

Analyse de sensibilité dans les systèmes de décisions markovien

Samuel Vercaene

G-Scop
Grenoble-INP

3 mars 2011

Travail réalisé avec :

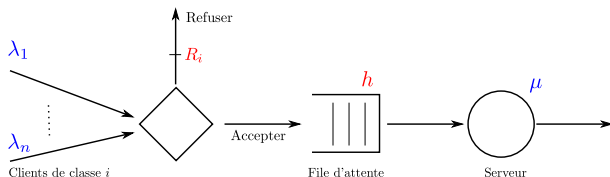
J.-P. Gayon (G-Scop Grenoble-INP France)
F. Karaesmen (Koç University Istanbul Turquie)

et financé en partie par la Région Rhone-Alpes



- 1 Introduction
- 2 Formulation du problème
- 3 Contributions
- 4 Conclusion

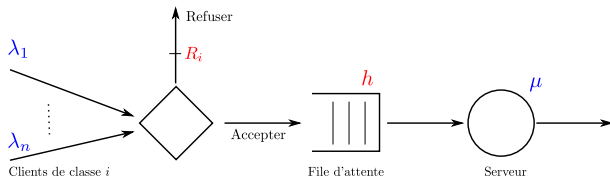
Contrôle d'admission : politique optimale



Hypothèses

- Taux d'arrivée des clients de classe i : λ_i
- Taux de service : μ
- Coût de rejet d'un client de classe i : R_i
- Coût d'attente d'un client : h

Contrôle d'admission : politique optimale

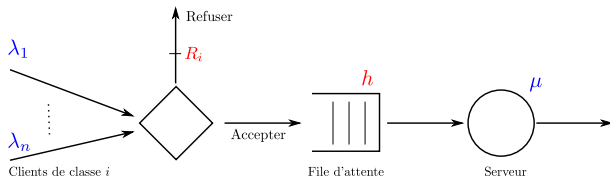


Hypothèses

- Taux d'arrivée des clients de classe i : λ_i
- Taux de service : μ
- Coût de rejet d'un client de classe i : R_i
- Coût d'attente d'un client : h

État du système Nombre de client en attente : $x \in \mathbb{Z}^+$

Contrôle d'admission : politique optimale

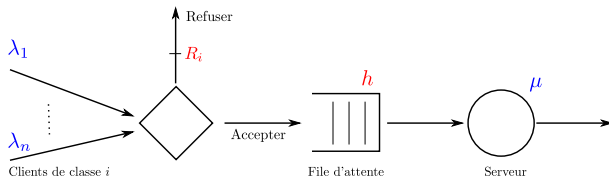


- Hypothèses**
- Taux d'arrivée des clients de classe i : λ_i
 - Taux de service : μ
 - Coût de rejet d'un client de classe i : R_i
 - Coût d'attente d'un client : h

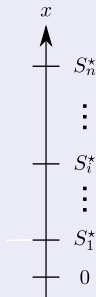
État du système Nombre de client en attente : $x \in \mathbb{Z}^+$

Objectif Minimiser l'espérance de coût sur un horizon infini

Contrôle d'admission : politique optimale



Politique optimale



$$R_{i+1} \geq R_i$$

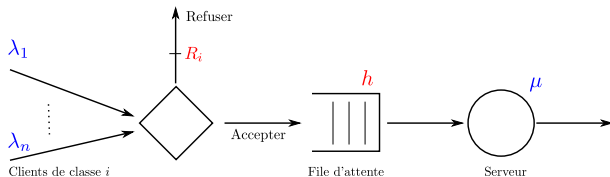
Hypothèses

- Taux d'arrivée des clients de classe i : λ_i
- Taux de service : μ
- Coût de rejet d'un client de classe i : R_i
- Coût d'attente d'un client : h

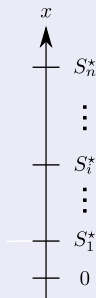
État du système Nombre de client en attente : $x \in \mathbb{Z}^+$

Objectif Minimiser l'espérance de coût sur un horizon infini

Contrôle d'admission : politique optimale



Politique optimale



$$R_{i+1} \geq R_i$$

- Hypothèses**
- Taux d'arrivée des clients de classe i : λ_i
 - Taux de service : μ
 - Coût de rejet d'un client de classe i : R_i
 - Coût d'attente d'un client : h

