



HAL
open science

Modèles topologiques

Pascal Lienhardt, Laurent Fuchs, Yves Bertrand

► **To cite this version:**

Pascal Lienhardt, Laurent Fuchs, Yves Bertrand. Modèles topologiques. Informatique graphique, modélisation géométrique et animation, Lavoisier, pp.49-93, 2007. hal-00580707

HAL Id: hal-00580707

<https://hal.science/hal-00580707>

Submitted on 29 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Informatique Géométrique
et
Graphique

Dominique BECHMANN et Bernard PÉROCHE

15 mars 2006

Table des matières

PREMIÈRE PARTIE. MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE	7
Chapitre 1. Modèles topologiques	9
Pascal LIENHARDT, Laurent FUCHS , Yves BERTRAND	
1.1. Introduction.	9
1.1.1. Représentation de subdivisions.	9
1.1.2. Distinction topologie - plongement.	11
1.1.3. Différentes classes de modèles.	12
1.1.4. Objectifs du chapitre.	14
1.2. Modèles topologiques cellulaires.	15
1.2.1. Graphes d'incidence.	16
1.2.2. Modèles ordonnés et quasi-variétés cellulaires.	19
1.2.3. Autres classes d'objets cellulaires.	25
1.3. Modèles topologiques simpliciaux.	29
1.3.1. Complexes simpliciaux abstraits.	29
1.3.2. Ensembles semi-simpliciaux.	31
1.3.3. Opérations de base.	33
1.3.4. Classes d'objets simpliciaux.	35
1.4. Cadre général et choix d'un modèle particulier.	37
1.4.1. Cadre général.	37
1.4.2. Structures de données.	41
1.4.3. Choix d'un modèle particulier.	43
1.4.4. Autres modèles topologiques	45
Chapitre 2. Bibliographie	47

PREMIÈRE PARTIE

Modélisation géométrique

Chapitre 1

Modèles topologiques

1.1. Introduction.

1.1.1. *Représentation de subdivisions.*

Les modèles topologiques¹ présentés dans ce chapitre permettent de représenter des objets *subdivisés*, c'est-à-dire partitionnés en *cellules de différentes dimensions* : sommets, arêtes, faces, volumes, etc. Les principales motivations pour l'utilisation de ce type de représentation sont les suivantes.

1) « L'objet » que l'on souhaite manipuler présente une *structure*, considérée comme importante pour l'utilisation que l'on en fait [BRA 88, BRA 05, FRA 06]. Par exemple en géosciences (cf. figure 1.1), il est important de représenter les différentes couches géologiques composant le sous-sol que l'on souhaite modéliser. Ces couches sont elles-mêmes fracturées par des failles, et elles sont donc composées de différents blocs correspondant géométriquement à différents volumes. De même en architecture, il est important de représenter les différents volumes composant un bâtiment (pièces, murs, portes, etc.), de connaître les ouvertures d'une pièce (portes, fenêtres, etc.). Pour ces deux exemples d'application, on cherche donc à représenter des volumes composant les objets modélisés. Ces volumes induisent naturellement des faces, partagées par les volumes, des arêtes partagées par des faces, des sommets partagés par des arêtes.

Il est important aussi pour ce type d'application de représenter les *relations de voisinage* entre ces différentes cellules, de manière par exemple à savoir quelles sont les

Chapitre rédigé par Pascal LIENHARDT, Laurent FUCHS et Yves BERTRAND.

1. Le terme *topologique* doit ici être compris dans son acception restreinte de la topologie combinatoire [CRO 78].

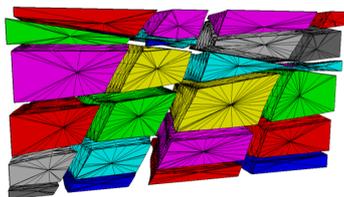


Figure 1.1. *Modèle de sous-sol.*

portes ouvrant sur une pièce dans un bâtiment. En termes géométriques, on cherche donc à représenter non seulement les cellules composant l'objet, mais aussi leurs *relations d'incidence et d'adjacence* [MäN 88]. On retrouve une problématique similaire en traitement/analyse d'images [CHR 06], lorsque l'on souhaite représenter la structure d'une image segmentée en régions. En plus de la nécessité de représenter des objets structurés, tous ces exemples ont en commun le fait que les cellules sont *a priori* quelconques, elles ne présentent pas de régularité particulière. On utilise donc souvent des *modèles topologiques cellulaires* (cf. section 1.2) pour leur manipulation.

2) La deuxième raison principale pour laquelle on peut être amené à utiliser des modèles topologiques est que l'on souhaite *discrétiser* « l'objet », en particulier [DER 88, FAR 01, PAO 93, DEF 03a, NIE 02, DAR 03] :

- du fait du modèle géométrique utilisé, par exemple : l'objet est modélisé comme un assemblage de morceaux d'espaces courbes (e. g. définis avec des carreaux de surfaces de Bézier) ; la reconstruction d'un objet à partir d'une image par la méthode des *marching-cubes* produit usuellement une triangulation ;

- du fait des opérations de manipulation, par exemple : en rendu réaliste, on peut choisir de trianguler l'objet afin d'optimiser les calculs d'intersection d'un rayon avec l'objet ; de nombreuses applications nécessitent de mailler un objet.

Ce type d'application conduit souvent à la manipulation d'objets subdivisés en cellules régulières (e.g. tétraèdres, cubes). Comme précédemment, il est nécessaire de représenter les cellules composant l'objet, mais aussi leur assemblage, c'est-à-dire leurs relations d'incidence et d'adjacence. Les modèles les plus utilisés sont les *modèles topologiques simpliciaux* (cf. section 1.3).

Il est à noter que ce type de modélisation, appelé par la suite *modélisation géométrique à base topologique*², permet, dans la mesure où les objets manipulés sont subdivisés

2. Cette terminologie a été proposée fin des années 1980 par Jean Françon, afin de la distinguer de la modélisation par les bords (Boundary Representation ou B-rep). Elle s'explique par le

(*i. e.* discrétisés), d'effectuer des manipulations locales, et de représenter des informations locales dont la sémantique est liée à l'application, comme les caractéristiques photométriques d'une face ou le matériau composant un volume, ou des informations permettant de structurer l'objet, éventuellement à différents niveaux, etc.

1.1.2. Distinction topologie - plongement.

Les modèles topologiques permettent de représenter la *structure* d'objets subdivisés : usuellement, ces modèles représentent les cellules comme des objets *abstrait*s et l'assemblage de ces cellules comme des *relations* entre cellules. Par exemple, les graphes d'incidence (cf. section 1.2.1) représentent les cellules par les noeuds d'un graphe, et les relations d'incidence entre les cellules par les arêtes de ce graphe. Il est donc nécessaire, pour définir un modèle géométrique, de coupler un modèle topologique avec un *modèle de plongement*, qui permet de définir la *forme* des cellules et donc la forme de l'objet modélisé [BER 94]. Par exemple, un objet modélisé par un ensemble de carreaux triangulaires de Bézier peut être représenté par un ensemble semi-simplicial (cf. section 1.3.2) qui représente la structure de l'assemblage, où chaque cellule « abstraite » est associée à un carreau [LAN 96]. Pour la représentation de polyèdres, chaque sommet (resp. arête, face, etc.) abstrait(e) est associé(e) à (*i. e. plongé(e) en*) un point (resp. un segment de droite, une portion de plan, etc.). De manière générale, un modèle géométrique à base topologique constitue une représentation semi-explicite : la structure (topologie) est décrite explicitement, le modèle de plongement est plus ou moins explicite : par exemple, si l'on connaît la structure d'une subdivision du plan, ainsi que le plongement des sommets et des arêtes, on peut en déduire le plongement des faces (notons qu'à l'extrême, si les arêtes sont plongées en des segments, ceux-ci peuvent être déduits du plongement des sommets, ce qui suffit alors à définir complètement le plongement de toutes les cellules de la subdivision).

fait que les modèles utilisés en modélisation géométrique à base topologique se basent sur des notions de topologie combinatoire. Schématiquement, la modélisation par les bords consiste à représenter un « solide » (*i. e.* un volume) par la surface qui le borde. Pendant très longtemps, on représentait en fait une subdivision de la surface du bord (surface qui est elle-même orientable sans bords), et de très nombreux travaux ont porté sur la définition de modèles et d'opérations permettant de manipuler ce type de subdivisions. Lorsque des travaux ont commencé à porter sur la représentation de subdivisions de l'espace 3D [WEI 86b], *i. e.* sur la représentation d'objets composés de plusieurs volumes, il y a eu une certaine confusion quant à ce que l'on cherchait réellement à représenter : un assemblage de faces séparant les volumes, ou un assemblage de volumes ? Ces questions peuvent paraître anecdotiques, mais elles ont en fait des conséquences importantes sur les modèles eux-mêmes : par exemple, la dimension topologique d'un assemblage de faces est 2, celle d'un assemblage de volumes est 3. C'est la raison pour laquelle il est apparu nécessaire de mieux distinguer *modélisation par les bords* et *modélisation de subdivisions*. De plus, modéliser un solide par son bord n'implique pas nécessairement de manipuler des subdivisions.

Cette distinction topologie-plongement présente plusieurs intérêts :

- pour le *calcul d'informations* sur les objets représentés [DEY 99, GON 03, PEL 06a]. Certaines informations peuvent être calculées directement sur le modèle topologique, par exemple les caractéristiques topologiques d'une surface [GRI 81]. Ces caractéristiques (nombre de bords, coefficient d'orientabilité, genre) permettent de distinguer différents types de surfaces (par exemple orientables, comme un anneau, ou non orientables, comme une bande de Möbius : cf. figure 1.2), et leur connaissance peut être utile pour vérifier la validité des objets lors de leur construction, voire pour contrôler cette construction. De même, la représentation explicite de la structure des objets par un modèle topologique est utile en particulier pour des opérations de comparaison ou de mise en correspondance d'objets (e.g. comparaison de régions entre deux images, réévaluation automatique d'un enchaînement de constructions lorsque certains paramètres de la construction sont modifiés, etc.).

- pour la *construction* des objets [LIE 88, DUF 91, CHE 92, BER 94, FUC 96]. Pour certaines utilisations, par exemple en animation d'objets articulés, la structure des objets est invariante alors que la forme évolue ; les seules opérations sont donc des opérations modifiant le plongement des objets. La distinction topologie-plongement permet aussi de structurer certaines opérations en opérations plus locales et plus atomiques. Typiquement, l'arrondi d'une cellule peut être défini par le couplage d'une opération de chanfreinage topologique, qui exploite les informations topologiques locales de la cellule à arrondir, et d'une opération d'arrondi géométrique, qui calcule la forme des cellules résultant de l'opération de chanfreinage topologique (cf. figure 1.3). Dans cet exemple, le modèle topologique fournit des informations permettant de contrôler les modifications de forme. Dans d'autres cas, l'inverse se produit [CAZ 95]. Par exemple, les opérations booléennes s'expriment aussi en opérations locales (e.g. éclatement de cellules, « collage » de cellules), mais dans ce cas, ce sont les informations de plongement qui contrôlent les modifications topologiques devant être effectuées.

1.1.3. Différentes classes de modèles.

De très nombreux modèles (et opérations associées) ont été proposés pour la représentation et la manipulation d'objets subdivisés, et ce dans différents domaines : modélisation géométrique, algorithmique géométrique, traitement et analyse d'images, topologie, mécanique des solides, etc [BAU 75, ANS 85, WEI 85, GUI 85, WEI 86b, DOB 87, EDE 87, DEF 88, BRI 89, LIE 89b, LIE 89a, DOB 89, ARQ 89, ROS 89, GUR 90, LUO 90, MUR 90, SPE 91, FER 91, CRO 91, BRI 93, HAN 93, PAO 93, KUN 93, LIE 94, ELT 94, PAS 95, LAN 95, FIO 96, CAV 97, BER 00, LEE 01, BRA 03, BRU 03, DEF 03b, DAR 03, DEF 04, DAM 04, MEI 05, PEL 06b]. Il est à noter, ce qui est rassurant, que les solutions proposées sont très semblables, indépendamment de leurs domaines d'origine. On peut schématiquement classer ces modèles suivant (cf. figure 1.4) :

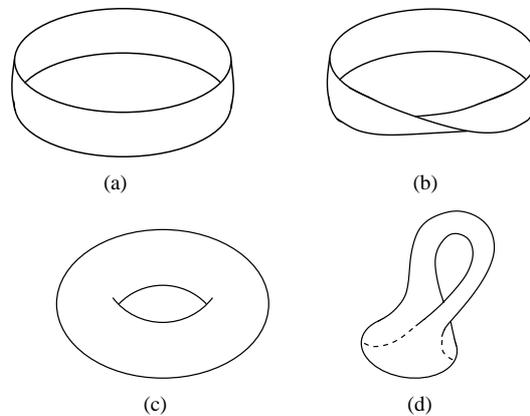


Figure 1.2. Différentes surfaces. L'anneau (a) (resp. la bande de Möbius (b)) est une surface orientable (resp. non orientable) à un bord. Le tore (c) (resp. la bouteille de Klein (d)) est une surface orientable (resp. non orientable) sans bord.

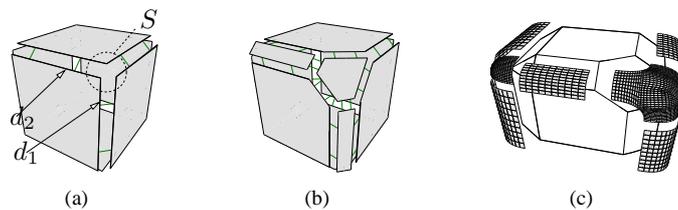


Figure 1.3. Chanfreinage et arrondi d'arêtes et de sommets. En (a) les arêtes d_1 , d_2 et le sommet S sont chanfreinés en (b). En (c) arrondi obtenu lorsqu'on associe des surfaces.

1) le *type de cellules* : on peut ainsi distinguer les modèles selon qu'ils permettent de représenter des assemblages de :

- cellules *régulières* : simplexes (triangles, tétraèdres, etc.), simplexes cubiques (carrés, cubes, etc.), simplexoides, qui sont des produits cartésiens de simplexes³, etc. ;
- cellules *quelconques* : en fait, le terme « quelconque » est abusif : si les modèles cellulaires permettent une plus grande diversité que les modèles précédents en

3. Ceci comprend donc les simplexes eux-mêmes, les cubes (qui sont des produits de simplexes de dimension 1, *i. e.* des arêtes), les prismes en 3D (qui sont le produit d'un triangle et d'une arête), etc.

ce qui concerne le type de cellules pouvant être manipulées, celles-ci vérifient en général des propriétés topologiques assurées par la définition même du modèle (cf. section 1.4.1) ;

2) le *type d'assemblage* : on peut ainsi distinguer des modèles topologiques permettant de représenter des subdivisions possédant ou non des cellules incidentes plusieurs fois entre elles (on parle alors de *multi-incidence*). Par exemple, une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues en un sommet unique, et l'arête est ainsi incidente deux fois au sommet. Dans les deux cas, on peut encore distinguer différentes sous-classes d'objets, en particulier :

- des *quasi-variétés* (*manifold* selon la terminologie anglo-saxonne), caractérisées par certaines propriétés topologiques importantes ; par exemple, les surfaces s'inscrivent dans ce cadre⁴. On peut ici encore distinguer par exemple des modèles conçus pour représenter des quasi-variétés orientables ou non, avec ou sans bords, ou d'autres conçus pour représenter des quasi-variétés orientées sans bords ;

- des *complexes* (*non-manifold* suivant la terminologie anglo-saxonne) : il s'agit d'assemblages « quelconques » de cellules⁵, le terme « quelconque » étant à prendre avec certaines réserves (cf. section 1.2).

