HAL
open science

Pincement du plan hyperbolique complexe

Pierre Pansu

To cite this version:

Pierre Pansu. Pincement du plan hyperbolique complexe. 2009. hal-00579013

HAL Id: hal-00579013

https://hal.science/hal-00579013v1

Preprint submitted on 22 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Pincement du plan hyperbolique complexe

Pierre Pansu[1,2]*

22 mars 2011

RESUME. On montre que la cohomologie L^p des espaces symétriques de rang un, de type non compact, est séparée dans des intervalles ou cela ne résulte pas seulement du pincement de la courbure. En utilisant la structure multiplicative sur la cohomologie L^p, on montre que le plan hyperbolique complexe n'est pas quasiisométrique à une variété riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle strictement $-\frac{1}{4}$-pincée. Malheureusement, la méthode ne s'étend pas aux autres espaces symétriques de rang un.

ABSTRACT. L^p-cohomology of rank one symmetric spaces of noncompact type is shown to be Hausdorff for values of p where this does not follow from curvature pinching. Using the multiplicative structure on L^p-cohomology, it is shown that no simply connected Riemannian manifold with strictly $-\frac{1}{4}$-pinched sectional curvature can be quasiisometric to complex hyperbolic plane. Unfortunately, the method does not extend to other rank one symmetric spaces.

1 Introduction

1.1 Pincement négatif

Si $-1 \leq \delta < 0$, on dit qu'une variété riemannienne est δ-*pincée* s'il existe $a > 0$ tel que sa courbure sectionnelle soit comprise entre $-a$ et δa.

Par exemple, l'espace hyperbolique réel est -1-pincé. Les espaces symétriques de rang un de type non compact à courbure non constante sont $-\frac{1}{4}$-pincés. Il s'agit des espaces hyperboliques complexes $\mathbb{C}H^m$, $m \geq 2$, des espaces hyperboliques quaternioniens $\mathbb{H}H^m$, $m \geq 2$, et du plan hyperbolique des octaves de Cayley $\mathbb{O}H^2$.

Sur ces variétés, peut-on changer de métrique riemannienne et améliorer le pincement ? On demande à la nouvelle métrique de rester équivalente à la précédente. Cette question élégante, posée par M. Gromov, [8], a fait l'objet d'une tentative infructueuse, [24], utilisant la torsion en cohomologie L^p. Dans le présent article, on complète [24], en montrant que la torsion en cohomologie

*[1] Univ Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Orsay, F-91405 ;
[2] CNRS, Orsay, F-91405.

L^p des espaces symétriques de rang un s'annule là où l'on aurait préféré qu'elle ne s'annule pas. En outre, en utilisant le cup-produit, on résoud le problème dans le cas du plan hyperbolique complexe, mais, malheureusement, seulement dans ce cas là.

1.2 Cohomologie L^p

Soit M une variété riemannienne. Soit $p > 1$ un réel. On note $L^p\Omega^*(M)$ l'espace de Banach des formes différentielles L^p et $\Omega^{*,p}(M) = L^p\Omega^*(M) \cap d^{-1}L^p\Omega^*(M)$ l'espace des formes différentielles L^p dont la différentielle extérieure est aussi L^p, muni de la norme

$$\| \omega \|_{\Omega^{*,p}} = (\| \omega \|_{L^p}^p + \| d\omega \|_{L^p}^p)^{1/p}.$$

La cohomologie du complexe $(\Omega^{*,p}(M), d)$ s'appelle la *cohomologie* L^p de M. Elle est intéressante surtout si M est non compacte.

Par définition, la cohomologie L^p est invariante par difféomorphisme bilipschitzien. Dans la classe des variétés simplement connexes à courbure négative ou nulle, c'est un invariant de quasiisométrie (cf. [8]).

En toute généralité, la cohomologie L^p se décompose en cohomologie réduite et torsion

$$0 \to T^{*,p} \to H^{*,p} \to R^{*,p} \to 0$$

où la *cohomologie réduite* est $R^{*,p} = \ker d/\overline{\operatorname{im} d}$ et la *torsion* est $T^{*,p} = \overline{\operatorname{im} d}/\operatorname{im} d$. La cohomologie réduite (parfois notée $\overline{H}^k_{(p)}$) est un espace de Banach sur lequel les isométries de M agissent isométriquement. La torsion est non séparée.

Par exemple, la cohomologie L^p de la droite réelle est entièrement de torsion. La cohomologie L^p du plan hyperbolique est entièrement réduite, voir au paragraphe 7.1. Néanmoins, cohomologie réduite et torsion coexistent souvent.

1.3 Torsion et pincement

La torsion en cohomologie L^p est sensible au pincement de la courbure sectionnelle, de façon optimale.

Théorème. [24]. *Soient $\delta \in]-1, 0[$ un réel, n et $k = 2, \ldots, n$ des entiers. Soit M une variété riemannienne complète de dimension n, simplement connexe, dont la courbure sectionnelle K satisfait $-1 \leq K \leq \delta$. Alors*

$$T^{k,p}(M) = 0, \quad i.e. \quad H^{k,p}(M) \quad \textit{est séparé pour} \quad 1 < p < 1 + \frac{n-k}{k-1}\sqrt{-\delta}.$$

Des exemples homogènes montrent que la borne du Théorème 1.3 est optimale pour toutes les valeurs de n, k, δ. Les espaces symétriques de rang un à courbure non constante sont de bons candidats lorsque k est la dimension du corps de base, 2, 4 ou 8. Toutefois, il s'avère que leur cohomologie L^p reste séparée au-delà de l'intervalle prescrit par le théorème 1.3, pour $k = 2$, 4 ou 8 et $\delta = -\frac{1}{4}$.

1.4 Torsion des espaces symétriques de rang un

Théorème 1. *Soit M un espace symétrique de rang un à courbure non constante, de dimension $n = m\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d} = 2$, 4 ou 8. On voit M comme un produit semi-direct $\mathbf{R} \ltimes_\alpha N$, où α a deux valeurs propres, 1 et 2. Etant donné $k \leq \operatorname{tr}\alpha/2$, notons* $\operatorname{suiv}\sigma(k)$ *le second élément, dans l'ordre décroissant, de l'ensemble $\sigma(k)$ des valeurs propres de $\Lambda^k\alpha^\top$. Si $\operatorname{tr}\alpha/p > \operatorname{suiv}\sigma(k-1)$, alors $T^{k,p}(M) = 0$ sauf peut-être lorsque $\operatorname{tr}\alpha/p = \max\sigma(k-1)$.*

Par exemple, si $k = \mathfrak{d}$, l'intervalle du théorème 1.3 est $[1, \operatorname{tr}\alpha/\max\sigma(k-1)[$. La torsion L^p reste donc nulle au-delà de cette borne. Il reste à traiter le cas limite $p = \operatorname{tr}\alpha/\max\sigma(\mathfrak{d}-1) = (m\mathfrak{d}+\mathfrak{d}-2)/(2\mathfrak{d}-2)$. Il est vraisemblable que la torsion est nulle pour cette valeur particulière, inaccessible par notre méthode. C'est le cas pour le plan hyperbolique complexe ($\mathfrak{d} = 2$, $m = 2$). En effet, il s'agit des 2-formes L^2, cas où diverses méthodes sont disponibles, voir [3], [7]. Mieux, N. Lohoué, a prouvé que la cohomologie L^p reste séparée pour p voisin de 2, lorsque 0 est isolé dans le spectre du laplacien L^2, d'abord dans le cas des espaces symétriques, [17], puis dans le cas général, [18]. Son résultat recouvre donc le nôtre dans ce cas particulier.

1.5 Cup-produit en cohomologie L^p

Le produit extérieur d'une k-forme fermée L^q et d'une ℓ-forme fermée L^r est une $(k+\ell)$-forme fermée L^p si $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Si l'une des deux est exacte, il en est de même du produit. Le cup-produit $\smile$ est donc bien défini en cohomologie L^p : il va de $H^{k,q}(M) \times H^{\ell,r}(M)$ dans $H^{k+\ell,p}(M)$.

Cette opération est clairement fonctorielle sous les difféomorphismes bilipschitziens. Nous aurons besoin d'un résultat un peu plus général.

Théorème. [21] *Soient M, M' des variétés riemanniennes complètes, simplement connexes, à courbure pincée négativement. Soit $f : M \to M'$ une quasiisométrie. Alors f induit un isomorphisme $f^* : H^{*,p}(M') \to H^{*,p}(M)$ qui préserve le cup-produit.*

1.6 Algèbre de Royden

Définition 1. (Bourdon-Pajot [4], adapté au cas des variétés*). Soit M une variété riemannienne. Soit $q \geq 1$. L'*algèbre de Royden $\mathcal{R}^q(M)$ *est l'espace des fonctions bornées u sur M telles que $du \in L^q$.*

Par définition, tout $u \in \mathcal{R}^q(M)$ définit une classe notée $[du] \in H^{1,q}(M)$. Si M est simplement connexe, l'application $u \mapsto [du]$, $\mathcal{R}^q(M) \to H^{1,q}(M)$ est surjective, et son noyau est $\mathbf{R} \oplus I$ où I désigne l'idéal des fonctions $L^q \cap L^\infty$. Ce lien avec la cohomologie L^q rend les algèbres de Royden fonctorielles sous les quasiisométries, voir [4].

Théorème 2. *Soit M une variété riemannienne complète de dimension n, simplement connexe, dont la courbure sectionnelle K satisfait $-1 \leq K \leq \delta < 0$. Soient $r > p \geq 1$, soit q le réel tel que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Supposons que*

$$p < 1 + \frac{n-k}{k-1}\sqrt{-\delta} \quad \text{et} \quad r < 1 + \frac{n-k+1}{k-2}\sqrt{-\delta}.$$

Soit $\kappa \in H^{k-1,r}(V)$. Alors l'ensemble

$$\mathcal{R}_\kappa = \{u \in \mathcal{R}^q(M) \,|\, [du] \smile \kappa = 0\}$$

est une sous-algèbre de $\mathcal{R}^q(M)$.

Remarque 2. *Soit $\delta < -\frac{1}{4}$, $\mathfrak{d} = 2$, 4 ou 8, $n = m\mathfrak{d} + \mathfrak{d} - 2$, $k = \mathfrak{d}$, $q = r = 2p$. Il existe $p_0(\delta) > (m\mathfrak{d} + \mathfrak{d} - 2)/(2\mathfrak{d} - 2)$ tel que le Théorème 2 s'applique pour tout $p < p_0$.*

La borne sur p donnée dans le théorème 2 est optimale, notamment pour le plan hyperbolique complexe. Plus précisément, on doit utiliser une version localisée dans certains ouverts, voir la Proposition 43 pour un énoncé précis. De même, on a simplifié l'énoncé suivant, dont la version technique est la Proposition 44.

Théorème 3. *Soit $M = \mathbb{C}H^2$ le plan hyperbolique complexe. Soit p tel que $2 < p < 4$. Soit $q = r = 2p$. Soit η un point de la sphère à l'infini. Il existe une forme fermée ω et une fonction u sur M telles que, pour tout cône V de sommet η sur un ouvert de la sphère à l'infini dont l'adhérence ne contient pas η,*

1. *$\omega \in \Omega^{1,p}(V)$ et $u \in \mathcal{R}^q(V)$;*
2. *$[du] \smile [\omega] = 0$ dans $H^{2,p}(V)$;*
3. *$d(u^2) \smile [\omega] \neq 0$ dans $H^{2,p}(V)$.*

C'est le théorème 3 qui ne s'étend pas aux autres espaces symétriques de rang un. Le mécanisme algébrique qui s'y oppose est expliqué dans le Corollaire 38.

