### 2.1 Modèle d'évolution des fonds

La conservation de la quantité de sédiment sur tout le domaine d'étude se traduit par l'équation classique d'évolution des fonds:

$$(1 - n) \frac{\partial Z_f}{\partial t} + \frac{\partial q_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{sz}}{\partial z} = E_a - D_a \quad (1)$$

où  $n$  est la porosité des fonds,  $Z_f$  la cote des fonds et  $q_s$  le débit solide total, qui correspond à la somme du débit solide de sédiments charriés et en suspension, soit:

$$q_s = q_{sc} + q_{ss} \quad (2)$$

Plusieurs lois de transport expriment le débit de transport par charriage en fonction des différents paramètres physiques du problème. Dans les présentes applications nous avons utilisé les lois de Bijker [4] et de Soulsby-Van Rijn [10]. Pour le transport en suspension, le modèle utilise une équation de convection-diffusion présenté dans le paragraphe suivant.

$E_a$  et  $D_a$  représentent respectivement les flux d'érosion et de dépôt des sédiments. Le flux d'échange au fond (en  $z = z_a$ ) est égale à [11] :

$$E_a - D_a = -\alpha w_s (C_a - C_{aeq}) \quad (3)$$

où :  $C_{aeq}$  est la concentration de référence à l'équilibre,  $C_a$  la concentration à  $z = z_a$ ,  $\alpha$  un paramètre d'ajustement et  $w_s$  étant la vitesse de chute des particules en suspension. Plusieurs formules ont été proposées pour le calcul de  $C_{aeq}$ , parmi celles-ci la formule de Van Rijn (1984) [7].

Plusieurs lois de transport expriment le débit de transport par charriage en fonction des différents paramètres physiques du problème. Dans les présentes applications nous avons

utilisé les lois de Bijker [4] et de Soulsby-Van Rijn [10]. Pour le transport en suspension, le modèle utilise une équation de convection-diffusion présenté dans le paragraphe suivant.

## 2.2 Modèle de transport des sédiments en suspension

Lorsque le transport sédimentaire par suspension est conséquent il est important de coupler le modèle d'évolution des fonds avec un module de type convection-diffusion régi par l'équation suivante:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + (w - w_s) \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_{sx} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_{sz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (4)$$

$u$  et  $w$  désignent respectivement la composante horizontale et verticale de la vitesse,  $C$  est la concentration des sédiments en suspension,  $\epsilon_{sx}$  et  $\epsilon_{sz}$  sont les coefficients de diffusion turbulente des sédiments en suspension. Le modèle d'évolution des fonds utilisé actualise automatiquement les vitesses du courant par conservation du débit. Il suffit juste alors de calculer le champs de courant initial en utilisant le modèle aux éléments finis *2DV* résolvant les équations de Navier Stokes et qui donne pour chaque nœud du maillage les deux composantes de la vitesse  $u$  et  $w$  ainsi que le niveau d'eau.

## 2.3 Détermination des coefficients de diffusion turbulente

Dans ce travail le coefficient de diffusion turbulente  $\epsilon_{sx}$  (lié à la viscosité turbulente horizontale  $\nu_{th}$ ) est supposé constant. Le coefficient de diffusion turbulente des sédiments en suspension  $\epsilon_{sz}$  (noté par la suite  $\epsilon_s$ ), lié à la viscosité turbulente verticale  $\nu_{tz}$  (notée par la suite  $\nu_t$ ), est donné par :

$$\epsilon_s = \beta_s \nu_t \quad (5)$$

avec

$$\beta_s = 1 + 2 \left( \frac{w_c}{u_*} \right)^2 \quad (6)$$

Qui désigne le coefficient d'efficacité de mélange. Nous écrivons la viscosité turbulente comme étant :

$$\nu_t = l_m u_m \quad (7)$$

avec  $l_m$  la longueur de mélange et  $u_m$  la vitesse de mélange, où  $u_m \approx u' \approx \sqrt{k}$  ( $u'$  est la fluctuation de la vitesse et  $k$  est l'énergie cinétique de la turbulence).