1.1.4. Objectifs du chapitre.

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons des exemples de modèles cellulaires et simpliciaux de base (cf. sections 1.2 et 1.3), ainsi que des notions et opérations de base indispensables à leur manipulation. Il est bien sûr nécessaire, pour une application donnée, d'adapter les modèles et de les compléter par ajout d'informations, en fonction des impératifs propres à une application donnée ; il est aussi nécessaire de définir des opérations élaborées, adaptées à l'application, en fonction des opérations de base définies sur les modèles.

Les différents modèles cellulaires (resp. simpliciaux) que nous présentons correspondent à différentes classes et sous-classes d'objets. Nous verrons qu'étant donné un

4. Si l'on considère par exemple une surface subdivisée ne présentant pas de multi-incidence, alors celle-ci peut être construite en « collant » des faces le long de leurs arêtes, de telle manière que toute arête soit incidente à au plus deux faces. Plus généralement, le terme *manifold* est usuellement employé en modélisation géométrique pour désigner les généralisations des surfaces en dimension quelconque. Cependant, ce terme, qui se traduit par *variété*, désigne en topologie un objet tel que le voisinage de tout point est « équivalent » à une boule. Or on ne sait pas caractériser cette propriété de façon combinatoire, et il n'est donc pas possible de définir des modèles topologiques correspondant exactement aux variétés. En revanche, nous savons caractériser une classe d'objets un peu plus vaste qui sont les *quasi-variétés*.

5. En dimension 2 par exemple, une arête peut être incidente à plus de deux faces, deux faces peuvent être « collées » par un sommet, etc.

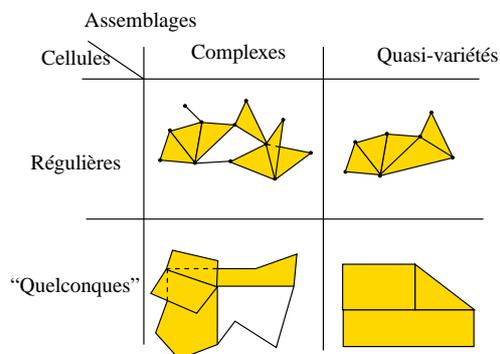


Figure 1.4. *Différentes classes de subdivisions.*

modèle correspondant à une classe d’objets, il est possible d’en déduire un modèle optimisé pour la représentation d’une sous-classe en utilisant les propriétés topologiques de celle-ci, ce qui permet de définir des opérations de conversion de modèles. De plus, les modèles cellulaires peuvent être interprétés en termes de modèles simpliciaux structurés implicitement en cellules [LIE 91, BRI 93, LIE 94, ELT 94, BER 99, ALA 04]. Ceci permet :

- d’étendre au cas cellulaire des propriétés importantes connues en topologie combinatoire dans le cadre simplicial,
- de convertir les modèles cellulaires en modèles simpliciaux (et réciproquement sous certaines conditions) ; en particulier, ceci permet de montrer que les cellules des modèles cellulaires ne sont pas aussi « quelconques » que l’on peut l’imaginer, en précisant les propriétés topologiques qu’elles vérifient.

Nous pouvons ainsi inscrire les modèles topologiques dans un cadre général, qui présente en particulier l’intérêt de pouvoir définir des critères permettant de choisir un modèle topologique en vue d’une utilisation particulière (cf. section 1.4).

1.2. Modèles topologiques cellulaires.

De nombreux travaux ont porté sur la définition de modèles topologiques cellulaires. Bien qu’ils aient été menés dans des domaines très différents (e.g. modélisation géométrique, traitement/analyse d’images), ces travaux ont abouti à des propositions relativement proches, que l’on peut classer en deux grandes catégories : les graphes d’incidence et les modèles ordonnés, suivant la terminologie proposée par Brisson⁶.

6. Les graphes d’incidence ne représentent pas explicitement « l’ordre » des cellules les unes par rapport aux autres : par exemple, la figure 1.7 illustre deux subdivisions distinctes, qui

Les graphes d'incidence permettent de représenter des objets cellulaires très généraux, bien que ne présentant pas de multi-incidence, mais peu de travaux ont porté sur la caractérisation de ces objets et sur la définition de contraintes de cohérence permettant de garantir les propriétés topologiques vérifiées par les objets représentés. En revanche, les modèles ordonnés ne présentent pas ces inconvénients. Il existe quelques résultats partiels [ALA 04], montrant l'équivalence entre certaines sous-classes de graphes d'incidence et certains modèles ordonnés. Dans ces cas, il est possible de définir des opérations de conversion entre les deux types de modèles.

1.2.1. Graphes d'incidence.

Introduction. Plusieurs notions basées sur les *ensembles partiellement ordonnés* ont été définies dans la littérature [BER 99, ROS 89, BRI 89, SOB 89], permettant de représenter différentes classes d'objets (e.g. possédant ou non des cellules à bord incomplet, etc.). Certains modèles permettent d'exprimer plus facilement que d'autres certaines propriétés topologiques ou certaines constructions. Nous étudions dans cette partie les graphes d'incidence (GI), dans leur version de base.

Un GI est un graphe orienté dont le principe de définition est le suivant (cf. figure 1.5) : un noeud correspond à une cellule de l'objet modélisé, et à chaque noeud est associée la dimension de la cellule correspondante ; une arête orientée correspond à la relation de bord entre une cellule de dimension i et une cellule de dimension $i - 1$ de son bord. Un objet est *connexe* si le graphe associé est connexe. L'ensemble des cellules correspondant aux noeuds-fils (resp. noeuds-pères) d'un noeud n constitue le *bord* (resp. l'*étoile*) de la cellule associée à n . Ces notions sont importantes, car elles permettent de définir le *voisinage local* d'une cellule (*i. e.* les relations d'adjacence et d'incidence entre cellules). En pratique, de nombreux traitements nécessitent d'explorer le voisinage d'une cellule, de parcourir un GI en utilisant ces notions de voisinage, d'utiliser ces informations de voisinage pour contrôler certaines opérations de construction, etc. Ces parcours par voisinage sont fondamentaux pour la manipulation d'objets représentés par des modèles topologiques.

La définition des GI pose des problèmes fondamentaux, qui sont étudiés en section 1.4.1 :

pourtant correspondent intuitivement au même graphe d'incidence (nous verrons par la suite que ce graphe d'incidence ne correspond ni à l'une ni à l'autre de ces deux subdivisions). Si l'on parcourt le bord de la face F_1 en tournant dans le sens trigonométrique, on obtient deux suites d'arêtes distinctes pour les deux subdivisions (a, c, e, d, f, b) et (a, c, f, d, e, b) ; de même, si l'on tourne autour du sommet 3 dans le sens trigonométrique, on obtient les séquences d'arêtes (b, f, e, c) et (b, e, f, c) . Cette notion d'ordre, non représentée explicitement dans les graphes d'incidence, l'est en revanche dans les modèles ordonnés : cf. figure 1.10.

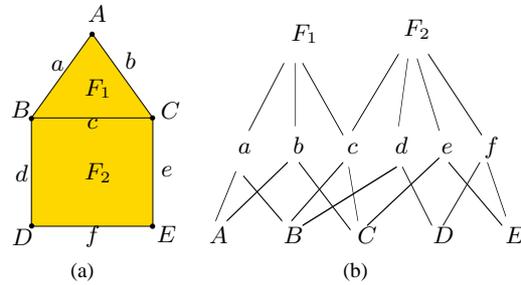


Figure 1.5. *Un exemple de graphe d'incidence.*

– quelles contraintes doit-on ajouter à la notion de GI afin de garantir la représentation d'objets « valides » ? Par exemple, un GI peut représenter une arête incidente à trois sommets (cf. figure 1.6). Ceci pose en particulier la question des propriétés topologiques que doivent satisfaire les cellules : comme indiqué ci-dessus, l'intérêt des modèles cellulaires par rapport aux modèles simpliciaux est de pouvoir manipuler des objets formés de cellules « quelconques », mais cet exemple montre que le terme « quelconque » doit être précisé ;

– étant donné un objet géométrique subdivisé, le GI que l'on imagine intuitivement représente-t'il vraiment la structure de cet objet, et ce de manière non ambiguë ? Par exemple, un même GI peut être intuitivement déduit des deux subdivisions représentées en figure 1.7, alors que formellement, ce GI ne correspond ni à l'une ni à l'autre de ces subdivisions (cf. section 1.4.1). En particulier, les GI ne permettent pas de représenter de manière non ambiguë des objets contenant des cellules multi-incidentes, car il est ici nécessaire de connaître, pour ces cellules multi-incidentes, l'ordre des cellules de leurs bords ou de leurs étoiles...

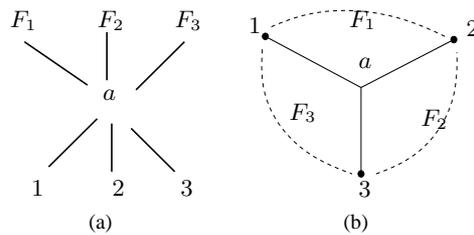


Figure 1.6. *Représentation d'une partie de subdivision comprenant une arête incidente à trois sommets.*

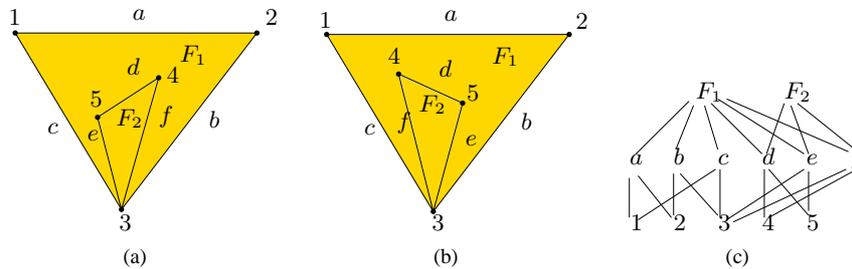


Figure 1.7. Exemple de deux objets distincts ayant même graphe d'incidence.

Représentation et opérations. On peut évidemment représenter un GI en utilisant les mêmes méthodes que pour la représentation de graphes orientés. En pratique, il est efficace pour certaines opérations de représenter aussi les arêtes inversement orientées du graphe. Par exemple, les parcours du bord de cellules utilisent les arêtes du GI initial, les parcours d'étoile utilisent les arêtes inverses.

Les GI constituent un modèle cellulaire auquel on peut associer différents modèles de plongement. En particulier, les cellules du GI sont plongées en leur associant un objet géométrique de dimension correspondante (point, morceau de courbe, morceau de surface, etc.). Les cellules de dimension supérieure ou égale à 1 sont souvent plongées sur un espace support, et leur forme précise est définie par cet espace support et la forme de leurs bords⁷, ce qui correspond à la notion de carreau restreint utilisée en Conception Assistée par Ordinateur (CAO). Par exemple la forme d'une face est définie par une surface support, découpée par le bord de la face ; chaque arête du bord de la face est plongée sur une courbe support contenue dans la surface support de la face, et délimitée par ses points extrémités.

S'il est assez simple de définir des opérations de base de manipulation d'un graphe (ajout de sommets, d'arêtes), la définition d'opérations de base pour la manipulation de GI est plus compliquée, dans la mesure où ces opérations doivent garantir la validité (au sens topologique) des objets représentés. Par exemple, différents ensembles d'opérateurs d'Euler ont été définis pour la construction de toute subdivision de surface orientable sans bords [MäN 88]⁸. Il existe en effet une classification des surfaces,

7. Nous retrouvons ici la notion de représentation par les bords dans une acception plus générale étendue à un ensemble de cellules, et non dans son interprétation initiale stricte de représentation de solides par leurs bords.

8. Par exemple, insérer, dans une face, un sommet et une arête incidente à ce sommet et à un sommet du bord de la face, ou éclater une face en insérant une arête entre deux sommets du bord de la face, etc.

basée sur un petit nombre de caractéristiques : les opérateurs d'Euler garantissent que les variations des caractéristiques lors de l'application d'opérations est conforme à la classification, et donc que l'objet représenté est bien une subdivision de surface. Le problème de la définition d'opérations de construction garantissant la validité de l'objet construit reste posé en dimension supérieure, dans la mesure où il n'existe pas de classification similaire à celle des surfaces [WEI 86a]. En revanche, plusieurs opérations de construction de GI à partir de représentations d'objets valides (e.g. extraction d'objets à partir d'images par algorithmes de type *marching-cubes*) ont été proposées ; la validité du GI construit est ici garantie par la validité de l'objet initial. En particulier, l'intérêt de l'utilisation de GI dans ce type d'applications réside dans la réduction des informations représentées, tout en gardant l'essentiel des informations topologiques.

1.2.2. Modèles ordonnés et quasi-variétés cellulaires.

Nous avons vu ci-dessus que la notion de GI repose sur une représentation explicite des cellules et des relations de bord entre ces cellules. La solution retenue dans les modèles ordonnés consiste à définir ces modèles en les basant sur un élément plus « atomique » que les cellules et sur des opérateurs portant sur ces éléments. Comme nous le verrons par la suite, ces éléments correspondent intuitivement à un sommet de l'objet, « vu » d'une arête incidente à ce sommet, « vue » elle-même d'une face incidente à l'arête, etc. De par ce type de définition, les cellules sont représentées de manière implicite, ainsi que leurs relations d'incidence et d'adjacence, et nous verrons qu'il est facile de les expliciter.

Le principal intérêt de ce type de définition est qu'il est possible d'y ajouter des contraintes de cohérence qui permettent de contrôler les propriétés topologiques que doivent satisfaire :

- d'une part les cellules : par exemple, il est possible d'ajouter dans la définition même du modèle des contraintes permettant d'éviter de manipuler des objets présentant des arêtes incidentes à plus de deux sommets,
- d'autre part les objets, *i. e.* les assemblages de cellules : par exemple, il est possible d'autoriser ou non l'existence de cellules multi-incidentes, etc.

Nous étudions ci-dessous trois modèles issus de la notion de carte combinatoire [EDM 60, JAC 70, COR 75, VIN 83, TUT 84, BRY 85, JAM 85], permettant respectivement de représenter des quasi-variétés cellulaires⁹ quelconques, des quasi-variétés cellulaires orientables sans bords, des complexes cellulaires. Ces modèles sont respectivement les

9. Une quasi-variété cellulaire de dimension n peut être définie constructivement comme un ensemble de cellules de dimension n , collées entre elles le long des cellules de dimension $n - 1$ de leurs bords, de telle manière qu'une cellule de dimension $n - 1$ est incidente à au plus deux cellules de dimension n .

cartes généralisées, les cartes¹⁰ et les chaînes de cartes [LIE 94, ELT 94] (cf. section 1.2.3), qui permettent donc de représenter différentes classes et sous-classes d'objets. Nous montrons en particulier que chaque modèle correspondant à une sous-classe d'objets est en fait une optimisation d'un modèle correspondant à une classe plus générale d'objets¹¹. Enfin, nous étudions le lien entre ces modèles et les autres modèles ordonnés proposés dans la littérature.