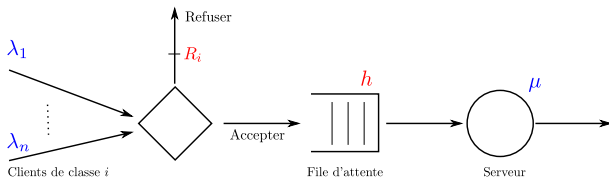
État du système Nombre de client en attente : $x \in \mathbb{Z}^+$

Objectif Minimiser l'espérance de coût sur un horizon infini

Problématique

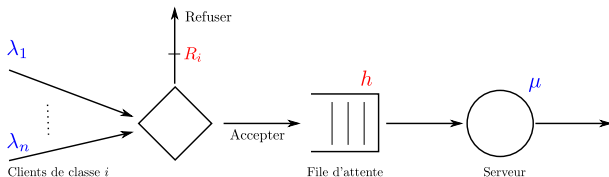
Quel est l'impact des paramètres sur le coût et la politique optimale ?

Formulation en processus de décision markovien



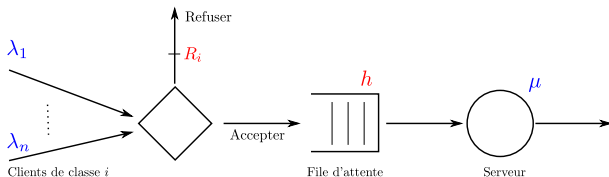
$$v^{k+1}(x) = Tv^k(x)$$

Formulation en processus de décision markovien



$$v^{k+1}(x) = Tv^k(x) = 1/\tau \left(hx + \sum_{i=1}^n \lambda_i T_{AC}^i v^k(x) + \mu T_D v^k(x) + \theta T_0 v^k(x) \right)$$

Formulation en processus de décision markovien



$$v^{k+1}(x) = Tv^k(x) = 1/\tau \left(hx + \sum_{i=1}^n \lambda_i T_{AC}^i v^k(x) + \mu T_D v^k(x) + \theta T_0 v^k(x) \right)$$

Avec :

$$\begin{aligned} R_{i+1} &\geq R_i \\ T_{AC}^i v(x) &= \min\{v(x+1); v(x) + R_i\} \\ T_D v(x) &= v(x-1)^+ \\ T_0 v(x) &= v(x) \\ \tau &= \mu + \sum_{i=1}^n \lambda_i + \theta + \alpha \end{aligned}$$

Notations et propriétés :

Notations :

- ϵ_j une perturbation sur un paramètre du système
- ϵ une perturbation sur plusieurs paramètres du système
- $\Delta_e v(x) = v(x + 1) - v(x)$
- $\Delta_\epsilon v(x) = v_\epsilon(x) - v(x)$

Notations et propriétés :

Notations :

- ϵ_i une perturbation sur un paramètre du système
- ϵ une perturbation sur plusieurs paramètres du système
- $\Delta_e v(x) = v(x + 1) - v(x)$
- $\Delta_\epsilon v(x) = v_\epsilon(x) - v(x)$

Propriétés :

- *Inc*(a) : $\Delta_a v(x) \geq 0$
- *Conv*(a) : $\Delta_a \Delta_a v(x) \geq 0$
- *Super*(a, b) : $\Delta_a \Delta_b v(x) \geq 0$

$$(a, b) \in \{e, \epsilon\}^2$$

Analyse de sensibilité

Inc(ϵ) : $v_\epsilon(x) \geq v(x)$: Prédire l'évolution du coût.

Super(e, ϵ) : $v_\epsilon(x+1) - v_\epsilon(x) \geq v(x+1) - v(x)$: Prédire l'évolution de la politique optimale.

(Rappel : $T_{AC}v(x) = \min\{v(x+1); v(x) + R\}$)

Quelques résultats connus

Politique optimale (Koole 1998) :

- $v(x)$ est *Inc*(e)
- $v(x)$ est *Conv*(e) : produire si $x < S_i^* = \min\{x | v(x+1) - v(x) > R_i\}$

Quelques résultats connus

Politique optimale (Koole 1998) :

- $v(x)$ est *Inc*(e)
- $v(x)$ est *Conv*(e) : produire si $x < S_i^* = \min\{x | v(x+1) - v(x) > R_i\}$

Analyse de sensibilité (Çil et al. 2009) :

- $v(x)$ est *Super*(e, ϵ_i) avec des conditions sur les ϵ_i .
Exemple : *Super*($e, \epsilon_{\lambda_i} \geq 0$) : si $\lambda_i \nearrow$, les $S_j^* \searrow \forall j$.