1.7 Cup-produit et pincement

En combinant les (versions techniques des) théorèmes 1.5, 2 et 3, on obtient le pincement optimal pour le plan hyperbolique complexe.

Corollaire 3. *Soit M une variété riemannienne complète de dimension n, simplement connexe, dont la courbure sectionnelle K satisfait $-1 \leq K \leq \delta < 0$. Si $\delta < -\frac{1}{4}$, M n'est pas quasiisométrique au plan hyperbolique complexe $\mathbb{C}H^2$.*

2 Méthode

2.1 Formule de Künneth

L'idée de [24] est qu'une forme fermée L^p sur une variété riemannienne à courbure sectionnelle négative pincée possède une valeur au bord, qui est une forme fermée de même degré sur le bord à l'infini. Cette valeur au bord ne dépend que de la classe de cohomologie L^p. En degré 1, cette construction marche pour tout $p \geq 1$. En degré supérieur, il faut supposer que p est assez petit. [24] donne une borne en fonction du pincement de la courbure, celle du Théorème 1.3. L'opérateur valeur au bord injecte l'espace $H^{k,p}$ dans un espace fonctionnel de formes différentielles fermées sur le bord, cela entraîne que $H^{k,p}$ est séparé. Par exemple, pour le plan hyperbolique complexe, $H^{2,p}$ est séparé pour $p < 2$.

Pour aller au-delà de la borne du Théorème 1.3, on développe un avatar de la formule de Künneth. En effet, une fois fixé un point à l'infini, la variété devient un produit $\mathbf{R} \times H$ où H est une horosphère. Toutefois, la métrique riemannienne sur ce produit n'est pas un produit riemannien, ni même un produit tordu (le cas des produits tordus est bien compris, voir [9, 11, 12, 13, 14, 15]). Lorsque la variété est homogène, il s'agit d'un *produit pluri-tordu*, au sens où la métrique croît exponentiellement, mais avec des taux de croissance différents suivant les directions. Du coup, la formule à la Künneth n'exprime pas la cohomologie L^p de $\mathbf{R} \times H$ en fonction de la cohomologie L^p de chaque facteur, mais elle en ramène le calcul à celui de la cohomologie d'un complexe $\mathcal{B}^{*,p}$ de formes différentielles sur H. L'espace $\mathcal{B}^{*,p}$ est constitué de formes différentielles dont certaines composantes s'annulent et les autres appartiennent à des sortes d'espaces de Besov anisotropes. Par exemple, l'espace hyperbolique réel (à courbure constante) s'écrit $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ et $\mathcal{B}^{k,p}$ est à peu de choses près l'espace des k-formes différentielles fermées sur $\mathbf{R}^{n-1}$ à coefficients dans l'espace de Besov $B_{p,p}^{-k+(\frac{n-1}{p})}$, voir [22]. Autrement dit, la question de savoir si la cohomologie L^p est séparée ou même nulle mêle analyse et algèbre.

Lorsque $p = 2$, la torsion est liée à la présence de spectre proche de 0 pour le laplacien. Le calcul de la torsion pour des produits tordus s'apparente à l'étude des petites valeurs propres du laplacien sur les formes dans la limite adiabatique, voir par exemple [19] ou [6], où les considérations algébriques jouent un grand rôle. La nouveauté tient dans le fait que les poids (la "taille" des fibres) tendent simultanément vers l'infini et vers 0 suivant les directions (mélange de limite adiabatique et antiadiabatique). C'est le caractère antiadiabatique qui produit les espaces de Besov.

La preuve de la formule de Künneth est inspirée des travaux de A.N. Livsic [16] sur la cohomologie des systèmes dynamiques. Nous nous sommes aussi inspirés de la terminologie des systèmes dynamiques : l'hypothèse qui fait marcher la formule de Künneth pluri-tordue en degré k, pour un exposant p est l'existence d'un flot $(k-1, p)$-Anosov. Un flot $(0, \infty)$-Anosov n'est autre qu'un flot d'Anosov.

2.2 Torsion

Les formes basiques sur $\mathbf{R} \times H$ sont les formes différentielles sur H qui, quand on les tire en arrière sur $\mathbf{R} \times H$, possèdent (ainsi que leur différentielle extérieure), -1 dérivée dans L^p. Cette propriété d'allure analytique entraîne aussi l'annulation pure et simple de certaines composantes.

Dans le langage de la formule de Künneth pluri-tordue, voici ce qui se produit dans le régime du Théorème 1.3 : le complexe des formes basiques $\mathcal{B}^{*,p}$ est de longueur 1, il n'est non nul qu'en un seul degré k (dépendant de p). Par conséquent, sa cohomologie, trivialement séparée, est égale à l'espace $\mathcal{B}^{k,p}$, qui ne contient que des formes fermées.

Pour les espaces hyperboliques complexes, le complexe des formes basiques est souvent de longueur 2. C'est le cas, pour le plan hyperbolique complexe, lorsque $2 < p < 4$. Les espaces non nuls sont $\mathcal{B}^{1,p}$ et $\mathcal{B}^{2,p}$. Ici, H s'identifie au groupe d'Heisenberg de dimension 3, avec sa forme de contact invariante à gauche τ. Les éléments de $\mathcal{B}^{1,p}$ sont des 1-formes différentielles de la forme $\psi = u\tau$, où u est une fonction appartenant à un espace de Besov anisotrope. Leurs différentielles s'écrivent $du \wedge \tau + u\, d\tau$, i.e. elles se décomposent en deux morceaux, $d_0\psi = u\, d\tau$ et $d_1\psi = du \wedge \tau$, le second s'exprimant au moyen des dérivées du premier. En voici deux conséquences.

1. Cette propriété n'est pas automatiquement satisfaite par une 2-forme fermée sur H. Autrement dit, une 2-forme fermée de $\mathcal{B}^{2,p}$ est exacte si et seulement si elle satisfait une équation différentielle non triviale.
2. ψ est déterminée algébriquement par $d\psi$. Cela entraîne que l'image $d\mathcal{B}^{1,p}$ est fermée dans $\mathcal{B}^{2,p}$.

Le point 2 se généralise aux autres espaces symétriques de rang un, dans le degré égal à la dimension (2, 4 ou 8) du corps de base (et aussi bien d'autres degrés, voir le Théorème 1). En revanche, le phénomène 1 ne se produit pas dans ce degré. Il se produit dans d'autres degrés, mais c'est sans utilité pour la question du pincement optimal.

Pour une autre approche de la torsion dans le cas des espaces hyperboliques complexes, voir [20].

2.3 Algèbre de Royden

Dans le régime du Théorème 1.3, une forme fermée L^p est exacte si et seulement si sa valeur au bord est nulle. Il s'agit d'une condition non différentielle. L'espace des solutions est donc un module sur une algèbre de fonctions sur le bord (l'algèbre de Royden, introduite par M. Bourdon et H. Pajot, fait l'affaire) ? Pas exactement, puisque les valeurs au bord sont automatiquement fermées. Mais nous parvenons tout de même à saisir le changement, lorsque p dépasse la borne du Théorème 1.3, de la caractérisation des formes exactes, au moyen de la structure multiplicative sur la cohomologie L^p. Si u appartient à la bonne algèbre de Royden, et ω est une forme fermée, $du \wedge \omega$ est exacte si et seulement si sa valeur au bord $du_\infty \wedge \omega_\infty$ est nulle. Les fonctions u_∞ satisfaisant cette propriété forment une sous-algèbre, c'est le Théorème 2.

Dans le cas du plan hyperbolique complexe, lorsque $2 < p < 4$, ω est de degré 1, c'est la différentielle d'une fonction v. Alors $du \wedge dv$ est exacte si et seulement si, en (presque) tout point du bord à l'infini, $du \wedge dv$ s'annule sur le plan de contact. De ce système d'equations différentielles bilinéaire, du premier ordre, sur le groupe d'Heisenberg, nous n'avons pas su trouver de solutions qui décroissent à l'infini. Ne disposant que d'un contre-exemple local à la propriété de sous-algèbre, nous avons dû donner une version localisée (au voisinage d'un point à l'infini) du Théorème 2, c'est la proposition 43. Avec l'invariance de la cohomologie L^p (localisée) par quasiisométrie, on obtient le pincement optimal du plan hyperbolique complexe.

2.4 Plan de l'article

La formule de Künneth ne fonctionne pas pour certaines valeurs de p baptisées *exposants critiques*, et calculés dans des exemples en section 3. La formule de Künneth pluri-tordue est énoncée et démontrée en 4. Les sections 5 et 6 tentent, de façon inparfaite, de cerner les espaces $\mathcal{B}^{k,p}$. En section 7, on en tire un critère d'annulation de la torsion qui culmine avec la preuve du Théorème 1 en 7.3. On trouve en section 8 les preuves des Théorèmes 2 et 3, ou plutôt, de versions localisées de ces résultats. La preuve du Corollaire 3 s'en déduit aisément en section 9.

3 Exposants critiques

On note $Gl^+(n-1)$ le groupe des matrices $n-1 \times n-1$ de déterminant strictement positif. On considère des représentations linéaires ρ du groupe $Gl^+(n-1)$ sur des espaces euclidiens, qui ont la propriété que le sous-groupe $SO(n-1)$ agit par isométries. Si M est une variété orientée de dimension n portant un champ de vecteurs ξ qui ne s'annule pas, on construit le fibré vectoriel E_ρ associé au fibré des repères directs ayant ξ comme premier vecteur. Tout difféomorphisme préservant l'orientation et le champ ξ agit sur le fibré E_ρ. Si de plus M porte une métrique riemannienne, alors E_ρ porte une métrique lui aussi. On note Λ^k la représentation de $Gl^+(n-1)$ sur $\Lambda^k \mathbf{R}^{n-1}$.

Définition 4. *Soit M une variété riemannienne de dimension n. Soit ξ un champ de vecteurs unitaire complet sur M. Soit ρ une représentation linéaire du groupe $Gl^+(n-1)$. On dit que ξ est ρ-*Anosov *s'il existe des constantes positives C et η et une décomposition*

$$E_\rho = E_\rho^+ \oplus E_\rho^-$$

invariante par le flot ϕ_t de ξ, et telle que

- *quasi-orthogonalité : si $e_\pm \in E_\rho^\pm$, alors*

$$|e_+|^2 + |e_-|^2 \leq C\,|e_+ + e_-|^2;$$

– *contraction : si* $e \in E_\rho^\pm$*, alors pour tout* $t \geq 0$*,*

$$|\phi_{\pm t}(e)| \leq C\, e^{-\eta t}.$$

Soit $p \geq 1$*. On dit que* ξ *est* (k,p)-Anosov*, ou bien que* p *est un* exposant non critique en degré k *si* ξ *est* ρ*-Anosov pour la représentation* $\rho = \Lambda^k \otimes (det)^{-1/p}$ *de* $Gl^+(n-1)$*.*

On dit que ξ *est* (k,p)-contractant *si* ξ *est* (k,p)*-Anosov et* $\Lambda_+^k = 0$*. On dit que* ξ *est* (k,p)-dilatant *si* $-\xi$ *est* (k,p)*-contractant.*

Concrètement, pour $\rho = \Lambda^k$, les sections du fibré dual $(E_\rho)^*$ s'identifient aux k-formes différentielles sur M annulées par le produit intérieur par ξ, ι_ξ. Une décomposition (k,p)-Anosov est une décomposition quasi-orthogonale

$$\Lambda^k T^*M \cap \ker \iota_\xi = \Lambda_+^k \oplus \Lambda_-^k$$

telle que

$$|(\Lambda^k d\phi_{\pm t})_{|\Lambda_\pm}|^p \leq \text{const.} e^{-p\eta t} Jac(\phi_t)$$

pour tout $t \geq 0$. Si β est une k-forme différentielle sur M qui, en chaque point, est à valeurs dans Λ_-, alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\parallel \phi_t^* \beta \parallel_{L^p} \leq \text{const.}\, e^{-\eta t} \parallel \phi_t^* \beta \parallel_{L^p} .$$

Remarque. Un champ de vecteurs est Anosov au sens des systèmes dynamiques si et seulement si il est $(0,+\infty)$-Anosov.