Cartes généralisées. Etant donnée une quasi-variété cellulaire, on peut intuitivement obtenir la notion de carte généralisée (ou G-carte) de la manière suivante. Considérons l'objet présenté dans la figure 1.8(a). Cet objet est constitué de deux faces F_1 et F_2 collées le long de leur arête commune c . On éclate alors l'arête c en deux nouvelles arêtes (figure 1.8(b)), de manière à isoler F_1 et F_2 : ces deux nouvelles arêtes correspondent respectivement à l'arête c « vue » de F_1 et à l'arête c « vue » de F_2 . Afin de se souvenir que ces deux arêtes n'en faisaient initialement qu'une seule, on ajoute une relation entre ces arêtes, à laquelle on associe la dimension 2, indiquant qu'initialement les faces F_1 et F_2 (donc deux cellules de dimension 2) partageaient une arête commune. On peut aussi « éclater » les autres arêtes de la subdivision initiale, mais cela n'engendre pas de nouvelles arêtes, car elles font toutes partie du bord de cette subdivision : pour s'en souvenir, on définit, pour chaque arête, une relation de dimension 2 sur celle-ci (figure 1.8(b)).

Le bord de chaque face F_1 ou F_2 est lui-même une quasi-variété de dimension 1 : chaque bord peut être construit en collant des arêtes le long de leurs sommets extrémités, de telle manière que chaque sommet soit incident à au plus 2 arêtes. On peut donc ré-appliquer le même procédé et éclater chaque sommet incident à deux arêtes en deux nouveaux sommets (figure 1.8(c)). Chaque nouveau sommet correspond en fait à un sommet de la subdivision de départ, « vu » d'une arête de la subdivision initiale, elle-même « vue » d'une face. De même que précédemment, on se souvient, en ajoutant une relation de dimension 1 entre chaque paire de sommets correspondant à l'éclatement d'un sommet, de l'appariement des arêtes entre elles. Afin que la relation de dimension 2 soit bien définie sur ces nouveaux éléments, on la reporte sur eux (figure 1.8(c)).

Le bord de chaque arête est maintenant défini par deux sommets résultant des éclatements successifs, entre lesquels on définit une relation de dimension 0 permettant de se souvenir qu'ils correspondent aux extrémités d'une même arête (figure 1.8(d)).

10. La notion de carte étend en dimension quelconque la notion de carte combinatoire, définie initialement en dimension 2.

11. Par exemple, les cartes généralisées constituent une optimisation des chaînes de cartes pour la représentation de quasi-variétés cellulaires ; les cartes constituent une optimisation des cartes généralisées pour la représentation de quasi-variétés cellulaires orientables sans bord.

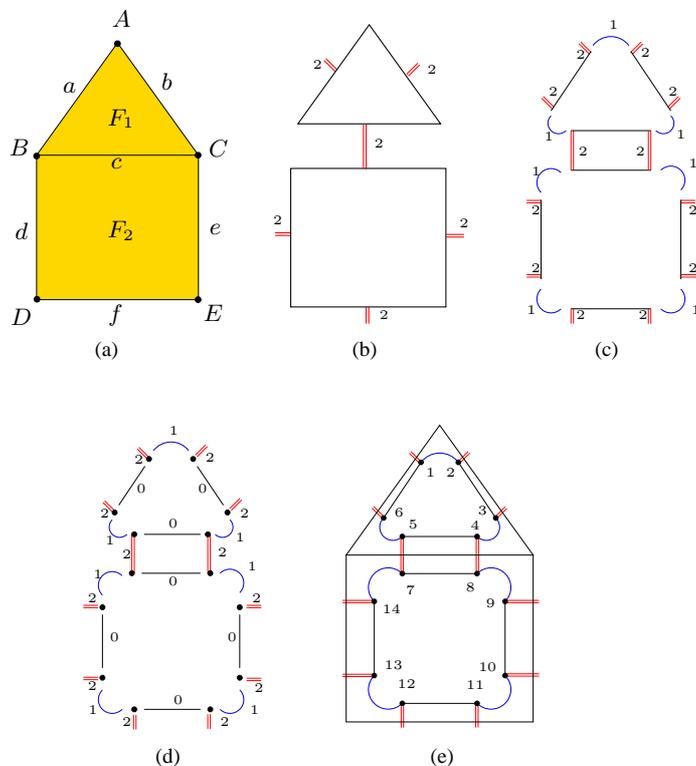


Figure 1.8. Construction d'une carte représentant une quasi-variété cellulaire.

Les sommets éclatés en fin du processus constituent les éléments de base du modèle, que l'on appellera par la suite des *brins*. On peut noter que les relations de dimension 0, 1, et 2 appariet les brins par paires, ce que l'on peut formaliser ainsi : les brins correspondent à des objets « abstraits », les relations sont représentées par des applications entre les brins, conduisant ainsi à la définition suivante :

Une *pré-carte* de dimension n est une algèbre¹² $C = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$, où :

- B est un ensemble fini d'objets abstraits appelés *brins* ;
- $\forall i, 0 \leq i \leq n, \alpha_i$ est une involution¹³ de B dans B .

12. Un ensemble sur lequel agissent des opérateurs.

13. Une involution $\alpha : B \rightarrow B$ est une bijection sur B qui est sa propre inverse ; en d'autres termes, $\forall b \in B, b\alpha\alpha = b$, ou encore $b\alpha = b\alpha^{-1}$. Nous utilisons ici la notation anglo-saxonne post-fixée où $\alpha(b)$ est notée $b\alpha$.

On peut noter de plus une contrainte entre les involutions, qui est apparue lors du processus d'éclatements successifs. Quatre brins, nommés respectivement 4, 5, 7, 8, ont été créés autour de l'arête c commune à F_1 et F_2 . 4 et 5 (resp. 7 et 8) définissent les extrémités de l'arête « vue » de F_1 (resp. de F_2), ce qui correspond au fait que l'involution α_0 « lie » chaque paire de brins. Comme les faces partagent l'arête c , il faut de plus que l'assemblage des brins par l'involution α_2 soit cohérent¹⁴, ce qui induit la définition suivante :

Une *G-carte* est définie comme une pré-carte $C = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ vérifiant : $\forall i, j, 0 \leq i, j \leq n, i \notin \{j-1, j, j+1\}, \alpha_i \alpha_j$ est une involution¹⁵.

Notion d'orbite. Il est maintenant nécessaire d'explicitier la notion de cellule : pour ce faire, nous introduisons la notion d'*orbite* : soit B , un ensemble, et π_0, \dots, π_n , un ensemble de permutations définies sur B . L'orbite d'un élément b de B relativement à cet ensemble de permutations, notée $\langle \pi_0, \dots, \pi_n \rangle (b)$, est informellement l'ensemble de tous les éléments de B que l'on peut atteindre à partir de b par une composition quelconque des permutations et de leurs inverses. Il faut noter que l'ensemble des orbites pour l'ensemble de permutation $\{\pi_0, \dots, \pi_n\}$ réalise une partition de B (cf. figure 1.9). Soient $N = \{0, \dots, n\}, I = \{i_1, \dots, i_p\} \subseteq N$ et $b \in B$; on note $\langle \rangle_I (b)$ l'orbite de b relativement à l'ensemble des involutions d'indices compris dans I .

Différentes informations peuvent être maintenant extraites directement des cartes. Par exemple, pour tout i compris entre 0 et n , on définit formellement les cellules de dimension i comme l'ensemble des orbites $\langle \rangle_{N-\{i\}}$ (cf. figure 1.9). On peut de plus définir les G-cartes des cellules par : $\forall i, 0 \leq i \leq n$, la $(n-1)$ -G-carte des i -cellules est $C_i = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \hat{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$, où la notation $\hat{\alpha}_i$ signifie que l'involution α_i est omise. Chaque composante connexe de cette G-carte décrit la structure du voisinage d'une cellule de dimension i (cf. figure 1.9(a, b, c)). On peut de même définir la $(n-1)$ -G-carte des bords, qui décrit la structure d'une quasi-variété cellulaire de dimension $n-1$ recouvrant le bord de la quasi-variété cellulaire de dimension n associée à la G-carte, s'il est non vide (cf. figure 1.9(d)). Nous dirons qu'une pré-carte (resp. une G-carte) $C = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est *connexe* si et seulement si elle ne contient qu'une unique orbite pour l'ensemble des involutions. La pré-carte

14. Si les brins 4 et 8 sont « liés » par α_2 , alors leurs images par α_0 , i. e. les brins 5 et 7, sont « liés » aussi par α_2 .

15. Il faut noter que cette contrainte de cohérence ne prend son sens qu'à partir de la dimension 2 : en d'autres termes, les notions de pré-carte et de G-carte sont équivalentes en dimension 0 et 1. En dimension supérieure, si l'on considère une quasi-variété comme étant construite par « collage » de cellules de dimension n le long de cellules de dimension $n-1$, cette contrainte de cohérence garantit que les cellules de dimension $n-1$ *identifiées* lors du collage ont bien même la structure : par exemple, il sera impossible en dimension 3 de coller un cube et un tétraèdre, car les structures d'un carré et d'un triangle sont différentes.

(resp. G-carte) est *sans bords* si et seulement si toutes les involutions sont *sans points fixes*, i. e. pour tout $b \in B$, et tout $i, 0 \leq i \leq n$, on a $b\alpha_i \neq b$.

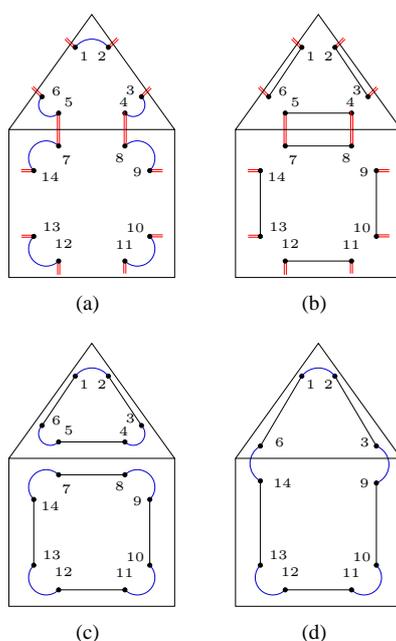


Figure 1.9. Les différentes G-cartes des cellules correspondant à la G-carte de la figure 1.8. En 1.9(a) les sommets, i. e. les orbites $\langle \rangle_{\{0,1,2\}-\{0\}} = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, en 1.9(b) les arêtes, i. e. les orbites $\langle \rangle_{\{0,1,2\}-\{1\}} = \langle \alpha_0, \alpha_2 \rangle$, et en 1.9(c) les faces, i. e. les orbites $\langle \rangle_{\{0,1,2\}-\{2\}} = \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$. La figure 1.9(d) décrit la carte des bords.

Remarquons aussi que les G-cartes permettent de résoudre les problèmes posés par la multi-incidence des objets de la figure 1.7. Les G-cartes associées à ces objets sont représentées sur la figure 1.10.

De plus, différentes contraintes de cohérence supplémentaires ont été proposées afin de représenter des sous-classes de quasi-variétés cellulaires, par exemple, une contrainte permettant de caractériser les G-cartes correspondant à des quasi-variétés ne présentant pas de multi-incidence [ALA 04]. Il est alors possible de caractériser ainsi les GI correspondants et de définir des opérations de conversion entre GI et G-cartes de ce type. Par exemple, si la G-carte est sans multi-incidence, on peut lui associer un GI équivalent de la manière suivante. Un noeud du graphe (i. e. une cellule de dimension i) est associé à toute orbite $\langle \rangle_{N-\{i\}}$; une arête du graphe relie deux

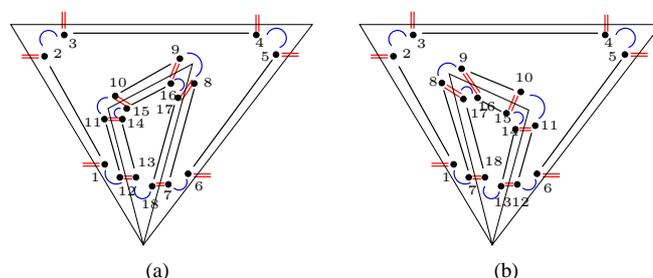


Figure 1.10. Les cartes associées aux objets de la figure 1.7 présentant des multi-incidences.

noeuds associés à deux orbites $\langle \rangle_{N-\{i\}}$ et $\langle \rangle_{N-\{i-1\}}$ si et seulement si il existe un brin commun aux deux orbites.

Représentation des G-cartes. Du fait de leurs définitions, on peut facilement associer un graphe non orienté à toute pré-carte et donc à toute G-carte : un noeud du graphe correspond à un brin, et une arête numérotée i relie deux noeuds associés à deux brins images l'un de l'autre par α_i . Chaque noeud du graphe est donc incident à n arêtes, numérotées de 0 à n . On peut donc représenter une pré-carte ou une G-carte en utilisant les mêmes méthodes que pour les graphes non orientés. Les opérations de parcours (e.g. de composantes connexes, d'orbites), essentielles pour la manipulation des cartes, peuvent être facilement définies comme des parcours de graphes, utilisant toutes les arêtes, ou seulement des arêtes valuées par certains indices.

Le plongement des G-cartes est défini de manière similaire à celui des GI, par des espaces supports. Simplement, une cellule étant définie comme une orbite d'un brin, c'est-à-dire un ensemble de brins que l'on peut atteindre à partir d'un brin de référence, on peut choisir différentes méthodes pour représenter cette information, en particulier selon la complexité espace/temps attendue. On peut ainsi associer une information :

- à tous les brins de l'orbite, ce qui permet un accès direct à l'information associée à la cellule à partir de tout brin la composant, ce qui est efficace en consultation, mais l'est moins en modification. En particulier, s'il y a modification de la structure d'une cellule (e.g. éclatement d'une cellule en deux nouvelles cellules), il peut être nécessaire de parcourir tous les brins de la cellule initiale afin d'associer l'information correspondante à chaque nouvelle cellule ;

- à un brin représentant de l'orbite, ce qui est plus efficace en modification, mais peut l'être moins en consultation, dans la mesure où, étant donné un brin de l'orbite, il peut être nécessaire de parcourir toute l'orbite afin de trouver le brin porteur d'informations.

Opérations. Deux opérations de base peuvent être utilisées pour construire toute pré-carte de dimension n $C = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$. La première consiste à ajouter un nouveau brin « isolé », *i. e.* invariant pour toutes les involutions. La deuxième consiste à « coudre », pour une dimension i donnée ($0 \leq i \leq n$), deux brins b et b' invariants par α_i , *i. e.* à modifier l'involution α_i de manière à ce que b et b' soient images l'un de l'autre par cette involution.

Ces deux opérations de base peuvent être aussi utilisées pour construire toute G-carte, mais il est nécessaire dans ce cas de contraindre l'opération de « couture ». La précondition de l'opération est que les orbites $\langle \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}$ de b et b' aient même structure, *i. e.* en d'autres termes, que les sous-cartes

$$\langle \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(b), \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_{i-1}, \hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_{i+1}, \dots, \alpha_n$$

et

$$\langle \rangle_{N-\{i-1, i, i+1\}}(b'), \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_{i-1}, \hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_{i+1}, \dots, \alpha_n$$

soient isomorphes par α_i ¹⁶. L'opération proprement dite consiste à « coudre » b et b' comme précédemment, mais aussi tous les brins correspondants des deux sous-cartes ci-dessus : en dimension 3 par exemple, ceci garantit que le collage de volumes soit bien fait le long de faces, et que ces faces aient même structure.

