



HAL
open science

Ordonnancement stochastique de tâches avec impatience

Alexandre Salch, Jean-Philippe Gayon

► **To cite this version:**

Alexandre Salch, Jean-Philippe Gayon. Ordonnancement stochastique de tâches avec impatience. ROADEF 2011, 12e congrès annuel de la Société française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Mar 2011, Saint-Etienne, France. à paraître. hal-00580386

HAL Id: hal-00580386

<https://hal.science/hal-00580386>

Submitted on 28 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ordonnancement stochastique de tâches avec impatience

Alexandre Salch, Jean-Philippe Gayon

Laboratoire G-SCOP

46, avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble cedex1, France

{alexandre.salch, jean-philippe.gayon}@grenoble-inp.fr

1 Introduction

En ordonnancement, il est classique de considérer qu'une tâche est en retard lorsqu'elle se termine après sa date d'échéance. On parlera alors d'impatience jusqu'en fin de service (IES = Impatience to the End of Service). Cette définition est cohérente avec des systèmes de production de biens physiques, où un produit est demandé pour une certaine date et le manager du système doit faire en sorte que le produit soit disponible à cette date. Cependant, cette définition montre ses limites pour des systèmes produisant des services. Par exemple, dans le contexte d'un centre d'appel téléphonique, un client peut être considéré comme satisfait dès lors qu'il est mis en relation avec un chargé de clientèle. On parlera alors d'impatience jusqu'au début du service (IBS = Impatience to the Beginning of Service).

2 Positionnement

2.1 Déterministe

En utilisant la notation de Graham et al. [3], le problème déterministe classique $1 \mid d_j \mid \sum w_j U_j$ consiste à minimiser le nombre pondéré de tâches en retard. U_j est une fonction indicatrice qui vaut 1 si la tâche j est en retard et 0 sinon. Ce problème peut être vu comme un problème avec impatience de type IES où une pénalité w_j est appliquée lorsque une tâche j s'impatiente à la date d_j . Ce problème est NP-difficile, mais certains cas particuliers peuvent être résolus en temps polynomial. Pour plus de détails, Pinedo [5], par exemple, propose une revue complète de la littérature sur ces problèmes.

Nous nous intéressons à un problème similaire à celui précédemment décrit, mais avec une impatience de type IBS. Nous le noterons $1 \mid d_j \mid \sum w_j \tilde{U}_j$ où \tilde{U}_j vaut 1 si l'exécution de la tâche j n'a pas commencé à l'instant d_j , 0 sinon. Les problèmes avec IES et IBS sont équivalents au sens de la complexité : en effet, il suffit d'ajouter, ou de soustraire, les durées d'exécution aux dates d'échéance ($d_j \leftarrow d_j \pm p_j$) pour effectuer une réduction polynomiale d'un problème vers autre. Ces deux problèmes restent cependant distincts ; ainsi un ordonnancement optimal pour IES peut être arbitrairement mauvais pour IBS.

2.2 Stochastique

Considérons maintenant les versions stochastiques des problèmes précédents. Désormais, les durées d'exécutions, notées X_j , ainsi que les dates d'échéances, notées D_j , sont des variables aléatoires (v.a.). Les problèmes IES et IBS sont respectivement notés $1 \mid X_j, D_j \mid E(\sum w_j U_j)$ et $1 \mid X_j, D_j \mid E(\sum w_j \tilde{U}_j)$. L'objectif est de donner un ordonnancement statique qui minimise l'espérance des coûts. Pour spécifier les distributions de probabilité considérées, nous écrirons $Y \sim F_Y$ pour signifier que la v.a. Y a pour fonction de répartition F_Y . Lorsque Y est distribuée suivant une loi exponentielle de taux γ , nous noterons $Y \sim \exp(\gamma)$. Enfin, lorsque des variables

aléatoires Y_j sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) et ont la même fonction de répartition F_Y , nous noterons $Y_j \sim F_Y$.

Pinedo [4] et Boxma et Forst [1] ont étudié le problème stochastique IES. Pour un certain nombre de distributions de probabilité, ils ont montrés que de simples algorithmes de liste étaient optimaux. Nous étudions quant à nous le problème stochastique IBS. On montre que, pour certaines distributions, ces algorithmes de liste peuvent être soit identiques, soit différents, suivant que l'on considère le problème IES ou IBS.

3 Exemples de résultats

Les résultats que nous avons obtenus sont pour la plupart issus d'arguments d'échanges. Pour le problème où les durées d'exécutions et les dates d'échéances sont respectivement i.i.d. ($X_j \sim F_X$ et $D_j \sim F_D$), exécuter les tâches suivant l'ordre décroissant de leur poids est optimal dans le cas IES, nous montrons que c'est aussi le cas en IBS. Un autre exemple est le problème où les durées d'exécutions sont indépendantes et où les dates d'échéances sont i.i.d., suivant une distribution exponentielle de paramètre γ ($X_j \sim F_{X_j}$ et $D_j \sim \exp(\gamma)$). En IES, exécuter les tâches suivant les $w_j / ([\mathcal{L}\{f_{X_j}\}(\gamma)]^{-1} - 1)$ est optimal. $\mathcal{L}\{f_{X_j}\}(\gamma)$ désigne ici la transformée de Laplace en γ de f_{X_j} . Cependant, en IBS, l'exécution se fait suivant les $w_j / (1 - \mathcal{L}\{f_{X_j}\}(\gamma))$ décroissants. Ce qui montre bien que les mêmes ordonnancements ne sont pas forcément optimaux pour les deux problèmes.

4 Perspectives

Par la suite, notre objectif est d'étudier une extension de ce problème, dans laquelle on définit des dates d'arrivée aléatoires R_j pour les tâches. Cela peut permettre de modéliser des phénomènes de files d'attente. Les résultats sont pour l'instant très limités dans la littérature, que ce soit pour le problème IBS ou pour le problème IES [2].

Références

- [1] O.J. Boxma and F.G. Forst. Minimizing the expected weighted number of tardy jobs in stochastic flow shops. *Operations Research Letters*, 5(3) :119–126, 1986.
- [2] D.G. Down et al. Dynamic control of a single server system with abandonments. To appear in *Queueing Systems*.
- [3] R.L. Graham et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling : a survey. *Annals of Discrete Mathematics*, 5 :287–326, 1979.
- [4] M.L. Pinedo. Stochastic scheduling with release dates and due dates. *Operations Research*, 31(3) :559–572, 1983.
- [5] M.L. Pinedo. *Scheduling : Theory, Algorithms, and Systems*. Springer, 2008.