Remarque. Si la divergence $div(\xi)$ est bornée, alors les exposants non critiques forment un ouvert de $]1,+\infty]$.

Exemple. S'il existe $\eta > 0$ tel que $div(\xi) \geq \eta$, alors aucun exposant $p \geq 1$ n'est critique en degrés 0, seul 1 est critique en degré $n-1$. Le champ ξ est $(0,p)$-contractant pour tout $p \geq 1$ et $(n-1,p)$-dilatant pour tout $p > 1$.

En effet, si $k = 0$ ou $k = n-1$, $\Lambda^k T^*M \cap \ker \iota_\xi$ est de dimension 1, $\Lambda^0 d\phi_t$ est l'identité, $|\Lambda^{n-1} d\phi_t| = Jac(\phi_t) \geq e^{\eta t}$.

Les deux paragraphes suivants donnent des exemples moins triviaux.

3.1 Variétés à courbure négative pincée

Dans une variété simplement connexe à courbure négative, un *champ de vecteurs de Busemann* est la limite (lorsqu'elle existe) des gradients des fonctions distance à une suite de points tendant vers l'infini. Un tel champ ξ est aussi différentiable que la métrique. Son flot augmente exponentiellement la longueur des vecteurs, donc ξ est $(k,+\infty)$-dilatant pour tout $k = 1,\ldots,n$. On s'attend à ce qu'il reste (k,p)-dilatant pour p assez grand. La proposition suivante le garantit, sous une hypothèse faisant intervenir les deux bornes de la courbure sectionnelle.

Proposition 5. (Voir [24], Proposition 5). *Soit M une variété riemannienne complète de dimension n, simplement connexe, dont la courbure sectionnelle K satisfait $-1 \leq K \leq \delta < 0$. Soit ξ un champ de vecteurs de Busemann. Si $k = 0, \cdots, n-1$ et si $p > 1$ satisfait*

$$p < 1 + \frac{n-k-1}{k}\sqrt{-\delta}, \qquad (\textit{resp. } p > 1 + \frac{n-k-1}{k\sqrt{-\delta}}),$$

alors le champ ξ est (k,p)-contractant (resp. (k,p)-dilatant).

3.2 Groupes de Lie

Proposition 6. *Soit G un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Soit ξ un champ de vecteur invariant à gauche sur G. On note $\xi^\perp \subset \mathfrak{g}^*$ le sous-espace des formes linéaires qui s'annulent sur ξ. On note $w_1, \ldots, w_{\dim(\mathfrak{g})-1}$ les parties réelles des valeurs propres de $ad_\xi^\top$ sur $\xi^\perp$, comptées autant de fois que leurs multiplicités. On note $h = \operatorname{tr} ad_\xi = \sum_{j=1}^{\dim(\mathfrak{g})-1} w_j$. Un réel $p \geq 1$ est un exposant critique en degré k pour ξ si et seulement si h/p s'écrit comme somme de k nombres parmi les w_j.*

Preuve. Soit $\Lambda^k_+ \subset \Lambda^k\mathfrak{g}^* \cap \ker \iota_\xi = \Lambda^k\xi^\perp$ (resp. Λ^k_-) la somme des espaces caractéristiques de $\Lambda^k ad_\xi^\top$ relatifs à des valeurs propres w telles que $h - pw > 0$ (resp. $h - pw < 0$). On note de la même façon les sous-fibrés obtenus en translatant à gauche ces sous-espaces. Notons η_0 le plus petit des nombres $|h - pw|$ où w décrit les valeurs propres de $\Lambda^k ad_\xi$ sur $\Lambda^k\xi^\perp$. Fixons un $\eta < \eta_0$.

Par définition, $L_{\exp -t\xi} \circ R_{\exp t\xi} = Ad_{\exp t\xi} = \exp(t\, ad_\xi)$. Comme les sous-fibrés $\Lambda^*_\pm$ sont invariants par ad_ξ, ils sont invariants par les translations à droite $\phi_t = R_{\exp t\xi}$ qui constituent le flot de ξ.

Le champ de vecteurs ξ a une divergence constante égale à h, donc le jacobien de son flot vaut exactement e^{ht}.

Soit $\omega \in \Lambda^k_+$ une forme différentielle invariante à gauche qui est dans l'image de ι_ξ. On a

$$(\phi_t)^*\omega = Ad^*_{\exp t\xi}\omega = (\exp t\, ad_\xi)^*\omega.$$

Comme $\eta < \eta_0$, il existe une constante indépendante de ω et de t telle que pour tout $t \geq 0$,

$$|(\exp t\, ad_\xi)^*\omega| \leq \text{const.} e^{t(h-\eta)/p}|\omega|.$$

Il vient

$$|(\phi_t)^*\omega|^p = \text{const.} e^{-\eta t} J(\phi_t)|\omega|^p.$$

On conclut que p est non critique en degré k.

Inversement, s'il existe un couple de valeurs propres conjuguées $(\lambda, \overline{\lambda})$ de $(\Lambda^k ad_\xi)_{|\Lambda^k\xi^\perp}$ de partie réelle h/p, alors sur la partie réelle de la somme des sous-espaces caractéristiques correspondants, $\| \exp t\, ad_\xi \|$ est polynomial en t donc ne décroît pas exponentiellement, et p est critique en degré k.

Enfin, les valeurs propres de l'action de ξ sur $\Lambda^k(\xi^\perp) \subset (\mathfrak{g}^*)^{\otimes k}$ sont les sommes de k valeurs propres de ad_ξ sur $\xi^\perp$. q.e.d.

Corollaire 7. *Si G n'est pas unimodulaire, un champ de vecteurs invariant à gauche générique sur G a au plus un nombre fini d'exposants critiques.*

Corollaire 8. *Soit H un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Soit α une dérivation de $\mathfrak{h}$, semi-simple, à valeurs propres réelles. Autrement dit, il existe une base de $\mathfrak{h}$ dans laquelle la matrice de α est diagonale, $diag(w_1, \ldots, w_{n-1})$. Soit $G = \mathbf{R} \times H$ muni de la multiplication*

$$(t, h)(t', h') = (t + t', e^{t\alpha}(h)h').$$

Soit $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ le champ de vecteurs invariant à gauche correspondant au facteur $\mathbf{R}$. Alors $\xi^\perp = \mathfrak{h}^*$. Supposons $h = \mathrm{tr}(\alpha) > 0$. Alors, pour tout $k = 0, \ldots n-1 = \dim(H)$ et $p \geq 1$,

$$\Lambda^k_{+(p)} = \bigoplus_{\{(w_{j_1},\ldots,w_{j_k}) \,|\, w_{j_1}+\cdots+w_{j_k} > h/p\}} \bigotimes_{\ell=1}^{k} \Lambda_{w_{j_\ell}},$$

où, par convention, lorsqu'un même nombre w est répété m fois, le produit tensoriel doit être interprété comme une puissance extérieure m-ème.

3.3 Exemples

Exemple. Soit $G = \mathbf{R} \ltimes_\alpha \mathbf{R}^2$ le produit semi-direct défini par la dérivation $\alpha = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \| 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si $\lambda > 0$, G est à courbure sectionnelle strictement négative. G est unimodulaire si et seulement si $\lambda = -1$. Si $\lambda = 0$, G est le produit riemannien d'une droite et d'un plan hyperbolique. Noter que pour tout $\ell \neq 0$, les groupes obtenus pour les valeurs ℓ et $1/\ell$ de λ sont isomorphes. Par conséquent, sans perdre de généralité, on peut se limiter aux valeurs de $\lambda \in [-1, 1]$.

On s'intéresse au champ de vecteurs invariant à gauche correspondant au facteur $\mathbf{R}$. Si $\lambda \neq -1$, il n'a d'exposants critiques qu'en degré 1, il en a deux (ce sont $p = 1 + \frac{1}{\lambda}$ et $p = 1 + \lambda$) si $\lambda \neq 0,\ 1$, un (c'est $p = 2$) si $\lambda = 1$ et aucun si $\lambda = 0$.

Si $\lambda = -1$, tout exposant $p \geq 1$ est critique en degrés 0 et 2. En degré 1, aucun exposant n'est critique.

Exemple. Espace hyperbolique réel. Soit G le groupe des dilatations et translations de $\mathbf{R}^{n-1}$. Alors G agit simplement transitivement sur l'espace hyperbolique réel de dimension n. Soit ξ le champ de vecteurs invariant à gauche correspondant aux dilatations. Sur $\xi^\perp = \mathbf{R}^{n-1}$, ad_ξ est l'identité. Il y a exactement un exposant critique pour chaque degré $k = 1, \ldots, n-1$, c'est $p = \frac{n-1}{k}$. Il n'y en a pas en degré 0. Dans le tableau, on note $\Lambda^k_k = \Lambda^k(\mathbf{R}^{n-1})^*$.

p	1	$(n-1)/k$	$+\infty$
$\Lambda^k_{+(p)}$	0	Λ^k_k	
$\Lambda^k_{-(p)}$	Λ^k_k	0	

Autrement dit, ξ est (k,p)-contractant si et seulement si $k=0$ (pour tout p) ou $1 \leq k \leq n-2$ et $p < \frac{n-1}{k}$. ξ est (k,p)-dilatant si et seulement si $k \geq 1$ et $p > \frac{n-1}{k}$.

Exemple. Espace hyperbolique complexe. Soit G le groupe des dilatations translations du groupe d'Heisenberg N de dimension $2m-1$. Alors G agit simplement transitivement sur l'espace hyperbolique complexe de dimension réelle $n=2m$, i.e., la boule de $\mathbf{C}^m$ munie de sa métrique de Bergmann. Soit ξ le champ de vecteurs invariant à gauche correspondant aux dilatations. Sur $\xi^\perp = \mathfrak{n}$, ad_ξ induit une graduation $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$. ad_ξ vaut l'identité sur $\mathfrak{n}_1$ et 2 fois l'identité sur $\mathfrak{n}_2$. Une graduation des formes différentielles invariantes à gauche en découle. On numérote les sous-espaces par la valeur propre correspondante de $\Lambda^k ad_\xi^\top$. On a donc, pour $k=1,\ldots,2m-2$,

$$\Lambda^k\mathfrak{n}^* = \Lambda^k_k \oplus \Lambda^k_{k+1} = \Lambda^k\mathfrak{n}_1^* \oplus \Lambda^{k-1}\mathfrak{n}_1^* \otimes (\mathfrak{n}_2)^*.$$

et, pour les valeurs extrêmes,

$$\Lambda^0\mathfrak{n}^* = \Lambda^0_0 = \mathbf{R}, \quad \Lambda^{2m-1}\mathfrak{n}^* = \Lambda^{2m-1}_{2m} = \Lambda^{2m-2}\mathfrak{n}_1^* \otimes (\mathfrak{n}_2)^*.$$

Aucun exposant n'est critique en degré 0. Seul 1 est critique en degré $2m-1$. Par conséquent, $\Lambda^0_{+(p)} = 0$, $\Lambda^0_{-(p)} = \mathbf{R}$ pour tout $p \geq 1$, $\Lambda^{2m-1}_{+(p)} = \Lambda^{2m-1}_{2m}$, $\Lambda^{2m-1}_{-(p)} = 0$ pour tout $p > 1$. En chaque degré $k = 1,\ldots,2m-2$, il y a exactement deux exposants critiques, $p = 2m/(k+1)$ et $p = 2m/k$. D'où le tableau.

p	1	$2m/(k+1)$	$2m/k$	$+\infty$
$\Lambda^k_{+(p)}$	0		Λ^k_{k+1}	$\Lambda^k_k \oplus \Lambda^k_{k+1}$
$\Lambda^k_{-(p)}$	$\Lambda^k_k \oplus \Lambda^k_{k+1}$		Λ^k_k	0

Autrement dit, ξ est (k,p)-contractant si et seulement si $k=0$ (pour tout p) ou $1 \leq k \leq 2m-2$ et $p < \frac{2m}{k+1}$. ξ est (k,p)-dilatant si et seulement si $k \geq 1$ et $p > \frac{2m}{k}$.