De nombreuses autres opérations peuvent être définies assez simplement pour la manipulation des G-cartes, à partir de ces deux opérations de base : éclatement, contraction, chanfreinage de cellules, extrusion et produit cartésien, etc. Basées sur ces opérations topologiques, de nombreuses variantes d'opérations géométriques ont été définies, comme l'arrondi de cellules, le co-raffinement (*i. e.* le calcul de la subdivision résultant de la superposition de deux subdivisions) et les opérations booléennes, etc [CAZ 95, DAM 03, LIE 04]. La plupart de ces opérations peuvent être étendues pour la manipulation d'autres classes d'objets cellulaires.

1.2.3. Autres classes d'objets cellulaires.

Cartes. De même que les G-cartes constituent un modèle topologique optimisé pour la représentation de quasi-variétés cellulaires (cf. aussi section 1.4.1), les cartes constituent un modèle optimisé défini à partir des G-cartes pour la représentation de quasi-variétés cellulaires orientables sans bords. Une carte de dimension n est définie comme une algèbre $C = (B, \beta_1, \dots, \beta_n)$, où :

16. Cette contrainte sur l'opération de couture dans le cas des G-cartes est liée à leur contrainte de cohérence, *i. e.* $\alpha_i \alpha_j$ est une involution pour tout j différent de $i - 1$ et de $i + 1$. Il est aussi possible d'expliquer cette condition en expliquant ce à quoi correspondent les sous-cartes devant être isomorphes, mais ceci fait appel à des notions qui ne sont abordées qu'en section 1.4.1.

- β_1 est une permutation sur B ;
- $\forall i, 2 \leq i \leq n, \beta_i$ est une involution sur B ;
- $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n, i \notin \{j-1, j, j+1\}, \beta_i \beta_j$ est une involution sur B .

Leur définition repose sur la propriété suivante (cf. figure 1.11). Soit une G-carte connexe sans bords¹⁷ $C = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$. La carte $CO = (B, \alpha_0 \alpha_1, \alpha_0 \alpha_2, \dots, \alpha_0 \alpha_n)$, dite carte des orientations de C , comporte :

- une composante connexe : dans ce cas, C est dite non orientable ;
- deux composantes connexes : dans ce cas, C est dite orientable, et chaque composante connexe de CO correspond à une orientation de C . Il est bien connu qu'un objet orientable peut être orienté de deux manières inverses l'une de l'autre, et c'est exactement ce que représentent ces deux composantes connexes. Comme chaque composante connexe peut être déduite de l'autre¹⁸, il est inutile de représenter explicitement les deux. Ceci permet de préciser d'une part l'optimisation réalisée (dans le cas des quasi-variétés cellulaires orientables sans bords, on gagne environ un facteur 2 en utilisant une représentation par cartes au lieu d'une représentation par G-carte) et d'autre part le mode de conversion entre G-cartes et cartes.

On peut déduire facilement de nombreuses notions définies sur les cartes à partir de celles définies sur les G-cartes (e.g. cartes des i -cellules), de même que des opérations de construction de base ou plus élaborées. Il faut noter néanmoins que, comme les cartes ne permettent de représenter que des subdivisions sans bords, certaines opérations et constructions sont plus difficiles à réaliser qu'en utilisant des G-cartes.

Chaînes de cartes. Les cartes constituent un modèle topologique optimisé, déduit des G-cartes pour la représentation d'une sous-classe de quasi-variétés cellulaires. D'autres modèles topologiques ont été définis, d'une part pour la représentation d'autres sous-classes, et d'autre part pour la représentation de classes *plus générales* d'objets cellulaires. Par exemple, les chaînes de cartes [ELT 93, ELT 94] permettent de représenter des complexes cellulaires, c'est-à-dire des objets cellulaires dont les cellules sont des quasi-variétés cellulaires au sens défini ci-dessus, mais dont l'assemblage est « quelconque ».

Une chaîne de cartes est une algèbre $((C^i)_{i=0, \dots, n}, (\sigma^i)_{i=1, \dots, n})$, telle que (cf. figure 1.12) :

17. Rappel : la G-carte est sans bords si toutes les involutions sont sans points fixes.

18. Si l'on note $CO_1 = (B_1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ et $CO_2 = (B_2, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ces deux composantes connexes, alors CO_1 est isomorphe à la carte inverse de CO_2 , $CO_2^{-1} = (B_2, \gamma_1^{-1}, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$. Ceci correspond au fait que CO_1 décrit une orientation et CO_2 l'orientation inverse.

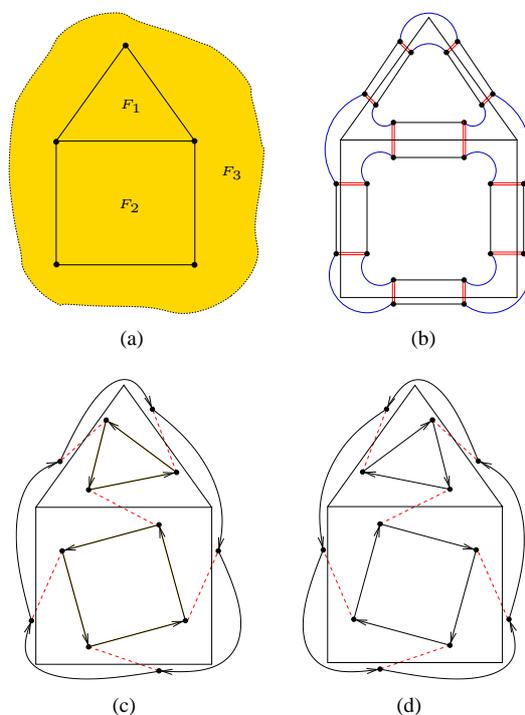


Figure 1.11. (a) Une subdivision du plan. (b) La G-carte correspondante, qui est orientable sans bords. (c) Une composante connexe de sa carte des orientations et (d) l'autre composante connexe. Ces deux composantes connexes décrivent les deux orientations possibles de la subdivision initiale.

- $\forall i, 0 \leq i \leq n, C^i = (B^i, \alpha_0^i, \dots, \alpha_{i-1}^i, \alpha_i^i = \omega)$ est une G-carte de dimension i , telle que ω est une application indéfinie sur B^i ;

- $\forall i, 1 \leq i \leq n, \sigma^i : B^i \rightarrow B^{i-1}$ est une application vérifiant, pour tout brin b de B^i :

$$- \forall k, 0 \leq k \leq i-2, b\alpha_k^i \sigma^i = b\sigma^i \alpha_k^{i-1};$$

$$- b\alpha_{i-1}^i \sigma^i \sigma^{i-1} = b\sigma^i \sigma^{i-1}.$$

Pour tout i , chaque composante connexe de chaque G-carte C^i décrit l'intérieur d'une cellule de dimension i , ce qui s'exprime formellement par le fait que l'involution d'indice i est indéfinie. Chaque cellule de dimension i est liée aux cellules de son bord par l'application σ^i ; les contraintes de cohérence garantissent qu'il s'agit bien d'un complexe cellulaire, dont les cellules sont toutes des quasi-variétés, et que la structure de chaque cellule correspond bien à la structure de son bord.

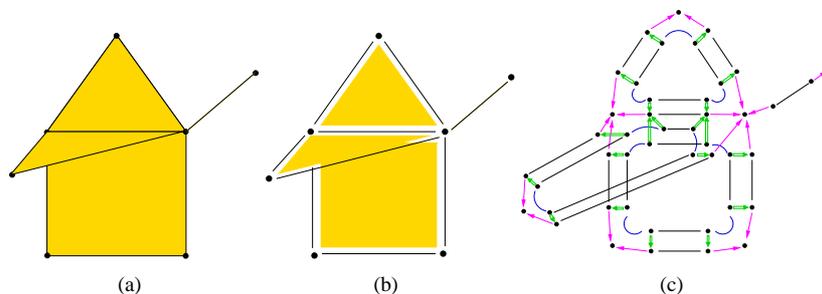


Figure 1.12. Un exemple de chaîne de cartes. En (a) le complexe cellulaire à représenter, en (b) la structuration en cellules de ce complexe. En (c) la chaîne de cartes, où l'intérieur de chaque cellule est représenté par une G-carte.

Il existe différentes variantes de chaînes de cartes représentant différentes classes de complexes cellulaires : les principes de leur représentation et de leur manipulation sont proches de ceux des cartes et des G-cartes. A noter qu'il est maintenant possible de définir les G-cartes comme un modèle optimisé, déduit des chaînes de cartes pour la représentation des quasi-variétés cellulaires. En effet, les quasi-variétés cellulaires étant définies comme des assemblages de cellules de dimension n le long des cellules de dimension $n - 1$ de leurs bords, de sorte qu'au plus deux cellules de dimension n soient incidentes à une cellule de dimension $n - 1$, il suffit de ne représenter que les cellules de dimension n (i. e. la G-carte C^n) et de remplacer l'opérateur de bord σ_n liant les (brins des) cellules de dimension n aux cellules de dimension $n - 1$ de leurs bords par un opérateur d'adjacence α_n liant les (brins des) cellules de dimension n adjacentes entre elles (cf. aussi la section 1.3.4).

Autres modèles ordonnés. De nombreux autres modèles ordonnés ont été proposés dans différents cadres : algorithmique géométrique, modélisation géométrique, structuration d'images (cf. la section 1.1.3). Des équivalences ont été montrées en particulier entre [LIE 91, BRI 93] :

- les G-cartes et les structures *quad-edge*, *facet-edge*, *cell-tuple* ;
- les cartes et les structures *winged-edge*, *face-edge*, *vertex-edge*, *radial-edge*. Par exemple dans le cas de la dimension 2, un brin d'une carte peut être interprété comme une arête orientée, qui est l'objet abstrait de base dans les structures *winged-edge*, *face-edge* et *vertex-edge*.

Les principales différences entre ces structures portent sur la redondance plus ou moins importante de l'information représentée. On peut choisir de ne représenter explicitement que les informations minimales (brins et applications), ou de représenter

aussi les cellules, auxquelles on attache souvent des informations (plongement, informations spécifiques aux applications visées, etc.). Dans ce cas, il faut bien sûr respecter les contraintes de cohérence, *i. e.* tous les brins d'une même cellule sont associés à la même cellule explicite.

1.3. Modèles topologiques simpliciaux.

Les complexes simpliciaux abstraits (CSA) sont l'un des modèles topologiques les plus connus et les plus utilisés [AGO 76, PAO 93, CIG 94, DEF 03b]. Les ensembles semi-simpliciaux (ESS) les généralisent [MAY 67, LAN 95, LAN 96], dans le sens où l'on peut associer un ESS à tout CSA, mais que l'inverse n'est pas vrai. En particulier, les ESS permettent de représenter des objets « courbes » éventuellement multi-incidents, alors que cela n'est pas possible en utilisant des CSA. Ces deux modèles diffèrent aussi par la forme de leurs définitions. La définition des CSA est purement ensembliste ; les ESS sont définis comme une algèbre.

Nous rappelons ici les définitions des CSA et des ESS, quelques notions et opérations de base importantes (les opérations de calcul de propriétés topologiques, sur lesquelles de nombreux travaux sont menés depuis plusieurs années, ne sont pas abordées ici [DEL 95, DEY 99, PEL 06a]). Nous verrons aussi comment convertir chaque structure en l'autre quand cela est possible, ainsi que des exemples classiques d'optimisation de ces modèles, en particulier dans le cas des quasi-variétés simpliciales.

1.3.1. Complexes simpliciaux abstraits.

Définition. Un complexe simplicial abstrait K est défini sur un ensemble V de sommets (abstrait), de la manière suivante (cf. figure 1.13) :

- un simplexe de dimension p est un ensemble de $p + 1$ sommets ;
- K est un ensemble de simplexes vérifiant le fait que tout sous-ensemble non vide de tout simplexe de K est lui-même un simplexe de K .

La dimension de K est la plus grande dimension des simplexes de K .

Soit $\sigma = \{v_0, \dots, v_p\}$, un simplexe abstrait. Une *face propre* de σ est un sous-ensemble strict non vide de sommets de σ . La *face principale* de σ est σ lui-même. Le *bord* de σ est le CSA composé des faces propres de σ . L'*étoile* de σ est l'ensemble des simplexes dont σ est une face (propre ou principale). σ est un *simplexe principal* s'il n'est face propre d'aucun autre simplexe. Ces notions de base sont importantes, car elles permettent de définir le voisinage local d'un simplexe, composé de simplexes de son bord ou de son étoile, et donc des opérations de parcours par voisinage. En fait, les parcours par voisinage sont aux modèles topologiques ce que sont les parcours par

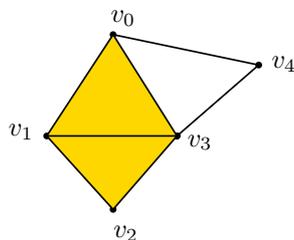


Figure 1.13. La réalisation géométrique du CSA K , défini par :

$$\begin{aligned}
 V &= \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}, \\
 K &= \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \\
 &\quad \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_3\}, \{v_0, v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \\
 &\quad \{v_0, v_1, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}\}.
 \end{aligned}$$

$\{v_0\}$ et $\{v_1, v_3\}$ sont des faces propres de $\{v_0, v_1, v_3\}$, qui est un simplexe principal. $\{\{v_0\}, \{v_1\}\}$ est le bord de $\{v_0, v_1\}$. L'étoile de $\{v_0\}$ est composée des simplexes $\{v_0, v_1\}$, $\{v_0, v_3\}$, $\{v_0, v_4\}$, $\{v_0, v_1, v_3\}$. Les simplexes principaux de K sont $\{v_0, v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_0, v_4\}$, $\{v_3, v_4\}$.

connexité pour les graphes ; ils sont aussi fondamentaux, et se définissent de manière similaire ; on peut d'ailleurs noter qu'un graphe simple peut être représenté par un CSA de dimension 1.

Réalisation géométrique. La notion de réalisation géométrique permet de donner une « interprétation géométrique » à la notion abstraite de CSA. La réalisation géométrique d'un CSA est un *complexe simplicial* (cf. figure 1.13). Un simplexe euclidien de dimension p est l'enveloppe convexe de $p + 1$ points affinement indépendants d'un espace euclidien. Une face d'un simplexe euclidien est un simplexe défini par un sous-ensemble non vide des points définissant le simplexe. Un complexe simplicial L est un ensemble de simplexes euclidiens vérifiant les deux propriétés suivantes :

- toute face de tout simplexe de L est un simplexe de L ;
- l'intersection (au sens géométrique) de deux simplexes de L est soit vide, soit une face commune des deux simplexes.

Il est clair que plusieurs complexes simpliciaux peuvent être associés à un même CSA : le terme *réalisation géométrique* désigne donc l'ensemble de tous les complexes simpliciaux correspondant à un même CSA, ou selon le cas un représentant de cet ensemble¹⁹.

19. Il est à noter que l'on peut toujours associer à tout CSA de dimension n un complexe simplicial dans \mathbb{R}^{2n+1} [MUN 03].

Représentations. Du fait de la définition même des CSA, on peut les représenter en utilisant les mêmes méthodes que pour la représentation d'ensembles. En pratique, les notions de face, bord, étoile se traduisent en termes ensemblistes par des inclusions d'ensembles, qu'il faut savoir gérer de manière très efficace. On peut aussi noter que l'on peut choisir de représenter un CSA :

- en représentant *explicitement* tous les simplexes. Dans ce cas, il faut que soit vérifiée la contrainte de cohérence des CSA, *i. e.* toute face d'un simplexe est un simplexe du CSA ;

- en ne représentant que les simplexes *principaux* : implicitement, toutes leurs faces font partie du CSA. Pour l'exemple de la figure 1.13, il suffit donc de représenter $K' = \{\{v_0, v_1, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_0, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$.