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide homogène non stratifié au voisinage d'une paroi, il existe une couche limite dans laquelle le gradient de vitesse et donc la contrainte de cisaillement sont constants suivant  $OZ$ . Prandtl a supposé que la longueur de mélange  $l_m$  augmente approximativement linéairement dans la couche limite depuis la paroi :

$$l_{m1} = \kappa z \quad (8)$$

où  $z$  représente la distance d'un point de la couche limite à la paroi,  $\kappa$  est la constante de von Kármán dont la valeur est voisine de 0.41 en eau claire.

En choisissant une vitesse de mélange qui décroît linéairement :

$$u_{m1} = u_* \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (9)$$

où  $h$  est la profondeur de l'écoulement. On obtient avec  $u_{m1}$  et  $l_{m1}$  une viscosité turbulente parabolique :

$$\nu_{t1} = \kappa z u_* \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (10)$$

Le profil de vitesse correspondant à ce premier modèle n'est pas logarithmique puisque

$$\frac{du}{dz} = \frac{u_m}{l_m} \neq \frac{u_*}{\kappa z} \quad (11)$$

Pour assurer un profil de vitesse logarithmique, il est possible d'écrire un modèle général avec différentes variantes (Absi, 2006a) [2]. Nous pouvons écrire alors la longueur de mélange  $l_m$ , sous la forme :

$$l_m = \kappa z \sqrt{f(z)} \quad (12)$$

et la vitesse de mélange  $u_m$  sous la forme:

$$u_m = u_* \sqrt{f(z)} \quad (13)$$

La viscosité turbulente s'écrit donc :

$$\nu_t = \kappa z u_* f(z) \quad (14)$$

En effet, avec les équations (12) et (13), nous avons:

$$\frac{du}{dz} = \frac{u_m}{l_m} = \frac{u_*}{\kappa z} \quad (15)$$

Cette dernière expression permet d'obtenir un profil de vitesse sous forme logarithmique. Chaque fonction  $f(z)$  définit par conséquent, un profil de longueur de mélange et un modèle de viscosité turbulente particulier.

Nous pouvons alors obtenir un modèle de viscosité turbulente parabolique (10), tout en assurant un profil de vitesse logarithmique, en prenant une longueur de mélange de la forme :

$$l_{m2} = \kappa z \sqrt{1 - \frac{z}{h}} \quad (16)$$

et une vitesse de mélange de la forme :

$$u_{m2} = u_* \sqrt{1 - \frac{z}{h}} \quad (17)$$

Les équations (16) et (17) vérifient bien l'équation (15). Cependant, les données de mesures montrent que la vitesse de mélange présente une décroissance exponentielle de la forme [3] :

$$u_{m3} \approx u_* e^{-\frac{z}{h'}} \quad (18)$$

avec :  $h' = \frac{h}{C_1}$  et  $C_1$  est un paramètre qu'on déterminera lors de la phase de calibration. Pour assurer un profil de vitesse logarithmique, nous devons prendre une longueur de mélange qui est de la forme :

$$l_{m3} \approx \kappa z e^{-\frac{z}{h'}} \quad (19)$$

Un troisième modèle de viscosité turbulente est obtenu avec  $u_{m3}$  et  $l_{m3}$ , la viscosité turbulente est de la forme (20) et le profil des vitesses correspondant est logarithmique.

$$\nu_{t3} = \alpha \kappa z u_* e^{-\frac{2z}{h'}} \quad (20)$$

où  $\alpha$  est un paramètre de calibration à déterminer.

