



HAL
open science

Analyse de sensibilité d'un système de contrôle d'admission

Samuel Vercraene, F. Karaesmen, Jean-Philippe Gayon

► **To cite this version:**

Samuel Vercraene, F. Karaesmen, Jean-Philippe Gayon. Analyse de sensibilité d'un système de contrôle d'admission. ROADEF 2011, 12e congrès annuel de la Société française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Mar 2011, St Etienne, France. à paraître. hal-00579911

HAL Id: hal-00579911

<https://hal.science/hal-00579911>

Submitted on 25 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse de sensibilité d'un système de contrôle d'admission

Samuel Vercraene¹, Fikri Karaesmen², Jean-Philippe Gayon¹

¹ GSCOP ; Grenoble-INP

46 avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex 1, France

{samuel.vercraene, jean-philippe.gayon}@grenoble.inp.fr

² Department of Industrial Engineering ; Koç University

Rumeli Feneri Yolu 34450 Sariyer, Istanbul, Turkey

fikri.karaesmen@ku.edu.tr

Mots-clés : *Processus de décision markovien, Politique optimale, Sensibilité, Contrôle d'admission*

Ce papier se focalise sur la classe des problèmes de contrôle de files d'attente. Les files d'attente sont souvent utilisées comme modélisation dans les domaines du service, des télécommunications ou de la production et du stockage. En général l'objectif est de minimiser l'espérance d'un coût ou maximiser l'espérance d'un gain en contrôlant le nombre d'éléments (produits, clients...) dans la file d'attente.

La résolution de ces problèmes passe par une formulation en processus de décision markovien (MDP) [3]. A partir de cette formulation la politique optimale de contrôle (si elle existe) peut être déterminée numériquement par un algorithme d'itération sur la valeur. Il existe des résultats analytiques sur les MDP : dans certains cas la structure (forme globale) de la politique optimale peut être déterminée [2], de plus quelques articles s'intéressent à l'analyse de sensibilité de ces systèmes [1].

L'exemple sur lequel nous nous appuyons est un système bien connu dans la littérature : le contrôle d'admission. Les produits sont fabriqués dans m serveurs avec des taux de productions exponentiels μ et les clients de classe $i \in \{1, \dots, n\}$ arrivent selon un processus de Poisson de taux λ_i . Un client de classe i peut être rejeté ou accepté avec un gain R_i . Un clients accepté induit un coût h par unité de temps jusqu'à ce qu'il soit servi. Ce coût est le même quel que soit la classe de client. Un résultat connu [2] est que la politique optimale est une politique à seuil : accepter les clients de classe i jusqu'à avoir S_i clients en attentes (toutes classes confondues). Un autre résultat connu [1] est que si $R_i \leq R_{i+1}$ alors $S_i \leq S_{i+1}$.

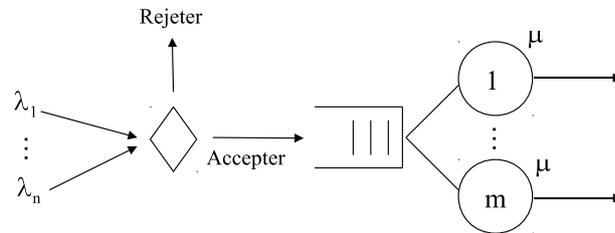


FIG. 1 – Modèle

Soient une instance du système : $I = \{\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_n, h, R_1, \dots, R_n\}$ et un perturbation : $\varepsilon = \{\varepsilon_\mu, \varepsilon_{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_{\lambda_n}, \varepsilon_h, \varepsilon_{R_1}, \dots, \varepsilon_{R_n}\}$ telles que le système perturbé soit $I + \varepsilon$. La formulation en MDP nous donne l'opérateur de transition T :

$$Tv(x) = 1/\tau \left(hx + \sum_{i=1}^m \lambda_i T_{ac}^i v(x) + \min\{x, m\} \mu T_p v(x) \right) \quad (1)$$

Avec $v(x)$ la fonction de valeur optimale du système ($v(x) = Tv(x)$), $T_{ac}^i v(x) = \min\{v(x), v(x +$

1) $-R_i$ } l'opérateur d'acceptation des clients avec un revenu R_i , $T_p v(x) = v((x-1)^+)$ l'opérateur de production, $\tau = m\mu + \sum_{i=1}^n \lambda_i + \alpha$ le taux d'uniformisation et α le taux d'actualisation (voir [3]).

Soit l'opérateur Δ tel que $\Delta v(x) = v(x+1) - v(x)$, soit $v_\varepsilon(x)$ la fonction de valeur du système perturbé et soit T_ε l'opérateur T perturbé en coût. On dit que $v(x)$ est supermodulaire (resp. submodulaire) en ε et x , noté $Super(\varepsilon, x)$ (resp. $Sub(\varepsilon, x)$) si $\Delta T_\varepsilon v_\varepsilon(x) - \Delta T v(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0). Notons que $Sub(\varepsilon, x) = Super(-\varepsilon, x)$.