Plonger un CSA dans un espace euclidien revient à lui associer un complexe simplicial, *i. e.* à associer un point à tout sommet de manière à ce que les contraintes de cohérence géométriques des complexes simpliciaux soient satisfaites (*i. e.* l'intersection de deux simplexes est soit vide, soit une face commune).

1.3.2. Ensembles semi-simpliciaux.

Définition. Un ensemble semi-simplicial de dimension n , $S = (K, (d_j))$ est défini de la manière suivante (cf. figure 1.14) :

- $K = \bigcup_{i=0}^n K^i$, où K^i est un ensemble d'objets abstraits appelés simplexes de dimension i , ou i -simplexes, pour tout i compris entre 0 et n ;

- les applications (d_j) sont appelées opérateurs de bord : aucun opérateur n'est défini sur K^0 ; pour tout i compris entre 1 et n , $i + 1$ opérateurs sont définis sur K^i , et permettent d'associer à tout i -simplexe les $i + 1$ $(i - 1)$ -simplexes de son bord²⁰.

Ces opérateurs vérifient la condition suivante : pour tout simplexe de dimension au moins 2, l'application successive de deux opérateurs d_i puis d_j , avec $j < i$ a le même résultat que l'application de d_j puis de d_{i-1} ²¹.

Cette contrainte permet de garantir la cohérence de la structure simpliciale : par exemple, sans cette contrainte, un 2-simplexe pourrait être incident à six sommets. En effet, un 2-simplexe σ peut avoir trois 1-simplexes distincts dans son bord : $\sigma d_0, \sigma d_1, \sigma d_2$, et tout 1-simplexe μ peut avoir deux 0-simplexes distincts dans son bord : μd_0 et μd_1 . La condition garantit l'égalité des sommets deux à deux : $\sigma d_2 d_1 = \sigma d_1 d_1, \sigma d_2 d_0 = \sigma d_0 d_1, \sigma d_1 d_0 = \sigma d_0 d_0$.

20. $\forall i, 1 \leq i \leq n, \forall j, 0 \leq j \leq i : d_j : K^i \rightarrow K^{i-1}$.

21. $\forall p, 2 \leq p \leq n, \forall \sigma \in K^p, \forall i, 0 \leq i \leq p, \forall j, 0 \leq j < i, \sigma d_i d_j = \sigma d_j d_{i-1}$. Nous utilisons ici la notation anglo-saxonne post-fixée où $d(\sigma)$ est notée σd .

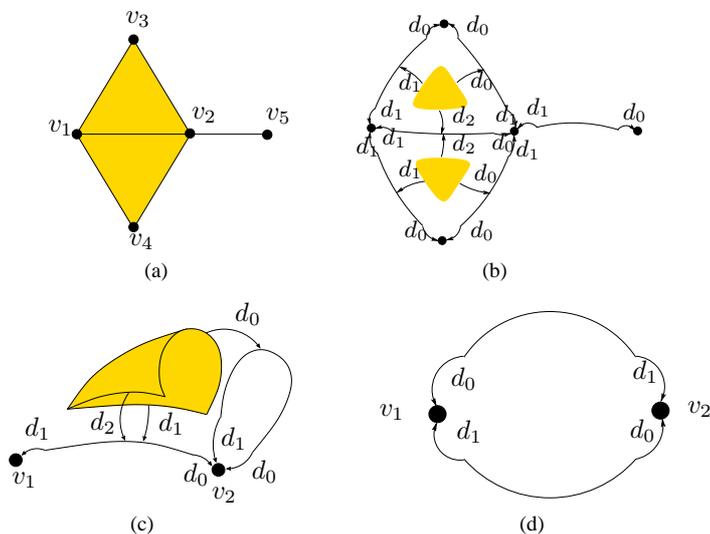


Figure 1.14. Exemples d'ensembles semi-simpliciaux. (a) Un complexe simplicial C . (b) Un ESS décrivant la structure de C . (c) et (d) Deux ESS auxquels on ne peut pas associer de CSA.

Les notions de face propre, face principale, simplexe principal, bord et étoile s'expriment ici grâce aux opérateurs de bord. Par exemple, le j -simplexe μ est une face propre du i -simplexe σ s'il existe une suite non vide d'opérateurs de bord $d_{p_{i-1}}, \dots, d_{p_j}$ telle que $\sigma d_{p_{i-1}} \dots d_{p_j} = \mu$.

Réalisation géométrique. La notion de complexe simplicial est insuffisante pour définir la réalisation géométrique d'un ESS, ce qu'il est facile de vérifier sur les deux exemples suivants.

– $K^0 = \{\mu\}, K^1 = \{\sigma\}$, et $\sigma d_0 = \sigma d_1 = \mu$. Cet ESS décrit en fait une arête dont les deux extrémités sont confondues (*i. e.* une boucle). Si l'on associe un complexe simplicial à cet ESS, le sommet μ est associé à un point, et l'arête σ , à laquelle est associée l'enveloppe convexe du point, est *dégénérée* en un point.

– $K^0 = \{\mu_0, \mu_1\}, K^1 = \{\sigma_0, \sigma_1\}$, et $\sigma_0 d_0 = \sigma_1 d_0 = \mu_0, \sigma_0 d_1 = \sigma_1 d_1 = \mu_1$. Cet ESS décrit deux arêtes partageant les mêmes sommets extrémités. Si l'on associe un complexe simplicial à cet ESS, chaque arête est associée à un segment dont les extrémités sont les points associés aux sommets, et les deux arêtes sont confondues.

La définition de la réalisation géométrique des ESS fait donc appel à une autre notion, qui est celle de CW-complexe et qu'il est inutile de présenter ici [MAY 67,

FRI 90]. L'idée importante est que les ESS permettent de représenter des objets triangulaires éventuellement multi-incidents, et qu'ils peuvent être utilisés pour représenter des objets « courbes », contrairement aux CSA qui correspondent naturellement à des objets « linéaires ».

Représentations. Du fait de la définition des ESS, on peut facilement associer un graphe orienté à tout ESS. Un noeud du graphe correspond à un simplexe (la dimension du simplexe est associée au noeud). Une arête orientée du graphe relie deux noeuds correspondant à deux simplexes dont l'un est image de l'autre par un opérateur de bord (l'arête est évaluée par l'indice de l'opérateur de bord). Ce graphe présente certaines régularités, par exemple tous les noeuds auxquels est associée la même dimension ont le même nombre d'arêtes qui en sont issues. On peut donc représenter un ESS en utilisant les mêmes méthodes que pour la représentation de graphes orientés. En pratique, il est utile de représenter les arêtes inversement orientées, pour le parcours d'étoile, par exemple.

Il est possible de plonger les ESS en utilisant des modèles paramétriques (cf. figure 1.15), par exemple des espaces triangulaires de Bézier (de toutes dimensions), ce qui revient, en termes de structures de données, à associer les points de contrôle aux simplexes. Selon la méthode d'association utilisée, un certain contrôle implicite de la continuité est possible.

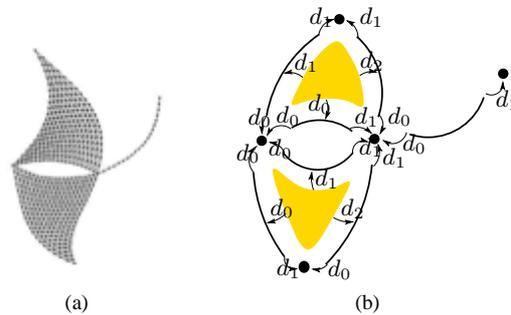


Figure 1.15. Un ensemble semi-simplicial plongé en utilisant des carreaux triangulaires de Bézier.

1.3.3. Opérations de base.

Nous présentons dans un premier temps deux opérations de base pouvant être utilisées pour construire tout objet simplicial : *le cône* et *l'identification*. Nous abordons ces opérations uniquement sous leur aspect topologique et dans leur version « de

base » : en effet, il existe de nombreuses variantes d'opérations permettant de contrôler finement la structure et la forme des objets résultants :

- schématiquement, un cône sur un objet simplicial consiste à ajouter un nouveau sommet, et à créer, pour chaque i -simplexe initial, un $(i + 1)$ -simplexe incident à ce i -simplexe et au sommet ajouté (cf. figure 1.16). En particulier, cette opération permet de créer tout simplexe de toute dimension par cônes successifs. Cette opération s'exprime bien sûr de manière différente sur les CSA et les ESS, tout en s'exprimant facilement dans les deux cas.

- l'identification consiste, comme son nom l'indique, à identifier deux simplexes de même dimension d'un objet simplicial (cf. figure 1.16). Pour les CSA, cette opération revient toujours à identifier des sommets, puisque les simplexes sont définis comme des ensembles de sommets. Il est important de noter que l'identification de sommets dans les CSA peut entraîner la dégénérescence de simplexes : en effet, si l'on identifie deux sommets incidents à un même simplexe de dimension i , la dimension du simplexe résultant est $i - 1$. Si l'on souhaite éviter la dégénérescence de simplexes, il est nécessaire de contrôler l'opération par une précondition qui peut être coûteuse à vérifier. Ce problème ne se pose pas avec les ESS. En effet, comme les simplexes sont des objets atomiques des ESS, l'identification de simplexes du bord d'un simplexe n'a aucun effet sur l'existence même de ce dernier. En revanche, le respect des contraintes de cohérence des ESS a pour effet que l'identification de simplexes peut impliquer des identifications intuitivement inattendues des simplexes du bord.

Il existe bien d'autres opérations élémentaires de construction [FER 91, PAO 93, LIE 04] (cf. figure 1.17) :

- l'*échange* d'arêtes²² est très utilisé pour la manipulation de triangulations de surfaces dans de nombreuses applications (cf. figure 1.17(a) et 1.17(b)) ;

- l'*éclatement* (cf. figure 1.17(c) et 1.17(d)) d'un simplexe par un sommet a pour effet non seulement l'éclatement du simplexe lui-même, mais aussi l'éclatement des simplexes de son étoile, afin de respecter la structure simpliciale des objets²³. La « propagation » des éclatements est la raison pour laquelle le calcul des opérations booléennes sur des objets simpliciaux par applications successives d'éclatements peut ne pas converger (cf. section 1.4.3).

- l'*extrusion* (cf. figure 1.17(e) et 1.17(f)), et plus généralement le produit cartésien d'objets simpliciaux, peut aussi être définie sur les CSA et les ESS.

22. Le *flip* d'arêtes, suivant la terminologie anglo-saxonne.

23. Il faut noter que cette « propagation » des éclatements est générale pour tous les modèles topologiques à cellules régulières : modèles cubiques, simplexoïdaux, etc.

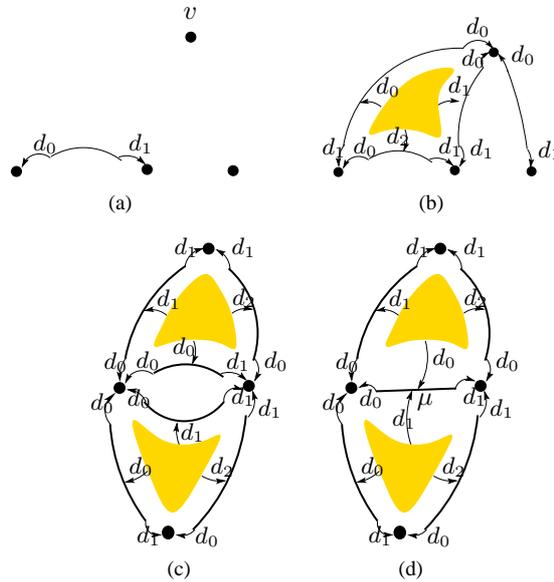


Figure 1.16. Opération de cône (a) et (b). Opération d'identification (c) et (d) (ici, de deux arêtes en une arête unique).

Enfin, notons de nombreux travaux concernant le calcul de propriétés topologiques de CSA et d'ESS (e.g. groupes d'homologie), qui fournissent des caractéristiques des objets simpliciaux manipulés (nombre de bords, de « cavités », etc.).

1.3.4. Classes d'objets simpliciaux.

Conversion entre CSA et ESS. Les objets simpliciaux correspondant aux CSA constituent une sous-classe de ceux correspondant aux ESS. Il est ainsi toujours possible d'associer un ESS à un CSA²⁴. Réciproquement, il est possible d'associer un CSA à tout ESS ne présentant pas de multi-incidence, c'est-à-dire si :

- tout i -simplexe est incident à $i + 1$ sommets distincts ;
- deux i -simplexes distincts sont incidents à deux ensembles distincts de sommets.

24. En fait, étant donné un CSA, il est en général possible de lui associer plusieurs ESS distincts : intuitivement, ceci est similaire au fait que l'on peut associer plusieurs suites à un même ensemble.

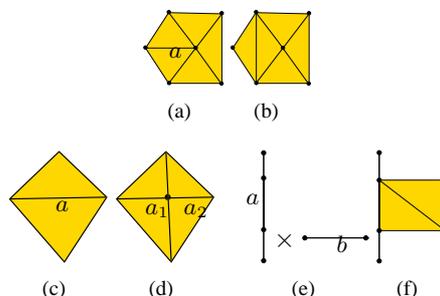


Figure 1.17. Quelques opérations de manipulation d'objets simpliciaux. En (a) et (b), échange de l'arête a . En (c) et (d), éclatement de l'arête a en a_1 et a_2 , par insertion d'un sommet : notons que cela induit l'éclatement des simplexes de l'étoile de a . En (e) et (f), extrusion de l'arête a le long de l'arête b .

Quasi-variétés. De nombreuses applications nécessitent de manipuler des sous-classes d'objets simpliciaux présentant certaines propriétés topologiques particulières, par exemple des triangulations de surfaces, ou leurs extensions en dimension supérieure : les *quasi-variétés* simpliciales. De nombreux travaux ont donc porté d'une part sur la définition de propriétés caractéristiques locales des quasi-variétés simpliciales, d'autre part sur leur caractérisation *constructive*. Par exemple, et de même que dans le cas cellulaire, une quasi-variété simpliciale de dimension n peut être schématiquement définie comme un objet simplicial pouvant être construit par :

- construction de simplexes de dimension n (et de leurs bords) incidents à $n + 1$ sommets distincts ;
- identification de simplexes de dimension $n - 1$, de telle manière qu'au plus deux simplexes de dimension n soient incidents à un même simplexe de dimension $n - 1$.

Cette définition constructive est bien adaptée dans le cas des ESS, et il est possible de définir des modèles optimisés pour la représentation des quasi-variétés : schématiquement, il suffit de ne représenter que les n -simplexes, et de remplacer les opérateurs de bords par des opérateurs « d'adjacence » entre n -simplexes (cf. figure 1.18). En revanche, cette définition est plus difficile à mettre en œuvre dans le cas des CSA, ce qui est dû au fait que l'opération d'identification est indissociable de l'opération de dégénérescence [DEF 03a, DEF 03c]. Dans le cas des quasi-variétés définies à partir des CSA, plusieurs auteurs ont proposé de ne représenter explicitement que les simplexes principaux (comme on l'a vu ci-dessus, cela suffit pour représenter tout CSA) et d'ajouter des « pointeurs » représentant les relations d'adjacence entre n -simplexes. Il faut noter qu'ici, cette information est redondante, puisqu'elle est contenue dans

la définition même des simplexes, mais elle permet d'optimiser les parcours des objets [PAO 93].