Exemple. Espace hyperbolique quaternionien ou octonionien. Soit N le radical unipotent du parabolique minimal de $Sp(m,1)$, $m \geq 2$ (resp. de F_4^{-20}). Son algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ possède une dérivation α ayant exactement deux valeurs propres 1 et 2. Autrement dit, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$ où $\dim(\mathfrak{n}_1) = 4m-4$ (resp. 8) et $\dim(\mathfrak{n}_2) = 3$ (resp. 7). Alors $G = \mathbf{R} \ltimes_\alpha N$ agit simplement transitivement sur l'espace hyperbolique quaternionien de dimension réelle $n = 4m$ (resp. le plan hyperbolique octonionien). Soit ξ le champ de vecteurs invariant à gauche correspondant au facteur $\mathbf{R}$, de sorte que $ad_\xi = \alpha$. La graduation des formes différentielles invariantes à gauche comporte 4 (resp. 8) sous-espaces en degrés $k = 3,\ldots,4m-4$ (resp. 7 et 8), moins pour les valeurs extrêmes. Posons $\mathfrak{d} = 4$ pour les quaternions et $\mathfrak{d} = 8$ (et $m = 2$) pour les octonions. Alors, pour $k = \mathfrak{d}-1,\ldots,\mathfrak{d}m-\mathfrak{d}$,

$$\Lambda^k\mathfrak{n}^* = \bigoplus_{j=0}^{\mathfrak{d}-1} \Lambda^k_{k+j} = \bigoplus_{j=0}^{\mathfrak{d}-1} \Lambda^{k-j}\mathfrak{n}_1^* \otimes \Lambda^j(\mathfrak{n}_2)^*.$$

et, pour les valeurs extrêmes,

$$\Lambda^k\mathfrak{n}^* = \bigoplus_{j=0}^{k} \Lambda^k_{k+j} \quad \text{si } k \leq \mathfrak{d}-2, \quad \Lambda^k\mathfrak{n}^* = \bigoplus_{j=k-\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}}^{\mathfrak{d}-1} \Lambda^k_{k+j} \quad \text{si } k \geq \mathfrak{d}m-\mathfrak{d}+1.$$

$h = \mathrm{tr}(\alpha) = \mathfrak{d}m + \mathfrak{d} - 2$. Les exposants critiques sont les $(\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}-2)/(k+j)$, $j = \max\{0, k-\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}\}, \ldots, \min\{k, \mathfrak{d}-1\}$. Il y en a $\mathfrak{d}$ si $k = \mathfrak{d}-1, \ldots, \mathfrak{d}m-\mathfrak{d}$, moins pour les valeurs extrêmes de k. On trouve que ξ est (k,p)-contractant si et seulement si $k = 0$ (pour tout p) ou $1 \leq k \leq \mathfrak{d}m-\mathfrak{d}$ et $p < \frac{\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}-2}{k+\min\{k,\mathfrak{d}-1\}}$. ξ est (k,p)-dilatant si et seulement si $k \geq 1$ et $p > \frac{\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}-2}{k+\max\{0,k-\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}\}}$. Le spectre de $\Lambda^k\alpha$ est l'intervalle d'entiers $[\max\{k, 2k-\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}\}, \ldots, \min\{2k, k+\mathfrak{d}-1\}]$. Si $1 \leq k \leq \mathfrak{d}m-1$, son plus grand élément est $\max\sigma(k) = \min\{2k, k-1+\mathfrak{d}\}$. Si $2 \leq k \leq \mathfrak{d}m-2$, le suivant, par ordre décroissant, est $\mathrm{suiv}\,\sigma(k) = \min\{2k+1, k-1+\mathfrak{d}\}-1$. Ces formules sont aussi valables pour les espaces hyperboliques réels (avec $\mathfrak{d} = 1$) et complexes (avec $\mathfrak{d} = 2$).

Remarque. Sachant que les espaces symétriques de rang un à courbure non constante sont $-\frac{1}{4}$-pincés, on constate que l'intervalle $[1, 1+\frac{n-k}{k-1}\sqrt{-\delta}[$ pour lequel la Proposition 5 garantit que les champs de vecteurs de Busemann sont $(k-1,p)$-contractants coïncide avec l'intervalle observé pour ces espaces, $[1, \frac{\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}-2}{k+\min\{k,\mathfrak{d}-1\}}[$, seulement lorsque $k = \mathfrak{d}$.

De même, l'intervalle de $(k-1,p)$-dilatation de la Proposition 5 est optimal pour les espaces symétriques de rang un à courbure non constante seulement pour $k = n-\mathfrak{d}+1$.

4 Formule de Künneth pluri-tordue

Dans cette section, on démontre le principal résultat technique de cet article, le théorème 4.

4.1 L'opérateur B

Proposition 9. *Soit $p \geq 1$. Soit M une variété riemannienne, soit ξ un champ de vecteurs unitaire complet et (k,p)-Anosov sur M, de flot ϕ_t. On note $\Lambda_+ \oplus \Lambda_-$ la décomposition (k,p)-Anosov des k-formes annulées par ι_ξ. Si $\omega \in \Lambda^k T^*_x M$, on note $\omega_\pm$ la projection orthogonale de ω sur $\Lambda_\pm T^*_x M$. Alors les opérateurs*

$$\overline{B} : \omega \mapsto \int_{-\infty}^{0} (\phi_t)^*\omega_- \, dt - \int_0^{+\infty} (\phi_t)^*\omega_+ \, dt,$$

$$i = \iota_\xi = \text{ produit intérieur par } \xi$$

et

$$B = \overline{B} i$$

sont bornés sur les $k+1$-formes L^p. De plus, il satisfont $Bi = iB = 0$, $i(1-dB) = 0$.

Preuve. Par hypothèse, pour tout $x \in M$ et tout $t \geq 0$,

$$|(\phi_t)^* i\omega_+|^p(x) \leq \text{const.}e^{-\eta t}|i\omega_+|^p(\phi_t x)J_{\phi_t}(x)$$

donc

$$\begin{aligned}\int_M |(\phi_t)^* i\omega_+|^p(x)\,dx &\leq \text{const.}e^{-\eta t}\int_M |\omega|^p(\phi_t x)J_{\phi_t}(x)\,dx \\ &= \text{const.}e^{-\eta t}\int_M |\omega|^p(z)\,dz.\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $t \mapsto \| (\phi_t)^* i\omega_+ \|_{L^p}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$, la seconde intégrale converge dans $L^p\Omega^k(M)$ et

$$\| (\phi_t)^* i\omega_+ \|_{L^p} \leq \frac{1}{\eta}\| i\omega_+ \|_{L^p}.$$

Il vient $\| B\omega \| \leq \eta^{-1}\| \omega \|$.

L'opérateur i est évidemment borné sur L^p. Comme il commute avec ϕ_t, il commute avec $\overline{B}$ d'où $iB = i\overline{B}i = \overline{B}ii = 0$.

Notons $\mathcal{L}_\xi$ la dérivée de Lie suivant ξ. Si ω est une $k+1$-forme lisse à support compact, alors pour tout t,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t)^*\omega = (\phi_t)^*\mathcal{L}_\xi\omega = \mathcal{L}_\xi(\phi_t^*\omega).$$

D'autre part, au voisinage d'un point, $(\phi_t)^*\omega = 0$ pour t assez grand. Par conséquent

$$\mathcal{L}_\xi\overline{B}\omega = \omega_+ + \omega_- = \omega.$$

Il vient

$$i\omega = i\mathcal{L}_\xi\overline{B}\omega = \mathcal{L}_\xi B\omega = (di + id)B\omega = idB\omega.$$

Par densité, cette identité s'étend à L^p. q.e.d.

4.2 Le complexe des formes basiques

L'opérateur B est notre candidat pour réaliser une homotopie de l'identité à un projecteur P sur le sous-espace des formes annulées par ι_ξ et invariantes par le flot de ξ. Autrement dit, $1 - P = dB + Bd$. Une difficulté surgit : dB n'est pas borné sur $\Omega^{*,p}(M)$. P n'envoie pas $\Omega^{*,p}(M)$ dans lui-même, mais dans un espace plus grand, l'espace $L^p + dL^p$.

Définition 10. *On note $\Psi^{k,p}(M)$ l'espace des k-formes différentielles ψ telles qu'il existe $\beta \in L^p\Omega^k(M)$ et $\gamma \in L^p\Omega^{k-1}(M)$ telles que $\omega = \beta + d\gamma$. Il est muni de la norme*

$$\| \psi \|_{\Psi^{*,p}} = \inf\{(\| \beta \|_{L^p}^p + \| \gamma \|_{L^p}^p)^{1/p} \mid \psi = \beta + d\gamma\}.$$

Le complexe $\Psi^{*,p}(M)$ calcule lui aussi la cohomologie L^p. En effet, si une forme $\omega \in \Omega^{k,p}(M)$ s'écrit $\omega = d\psi$ où $\psi \in \Psi^{k-1,p}(M)$, i.e. $\psi = \beta + d\gamma$, alors $\beta \in \Omega^{k-1,p}(M)$ et $\omega = d\beta$. Inversement, toute forme fermée $\psi \in \Psi^{k,p}(M)$, $\psi = \beta + d\gamma$, est cohomologue (au sens du complexe $\Psi^{*,p}$) à la forme fermée β, et $\beta \in \Omega^{k,p}(M)$. Mais cela ne fournit pas directement une homotopie entre les deux complexes. Une telle homotopie sera construite plus loin, sous une hypothèse supplémentaire sur M, voir Proposition 28.

Définition 11. *Soit M une variété riemannienne, ξ un champ de vecteurs unitaire complet sur M. On note $\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi) \subset \Psi^{*,p}(M)$* le sous-complexe des formes qui sont annulées par ι_ξ *et $\iota_\xi \circ d$.*

Soit $G = \mathbf{R} \ltimes_\alpha H$ un produit semi-direct. Notons $\pi : G \to H$ la projection le long des orbites du champ de vecteurs ξ correspondant à l'action à droite du facteur $\mathbf{R}$. L'opération π^*, image inverse par π, identifie $\mathcal{B}^{*,p}(G,\xi)$ à un sous-complexe de formes différentielles sur H, qu'on note $\mathcal{B}^{*,p}$. La nature de cet espace ne saute pas aux yeux. Il s'avère qu'il est souvent nul. Lorsqu'il ne l'est pas, c'est un espace fonctionnel constitué de formes dont certains coefficients s'annulent (voir section 6) et les autres ont des dérivées fractionnaires anisotropes dans L^p (voir section 5).