Quelques résultats connus

Politique optimale (Koole 1998) :

- $v(x)$ est *Inc*(e)
- $v(x)$ est *Conv*(e) : produire si $x < S_i^* = \min\{x | v(x+1) - v(x) > R_i\}$

Analyse de sensibilité (Çil et al. 2009) :

- $v(x)$ est *Super*(e, ϵ_i) avec des conditions sur les ϵ_i .
Exemple : *Super*($e, \epsilon_{\lambda_i} \geq 0$) : si $\lambda_i \nearrow$, les $S_j^* \searrow \forall j$.

Problème : que se passe-t-il si $\lambda_i \searrow$ et $\lambda_j \nearrow$?

Principe général des preuves

- v^0 a la propriété \mathcal{P}

Principe général des preuves

- v^0 a la propriété \mathcal{P}
- $v^{k+1} = T_V^k$

Principe général des preuves

- v^0 a la propriété \mathcal{P}
- $v^{k+1} = T v^k$
- T propage la propriété \mathcal{P}

Principe général des preuves

- v^0 a la propriété \mathcal{P}
- $v^{k+1} = T v^k$
- T propage la propriété \mathcal{P}
- $\lim_{k \rightarrow \infty} v^k = v^*$

Principe général des preuves

- v^0 a la propriété \mathcal{P}
- $v^{k+1} = T v^k$
- T propage la propriété \mathcal{P}
- $\lim_{k \rightarrow \infty} v^k = v^*$
- Donc : v^* a la propriété \mathcal{P}

Contribution : perturbation généralisée

Hypothèse : $\Delta_{\epsilon} v(x) \geq 0$

Contribution : perturbation généralisée

Hypothèse : $\Delta_\epsilon v(x) \geq 0$

$$\text{Opérateur } T : T_V(x) = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} C(x) \\ + \sum_{i=1}^n \lambda_i T_{AC}^i v(x) \\ + \mu T_D v(x) \\ + \theta T_0 v(x) \end{pmatrix}$$

Contribution : perturbation généralisée

Hypothèse : $\Delta_\epsilon v(x) \geq 0$

$$\text{Opérateur } T : T_V(x) = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} C(x) \\ + \sum_{i=1}^n \lambda_i T_{AC}^i v(x) \\ + \mu T_D v(x) \\ + \theta T_0 v(x) \end{pmatrix}$$

Conditions sur ϵ pour avoir $Inc(\epsilon)$?

$$\Delta_\epsilon T_V(x) = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \Delta_\epsilon C(x) \\ + \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta_\epsilon T_{AC}^i v(x) \\ + \mu \Delta_\epsilon T_D v(x) \\ + \theta \Delta_\epsilon T_0 v(x) \\ + \sum_{i=1}^n \epsilon \lambda_i (T_{AC}^i v_\epsilon(x) - T_0 v_\epsilon(x)) \\ + \epsilon \mu (T_D v_\epsilon(x) - T_0 v_\epsilon(x)) \end{pmatrix} \geq 0$$

Contribution : perturbation généralisée

Hypothèse : $\Delta_\epsilon v(x) \geq 0$

$$\text{Opérateur } T : T_V(x) = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} C(x) \\ + \sum_{i=1}^n \lambda_i T_{AC}^i v(x) \\ + \mu T_D v(x) \\ + \theta T_0 v(x) \end{pmatrix}$$

Conditions sur ϵ pour avoir $Inc(\epsilon)$?

$$\Delta_\epsilon T_V(x) = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \Delta_\epsilon C(x) \\ + \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta_\epsilon T_{AC}^i v(x) \\ + \mu \Delta_\epsilon T_D v(x) \\ + \theta \Delta_\epsilon T_0 v(x) \\ + \sum_{i=1}^n \epsilon \lambda_i (T_{AC}^i v_\epsilon(x) - T_0 v_\epsilon(x)) \\ + \epsilon \mu (T_D v_\epsilon(x) - T_0 v_\epsilon(x)) \end{pmatrix} \geq 0$$

Contribution : perturbation généralisée

Hypothèse : $\Delta_\epsilon v(x) \geq 0$

$$\text{Opérateur } T : T_V(x) = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} C(x) \\ + \sum_{i=1}^n \lambda_i T_{AC}^i v(x) \\ + \mu T_D v(x) \\ + \theta T_0 v(x) \end{pmatrix}$$

Conditions sur ϵ pour avoir $Inc(\epsilon)$?