### 2.3.1 Modèle basé sur une extension de l'hypothèse de similitude de von Kármán [1], [3].

L' hypothèse de similitude de von Kármán assure une forme d'invariance d'échelle des caractéristiques (dimension et vitesse) des structures turbulentes. L'équilibre entre production et dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence permet d'établir la proportionnalité  $\frac{\partial u}{\partial z} \approx \frac{\sqrt{k}}{l_m}$ , entre gradient de vitesse moyenne et énergie cinétique de la turbulence  $\sqrt{k}$  (associée aux fluctuations de vitesse). On peut donc écrire la longueur de mélange sous la forme [3] :

$$l_m = -\kappa \frac{\sqrt{k}}{l_m} / \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\sqrt{k}}{l_m} \right) \quad (21)$$

La connaissance du profil vertical de  $\sqrt{k}$  permettrait donc d'exprimer à son tour le profil de longueur de mélange  $l_m(z)$ . Nous utilisons l'équation (18) qui est plus précise ( $\sqrt{k} \approx u_m \approx u_* e^{-\frac{z}{h'}}$ ). En introduisant le paramètre de rigidité  $z_0$  dans notre modèle, les équations (21) et (18) donnent après intégration sur la profondeur d'eau:  $z_0 < z < h$  avec une valeur imposée  $\kappa z_0$  en  $z_0$  [3] :

$$l_{m4}(z) = \kappa \left[ h' - (h' - z_0) e^{-\frac{z-z_0}{h'}} \right] \quad (22)$$

Un quatrième modèle de viscosité turbulente peut être obtenu en utilisant  $u_{m3}$  et  $l_{m4}$ , où la viscosité turbulente est de la forme (23). Dans ce cas, le profil de vitesse est légèrement différent du profil logarithmique, mais il semble se rapprocher plus des valeurs expérimentales [3].

$$\nu_{t4} = \alpha u_* \kappa e^{-\frac{z}{h'}} \left[ h' - (h' - z_0) e^{-\frac{z-z_0}{h'}} \right] \quad (23)$$

### 2.3.2 Synoptique des différents modèles

|                          |                                                                          |                                               |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| modèle linéaire          | $l_{m1} = \kappa z$                                                      | $u_{m1} = u_* \left( 1 - \frac{z}{h} \right)$ |
| modèle hyperbolique      | $l_{m2} = \kappa z \sqrt{1 - \frac{z}{h}}$                               | $u_{m2} = u_* \sqrt{1 - \frac{z}{h}}$         |
| modèle exponentiel       | $l_{m3} \approx \kappa z e^{-\frac{z}{h'}}$                              | $u_{m3} \approx u_* e^{-\frac{z}{h'}}$        |
| modèle Kármán (Absi [1]) | $l_{m4} = \kappa \left[ h' - (h' - z_0) e^{-\frac{(z-z_0)}{h'}} \right]$ |                                               |

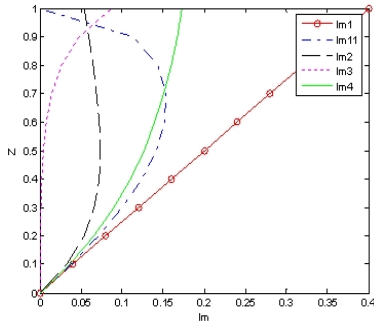


Figure 1 - Profils de longueur de mélange (8), (16), (19) et (22)

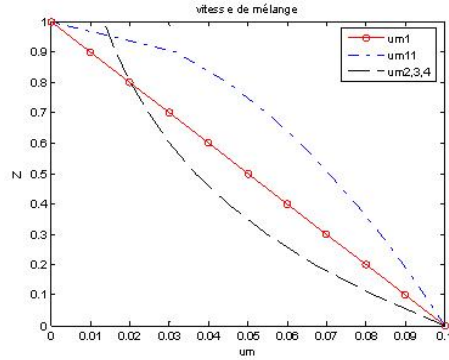


Figure 2 - Profils de vitesse de mélange (9)- (17)-(18)

Les Fig.1 et Fig. 2 présentent l'allure des différents profils respectivement pour la longueur de mélange et pour la vitesse de mélange.