4.3 Théorème principal

Théorème 4. *Soit M une variété riemannienne. Soit ξ un champ de vecteurs unitaire complet sur M. Soit $p \geq 1$, $1 \leq k \leq n$.*

1. *Si le champ ξ est $(k-1,p)$-Anosov, alors l'injection $I : \mathcal{B}^{k,p}(M,\xi) \subset \Psi^{k,p}(M)$ induit une surjection en cohomologie.*
2. *Si $k = 1$ ou si $k \geq 2$ et ξ est $(k-2,p)$-Anosov, alors I induit une injection en cohomologie.*
3. *Supposons de plus que M est à géométrie bornée, que $p > 1$ et que ξ est (j,p)-Anosov pour tout $j = 0, \cdots, n-1$. Alors les complexes $\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi)$ et $\Omega^{*,p}(M)$ sont homotopes.*

Preuve. On utilise l'opérateur B défini dans la Proposition 9.

Supposons que p est non critique en degré $k-1$. Alors B est défini sur les k-formes L^p. Soit $\omega = \beta + d\gamma \in \Psi^{k,p}(M)$ une forme fermée. Alors $\delta = (1 - dB)\beta$ est bien définie, et elle appartient à $\mathcal{B}^{k,p}(M,\xi)$. En effet, $\iota_\xi \delta = \iota_\xi(1 - dB)\beta = 0$ et $d\delta = d\beta = d\omega = 0$. Comme $\delta = \beta - dB\beta = \omega - d(\gamma + B\beta)$, δ est cohomologue à ω dans $\Psi^{*,p}(M)$, donc I est surjective en cohomologie.

Supposons que p est non critique en degré $k-2$. Soit $\omega \in \mathcal{B}^{k,p}(M,\xi)$ une forme fermée. Supposons ω cohomologue à 0 dans $\Psi^{*,p}(M)$, $\omega = d(\beta + d\gamma) = d\beta$, où β est L^p. Alors $\delta = (1 - dB)\beta$ est bien définie, $\iota_\xi \delta = 0$ et $d\delta = d\beta = \omega$ satisfait aussi $\iota_\xi d\delta = 0$. Autrement dit, $\delta \in \mathcal{B}^{k-1,p}(M,\xi)$, $d\delta = \omega$ donc ω est cohomologue à 0 dans $\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi)$, cela prouve que I est injective en cohomologie.

Supposons désormais que M est à géométrie bornée, et que ξ est (j,p)-Anosov pour tout $j = 0, \cdots, n-1$. On combine l'opérateur $P : \Omega^{*,p}(M) \to$

$\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi)$ défini par $P = 1 - dB - Bd$ et l'opérateur de régularisation $S : \Psi^{*,p}(M) \to \Omega^{*,p}(M)$ fourni par la proposition 22. P est borné de $\Omega^{*,p}(M)$ dans $\Psi^{*,p}(M)$. Par définition, $Pd = dP$. En outre, comme $\iota_\xi B = 0$, $\iota_\xi(1 - dB) = 0$, $\iota_\xi P = 0$ et $\iota_\xi dP = \iota_\xi Pd = 0$, donc P est borné de $\Omega^{*,p}(M)$ dans $\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi)$. De son côté, S s'écrit $S = 1 - dT - Td$ où T est borné de $\Omega^{*,p}_{-1}(M)$ dans $\Omega^{*,p}(M)$. Par conséquent, S est borné de $\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi)$ dans $\Omega^{*,p}(M)$, et

$$\begin{aligned} 1 - SP &= 1 - S + S(dB + Bd) \\ &= dT + Td + dSB + SBd \\ &= d(T + SB) + (T + SB)d, \end{aligned}$$

où $T+SB$ est borné de L^p vers L^p. De plus, $d(T+SB) = 1-SP-(T+SB)d$ est borné de $\Omega^{*,p}(M)$ vers L^p, donc $T + SB$ est borné de $\Omega^{*,p}(M)$ dans lui-même. De même,

$$\begin{aligned} 1 - PS &= 1 - P + P(dT + Td) \\ &= dB + Bd + dPT + PTd \\ &= d(B + PT) + (B + PT)d. \end{aligned}$$

On constate que $\iota_\xi(B+PT) = 0$, $\iota_\xi d(B+PT) = \iota_\xi(1-PS-(B+PT)d) = \iota_\xi = 0$ sur $\ker \iota_\xi \cap \ker \iota_\xi d$. De plus

$$\begin{aligned} B + PT &= B + (1 - dB - Bd)T \\ &= B + T - dBT - B(1 - S - Td) \\ &= T - dBT + BS + BTd \end{aligned}$$

est borné de $\Psi^{*,p}(M)$ dans lui-même, donc de $\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi)$ dans lui-même. Les opérateurs P et S constituent donc une équivalence d'homotopie de complexes. q.e.d.

Remarque. Comme la torsion $T^{k,p}(M)$ est l'adhérence de 0 dans $H^{k,p}(M)$, et $R^{k,p}(M) = H^{k,p}(M)/T^{k,p}(M)$, ces deux espaces sont conservés par les isomorphismes. Sous les hypothèses 1 ou 2 du Théorème 4, $R^{k,p}(M) = R^k(\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi))$ et $T^{k,p}(M) = T^k(\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi))$.

4.4 L'opérateur P

On n'utilisera pas directement l'énoncé 3 du théorème 4 dans cet article. Néanmoins, l'opérateur $P : \Omega^{*,p}(M) \to \mathcal{B}^{*,p}(M,\xi)$ qui réalise l'homotopie est intéressant en lui-même. Il généralise la valeur au bord utilisée dans [24]. Ses propriétés, relatives au cup-produit notamment, seront détaillées en section 8.

Corollaire 12. *Soit M une variété riemannienne, non nécessairement complète. Soit ξ un champ de vecteurs unitaire complet sur M. Soit $p \geq 1$, $1 \leq k \leq n$. On suppose que ξ est $(k-2,p)$ et $(k-1,p)$-Anosov. Alors les opérateurs*

$$P = 1 - dB - Bd : \Omega^{k-1,p}(M) \to \mathcal{B}^{k-1,p}(M,\xi)$$

et

$$P = 1 - dB : \Omega^{k,p}(M) \cap \ker(d) \to \mathcal{B}^{k,p}(M,\xi) \cap \ker(d)$$

sont bornés. Sur $\Omega^{k-1,p}(M)$, $Pd = dP$. *Enfin,* P *induit un isomorphisme* $H^{k,p}(M) \to H^k(\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi))$.

Preuve. Elle combine la preuve du Théorème 4 et le fait que les complexes $\Omega^{*,p}$ et $\Psi^{*,p}$ ont la même cohomologie.

Soit $\omega \in \Omega^{k,p}(M) \cap \ker(d)$. Si $[P\omega] = 0$ dans $H^k(\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi))$, $P\omega = d(\beta + d\gamma)$ où β et γ sont L^p et $\beta + d\gamma \in \mathcal{B}^{k-1,p}(M,\xi)$, alors $(1 - dB)\omega = d(\beta + d\gamma)$, d'où

$$\omega = d(B\omega + \beta),$$

et $B\omega + \beta \in \Omega^{k-1,p}(M)$, donc $[\omega] = 0$ dans $H^{k,p}(M)$.

Soit $\psi = \beta + d\gamma \in \mathcal{B}^{k-1,p}(M,\xi) \cap \ker(d)$. Alors

$$\psi = P\beta + d(B\beta + \gamma - dB\gamma).$$

Clairement, $B\beta + \gamma - dB\gamma \in \Psi^{k-1,p}(M)$, $\iota_\xi(B\beta + (1 - dB)\gamma) = 0$ et $\iota_\xi d(B\beta + (1 - dB)\gamma) = \iota_\xi(\psi) = 0$, donc $B\beta + \gamma - dB\gamma \in \mathcal{B}^{k-1,p}(M,\xi)$, et $[\psi] = [P\beta]$ in $H^k(\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi))$. q.e.d.

A titre d'illustration, on prouve le résultat principal (Proposition 10) de [24].

Lemme 13. *Soit* M *une variété riemannienne complète, difféomorphe à* $\mathbf{R} \times H$. *Soit* $U \subset H$ *un ouvert, soit* $V = \mathbf{R} \times U$ *et* $V_T =]T, +\infty[\times U$ *(éventuellement,* $T = -\infty$*). Soient* $p \geq 1$ *et* $k \geq 2$. *Supposons que* $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ *est* $(k-2,p)$*-contractant et* $(k-1,p)$*-contractant. Alors l'opérateur* P *est défini sur* $\Omega^{k-1,p}(V_T)$ *et sur* $\Omega^{k,p}(V_T) \cap \ker(d)$. *Il satisfait* $Pd = dP$ *sur* $\Omega^{k-1,p}(V_T)$ *et donne un isomorphisme* $H^{k,p}(V_T) \to H^k(\mathcal{B}^{*,p}(V,\xi))$. *Dans ce cas particulier,*

$$P\omega = \lim_{t \to +\infty} \phi_t^* \omega.$$

Preuve. Comme ξ est $(k-2,p)$-contractant et $(k-1,p)$-contractant, $\Lambda^{k-2}_{-(p)} = 0$ et $\Lambda^{k-1}_{-(p)} = 0$. Par conséquent, en degrés $k-1$ et k, la définition de l'opérateur B,

$$B\omega = -\int_0^{+\infty} (\phi_t)^*(\iota_\xi \omega)_+ \, dt$$

se généralise aux ouverts invariants par le semi-groupe $(\phi_t)_{t \geq 0}$. Le Corollaire 12 se généralise aussi.

B est la limite quand $T \to +\infty$ des opérateurs

$$B_T\omega = -\int_0^T (\phi_t)^*(\iota_\xi \omega) \, dt.$$

Comme

$$\phi_T^*\omega - \omega = -dB_T\omega - B_T d\omega,$$

il vient

$$P\omega = \omega - dB\omega - Bd\omega = \lim_{T\to+\infty} \phi_T^*\omega. \ q.e.d.$$

4.5 Localisation

Nous avons besoin d'une version du Corollaire 12 localisée au voisinage d'un point du bord à l'infini d'une variété à courbure sectionnelle négative. On peut prendre de tels voisinages de la forme $V_T = \bigcup_{t>T} \phi_t(U) =]T, +\infty[\times U$ où U est un ouvert relativement compact d'une horosphère. Le Théorème 4 (énoncés 1 et 2) s'applique à $V = \mathbf{R}\times U$, mais non à V_T. Néanmoins, le lemme suivant donne une information suffisante.

Lemme 14. *Soit M une variété riemannienne complète, difféomorphe à $\mathbf{R}\times H$. Soit $U \subset H$ un ouvert borné contractile, à bord lisse, soit $V = \mathbf{R}\times U$ et $V_T =]T, +\infty[\times U$. Soient $p \geq 1$ et $k \geq 2$. Supposons que $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ est $(k-2, p)$- et $(k-1, p)$-Anosov. Soit $\omega \in \Omega^{k,p}(V)$ une forme fermée qui est nulle sur $]-\infty, T+1[\times U$. Alors $[\omega_{|V_T}] \in H^{k,p}(V_T)$ est nulle si et seulement si $[P\omega] \in H^k(\mathcal{B}^{*,p}(V,\xi))$ est nulle.*

Preuve. Notons $Z =]T, T+1[\times U$. La suite exacte longue de la paire (V_T, Z) donne

$$\cdots \to H^{k-1,p}(Z) \to H^{k,p}(V_T, Z) \to H^{k,p}(V_T) \to H^{k,p}(Z) \to \cdots$$

Comme Z est muni d'une métrique équivalente à la métrique produit sur $]T, T+1[\times U$, sa cohomologie L^p coïncide avec la cohomologie ordinaire de U, qui est nulle, par hypothèse, en degrés ≥ 1. Donc la flèche $j : H^{k,p}(V_T, Z) \to H^{k,p}(V_T)$ est injective. Par hypothèse, $0 = [\omega_{|V_T}] = j([\omega_{|(V_T,Z)}]) \in H^{k,p}(V_T)$, donc $[\omega_{|(V_T,Z)}] \in H^{k,p}(V_T, Z)$ est nulle, il existe $\psi \in \Omega^{k-1,p}(V_T)$, nulle sur Z, telle que $d\psi = 0$. On prolonge ψ par 0. On obtient une forme L^p sur V telle que $d\psi = \omega$, i.e. ω est exacte. Réciproquement, si ω est exacte, sa restriction à V_T l'est aussi. Il ne reste plus qu'à appliquer le Corollaire 12 dans V. q.e.d.