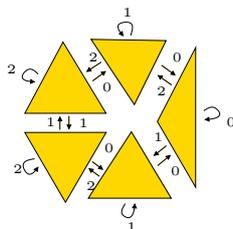


Figure 1.18. Optimisation des ESS pour la représentation de quasi-variétés.

1.4. Cadre général et choix d'un modèle particulier.

1.4.1. Cadre général.

Tous les modèles cellulaires étudiés dans la section 1.2 ont une interprétation en termes de modèle simplicial « implicitement structuré en cellules », ce que nous illustrons ci-dessous pour les graphes d'incidence et les cartes généralisées.

Interprétation topologique des graphes d'incidence. Il est toujours possible d'associer un CSA (donc un ESS) « structuré en cellules » à tout GI, et ce de la manière suivante (cf. figure 1.19) :

- chaque simplexe correspond à un « chemin partiel » dans le GI : plus précisément, chaque simplexe correspond à une suite de cellules de dimensions strictement croissantes et incidentes entre elles, *i. e.* à un sous-chemin particulier du GI ;
- ce CSA est structuré : on peut en effet numéroter chaque sommet du CSA en lui associant la dimension de la cellule correspondante, et il est alors possible de structurer le CSA en sous-ensembles de simplexes disjoints définis de la manière suivante : un sous-ensemble de dimension i est identifié par un sommet du CSA numéroté i , et composé de ce sommet et de tous les simplexes de l'étoile de ce sommet tels que tous leurs sommets sont numérotés par une dimension inférieure à i : un sous-ensemble de dimension 0 est donc composé d'un sommet numéroté 0, un sous-ensemble de dimension 1 est composé d'un sommet numéroté 1 et des arêtes du CSA numérotées 0 et 1 qui lui sont incidentes, etc. Ces sous-ensembles, qui forment une partition du CSA, définissent formellement la structure des cellules et leur assemblage tels que décrits par le GI.

Nous pouvons donc maintenant oublier notre intuition sur les objets cellulaires, et définir formellement un objet cellulaire comme un objet simplicial structuré en cellules de la manière précisée ci-dessus, ce qui résout les problèmes d'ambiguïté liés

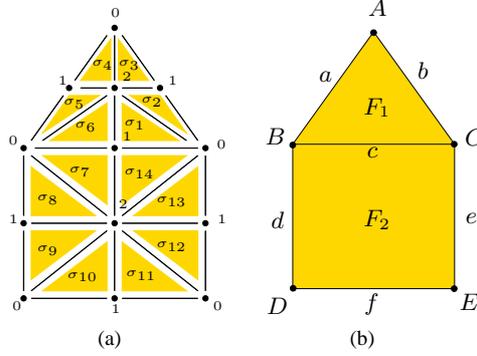


Figure 1.19. En (a), un CSA structuré en cellules, correspondant au GI de la figure 1.5(b); l'objet décrit est rappelé en (b). Par exemple, le 2-simplexe σ_3 (resp. σ_{14}) correspond au sommet A (resp. C) vu de l'arête b (resp. c), vue de la face F_1 (resp. F_2), i. e. au chemin (A, b, F_1) (resp. (C, c, F_2)). Le 1-simplexe incident à σ_7 , dont les sommets extrémités sont numérotés 0 et 2, correspond au chemin (B, F_2) . Le CSA est structuré en 5 sommets (il s'agit des sommets numérotés 0, correspondant à (A) , (B) , (C) , (D) et (E)), 6 arêtes (il s'agit des sous-ensembles de 0-simplexes numérotés 1 et des 1-simplexes incidents dont les sommets extrémités sont numérotés 0 et 1, i. e. $\{(a), (A, a), (B, a)\}$, $\{(b), (A, b), (C, b)\}$, $\{(c), (B, c), (C, c)\}$, $\{(d), (B, d), (D, d)\}$, $\{(e), (C, e), (E, e)\}$, $\{(f), (D, f), (E, f)\}$), et 2 faces (il s'agit des sous-ensembles de 0- simplexes numérotés 2, des 1- simplexes incidents dont les sommets extrémités sont numérotés 0 et 2, ou 1 et 2, et des 2-simplexes dont les sommets extrémités sont numérotés 0, 1 et 2, i. e.

$$\{(F_1), (A, F_1), (B, F_1), (C, F_1), (a, F_1), (b, F_1), (c, F_1), (A, a, F_1), (A, b, F_1), (B, a, F_1), (B, c, F_1), (C, b, F_1), (C, c, F_1)\}$$

et

$$\{(F_2), (B, F_2), (C, F_2), (D, F_2), (E, F_2), (c, F_2), (d, F_2), (e, F_2), (f, F_2), (B, c, F_2), (B, d, F_2), (C, c, F_2), (C, e, F_2), (D, d, F_2), (D, f, F_2), (E, e, F_2), (E, f, F_2)\}.$$

à la représentation par GI, soulignés dans la section 1.2.1. En tenant compte de cette interprétation pour l'exemple de la figure 1.7, le graphe d'incidence que l'on imagine intuitivement pour les deux subdivisions présentées ne décrit en fait la structure d'aucune de ces subdivisions, mais correspond à la structure d'une subdivision différente.

Les GI constituent donc un modèle optimisé permettant de représenter une certaine classe d'objets cellulaires. A l'heure actuelle, la caractérisation de cette classe est

incomplète. Notons aussi que tout objet simplicial ne peut pas être structuré en cellules (cf. figure 1.20).

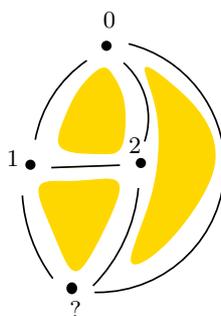


Figure 1.20. *Un objet simplicial qui ne peut être structuré en cellules. Comment numéroter le sommet marqué par un point d'interrogation ?*

Interprétation topologique des modèles ordonnés. Nous avons vu ci-dessus que la notion de GI repose sur celle de CSA structuré en cellules. La solution retenue dans les modèles ordonnés consiste à définir ces modèles en les basant, non sur la représentation explicite de cellules comme les GI, mais directement sur la notion de simplexe numéroté afin de prendre en compte la structuration cellulaire. Une autre contrainte prise en compte dans les modèles cellulaires ordonnés est le fait que l'on cherche à manipuler des cellules présentant certaines propriétés topologiques, et, plus précisément, des cellules qui sont des quasi-variétés, ce qui n'est pas le cas des GI (cf. section 1.2.1 et figure 1.6).

Pour expliciter cela, nous montrons tout d'abord que toute pré-carte correspond à une quasi-variété simpliciale structurée en cellules, mais ces cellules ne sont pas forcément des quasi-variétés. Nous avons vu en section 1.3.4 que l'on peut optimiser la représentation d'une quasi-variété simpliciale, en ne représentant que les simplexes principaux et leurs relations d'adjacence. Lorsque la quasi-variété est structurée en cellules, on peut lui associer une pré-carte : les brins correspondent aux simplexes principaux, les involutions décrivent les relations d'adjacence entre simplexes, et les indices des involutions correspondent à la structuration en cellules. Par exemple, la G-carte de la figure 1.8.e correspond à l'objet simplicial structuré de la figure 1.19.a : les brins correspondent aux 2-simplexes, e.g. les brins 1, 5 et 11 correspondent aux 2-simplexes σ_4 , σ_6 et σ_{11} ; pour tout i , l'involution α_i associe deux brins correspondant à deux 2-simplexes partageant un 1-simplexe numéroté $\{0, 1, 2\} - \{i\}$.

Réciproquement, on peut associer formellement une quasi-variété simpliciale structurée en cellules à toute pré-carte, en utilisant la notion d'orbite. La quasi-variété simpliciale structurée en cellules associée à la pré-carte $C = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est définie par :

- Soient $N = \{0, \dots, n\}$ et $I = \{p_0, \dots, p_i\} \subseteq N$;
- L'ensemble des orbites $\langle \rangle_{N-I}$ définit l'ensemble des simplexes numérotés par les entiers de I ;
- Soit $b \in B, p_j \in I, \sigma$ et τ , les simplexes associés aux orbites $\langle \rangle_{N-I}(b)$ et $\langle \rangle_{N-(I-\{p_j\})}(b)$. Alors $\sigma d_j = \tau$.

On définit ainsi un ESS qui est une quasi-variété structurée en cellules. En effet, tous les simplexes principaux sont de dimension n : ils correspondent aux orbites des brins de B pour un ensemble vide d'involutions, *i. e.* en fait aux brins eux-mêmes. Un $(n - 1)$ -simplexe est incident à au plus deux n -simplexes, car les applications $\{\alpha_i, 0 \leq i \leq n\}$ sont des involutions. L'ESS est de plus structuré en cellules. En effet, tout n -simplexe σ correspondant à un brin b est incident à $n + 1$ sommets distincts associés aux orbites $\langle \rangle_{N-\{i\}}(b)$, pour tout i de N , et chacun de ces sommets peut ainsi être numéroté par l'indice i correspondant. Cependant, si l'ESS lui-même est une quasi-variété, les cellules n'en sont pas forcément (cf. figure 1.6.b).

En revanche, du fait de leur contrainte de cohérence portant sur la composition de deux involutions, les G-cartes correspondent à des quasi-variétés dont les cellules sont elles-mêmes des quasi-variétés.

Du simplicial au cellulaire. Les modèles topologiques présentés dans ce chapitre, de même que l'essentiel des modèles topologiques proposés dans la littérature, s'inscrivent dans un cadre général de définition des modèles simpliciaux, simptoïdaux et cellulaires²⁵ (cf. figure 1.21 et figure 1.22). Par exemple, il est possible de déduire des modèles pour la représentation de sous-classes d'objets simpliciaux à partir de modèles simpliciaux « généraux », par des mécanismes utilisant les propriétés topologiques vérifiées par ces sous-classes (on peut par exemple déduire les CSA des ESS). Il s'agit en fait d'une démarche courante d'optimisation de structures de données : par exemple, il est classique de déduire d'une structure de graphe quelconque des structures optimisées pour représenter des graphes présentant certaines régularités. Les modèles cubiques et plus généralement simptoïdaux peuvent être définis à partir des modèles simpliciaux, en rendant implicite le fait que les cellules sont des produits cartésiens de simplexes. Comme montré ci-dessus, les modèles cellulaires peuvent aussi être définis à partir de modèles simpliciaux, par un mécanisme simple de numérotation induisant une notion de cellule. Enfin, et de même que pour les modèles

25. Il existe d'autres types de modèles, par exemple à cellules régulières (e.g. à faces hexagonales, etc.), que nous n'étudions pas ici.

simpliciaux, des mécanismes peuvent être conçus afin d'optimiser les modèles simploldaux et cellulaires pour la représentation de sous-classes d'objets (quasi-variétés, etc.).

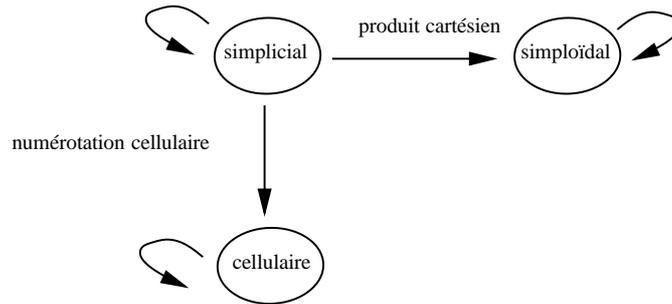


Figure 1.21. Cadre général de définition de modèles topologiques. Les flèches auto-référentes aux classes d'objets indiquent l'existence de mécanismes d'optimisation de modèles par rapport aux sous classes d'objets

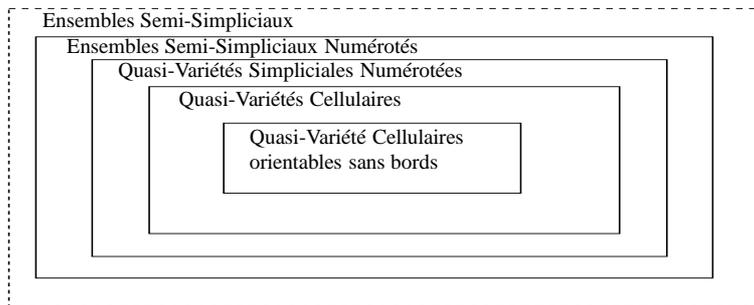


Figure 1.22. Exemples de sous-classes d'objets : on pourrait de plus distinguer les modèles suivant qu'ils permettent ou non de représenter des objets contenant des cellules multi-incidentes.

1.4.2. Structures de données.

Pour implanter, usuellement en dimension 3, des modèles topologiques où les cellules sont toutes représentées explicitement, on recourt habituellement à autant de structures de données qu'il y a de types de cellules, et à des pointeurs les liant entre elles, de sorte à vérifier la propriété suivante : l'obtention ou la mise-à-jour des n i -cellules incidentes ou adjacentes à une j -cellule ($0 \leq i, j \leq 3$) est effectuée en

$O(n)$. C'est par exemple le cas pour la structure d'arêtes ailées présentée au chapitre précédent.

Pour obtenir cette propriété sur des modèles tels que les cartes généralisées ou les cartes, représentant les cellules implicitement, il suffit que, pour un brin b , chaque image et antécédent de b par une involution α_i ou une permutation β_i puisse être obtenu(e) en temps constant.

Ceci conduit à représenter explicitement chaque brin par une structure de type enregistrement. Pour des brins b et b' liés par une involution α_i , un pointeur de l'enregistrement b pointe sur celui représentant b' , et réciproquement un pointeur de b' pointe sur celui représentant b . Chaque involution α_i « coûte » donc un pointeur par brin. Une permutation β_i , est, elle, représentée par deux pointeurs par brin : l'un pour l'image de b par β_i , et l'autre pour l'antécédent de b par β_i . Enfin, une application telle que l'opération « bord » d_i dans les ensembles semi-simpliciaux est représentée, pour chaque simplexe σ , par au moins deux pointeurs : l'un pour l'image de σ par d_i , l'autre pour l'un des antécédents de σ par d_i . On ajoute un pointeur par simplexe si l'ensemble des n antécédents d'un simplexe doit pouvoir être parcouru en $O(n)$, et un autre pointeur pour chaîner doublement la liste des antécédents, afin que des opérations telles que la suppression d'un simplexe soit en temps constant.

Dans un modèle tel que les cartes ou G-cartes, l'association d'informations de plongement à la topologie peut se faire soit via un unique brin de l'orbite concernée, soit via chaque brin. Par exemple, un seul brin d'une face peut porter l'information sur le plongement de la face, ou bien chacun des brins de la face peut le porter. La première option rend plus aisée les opérations de modification, et la seconde, celles de consultation. En pratique, on utilise une structure de données qui associe dynamiquement les deux options, dès lors que des modifications sont effectuées régulièrement, comme dans un logiciel de modélisation 3D. Un seul brin par orbite porte l'information de plongement, et un champ « direct-info » permet, au besoin, de répartir cette information sur tous les brins de l'orbite dès que les consultations prennent le pas sur les modifications.

Enfin, pour gérer les parcours d'orbites, et a fortiori les parcours imbriqués, on associe à chaque brin ou simplexe un ensemble de marques booléennes, qui permettent de mémoriser le fait qu'un brin ou simplexe a été parcouru ou non. Au total, un brin b d'une 3-carte par exemple est représenté par un enregistrement tel que sur le tableau 1.1.