### 3 Cas tests

#### 3.1 Test 1: Chargement dans un écoulement uniforme en canal (Modèle suspension)

Ce cas test analytique proposé par Hjelmfelt et Lenau (1970) [5] et repris notamment par Van Rijn (1987) [9] a pour objet de simuler l'érosion d'un fond alluvionnaire initialement non chargé soumis à un courant uniforme (Fig. 4). Il permet d'analyser le comportement du modèle pour un écoulement uniforme et de vérifier la solution à l'équilibre. Pour ce cas test, la composante principale  $u$  du courant dans le sens longitudinal est supposée constante sur la verticale, et le sédiment constituant le fond est considéré uniforme et est représenté par une vitesse de chute  $w_s$  constante.

##### 3.1.1 Application numérique et résultats

Les applications numériques correspondent à la résolution de l'équation de convection-diffusion (4) en négligeant le terme de diffusion horizontale et en considérant la vitesse de chute des sédiments  $w_s$ . A  $t = 0$  on impose  $C = 0$ , les conditions aux limites à l'entrée vérifient  $C = 0$  et à la sortie on suppose que le débit solide  $q_s$  est libre (calculé). Au fond du domaine, on impose une concentration constante  $C = C_a$ , tandis qu'à la surface on impose un flux nul, tel que:

$$w_s C - \left( \epsilon_s \frac{\partial C}{\partial z} \right) = 0 \quad (24)$$

Les tests numérique sont conduit en utilisant les paramètres physiques suivants:

|               |                |                 |           |                 |
|---------------|----------------|-----------------|-----------|-----------------|
| vitesse       | vitesse de     | profondeur      | longueur  | vitesse         |
| longitudinale | cisaillement   | de l'écoulement | du canal  | de chute        |
| $u = 1m/s$    | $v_* = 0.1m/s$ | $H = 1m$        | $L = 20m$ | $w_s = 0.02m/s$ |

La résolution numérique est réalisée en utilisant le schéma de Lax-Wendroff-Richtmeyer avec les Paramètres numériques suivants:  $\Delta t = 1s$  ;  $T_{final} = 100s$  ; avec un nombre de pas = 180.

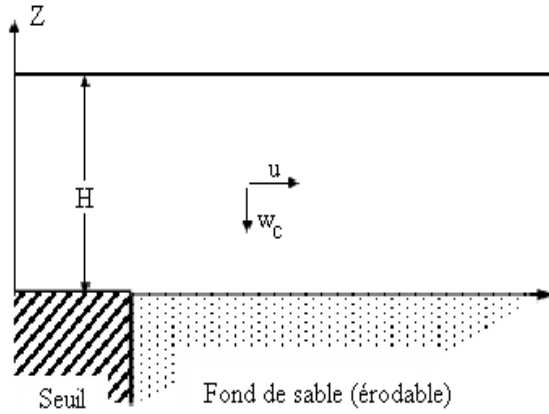


Figure 4 - Description schématique pour le cas test 1

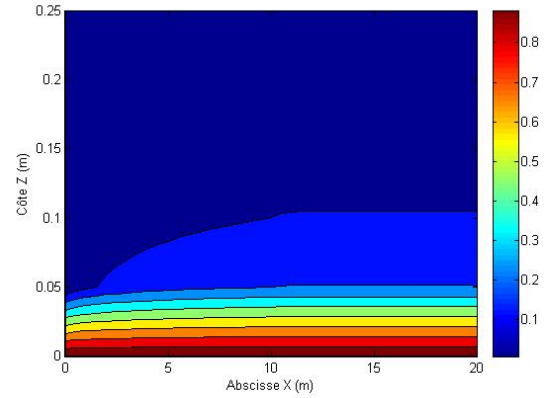


Figure 5 - Résultat de la simulation  $C(x)$  avec le quatrième modèle de viscosité turbulente.