5 Propriétés analytiques des formes basiques

Dans cette section, on décrit la norme des espaces $\Psi^{k,p}(M)$, en la reliant à une norme plus simple. Cela permettra, lors de la preuve du Théorème 1, de montrer qu'un opérateur candidat à être un inverse de la différentielle est borné sur $\mathcal{B}^{k,p}(M,\xi)$. Cette application reposera sur le Corollaire 27.

5.1 L'espace $L^p_{-1}\Omega^k(M)$

La norme de l'espace $\Psi^{k,p}(M)$ est difficile à évaluer en général. On va construire une norme équivalente plus commode, dans le cas particulier des variétés riemanniennes à géométrie bornée.

Définition 15. *Fixons un entier $\ell \geq 1$. Soit M une variété riemannienne. On dit que M est à géométrie bornée s'il existe un $\epsilon > 0$ tel que toutes les boules de rayon ϵ soient uniformément proches, au sens C^ℓ, de la boule unité de $\mathbf{R}^n$.*

Remarque. Dans la littérature, on demande souvent seulement une borne inférieure sur le rayon d'injectivité et des bornes sur la courbure sectionnelle. Quitte à déformer la métrique en une métrique équivalente plus régulière (ce qui ne change pas la cohomologie L^p), on peut supposer que les dérivées covariantes jusqu'à l'ordre ℓ de la courbure sont uniformément bornées (voir [2]). La proximité C^ℓ ne coûte donc pas plus cher.

Définition 16. Soit M une variété riemannienne compacte (resp. compacte à bord). On note ∇ la dérivée covariante. Soient p et p' des réels positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Soit ω une k-forme différentielle sur M. Sa *norme* $L^p_{-\ell}$ est la borne supérieure des intégrales $\int_M \omega \wedge \phi$ sur les $n-k$-formes ϕ sur M, de classe C^ℓ (resp. nulles au voisinage du bord) et telles que

$$\| \phi \|_{L^{p'}_\ell(M)} := (\| \phi \|^{p'}_{L^{p'}(M)} + \| \nabla\phi \|^{p'}_{L^{p'}(M)} + \cdots + \| \nabla^\ell \phi \|^{p'}_{L^{p'}(M)})^{1/p'} \leq 1.$$

Remarque. Le transport par un difféomorphisme de classe C^ℓ est un isomorphisme entre espaces $L^p_{-\ell}$.

Définition 17. Soit M une variété riemannienne à géométrie bornée. Soit ω une k-forme sur M. On *note*

$$\| \omega \|_{L^p_{-\ell}\Omega^k(M)} = (\int_M \| \omega_{|B(x,\epsilon)} \|^p_{L^p_{-\ell}(B(x,\epsilon))} \, dx)^{1/p}.$$

Remarque. Changer le rayon des boules conduit à une norme équivalente. Si M est compacte, elle est automatiquement à géométrie bornée. Les définitions 16 et 17 donnent dans ce cas des normes équivalentes.

Remarque. Clairement, $L^p_{-\ell} \subset L^p_{-\ell-1}$ et la différentielle extérieure est bornée de $L^p_{-\ell}$ dans $L^p_{-\ell-1}$.

Lemme 18. *Si M est compacte (éventuellement avec bord), l'espace $L^p_{-\ell}(M)$ est un module sur l'algèbre $C^\ell(M)$.*

Preuve. Soit u une fonction de classe C^ℓ sur M, ω une k-forme sur B et ϕ une $n-k$-forme lisse à support compact dans M, telle que $\| \phi \|_{L^p_\ell(M)} \leq 1$. Alors $\nabla u\phi = (\nabla u)\phi + u\nabla\phi$ entraîne

$$\| u\phi \|_{L^{p'}_\ell} \leq \| u \|_{C^\ell} \| \phi \|_{L^{p'}_\ell} \leq \| u \|_{C^\ell(M)}.$$

Il vient

$$\int_M u\omega \wedge \phi = \int_M \omega \wedge u\phi \leq \| u \|_{C^\ell(M)} \| \omega \|_{L^p_{-\ell}(M)},$$

donc

$$\| u\omega \|_{L^p_{-\ell}(M)} \leq \| u \|_{C^\ell(M)} \| \omega \|_{L^p_{-\ell}(M)}. \ q.e.d.$$

Remarque. Plus généralement, si ϕ est une forme différentielle de classe C^ℓ sur M, le produit extérieur par ϕ est un opérateur borné sur $L^p_{-\ell}$.

Proposition 19. *Soit G un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Une forme différentielle sur G est dans $L^p_{-\ell}$ si et seulement si ses composantes dans un repère de formes invariantes à gauche sont des fonctions dans $L^p_{-\ell}$.*

Preuve. Par invariance à gauche, il suffit de le vérifier pour la boule unité B de G. Soit $\theta_1, \cdots, \theta_n$ une base de 1-formes invariantes à gauche. Soit $\{i_1, \cdots, i_n\}$ une permutation de $\{1, \cdots, n\}$, soit u une fonction de classe C^ℓ à support compact dans B. Il existe une constante indépendante de u telle que

$$\text{const.} \| u \|_{L^{p'}_\ell(B)} \leq \| u\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k} \|_{L^{p'}_\ell(B)} \leq \text{const.} \| u \|_{L^{p'}_\ell(B)}.$$

Par dualité, on en tire, pour toute fonction v de $L^p_{-\ell}(B)$

$$\text{const.} \| v \|_{L^p_{-\ell}(B)} \leq \| v\theta_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_n} \|_{L^p_{-\ell}(B)} \leq \text{const.} \| v \|_{L^p_{-\ell}(B)}.$$

q.e.d.

Remarque. En particulier, dans la boule unité de $\mathbf{R}^n$, une forme différentielle est dans L^p_ℓ si et seulement si ses composantes, des fonctions, le sont.

5.2 Régularisation

Dans cette section, on construit des opérateurs de régularisation S et T qui vont constituer une homotopie entre formes L^p et formes L^p_{-1}.

Soit M une variété riemannienne compacte sans bord. Notons $\mathcal{H}$ l'espace des formes harmonique sur M. Le laplacien Δ admet un inverse borné sur l'orthogonal L^2 de $\mathcal{H}$. On note $\Gamma = \Delta^{-1} \circ \Pi$ la composition avec le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}^\perp$. Comme Δ commute avec d et d^*, il en est de même de Γ.

Lemme 20. *Soit M une variété riemannienne compacte sans bord. Soit $p > 1$. Les opérateurs $T_M = d^*\Gamma$ et $S_M = 1 - dT_M - T_M d$ sont bornés de $L^p_{-1}\Omega^*(M)$ dans $L^p\Omega^*(M)$. De plus, S_M est borné de $L^p_{-1}\Omega^*(M)$ dans $L^p_\ell\Omega^*(M)$ pour tout ℓ.*

Preuve. Comme Γ commute avec d, $S_M = 1 - dT_M - Td_M = 1 - \Delta\Gamma = 1 - \Pi$ est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}$. Il est donc aussi régularisant qu'on veut.

Montrons que Γ est borné de $L^{p'}$ dans $L^{p'}_2$. L'estimée $L^{p'}$ pour le laplacien, [1], s'énonce comme suit. Pour $\phi \in L^{p'}_2$,

$$\| \phi \|_{L^{p'}_2} \leq \text{const.}(\| \phi \|_{L^{p'}} + \| \phi \|_{L^{p'}}).$$

Montrons d'abord que l'image par Δ de $\mathcal{H}^\perp \cap L^{p'}_2$ est fermée dans $L^{p'}$. Soit $\omega \in L^{p'}$, soit $\phi_j \in \mathcal{H}^\perp \cap L^{p'}_2$ une suite telle que $\Delta(\phi_j)$ converge dans $L^{p'}$ vers ω. Alors ϕ_j est bornée dans $L^{p'}$. Sinon, $\psi_j = \phi_j / \| \phi_j \|_{L^{p'}}$ est borné dans $L^{p'}_2$ donc, par compacité du plongement de Sobolev, on peut supposer que ψ_j converge fortement dans $L^{p'}$ vers un ψ de norme 1, et converge faiblement dans $\mathcal{H}^\perp \cap L^p_2$. Or $\Delta\psi_j$ tend vers 0, donc $\psi \in \mathcal{H}$. Il vient $\psi = 0$, contradiction. On conclut que ϕ_j est bornée dans $L^{p'}$. On peut donc supposer que ϕ_j converge faiblement dans $\mathcal{H}^\perp \cap L^{p'}_2$ vers ϕ, et $\omega = \Delta\phi$ est dans l'image du laplacien. On conclut que $\Delta(\mathcal{H}^\perp \cap L^{p'}_2)$ est fermé dans $L^{p'}$.

Le laplacien étant symétrique, son image est exactement $\mathcal{H}^\perp \cap L^{p'}$. L'opérateur Δ est une bijection continue entre les espaces de Banach $\mathcal{H}^\perp \cap L^{p'}_2$ et $\mathcal{H}^\perp \cap L^{p'}$. C'est donc un isomorphisme. On conclut que Γ est borné de $L^{p'}$ dans $L^{p'}_2$.

Le même argument montre que, pour tout $\ell \in \mathbf{Z}$, Γ est borné de $L^{p'}_\ell$ dans $L^{p'}_{\ell+2}$. En effet, l'estimée elliptique est vraie sur $L^{p'}_\ell$. En particulier, l'adjoint L^2 de T_M, l'opérateur $T^* = d\Gamma$ est borné de $L^{p'}_\ell$ dans $L^{p'}_{\ell+1}$.

Par dualité, on conclut que T_M est borné de $L^p_{-\ell}$ dans $L^p_{-\ell+1}$. Pour $\ell = 1$, on trouve que T_M est borné de $L^p_{-1}\Omega^*(M)$ dans $L^p\Omega^*(M)$. q.e.d.

Corollaire 21. *Soit M une variété riemannienne à bord compacte. Soit $p > 1$. Il existe des opérateurs S_M et T_M tels que $1 = S_M + dT_M + T_M d$ et pour toutes fonctions lisses χ et χ' à support compact dans l'intérieur de M, $\chi' \circ S_M \circ \chi$, $d\chi' \wedge T_M \circ \chi$ et $T_M \circ d\chi \wedge \cdot$ sont bornés de $L^p_{-1}\Omega^*(M)$ dans $L^p\Omega^*(M)$. De plus, $\chi' \circ S_M \circ \chi$ est borné de $L^p_{-1}\Omega^*(M)$ dans $L^p_\ell\Omega^*(M)$.*

Preuve. On peut toujours compléter M en une variété compacte sans bord. On utilise ensuite le fait que $L^p_{-\ell}$ est un $C^{\ell'}$-module pour tout $\ell' \geq \ell$ (lemme 18 et la remarque qui le suit). q.e.d.