$$\Delta_\epsilon T_V(x) = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \Delta_\epsilon C(x) \\ + \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta_\epsilon T_{AC}^i v(x) \\ + \mu \Delta_\epsilon T_D v(x) \\ + \theta \Delta_\epsilon T_0 v(x) \\ + \sum_{i=1}^n \epsilon \lambda_i (T_{AC}^i v_\epsilon(x) - T_0 v_\epsilon(x)) \\ + \epsilon \mu (T_D v_\epsilon(x) - T_0 v_\epsilon(x)) \end{pmatrix} \geq 0$$

Opérateur d'acceptation multiple

$$\sum_i \lambda_i T_{AC}^i v(x) = \sum_i \lambda_i \min\{v(x+1), v(x) + R_i\}$$

Opérateur d'acceptation multiple

$$\sum_i \lambda_i T_{AC}^i v(x) = \sum_i \lambda_i \min\{v(x+1), v(x) + R_i\}$$

- Propagation de $Inc(\epsilon)$:

$$\begin{cases} v(x) \text{ est } Inc(e) \\ \epsilon_{R_i} \geq 0 \\ \epsilon_{\lambda_{i+1}} \geq \epsilon_{\lambda_i} \\ \sum_i \epsilon_{\lambda_i} \geq 0 \end{cases}$$

Opérateur d'acceptation multiple

$$\sum_i \lambda_i T_{AC}^i v(x) = \sum_i \lambda_i \min\{v(x+1), v(x) + R_i\}$$

- Propagation de $Inc(\epsilon)$:

$$\begin{cases} v(x) \text{ est } Inc(e) \\ \epsilon_{R_i} \geq 0 \\ \epsilon_{\lambda_{i+1}} \geq \epsilon_{\lambda_i} \\ \sum_i \epsilon_{\lambda_i} \geq 0 \end{cases}$$

- Propagation de $Super(e, \epsilon)$:

$$\begin{cases} v(x) \text{ est } Conv(e) \\ \epsilon_{R_i} \geq 0 \\ \epsilon_{\lambda_{i+1}} \geq \epsilon_{\lambda_i} \\ \sum_i \epsilon_{\lambda_i} \geq 0 \end{cases}$$

Contribution / perspective : multi-dimensionnel

Opérateur général :

$$T_{\mathbf{b},C}^{\min,\mathcal{S}} v(\mathbf{x}) = \begin{cases} \min\{v(\mathbf{y}), v(\mathbf{y} + \mathbf{b}) + C\} + Cg & \text{si } \mathbf{y} + \mathbf{b} \in \mathcal{S} \\ v(\mathbf{y}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec \mathcal{S} l'espace d'état du système.

$$\Delta_a \Delta_\epsilon T_{\mathbf{b},C}^{\min,\mathcal{S}} v(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ si } \dots$$

Conclusion

- Mono-dimensionnel :

\mathcal{P}	Type d'opérateur	Référence
$Inc(e)$ et $Conv(e)$	Presque tous	Koole 2007
$Inc(\epsilon_i)$ et $Conv(\epsilon_i)$	Sans choix	Koole 2007
$Inc(\epsilon)$ et $Conv(\epsilon)$	aucun	-
$Super(e, \epsilon_i)$	Presque tous	Çil et al. 2009
$Super(e, \epsilon)$	aucun	-

- Multi-dimensionnel :

\mathcal{P}	Type d'opérateur	Référence
$Inc(\mathbf{e}_i)$ et $Conv(\mathbf{e}_i)$	Presque tous	Koole 2007
$Super(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$	Presque tous	Koole 2007
$Inc(\epsilon)$ et $Conv(\epsilon)$	aucun	-
$Super(\mathbf{e}_i, \epsilon)$	aucun	-

Conclusion

- Mono-dimensionnel :

\mathcal{P}	Type d'opérateur	Référence
$Inc(e)$ et $Conv(e)$	Presque tous	Koole 2007
$Inc(\epsilon_i)$ et $Conv(\epsilon_i)$	Principaux	Koole 2007
$Inc(\epsilon)$ et $Conv(\epsilon)$	Principaux	-
$Super(e, \epsilon_i)$	Presque tous	Çil et al. 2009
$Super(e, \epsilon)$	Principaux	-

- Multi-dimensionnel :

\mathcal{P}	Type d'opérateur	Référence
$Inc(\mathbf{e}_i)$ et $Conv(\mathbf{e}_i)$	Presque tous	Koole 2007
$Super(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$	Presque tous	Koole 2007
$Inc(\epsilon)$ et $Conv(\epsilon)$	aucun	-
$Super(\mathbf{e}_i, \epsilon)$	Principaux	-