### 3.1.2 Discussion des résultats

La figure 5 montre les résultats de la simulation numérique obtenus par un modèle aux éléments finis, en utilisant le quatrième modèle de viscosité turbulente (décroissance exponentielle pour la vitesse de mélange et modèle basé sur l'extension de l'hypothèse de von Karman pour la longueur de mélange). Les figures 6 et 7 présentent la concentration moyenné sur la profondeur adimensionnelle obtenue avec les deux modèles qui sont basés sur la décroissance exponentielle de la vitesse de mélange, à savoir le troisième modèle de viscosité turbulente, qui vérifie un profil de vitesse logarithmique, et le quatrième modèle de viscosité turbulente basé sur l'hypothèse de von Karman. La figure 6 donne les résultats de simulation avec des paramètres  $C_1 = 1$  et  $\alpha = 1$ , ces résultats sont comparés à la solution analytique [5] et aux résultats de mesures [8]. On constate que les résultats du quatrième modèle semblent se rapprocher plus des mesures et de la solution analytique. En ajustant le coefficient  $C_1$  du quatrième modèle, soit  $C_1 = 0,7$  et  $\alpha = 1$ , on retrouve une bonne estimation de la concentration de sédiments en suspension lors du processus de transport (voir Fig. 7)

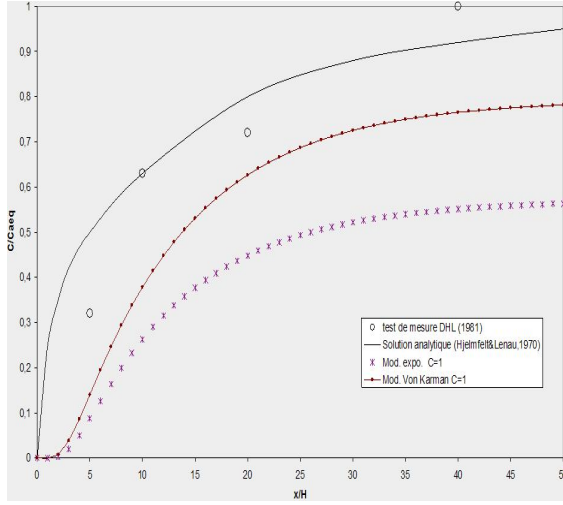


Figure 6 - Comparaison des résultats de simulation avec le 3ème et 4ème modèles ( $C_1 = 1$ ,  $\alpha = 1$ ), avec la solution analytique [5] et les mesures [8].

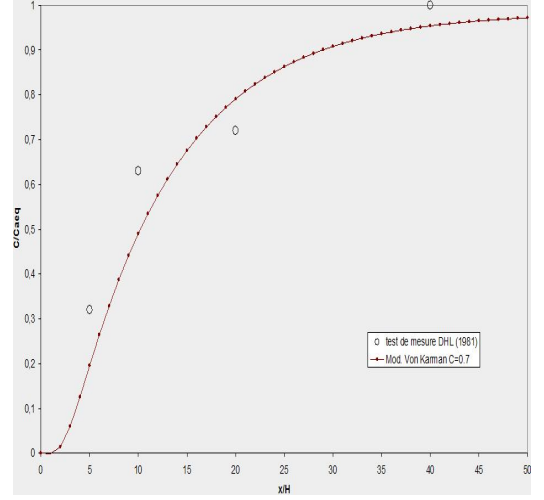


Figure 7 - Comparaison des résultats de simulation avec le 4ème modèle ( $C_1 = 0,7$ ,  $\alpha = 1$ ) et les mesures [8].

## 3.2 Test 2: Remplissage d'une fosse d'extraction

Il s'agit de reproduire un écoulement dans un canal à section trapézoïdale où le transport est effectué par charriage et suspension. Le but est d'analyser la capacité du couplage hydrodynamique et charriage à représenter l'évolution de la bathymétrie d'un écoulement sur fond ayant une pente montante et une pente descendante. Pour cela, le modèle mathématique utilisé est donné par les équations (4) et (1).