Proposition 22. *Soit M une variété riemannienne à géométrie bornée. Soit $p > 1$. Il existe des opérateurs bornés S et T de $L^p_{-1}\Omega^*(M)$ dans $L^p\Omega^*(M)$, tels que $1 = S + dT + Td$. De plus, pour tout ℓ, S est borné de $L^p_{-1}\Omega^*(M)$ dans $L^p_\ell\Omega^*(M)$.*

Preuve. En transportant au moyen de difféomorphismes contrôlés en norme C^1 les opérateurs S_B et T_B de la boule unité B de $\mathbf{R}^n$, on obtient pour chaque $z \in M$ des opérateurs S_z et T_z sur la boule $B(z,\epsilon)$ de M tels que $\chi'_z \circ S_z \circ \chi_z$, $d\chi'_z \wedge T_z \circ \chi_z$ et $T_z \circ d\chi_z \wedge \cdot$ soient bornés de $L^p_{-1}\Omega^*(B(z,\epsilon))$ dans $L^p\Omega^*(B(z,\epsilon))$ en fonction seulement des normes C^1 de χ'_z et χ_z. On choisit les fonctions χ'_z et χ_z de sorte que pour tout $x \in M$, $\int \chi'_z \chi_z(x)\, dz = 1$.

On pose, pour $\omega \in L^p_{-1}(M)$,

$$T\omega = \int_M \chi'_z T_z(\chi_z \omega_{|B(z,\epsilon)})\, dz.$$

Pour chaque $z \in M$, $\chi_z \omega_{|B(z,\epsilon)} \in L^p_{-1}(B(z,\epsilon))$ et

$$\| \chi'_z T_z(\chi_z \omega_{|B(z,\epsilon)}) \|_{L^p(B(z,\epsilon))} \leq \text{const.} \| \omega_{|B(z,\epsilon)} \|_{L^p_{-1}(B(z,\epsilon))}$$

donc, par définition de la norme L^p_{-1},

$$\| T\omega \|_{L^p\Omega^*} \leq \text{const.} \| \omega \|_{L^p_{-1}\Omega^*}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} & d(\chi'_z T_z(\chi_z \omega)) + \chi'_z T_z(\chi_z d\omega) \\ = \; & d\chi'_z \wedge T_z(\chi_z \omega) + \chi'_z (T_z d + dT_z)(\chi_z \omega) - \chi'_z T_z(d\chi_z \wedge \omega) \\ = \; & \chi'_z (1 - S_z)(\chi_z \omega) + d\chi'_z \wedge T_z(\chi_z \omega) - \chi'_z T_z(d\chi_z \wedge \omega) \\ = \; & \chi'_z \chi_z \omega - \tilde{S}_z(\omega) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{S}_z(\omega) = \chi'_z S_z(\chi_z \omega) + \chi'_z T_z(d\chi_z \wedge \omega) - d\chi'_z \wedge T_z(\chi_z \omega)$$

donc $\tilde{S}_z$ est borné de $L^p_{-1}(B(z,\epsilon))$ dans $L^p(B(z,\epsilon))$, uniformément en z. On pose

$$S = \int_M \tilde{S}_z\, dz.$$

Alors $1 = S + dT + Td$, et S et T sont bornés de $L^p_{-1}\Omega^*(M)$ dans $L^p\Omega^*(M)$. q.e.d.

5.3 Comparaison des normes $\Psi^{*,p}$ et $\Omega^{*,p}_{-1}$

Définition 23. *On note $\Omega^{*,p}_{-\ell}(M)$ l'espace des formes différentielles qui sont dans $L^p_{-\ell}\Omega^*(M)$ ainsi que leur différentielle extérieure, muni de la norme*

$$\| \omega \|_{\Omega^{*,p}_{-\ell}} = (\| \omega \|^p_{L^p_{-\ell}\Omega^*(M)} + \| d\omega \|^p_{L^p_{-\ell}\Omega^*(M)})^{1/p}.$$

Proposition 24. *Soit M une variété riemannienne de dimension n à géométrie bornée. Alors les normes de $\Psi^{*,p}(M)$ et de $\Omega^{*,p}_{-1}(M)$ sont équivalentes.*

Preuve. Par construction, $\Psi^{*,p} \subset L^p_{-1}\Omega^*$ et $\Psi^{*,p}$ est stable par d donc $\Psi^{*,p} \subset \Omega^{*,p}_{-1}$.

Inversement, soit ω une forme dans $L^p_{-1}\Omega^*$ telle que $d\omega \in L^p_{-1}\Omega^*$. Utilisons les opérateurs de régularisation de la proposition 22. Alors $\omega = (S+Td)\omega + dT\omega$ où $(S+Td)\omega \in L^p\Omega^*$ et $T\omega \in L^p\Omega^*$, donc $\omega \in \Psi^{*,p}$. q.e.d.

Corollaire 25. *Soit G un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Une forme différentielle ω sur G est dans $\Psi^{*,p}(G)$ si et seulement si les composantes de ω et de $d\omega$ dans un repère de formes invariantes à gauche sont des fonctions dans $L^p_{-1}(G)$.*

Preuve. Combiner les propositions 19 et 24. q.e.d.

5.4 Application aux formes basiques sur les produits semi-directs

Lemme 26. *Soit $G : \mathbf{R} \ltimes_\alpha H$ un groupe de Lie produit semi-direct muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. On suppose que α est semi-simple. Soit $W = \mathrm{sp}(\Lambda^*\alpha^\top)$ l'ensemble des valeurs propres de l'action de α sur les formes. Pour chaque $w \in W$, il existe un sous-espace vectoriel invariant à gauche $\mathcal{F}^{w,p}$ de l'espace des distributions sur H ayant la propriété suivante. Soit (ψ_j) une base de $\Lambda^*\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ formée de vecteurs propres (relativement à des valeurs propres w_j) de $\Lambda^*\alpha^\top$. Soit ω une forme différentielle sur H, soient*

$$\omega = \sum_j u_j\psi_j, \quad d\omega = \sum_j v_j\psi_j.$$

les composantes de ω et de sa différentielle dans une base de formes invariantes à gauche. Alors $\omega \in \mathcal{B}^{*,p}(G,\xi)$ si et seulement si, pour tout j, u_j et $v_j \in \mathcal{F}^{w_j,p}$.

Preuve. Soit $\psi \in \Lambda^k\mathfrak{h}^*$ un vecteur propre complexe de $\Lambda^k\alpha^\top$, $\Lambda^k\alpha^\top(\psi) = w\psi$. Considérons ψ comme un élément de $\Lambda^k\mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{C}$, et par suite, comme une forme invariante à gauche sur G. Alors

$$\pi^*(\psi_{|H}) = e^{-tw}\psi.$$

En effet, le champ $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ est invariant à gauche, son flot ϕ_t est un groupe à un paramètre de translations à droite,

$$\phi_t = R_{\exp(t\xi)} = L_{\exp(t\xi)} \circ Ad_{\exp(t\xi)}$$

La forme $\phi_t^*\psi$ est invariante à gauche. Sa valeur à l'origine est $(Ad_{\exp(t\xi)})^*\phi$. Or

$$Ad_{\exp(t\xi)} = \exp(t\mathrm{ad}_\xi) = \exp(t\alpha),$$

d'où

$$\phi_t^*\psi = \exp(t\Lambda^k\alpha^\top)(\psi) = e^{tw}\psi.$$

Au point (t,h) de G, $\pi^*(\psi_{|H}) = \phi_{-t}^*\psi_{|H} = e^{-tw}\psi$.

Soit (ψ_j) une base de $\Lambda^k\mathfrak{h}^*\otimes\mathbb{C}$ formée de vecteurs propres de $\Lambda^k\alpha^\top$, $\Lambda^k\alpha^\top(\psi_j) = w_j\psi_j$. Alors $\omega = \sum_j u_j\psi_{j,|H}$ est l'écriture de ω dans une base de formes invariantes à gauche sur H, et

$$\pi^*\omega = \sum_j u_j e^{-tw_j}\psi_j$$

est l'écriture de $\pi^*\omega$ dans une base de formes invariantes à gauche sur G. Par conséquent,

$$\| \pi^*\omega \|_{L^p_{-1}(G)} \sim \sum_j \| u_j e^{-tw_j} \|_{L^p_{-1}(G)}.$$

On définit $\mathcal{F}^{w,p}$ comme l'espace des distributions u sur H telles que la norme $\| u_j e^{-tw_j} \|_{L^p_{-1}(G)}$ est finie. Alors $\pi^*\omega \in L^p_{-1}(G)$ si et seulement si pour tout j, $u_j \in \mathcal{F}^{w_j,p}$. Par la définition de $\mathcal{B}^{*,p}(G,\xi)$ vu comme espace de formes différentielles sur H et le Corollaire 25,

$$\omega \in \mathcal{B}^{*,p} \quad \Leftrightarrow \quad \forall j,\ u_j \text{ et } v_j \in \mathcal{F}^{w_j,p}.\ q.e.d.$$

Remarque. Dans [22], l'espace $\mathcal{F}^{w,p}$ est décrit dans quelques cas particuliers. Par exemple, si $H = \mathbf{R}^{n-1}$ et α est l'identité, il n'y a qu'un poids w dans chaque degré k, c'est $w = k$. Dans ce cas, $\mathcal{F}^{w,p}$ est l'espace de Besov $B_{p,p}^{-w+(\frac{n-1}{p})}$ lorsque celui-ci a un sens, et est nul sinon. On verra en section 6 que $\mathcal{F}^{w,p}$ est souvent nul.

Corollaire 27. *Soit $G : \mathbf{R} \ltimes_\alpha H$ un groupe de Lie produit semi-direct muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. On suppose que α est semi-simple. Soit $L \in \mathrm{End}(\Lambda^*\mathfrak{h}^*)$ un endomorphisme qui commute avec $\Lambda^*\alpha^\top$. Soit $\omega \in \mathcal{B}^{*,p}(G,\xi)$, vue comme forme différentielle sur H. Si $dL\omega \in \mathcal{B}^{*,p}(G,\xi)$, alors $L\omega \in \mathcal{B}^{*,p}(G,\xi)$.*

Preuve. On applique le Lemme 26. Soit $\omega = \sum_{w\in W}\omega_w$. Par hypothèse, les composantes de ω_w appartiennent à $\mathcal{F}^{w,p}$. Alors $L(\omega) = \sum_{w\in W} L(\omega_w)$, et les composantes de $L(\omega_w)$, qui sont des combinaisons linéaires à coefficients constants de celles de ω_w, appartiennent elles aussi à $\mathcal{F}^{w,p}$. Par hypothèse, il en est de même pour la forme $dL\omega$. On conclut que $\omega \in \mathcal{B}^{*,p}(G,\xi)$. q.e.d.

5.5 Equivalence d'homotopie

Proposition 28. *Soit M une variété riemannienne à géométrie bornée. L'injection des complexes $\Omega^{*,p}(M) \subset \Psi^{*,p}(M)$ est une équivalence d'homotopie.*

Preuve. Soit I l'injection $I : \Omega^{*,p}(M) \to \Omega^{*,p}_{-1}(M)$. Soient S et T les opérateurs fournis par la proposition 22. La relation $S = 1 - dT - Td$ entraîne que $dS = Sd$,

donc S envoie $\Omega^{*,p}_{-1}$ dans $\Omega^{*,p}$. Par conséquent, $SI = S$ et $IS = S$ sont des morphismes de complexes. Comme S et T sont bornés de $L^p\Omega^*$ dans lui-même, et comme $dT = 1 - S - Td$, T est borné de $\Omega^{*,p}$ dans lui-même. Comme $Td = 1 - S - dT$, T est borné de $\Psi^{*,p}$ dans lui-même. Comme, $1 - SI = dT + Td$ sur $\Omega^{*,p}$ et $1 - IS = dT + Td$ sur $\Omega^{*,p}_{-1}$, on a bien affaire à une homotopie de complexes. q.e.d.