Une 3-carte est représentée par une liste ou par une table de tels enregistrements. Les champs sommet, arête, face et volume ne sont présents que si les plongements correspondants sont représentés. Pour une représentation polyédrique, seul le champ sommet apparaît. Le coût d'une 2-carte ainsi représentée est analogue à celui de la représentation de structures telles que les arêtes ailées. Par exemple, la représentation

beta	$\beta(b)$
beta1	$\beta^{-1}(b)$
alpha2	$\alpha_2(b)$
alpha3	$\alpha_3(b)$
direct_info	Référence générique sur un objet
marques	Tableau de booléens
sommet	Pointeur sur le sommet
arete	Pointeur sur l'arête
face	Pointeur sur la face
volume	Pointeur sur le volume

Tableau 1.1. Structure de données pour un brin d'une 3-carte.

d'un cube par une 2-carte nécessite $6 * 4 = 24$ brins, soit 24 enregistrements « topologiques », et la représentation par une structure d'arête ailée nécessite 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes, soit 26 enregistrements « topologiques ».

Le coût d'une G -carte est environ deux fois plus élevé que celui d'une carte, mais inclut la représentation d'objets non orientables, et, surtout, facilite la conception des opérations, parce que les G -cartes sont basées sur un unique type de lien topologique - les involutions - alors que les autres modèles ont tous au moins deux types de liens.

1.4.3. Choix d'un modèle particulier.

Le choix d'un modèle topologique dépend bien sûr du type d'objets que l'on souhaite représenter, mais aussi des opérations que l'on souhaite appliquer à ce modèle, de la complexité espace/temps et de la complexité liée au développement logiciel [BER 94, DUF 97]. Il s'agit donc d'une problématique classique de choix d'une structure de données, typiquement en tenant compte :

1) du type d'objets que l'on souhaite représenter. Il est possible de définir un modèle topologique très général pour représenter « tout » type de complexes cellulaires (par exemple les chaînes de cartes), et les autres modèles sont en fait des optimisations adaptées à la représentation de classes particulières (par exemple les G -cartes). Ces optimisations sont dues aux propriétés topologiques caractérisant la sous-classe, qui permettent de rendre implicites certaines informations. Il est clair qu'utiliser un modèle adapté à une sous-classe pour représenter une classe plus générale est source d'erreurs graves. Ainsi, les graphes d'incidence permettent de représenter certains complexes cellulaires, qui ne présentent en particulier pas de multi-incidence. Même si intuitivement on peut imaginer un graphe d'incidence à partir d'une subdivision présentant des cellules multi-incidentes, l'interprétation formelle de la représentation

obtenue ne correspond absolument pas à la subdivision que l'on souhaite représenter (cf. section 1.4.1).

2) des opérations que l'on souhaite appliquer. Par exemple, on peut souhaiter ne manipuler que des objets simpliciaux, en utilisant en particulier des opérations booléennes (union, intersection, différence). Ces opérations ne produisent pas de manière immédiate des objets simpliciaux (cf. figure 1.23). Une première solution consiste à utiliser un modèle cellulaire, à appliquer l'opération booléenne et à trianguler le résultat. Une seconde solution consiste à éclater les simplexes au fur et à mesure du calcul des intersections entre les objets initiaux. Le problème ici est que de nouveaux simplexes peuvent être ajoutés à chaque éclatement, et il existe des exemples de configuration telles que le calcul ne converge pas. À notre connaissance, aucune solution n'a été apportée pour effectuer des opérations booléennes sur des objets simpliciaux (et plus généralement possédant des cellules régulières), hormis celle consistant à les manipuler en cours de calcul comme des objets cellulaires.

3) du coût espace/temps du modèle et des opérations. Pour une classe d'objets donnée, un modèle permettant de représenter une sur-classe d'objets est souvent plus coûteux en espace qu'un modèle optimisé pour cette classe, car certaines informations explicites dans le premier sont rendues implicites dans le second. Il faut bien sûr prendre en compte la complexité en temps des opérations que l'on souhaite utiliser pour manipuler le modèle : en particulier, si des opérations nécessitent de souvent recalculer explicitement certaines informations implicites, il peut être préférable, malgré la perte en espace, de choisir un modèle plus général. Par exemple, il peut sembler plus efficace de représenter un polyèdre par une liste de faces (cf. chapitre 1) : le problème ici est que l'on rend implicite les relations d'adjacence et d'incidence entre les cellules, et que de nombreuses opérations de manipulation nécessitent de les recalculer. Certains modèles font d'ailleurs un certain compromis : les G-cartes (cf. section 1.2.2), définies pour représenter des quasi-variétés cellulaires quelconques, représentent les cellules de manière implicite ; leur définition comporte des contraintes de cohérence qui pourraient être utilisées pour encore optimiser la représentation, mais cette optimisation en espace rendrait coûteuses les opérations de manipulation de base. Enfin, notons qu'à l'extrême, certains traitements n'ont pas besoin d'exploiter l'ensemble des informations fournies par le modèle, et que l'on peut (parfois) les optimiser en ne leur fournissant que les informations nécessaires [PRA 05]. Par exemple, nous avons dit précédemment que les relations d'adjacence et d'incidence sont essentielles pour de nombreuses opérations, mais elles sont moins importantes pour de nombreux algorithmes de visualisation (cf. chapitre précédent) : il est alors souvent possible de ne fournir à ces algorithmes qu'une liste de faces extraite du modèle géométrique complet.

4) du coût de conception de certaines opérations. Par exemple, la définition même de certains modèles ne prend pas en compte les contraintes de cohérence que doivent vérifier les objets représentés, e.g. rien n'interdit de représenter par un graphe d'incidence une arête incidente à trois sommets (cf. section 1.2.1). Le contrôle de la validité

des objets doit donc se faire via les opérations de construction. Ainsi, les opérateurs d'Euler ont été définis pour construire toute subdivision de surfaces orientables sans bords [MäN 82, MäN 83] : pour garantir la validité de l'objet représenté, ils nécessitent de créer ou de supprimer simultanément plusieurs cellules. Leur implantation pour les graphes d'incidence, même si elle n'est pas très compliquée, n'est cependant pas aussi simple que d'autres opérations de base définies pour la manipulation de modèles dont les contraintes de cohérence sont exprimées explicitement.

En conclusion, il nous paraît clair qu'il n'existe pas UN meilleur modèle, mais simplement des modèles plus adaptés que d'autres à une utilisation particulière, ce qui rend d'autant plus importants les mécanismes de conversion entre modèles que l'on peut déduire de leurs définitions dans le cadre général présenté ci-dessus.

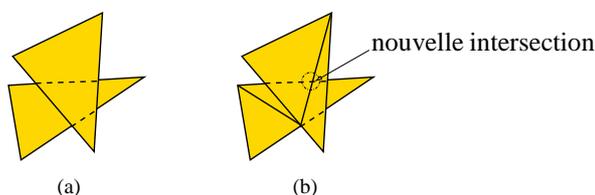


Figure 1.23. Les opérations booléennes ne sont pas internes à l'ensemble des objets simpliciaux finis. En (a) l'intersection n'est pas simpliciale, en (b) un éclatement de simplexes génère de nouvelles intersections.

1.4.4. Autres modèles topologiques

Autres modèles d'objets à cellules régulières. La notion d'ensemble simplicial [MAY 67] généralise la notion d'ESS, en ajoutant un deuxième type d'opérateurs, les opérateurs de dégénérescence. Il est ainsi possible de manipuler des ESS dont certains simplexes sont dégénérés. Par exemple, l'une des arêtes du bord d'un triangle peut être dégénérée en un sommet, sans que le triangle ne soit dégénéré lui-même. Ceci présente *a priori* peu d'intérêt pour la modélisation géométrique, mais un intérêt théorique est qu'il est très facile de définir l'opération de produit cartésien sur les ensembles simpliciaux, et que partant de cette définition, il est possible de l'adapter pour les ensembles semi-simpliciaux. D'autres extensions ont été proposées, par exemple pour la manipulation d'objets simpliciaux « incomplets », *i. e.* tels que tous les simplexes du bord d'un simplexe ne font pas nécessairement partie de l'objet simplicial. Ceci peut être utile pour représenter explicitement des parties d'objets, et ce type d'extension a été proposé aussi pour certains modèles cellulaires. Les notions d'*ensembles simpliciaux* et d'*ensembles simpliciaux cubiques* [SER 51, FUC 97, PEL 06b] ont

aussi été définis en toute dimension comme des extensions des ESS pour la manipulation d'objets dont les cellules sont régulières, plus précisément de cellules qui sont des produits cartésiens de simplexes (de 1-simplexes dans le cas cubique). Ces ensembles simploldiaux peuvent être utilisés par exemple pour la manipulation d'assemblages de carreaux de Bézier (*i. e.* comme des produits d'espaces triangulaires de Bézier) [DAH 82, MOO 92] (cf. figure 1.24).

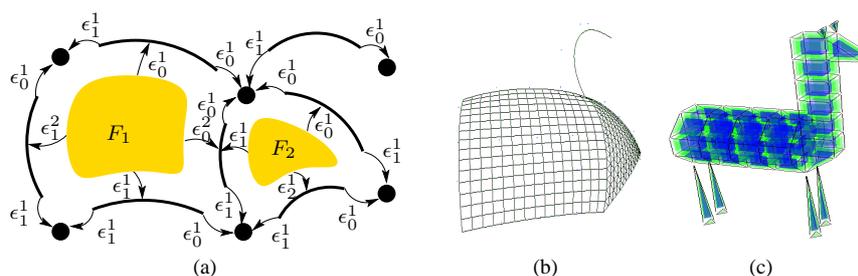


Figure 1.24. Ensembles simploldiaux. En (a) les opérateurs de bord sont explicites, en (b) un ensemble simploldial plongé en utilisant des espaces de Bézier, en (c) un exemple d'utilisation de prismes pour assembler des cubes et des tétraèdres.

Modèles topologiques hiérarchiques. Pour terminer ce rapide survol des modèles topologiques, il faut noter que des travaux de plus en plus nombreux portent sur la définition de modèles hiérarchiques, permettant de représenter des objets subdivisés à différents niveaux de détail [MON 91, JOL 92, KRO 95, DEF 97, SIM 06]. D'un point de vue fondamental, un niveau de détail est représenté par un modèle topologique de base, les relations entre niveaux sont représentés comme des applications entre modèles de base décrivant chaque niveau. Plusieurs types de représentations ont été proposés, selon le type de traitement auxquelles elles sont destinées, par exemple :

- représentations « bottom-up » : dans le cas de la structuration d'images, toute l'information peut être condensée sur le niveau le plus détaillé, les autres niveaux s'en déduisant par l'application d'opérations successives de simplification : dans ce cas, le type et les paramètres des opérations sont explicitement représentés ;
- représentation « top-down » : à l'inverse pour d'autres traitements (e.g. construction incrémentale d'objets, en architecture par exemple), on peut choisir de ne représenter que le niveau le plus simple, et de préciser incrémentalement les différents « détails ».

Chapitre 2

Bibliographie

- [AGO 76] AGOSTON M. K., *Algebraic Topology, a first course*, Pure and applied mathematics, Marcel Dekker Ed., 1976.
- [ALA 04] ALAYRANGUES S., DARAGON X., LACHAUD J.-O., LIENHARDT P., « Equivalence between regular n-G-maps and n-surfaces. », *10th Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis*, Auckland, Nouvelle-Zélande, Décembre 2004.
- [ANS 85] ANSALDI S., DE FLORIANI L., FALCIDIENO B., « Geometric Modeling of Solid Objects by Using a Face Adjacency Graph Representation », *Computer Graphics*, vol. 19, n°3, p. 131-139, 1985.
- [ARQ 89] ARQUÈS D., KOCH P., « Modélisation de solides par les pavages », *Proc. Pixim'89*, Paris, France, p. 47-61, 1989.
- [BAU 75] BAUMGART B., « A polyhedron representation for computer vision », *Proc. AFIPS Nat. Conf.*, vol. 44, p. 589-596, 1975.
- [BER 94] BERTRAND Y., DUFOURD J.-F., « Algebraic Specification of a 3D-Modeler Based on Hypermaps », *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, vol. 56, n°1, p. 29-60, January 1994.
- [BER 99] BERTRAND G., « New notions for discrete topology », BERTRAND G., COUPRIE M., PERROTON L., Eds., *Proc. DGCI'99*, vol. 1568 de *Lecture Notes in Computer Science*, Marne-la-Vallée, France, Springer, p. 218-228, 1999.
- [BER 00] BERTRAND Y., DAMIAND G., FIORIO C., « Topological encoding of 3d segmented images », *Proceedings of 9th Discrete Geometry for Computer Imagery*, vol. 1953 de *LNCS*, Uppsala, Sweden, p. 311-324, December 13-15 2000.
- [BRA 88] BRAQUELAIRE J.-P., GUITTON P., « A Model for Image Structuration », *Proc. Computer Graphics International'88*, Genève, Switzerland, May 1988.
- [BRA 03] BRAQUELAIRE A., DAMIAND G., DOMENGER J.-P., VIDIL F., « Comparison and Convergence of Two Topological Models for 3D Image Segmentation », *Proceedings of 4th*

IAPR-TC15 Workshop on Graph-Based Representations in Pattern Recognition, vol. 2726 de LNCS, York, England, p. 59-70, Juillet 2003.

- [BRA 05] BRANDEL S., SCHNEIDER S., PERRIN M., GUIARD N., RAINAUD J.-F., LIENHARDT P., BERTRAND Y., « Automatic building of structured geological models », *Journal of Computing and Information Science in Ingeneering*, vol. 5, n°2, 2005.
- [BRI 89] BRISSON E., « Representing geometric structures in d dimensions : topology and order », *Proc. 5th ACM Symp. Computational Geometry*, Saarbrücken, Germany, p. 218-227, June 1989.
- [BRI 93] BRISSON E., « Representing geometric structures in d dimensions : topology and order », *Discrete & Computational Geometry*, vol. 9, n°1, p. 387-426, 1993.
- [BRU 03] BRUN L., KROPATSCH W., « Combinatorial pyramids », *IEEE Int. Conf. on Image Processing*, vol. 2, Barcelona, Spain, p. 33-37, 2003.
- [BRY 85] BRYANT R., SINGERMAN D., « Foundations of the Theory of Maps on Surfaces with Boundaries », *Quart. Journal of Math. Oxford*, vol. 2, n°36, p. 17-41, 1985.
- [CAV 97] CAVALCANTI P., CARVALHO P., MARTHA L., « Non-manifold modeling : an approach based on spatial subdivisions », *Computer-Aided Design*, vol. 29, n°3, p. 299-320, 1997.
- [CAZ 95] CAZIER D., DUFOURD J.-F., « A rewrite system to build planar subdivisions », *Proceedings of the 7th Canadian Conference on Computational Geometry*, Québec, Canada, p. 235-240, 1995.
- [CHE 92] CHEN X., LIENHARDT P., « Modeling and Programming Evolutions of Surfaces », *Computer Graphics Forum*, vol. 2, n°5, p. 323-341, 1992.
- [CHR 06] CHRISTENSEN HENRIK I., NAGEL H.-H., Eds., *Cognitive Vison Systems : Sampling the Spectrum of Approaches*, vol. 3948 de *Lecture Notes in Computer Sciences*, Springer, 2006.
- [CIG 94] CIGOGNI P., DE FLORIANI L., MONTANI C., PUPPO E., SCOPIGNO R., « Multiresolution modeling and visualization of volume data based on simplicial complexes », *Symposium on Volume Visualization*, p. 19-26, 1994.
- [COR 75] CORI R., « Un code pour les graphes planaires et ses applications », *Astérisque*, vol. 27, 1975.
- [CRO 78] CROOM F. H., *Basic Concepts of Algebraic Topology*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1978.
- [CRO 91] CROCKER G., REINKE W., « An Editable Non-Manifold Boundary Representation », *Computer Graphics and Applications*, vol. 11, n°2, 1991.
- [DAH 82] DAHMEN W., MICHELLI C. A., « On the linear independence of multivariate B-splines I. Triangulation of simploids », *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 19, p. 993-1012, 1982.
- [DAM 03] DAMIAND G., LIENHARDT P., « Removal and Contraction for N-Dimensional Generalized Maps », *11th Discrete Geometry for Computer Imagery*, p. 408-419, Novembre 2003.