### 3.2.1 Application numérique et résultats

Les conditions aux limites associées vérifient à l'entrée:  $Z_f = 0.15m$  et à la sortie le débit solide au fond  $q_{bn}$  est libre (doit être calculé par le modèle). Les paramètres physiques utilisés dans ce test sont résumés dans le tableau suivant:

|                       |                        |                           |                          |                        |                        |                |     |
|-----------------------|------------------------|---------------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|----------------|-----|
| g                     | h                      | q                         | q <sub>s</sub>           |                        | u                      | w <sub>s</sub> |     |
| 9,81 m/s <sup>2</sup> | 0,255 m                | 0,10 m <sup>3</sup> /(ms) | 0,0167 kg/m <sup>s</sup> |                        | 0,18 m/s               | 0,013m/s       |     |
| Z <sub>a</sub>        | ρ                      | v <sub>th</sub>           | κ                        | D                      | ρ <sub>s</sub>         | η              | ϕ   |
| 0,0125 m              | 1000 kg/m <sup>3</sup> | 1,0E-6 m <sup>2</sup> /s  | 0,4                      | 1,6 10 <sup>-4</sup> m | 2650 kg/m <sup>3</sup> | 0,40           | 30° |

La résolution numérique est effectuée par éléments finis (voir Fig.8), avec des éléments Q4 dans le domaine et éléments L2 aux frontières, en utilisant le schéma de Lax-Wendroff-Richtmeyer. L'évolution du fond est présentée après 10 heures (Fig.9).

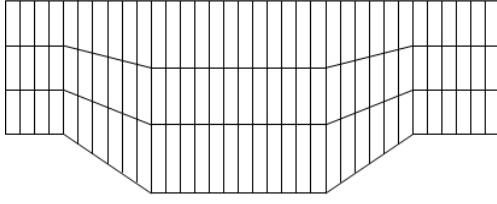


Figure 8 - Maillage 2D vertical pour l'exemple de la fosse.

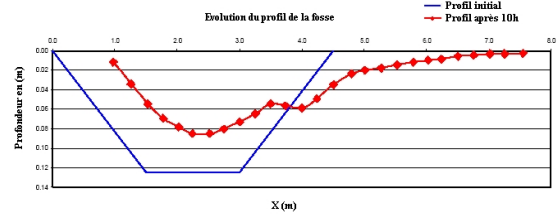


Figure 9 - Remplissage de la fosse après 10 heures, résultats de mesures.

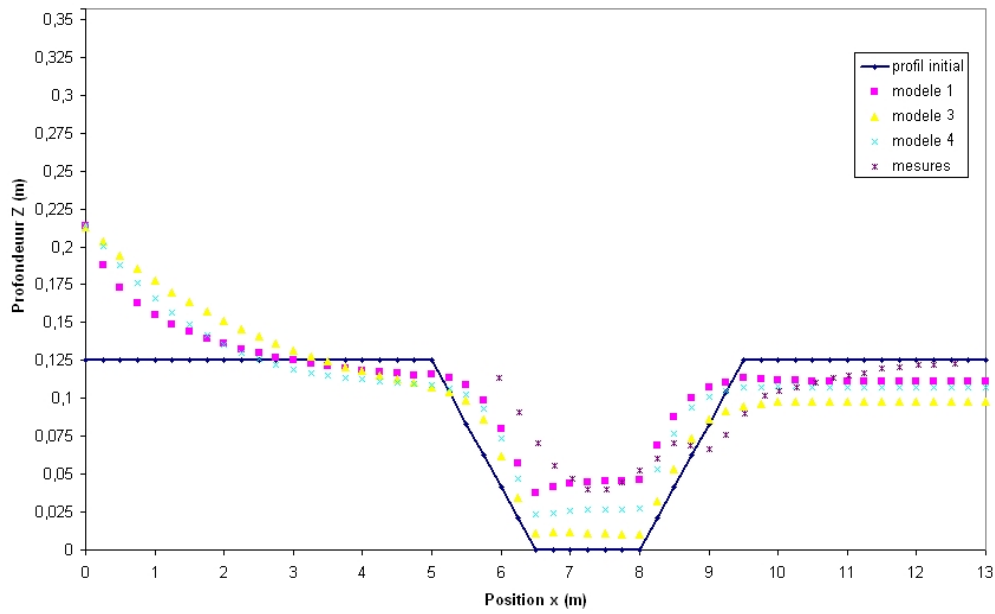


Figure 10 - Comparaison résultats numériques / mesures, remplissage de la fosse après 10 h, \*: mesures; ■ : modèle 1 ; ▲ : modèle 3 ; × : modèle 4