Une perturbation à un impact sur la politique optimale de contrôle d'un système. Nous cherchons des conditions sur les perturbations telles que les seuils optimaux S_i diminuent sous leur effet. Sauf cas particuliers, si $v(x)$ est $Super(\varepsilon, x)$ alors S_i diminue. Nous cherchons donc ε tel que $v(x)$ soit $Super(\varepsilon, x)$.

[1] étudient ce problème en considérant une perturbation simple s'appliquant à un seul paramètre du système. Ils montrent que $v(x)$ est $Super(\varepsilon, x)$ pour des ε du type $\varepsilon = (\varepsilon_\mu \leq 0, 0, \dots, 0)$ et $\varepsilon = (\dots, 0, \varepsilon_{\lambda_i} \geq 0, 0, \dots)$. Nous étendons ce résultat en considérant une perturbation agissant sur tout les paramètres du système en même temps. Ainsi, nous cherchons comment vont se compenser des perturbations tendant à faire diminuer les S_i et d'autres tendant à les faire augmenter.

En prouvant que chaque opérateur de T (T_{ac} , T_p et hx) propage bien la propriété $Super(\varepsilon, x)$ et en prouvant que le changement des taux d'occurrence n'a pas d'impact¹ sur cette propriété nous montrons le théorème suivant :

Théorème 1 *Si nous avons une perturbation de la forme : $\varepsilon = \{\varepsilon_\mu - \mu(1-a), \varepsilon_{\lambda_1} - \lambda_1(1-a), \dots, \varepsilon_{\lambda_n} - \lambda_n(1-a), \varepsilon_h - h(2-a-b), \varepsilon_{R_1} - R_1(1-b), \dots, \varepsilon_{R_n} - R_n(1-b)\}$ telle que : $\varepsilon_\mu \leq 0$, $\sum_{i=1}^n \varepsilon_{\lambda_i} \geq 0$, $\varepsilon_{\lambda_{i+1}} \geq \varepsilon_{\lambda_i}$, $\varepsilon_h \geq 0$, $\varepsilon_{R_i} \geq 0$, $\{a, b\} \in]0, 1]^2$ alors $v(x)$ est $Super(\varepsilon, x)$.*

Remarque : les conditions de stabilité du système ne sont pas prises en compte ici.

Ceci veut dire par exemple que si les clients d'une classe X arrivent moins souvent, alors cela augmentera les seuils S_i d'acceptation de tout les clients. Cependant si conjointement les clients d'une classe Y , avec un revenu plus important que précédemment : $R_X \leq R_Y$, arrivent plus souvent de façon à compenser le manque d'arrivées de X , alors les seuils S_i diminueront.

Notons qu'il peut paraître contre intuitif que $\varepsilon_{R_i} \geq 0$ induise $v(x)$ $Super(\varepsilon, x)$ mais il faut voir que $v(x)$ $Super(\varepsilon, x)$ ne veut pas toujours dire que les seuils S_i diminuent étant donné que $S_i = \min\{x | \Delta v(x) \geq R_i\}$. Ainsi $\Delta v(x)$ augmente mais R_i aussi. Donc en cas de perturbation sur les gains R_i l'évolution des S_i est incertaine. Notons de plus que les paramètres a et b servent juste à régler l'unité de temps et l'unité d'argent du système.

Cette méthode est étendue au cas multidimensionnel pour le modèle proposé par [4] : un système série de production/stockage avec enregistrement des demandes non satisfaites et coûts linéaire. Considérer une perturbation globale sur le système est d'autant plus intéressant dans les cas multidimensionnels car les perturbations simples ont peu de chance d'avoir un effet uniforme sur les politiques de contrôle.

Références

- [1] Eren Cil, E. Örmeci, and Fikri Karaesmen. Effects of system parameters on the optimal policy structure in a class of queueing control problems. *Queueing Systems*, 61 :273–304, 2009.
- [2] G. Koole. Structural results for the control of queueing systems using event-based dynamic programming. *Queueing Systems*, 30(3) :323–339, December 1998.
- [3] M. Puterman. *Markov Decision Processes, Discrete stochastic, Dynamic programming*. ed. Jhon Wiley & Sons, Inc., 1994.
- [4] M. H. Veatch and L. M. Wein. Optimal control of a two-station tandem production/inventory system. *Operations Research*, 42 :337–350, 1994.

Samuel Vercaene est soutenu par une bourse de la Région Rhône-Alpes

1. voir [1] au sujet du gain marginal