- [DAM 04] DAMIAND G., BERTRAND Y., FIORIO C., « Topological model for two-dimensional image representation : definition and optimal extraction algorithm », *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 93, n°2, p. 111-154, February 2004.
- [DAR 03] DARAGON X., COUPRIE M., BERTRAND G., « Discrete frontiers », NYSTRÖM I., SANNITI DI BAJA G., SVENSSON S., Eds., *Proc. DGCI'03*, vol. 2886 de *Lecture Notes in Computer Science*, Naples, Italie, Springer, p. 236-245, 2003.
- [DEF 88] DE FLORIANI L., FALCIDIENO B., « A hierarchical boundary model for solid object representation », *A.C.M. Transactions on Graphics*, vol. 7, n°1, p. 42-60, 1988.
- [DEF 97] DE FLORIANI L., PUPPO E., MAGILLO P., « A formal approach to multiresolution hypersurface modelling », STRASSER W., KLEIN R., RAU R., Eds., *Geometric Modeling : Theory and Practice*, 1997.
- [DEF 03a] DE FLORIANI L., MESMOUDI M., MORANDO F., PUPPO E., « Decomposing non-manifold objects in arbitrary dimensions », *Graphical Models*, vol. 65, n°1-3, p. 2-22, 2003.
- [DEF 03b] DE FLORIANI L., MORANDO F., PUPPO E., « A representation for abstract simplicial complexes », NYSTRÖM I., SANNITI DI BAJA G., SVENSSON S., Eds., *Proc. of DGCI'03*, vol. 2886 de *Lecture Notes in Computer Science*, Naples, Italie, Springer, p. 454-464, November 2003.
- [DEF 03c] DE FLORIANI L., MORANDO F., PUPPO E., « Representation of non-manifold objects through decomposition into nearly manifold parts », SHAPIRO V., ELBER G., Eds., *8th A.C.M. Symposium on Solid Modeling and Applications*, Seattle, U.S.A., ACM Press, p. 304-309, June 2003.
- [DEF 04] DE FLORIANI L., MAGILLO P., E. P., « A multiresolution topological representation for non-manifold meshes », *Computer-Aided Design*, vol. 36, n°2, p. 141-159, February 2004.
- [DEL 95] DELFINADO C. J. A., EDELSBRUNNER H., « An incremental algorithm for Betti numbers of simplicial complexes on the 3-sphere », *Computer-Aided Geometric Design*, vol. 12, n°7, p. 771-784, Elsevier Science, 1995.
- [DER 88] DEROSE T., « Composing Bézier simplexes », *ACM Transactions on Graphics*, vol. 7, n°3, p. 198-221, July 1988.
- [DEY 99] DEY T., EDELSBRUNNER H., GUHA S., « Computational Topology », CHAZELLE B., GOODMAN J., POLLACK R., Eds., *Advances in Discrete and Computational Geometry (Contemporary mathematics 223)*, American Mathematical Society, p. 109-143, 1999.
- [DOB 87] DOBKIN D., LASZLO M., « Primitives for the Manipulation of Three-Dimensional Subdivisions », *3rd Symposium on Computational Geometry*, Waterloo, Canada, p. 86-99, June 1987.
- [DOB 89] DOBKIN D., LASZLO M., « Primitives for the Manipulation of Three-Dimensional Subdivisions », *Algorithmica*, vol. 5, n°4, p. 3-32, 1989.
- [DUF 91] DUFOURD J.-F., « Formal specification of topological subdivisions using hypermaps », *Computer Aided Design*, vol. 23, n°2, p. 99-116, 1991.
- [DUF 97] DUFOURD J.-F., « Algebras and formal specifications in geometric modelling », *The Visual Computer*, vol. 13, p. 131-154, 1997.

- [EDE 87] EDELSBRUNNER H., *Algorithms in Computational Geometry*, Springer, New-York, 1987.
- [EDM 60] EDMONDS J., « A Combinatorial Representation for Polyhedral Surfaces », *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 7, 1960.
- [ELT 93] ELTER H. AND LIENHARDT P., « Different combinatorial models based on the map concept for the representation of different types of cellular complexes », FALCIDIENO B., KUNII T. L., Eds., *Proceedings of IFIP TC 5/WG II Working Conference on Geometric Modeling in Computer Graphics*, Genova, Italy, Springer, 1993.
- [ELT 94] ELTER H., LIENHARDT P., « Cellular complexes as structured semi-simplicial sets », *International Journal of Shape Modeling*, vol. 1, n°2, p. 191-217, 1994.
- [FAR 01] FARIN G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design : A Practical guide*, Academic Press, San Diego, CA, 5^e édition, 2001.
- [FER 91] FERRUCI V., PAOLUZZI A., « Extrusion and Boundary Evaluation for Multidimensional Polyhedra », *Computer-Aided Design*, vol. 23, n°1, p. 40-50, 1991.
- [FIO 96] FIORIO C., « A topologically consistent representation for image analysis : the frontier topological graph », *Proc. of DGCI'96*, Lyon, France, p. 151-162, 1996.
- [FRA 06] FRADIN D., MENEVEAUX D., LIENHARDT P., « A Hierarchical Topology-Based Model for Handling Complex Indoor Scenes », *To appear in Computer Graphics Forum*, 2006.
- [FRI 90] FRITSCH R., PICCININI R., *Cellular Structures in Topology*, Cambridge University Press, 1990.
- [FUC 96] FUCHS L., BECHMANN D., BERTRAND Y., DUFOURD J.-F., « Formal specification for free-form curves and surfaces », *Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics*, Bratislava, Slovakia, 1996.
- [FUC 97] FUCHS L., LIENHARDT P., « Topological structures for d -dimensional free-form objects », *Proceedings of Computer-Aided Geometric Design'97*, Lillehammer, Norway, July 1997.
- [GON 03] GONZÁLEZ-DÍAZ R., REAL P., « Toward digital cohomology », SANNITI DI BAJA G., SVENSSON S., NYSTRÖM I., Eds., *Proc. DGCI'2003*, vol. 2886 de LNCS, Springer, p. 92-101, 2003.
- [GRI 81] GRIFFITHS H.-B., *Surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 2nd édition, 1981.
- [GUI 85] GUIBAS L., STOLFI G., « Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoï Diagrams », *Transactions on Graphics*, vol. 4, n°2, p. 74-123, 1985.
- [GUR 90] GURSOZ E.L. C. Y., PRINZ F., « Vertex-based Representation of Non-Manifolds Boundaries », WOZNY M. T. J., PREISS K., Eds., *Geometric Modeling for Product Engineering*, North-Holland, p. 107-130, 1990.

- [HAN 93] HANSEN O., CHRISTIANSEN N., « A model for n-dimensional boundary topology », ROSSIGNAC J., TURNER J., Eds., *2nd A.C.M. Symposium on Solid Modeling Foundations and CAD/CAM Applications*, Montréal, Canada, p. 65-73, May 1993.
- [JAC 70] JACQUE A., « Constellations et Graphes Topologiques », *Colloque Math. Soc. Janos Bolyai*, p. 657-672, 1970.
- [JAM 85] JAMES L., *Maps and Hypermaps : Operations and Symmetry*, PhD thesis, University of Southampton, Southampton, U.K., 1985.
- [JOL 92] JOLION J., MONTANVERT A., « The adaptive pyramid : a framework for 2d image analysis », *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, vol. 55, n°3, p. 339-348., may 1992.
- [KRO 95] KROPATSCH W., « Building irregular pyramids by dual-graph contraction », *Vision, image and signal processing*, vol. 142, n°6, p. 366-374, 1995.
- [KUN 93] KUNII T., TAKAHASHI S., « Area guide map modeling by manifolds and CW-complexes », FALCIDIENO B., KUNII T., Eds., *Proc. IFIP TC 5/WG 2 Working Conf. on Geometric Modeling in Computer Graphics*, Gênes, Italie, p. 5-20, 1993.
- [LAN 95] LANG V., LIENHARDT P., « Geometric modeling with simplicial sets », *Proceedings of Pacific Graphics'95*, Seoul, Korea, 1995.
- [LAN 96] LANG V., LIENHARDT P., « Simplicial sets and triangular patches », *Proceedings of CGI'96*, Pohang, Korea, 1996.
- [LEE 01] LEE S., LEE K., « Partial entity structure : a fast and compact non-manifold boundary representation based on partial topological entities », *6th A.C.M. Symposium on Solid Modeling and Applications*, Ann Arbor, U.S.A., 2001.
- [LIE 88] LIENHARDT P., « Free-Form Surfaces Modeling by Evolution Simulation », *Proc. Eurographics'88*, Nice, France, p. 327-341, September 1988.
- [LIE 89a] LIENHARDT P., « Subdivisions of n-dimensional spaces and n-dimensional generalized maps », *ACM Symposium on Computational Geometry*, p. 228-236, Juin 1989.
- [LIE 89b] LIENHARDT P., « Subdivisions of Surfaces and Generalized Maps », *Proc. Eurographics'89*, Hamburg, Germany, p. 439-452, 1989.
- [LIE 91] LIENHARDT P., « Topological models for boundary representation : a comparison with n-dimensional generalized maps », *Computer Aided Design*, vol. 23, n°1, p. 59-82, 1991.
- [LIE 94] LIENHARDT P., « N-Dimensional Generalized Combinatorial Maps and Cellular Quasi-Manifolds », *International Journal of Computational Geometry and Applications*, vol. 4, n°3, p. 275-324, 1994.
- [LIE 04] LIENHARDT P., SKAPIN X., BERGEY A., « Cartesian Product of Simplicial and Cellular Structures », *Int. Journal of Computational Geometry and Applications*, vol. 14, n°3, p. 115-159, June 2004.
- [LUO 90] LUO Y., LUKACS G., « A Boundary Representation for Form-Features and Non-Manifold Solid Objects », *1st ACM/Siggraph Symposium on Solid Modeling Foundations and CAD/CAM Applications*, Austin, Texas, U.S.A., 1990.

- [MAY 67] MAY J. P., *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand, Princeton, 1967.
- [MEI 05] MEINE H., KÖTHE U., « The geomap : a unified representation for topology and geometry », BRUN L., VENTO M., Eds., *Proc. IAPR Graph-based representations in pattern recognition*, vol. 3434 de *Lecture Notes in Computer Science*, Poitiers, France, April 2005.
- [MON 91] MONTANVERT A., MEER P., ROSENFELD A., « Hierarchical Image Analysis Using Irregular Tessellations », *PAMI*, vol. 13, n°4, p. 307-316., April 1991.
- [MOO 92] MOORE D., « *Graphic Gems III* », Chapitre V.10 Understanding simploids, p. 250-255, Academic Press, 1992.
- [MUN 03] MUNKRES J. R., *Topology*, Prentice-Hall, seconde édition, 2003.
- [MUR 90] MURABATA S., HIGASHI M., « Non-manifold geometric modeling for set operations and surface operations », *Proc. IFIP/RPI Geometric Modeling Conference*, Rensselaerville, N.Y., 1990.
- [Män 82] MÄNTYLÄ M., SULONEN R., « GWB : A Solid Modeler with Euler Operators », *Computer Graphics and Applications*, vol. 2, n°7, p. 17-31, 1982.
- [Män 83] MÄNTYLÄ M., « Computational Topology : a Study of Topological Manipulations and Interrogations in Computer Graphics and Geometric Modeling », *Acta Polytechnica Scandinavia*, vol. 37, 1983.
- [Män 88] MÄNTYLÄ M., *An Introduction to Solid Modeling*, Computer Science Press., 1988.
- [NIE 02] NIETHAMMER M., STEIN A., KALIES W., PILARCZYK P., MISCHAIKOW K., TANNENBAUM A., « Analysis of blood vessel topology by cubical homology », *IEEE Proceedings of the International Conference on Image Processing*, vol. 2, p. 969-972, 2002.
- [PAO 93] PAOLUZZI A., BERNARDINI F., CATTANI C., FERRUCCI V., « Dimension-independent modeling with simplicial complexes », *A.C.M. Transactions on Graphics*, vol. 12, n°1, p. 56-102, 1993.
- [PAS 95] PASCUCCI V., FERRUCCI V., PAOLUZZI A., « Dimension-independent convex-cell based hierarchical polyhedral complex : representation scheme and implementation issues », *3rd Symposium on Solid Modeling and Applications*, p. 163-174, 1995.
- [PEL 06a] PELTIER S., ALAYRANGUES S., FUCHS L., LACHAUD J.-O., « Computation of homology groups and generators », *Computers and graphics*, 2006, à paraître.
- [PEL 06b] PELTIER S., FUCHS L., LIENHARDT P., « Homology of simploidal sets », *Discrete Geometry and Computer Imagery (DGCI 2006)*, Lecture Notes in Computer Science, Szeged, Hungary, Springer, 2006.
- [PRA 05] PRAT S., GIOIA P., BERTRAND Y., MENEVEAUX D., « Connectivity compression in arbitrary dimension », *The Visual Computer*, vol. 21, n°8, p. 876-885, 2005.
- [ROS 89] ROSSIGNAC J., O'CONNOR M., « SGC : A Dimension-Independent Model for Pointsets with Internal Structures and Incomplete boundaries », *Geometric modeling for Product Engineering*, p. 145-180, North-Holland, 1989.
- [SER 51] SERRE J. P., « Homologie singulière des espaces fibrés », *Ann. of Math.*, vol. 54, p. 425-505, 1951.

- [SIM 06] SIMON C., DAMIAND G., LIENHARDT P., « nD generalized map pyramids : definition, representations and basic operations », *Pattern Recognition*, vol. 39, n°4, p. 527-538, April 2006.
- [SOB 89] SOBHANPANA C., « Extension of a Boundary Representation Technique for the Description of N-Dimensional Polytopes », *Computer and Graphics*, vol. 13, n°1, p. 17-23, 1989.
- [SPE 91] SPEHNER J.-C., « Merging in Maps and Pavings », *Theoretical Computer Science*, vol. 86, p. 205-232, 1991.
- [TUT 84] TUTTE W., *Graph Theory*, Encyclopaedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, Menlo Park, 1984.
- [VIN 83] VINCE A., « Combinatorial Maps », *Journal of Combinatorial Theory Series B*, vol. 34, p. 1-21, 1983.
- [WEI 85] WEILER K., « Edge-based data structures for solid modelling in curved-surface environments », *Computer Graphics and Applications*, vol. 5, n°1, p. 21-40, 1985.
- [WEI 86a] WEILER K., « Boundary Graph Operators for Non-Manifold Geometric Modeling Topology Representations », *Proc. IFIP WG 5.2 Working Conference*, Rensselaerville, U.S.A., 1986.
- [WEI 86b] WEILER K., « The Radial-Edge Data Structure : A Topological Representation for Non-Manifold Geometry Boundary Modeling », *Proc. IFIP WG 5.2 Working Conference*, Rensselaerville, U.S.A., 1986.