### 3.2.2 Discussion des résultats

Les simulations de la figure (10) sont effectuées avec le modèle aux éléments finis (suspension + charriage) avec les différents modèles de viscosité turbulente. Cette figure montre que le transport en suspension est important et qu'on ne peut pas par conséquent le négliger par rapport au transport par charriage. En effet, cette figure montre que le choix du modèle de viscosité turbulente au niveau du module de transport en suspension affecte considérablement l'évolution de la bathymétrie.

D'après ces simulations (Fig.10), le quatrième modèle de viscosité turbulente semble confirmer sa supériorité par rapport au troisième modèle. Cependant, le modèle parabolique (premier et second modèle) semble donner un résultat meilleur malgré l'allure de la vitesse de mélange qui n'est pas en décroissance exponentielle. Ceci peut être dû à la forme particulière du canal avec un fond ayant une pente descendante et une pente montante.

Ces résultats nécessitent d'être confirmés par d'autres cas tests.

### 3.3 Conclusion

Dans ce travail, nous avons examiné le transport et la diffusion de sédiments en utilisant de nouveaux profils pour le coefficient de diffusion turbulente. Ces profils sont analysés pour deux cas tests, le premier représente l'écoulement dans un canal avec un champ de vitesse uniforme et le second représente l'écoulement autour d'une fosse d'extraction de granulas. Les résultats obtenus montrent l'influence du profil de viscosité turbulente sur la modélisation du transport sédimentaire.

## References

- [1] Absi, R. (2002) "Wave boundary layer instability near flow reversal," Proc. 28<sup>th</sup> Int. Conf. Coast. Eng., ASCE, J. McKee Smith (Ed.), World Scientific, 532-544.
- [2] Absi, R. (2006a) "Discussion of one-dimensional wave bottom boundary layer model comparison: specific eddy viscosity and turbulence closure models", J. Waterw., Port, Coast. and Oc. Eng., ASCE, 132(2), 139-141.
- [3] Absi, R. (2006b) "A roughness and time dependent mixing length equation", Doboku Gakkai Ronbunshuu B, JSCE, Vol. 62, No. 4, pp.437-446.
- [4] Bijker, E.W., (1992) "Mechanics of sediment transport by the combination of waves and current", in : Design & reliability of Coastal Structures, Venice, 1992, 147-173.
- [5] Hjelmfelt, A.T. and Lenau, C.W. (1970) "Non-equilibrium transport of suspended sediment", J. Hydr. Div., ASCE, 96(HY7), 1567-1586.
- [6] Meyer-Peter, E. et R. Müller. (1948) "Formulas for bed-load transport". Intern. Assoc. Hydr. Res., 2nd meeting, Stockholm.
- [7] Van Rijn, L.C., (1984) "Sediment transport, Part II: suspended load transport", J. Hydr. Eng., ASCE, 110(11), 1613-1641
- [8] Van Rijn, L.C. (1985) "Sand transport at high velocities", Delft Hydraulics Laboratory Report, M2127A and M2127B.
- [9] Van Rijn, L.C. (1987) "Mathematical modelling of morphological processes in the case of suspended sediment transport", Delft Hydraulics Communication No. 382.

- [10] Van Rijn, L C (1989) "Handbook on Sediment Transport by Current and Waves". Delft Hydraulics, Report H461, June, pp 12.1-12.27.
- [11] Cheng, N.S. and Chiew, Y.M. (1998) "Pick up probability for sediment entrainment", J. Hyd. Eng., ASCE, 124(2), 232-235.