6 Propriétés algébriques des formes basiques

A l'exception du degré 1 (voir [23]), ou du cas de l'espace hyperbolique réel (voir [22]), on ne sait pas calculer complètement les espaces $\mathcal{B}^{k,p}(M)$. Néanmoins, on va montrer que dans certains cas, certaines composantes d'une forme de $\mathcal{B}^{k,p}(M)$ sont automatiquement nulles

6.1 Deux mécanismes

Exemple. Soit $G = \mathbf{R} \ltimes_\alpha \mathbf{R}^2$ le produit semi-direct défini par la matrice $\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Notons $\pi : G \to H$ la projection. Soit $\beta = a\,dx + b\,dy$ une 1-forme différentielle non nulle sur H. Alors $\phi = \pi^*\beta$ n'est jamais dans L^2. En effet, notons $\beta_+ = a\,dx$ et $\beta_- = b\,dy$. Il vient

$$\| \phi \|^2_{L^2(G)} \sim \int_{\mathbf{R}} (\| \beta_+ \|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} e^{3t} + \| \beta_- \|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} e^{-3t})\, dt$$

donc

$$\phi \in L^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2) \Rightarrow \beta_+ = 0, \quad \phi \in L^2(\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}^2) \Rightarrow \beta_- = 0.$$

La condition $\pi^*\beta \in (L^2 + dL^2)(\mathbf{R}_\pm \times \mathbf{R}^2)$ impose aussi une restriction, plus faible, sur les composantes de β. On écrit $\pi^*\beta = \omega + d\psi$ où ω et ψ sont dans $L^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2)$. On décompose encore $\omega = a_t + dt \wedge b_t$ et $\psi = e_t$, où les a_t sont des 1-formes et les b_t et e_t des fonctions sur $\mathbf{R}^2$. Alors $\| a_{+,t} \| + \| e_t \|$ est dans $L^2(\mathbf{R}_+, e^{3t}dt)$. Par conséquent il existe une suite t_j tendant vers $-\infty$ telle que a_{-,t_j} et e_{t_j} tendent vers 0. D'autre part, pour tout t,

$$\beta = a_t + de_t = a_{+,t} + a_{-,t} + de_t$$

donc $\beta = \lim a_{-,t_j}$ dans $L^2_{-1}(\mathbf{R}^2)$, donc $\beta_+ = 0$.

Supposons maintenant que $\pi^*\beta \in (L^2 + dL^2)(\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}^2)$. On trouve que $\| a_{-,t} \|$ est dans $L^2(\mathbf{R}_-, e^{-3t}dt)$ donc tend vers 0 (quitte à prendre une sous-suite t_j). Il vient $\beta = \lim a_{+,t_j} + de_{t_j}$ dans $L^2_{-1}(\mathbf{R}^2)$. On conclut seulement que β_- est dans l'adhérence L^2_{-1} de l'image de $d_- = \frac{\partial}{\partial x}$, ce qui ne dit rien.

Bien que cela ne soit pas directement utile ici, montrons comment un second mecanisme permet de déduire de cette annulation partielle l'annulation de la cohomologie L^2. On sait qu'une 1-forme β sur $\mathbf{R}^2$ telle que $\pi^*\beta \in \mathcal{B}^{1,2}(G, \xi)$

est nécessairement de la forme $b\,dy$. Si de plus $d\beta = 0$, alors la fonction b ne dépend pas de x, i.e. β est invariante par translation le long de l'axe des x. Or la norme $L^2 + dL^2$ de $\pi^*\beta$ est une intégrale sur $\mathbf{R}^2$ d'une quantité qui est elle aussi invariante par translation le long de l'axe des x. On conclut que cette norme est nulle. Comme $\mathcal{B}^{1,2}(G,\xi) = 0$ et ξ est $(0,2)$-Anosov, le théorème 4 donne que $H^{1,2}(G) = 0$.

6.2 Restrictions sur les formes basiques

Définition 29. *Soit E un fibré sur une variété M. On* note $\Gamma(E)$ *l'espace vectoriel topologique des sections de E à coefficients distributions. Lorsque $M = G$ est un groupe de Lie et E un fibré invariant à gauche sur G, on confondra parfois dans la notation le fibré E et sa fibre au-dessus de l'élément neutre.*

Proposition 30. *Soit M une variété riemannienne complète. Soit ξ un champ de vecteurs unitaire $(k-1,p)$-Anosov et (k,p)-Anosov sur M. Notons ϕ_t le flot de ξ. On suppose qu'il existe une hypersurface $H \subset M$ orthogonale à ξ telle que*

$$\mathbf{R} \times H \to M, \quad (t,x) \to \phi_t(x)$$

soit un difféomorphisme. Pour $j = k-1,\, k$, on note $\Lambda^j_- \oplus \Lambda^j_-$ la décomposition (j,p)-Anosov de $\Lambda^j T^*H = \ker \iota_\xi$. Soit ω une k-forme différentielle sur M annulée par ι_ξ et invariante par le flot de ξ, à coefficients dans $L^p_{-1}(M)$. Alors, vue comme forme différentielle sur H,

$$\omega \in \overline{\Gamma(\Lambda^k_{+(p)}) + d\Gamma(\Lambda^{k-1}_{+(p)})} \cap \overline{\Gamma(\Lambda^k_{-(p)}) + d\Gamma(\Lambda^{k-1}_{-(p)})},$$

où l'adhérence est prise au sens des distributions. En particulier, avec les notations de la Définition 11,

$$\mathcal{B}^{k,p}(M,\xi) \subset \overline{\Gamma(\Lambda^k_{+(p)}) + d\Gamma(\Lambda^{k-1}_{+(p)})} \cap \overline{\Gamma(\Lambda^k_{-(p)}) + d\Gamma(\Lambda^{k-1}_{-(p)})}.$$

Preuve. Soit $\omega \in \mathcal{B}^{k,p}(M,\xi)$. Comme $\omega \in \Psi^{k,p}(M)$, il existe des formes L^p β et γ telles que $\omega = \beta + d\gamma$. Par hypothèse, $M = \mathbf{R} \times H$, et on utilise la décomposition des formes différentielles et de la différentielle exterieure sur un produit. Ecrivons $\beta = a + dt \wedge b$ et $\gamma = e + dt \wedge f$ où a, b, e et f sont annulées par ι_ξ. Alors $\omega = a + d_H e$ où d_H est la différentielle extérieure dans la direction du facteur H. Comme ξ est $(k-1,p)$-Anosov et (k,p)-Anosov, les $k-1$-formes et k-formes se décomposent en $a = a_+ + a_-$ et $e = e_+ + e_-$, de sorte que, lorsque t tend vers $+\infty$, $\phi_t^* a_+$ et $\phi_t^* e_+$ tendent vers 0 en norme L^p. Par conséquent

$$\omega = \lim_{t \to +\infty} \phi_t^* a_- + d_\nu \phi_t^* e_-.$$

au sens des distributions. Ceci entraîne la convergence au sens des distributions des restrictions à presque tout translaté $\phi_t(H)$. On obtient des formes différentielles a_t et e_t définies sur H, à valeurs dans Λ_-, et telles que $a_t + de_t$ converge vers la restriction de ω à H lorsque t tend vers $+\infty$. De même, on construit des formes a'_t et e'_t sur H telles que $a'_t + de'_t$ converge vers $\omega_{|H}$ lorsque t tend vers $-\infty$. q.e.d.

Corollaire 31. *Soit H une variété riemannienne complète. Soit $M = \mathbf{R} \times H$, munie d'une métrique riemannienne complète telle que $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ soit unitaire et orthogonal à H. Soit $p \geq 1$ et $k \geq 1$. On garde les notations de la Proposition 30.*

1. *Si ξ est $(k-1,p)$-Anosov, alors*

$$d\mathcal{B}^{k,p}(M,\xi) \subset \overline{d(\Gamma(\Lambda_+^k))} \cap \overline{d(\Gamma(\Lambda_-^k))}.$$

2. *Si ξ est $(k-1,p)$-contractant (resp. dilatant), $d\mathcal{B}^{k,p}(M,\xi) = 0$.*
3. *Si ξ est $(k-2,p)$-contractant (resp. dilatant) et $(k-1,p)$-Anosov, alors $\mathcal{B}^{k,p}(M,\xi) \subset \Gamma(\Lambda_+^k)$ (resp. $\Gamma(\Lambda_-^k)$).*

Preuve. 1. Supposons d'abord que ξ est $(k-2,p)$- et $(k-1,p)$-Anosov. D'après la proposition 30,

$$\mathcal{B}^{k-1,p} \subset \overline{\Gamma(\Lambda_+^{k-1}) + d\Gamma(\Lambda_+^{k-2})},$$

d'où

$$d\mathcal{B}^{k-1,p}(M,\xi) \subset d(\overline{\Gamma(\Lambda_{+(p)}^{k-1})}),$$

et de même en remplaçant $+$ par $-$. L'hypothèse ξ est $(k-2,p)$-Anosov n'est pas nécessaire si on ne s'intéresse qu'à l'image de la différentielle, celle-ci faisant disparaître les formes de degré $k-2$ de la preuve de la Proposition 30.

2. Si ξ est $(k-1,p)$-contractant, $\Lambda_+^{k-1} = 0$, donc $d\mathcal{B}^{k-1,p}(M,\xi) = 0$.
3. Si ξ est de plus $(k-2,p)$-contractant, $\Lambda_+^{k-2} = 0$, donc

$$\mathcal{B}^{k-1,p} \subset \overline{\Gamma(\Lambda_+^{k-1})}.$$

Comme le projecteur sur Λ_-^{k-1} est donné, dans une base de formes invariantes à gauche sur H, par une matrice constante, il est continu au sens des distributions. Une limite de sections distributions de Λ_+^{k-1} est encore une section distribution de Λ_+^{k-1}, donc $\mathcal{B}^{k-1,p} \subset \Gamma(\Lambda_+^{k-1})$. q.e.d.

6.3 Une description de l'espace $\mathcal{B}^{*,p}$

Corollaire 32. *Soit H une variété riemannienne complète. Soit $M = \mathbf{R} \times H$, munie d'une métrique riemannienne complète telle que $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ soit unitaire et orthogonal à H. Soit $p \geq 1$ et $k \geq 1$. On suppose que ξ est $(k-2,p)$ (condition vide si $k = 1$) et $(k-1,p)$-Anosov. On note β_+ la composante d'une forme différentielle β de H sur Λ_+^*, et $d_+\beta = (d\beta)_+$. On note D l'opérateur*

$$D : \Omega^{k-1,p}(H) \to \Omega_{-1}^{k,p}(H), \quad e \mapsto D(e) = d_-(e_+) - d_+(e_-).$$

Vu comme sous-espace de formes différentielles sur H, $\mathcal{B}^{k,p}(M,\xi)$ contient l'image de D et est contenu dans l'adhérence L_{-1}^p de l'image de δ.

Preuve. D'après la Proposition 30, tout élément $\omega \in \mathcal{B}^{k,p}(M,\xi)$ est limite L^p_{-1} d'une suite $\beta_j^\pm + d\gamma_j^\pm$ où $\beta_j^\pm$ est une section de $\Lambda^k_\pm$ et $\gamma_j^\pm$ une section de $\Lambda^{k-1}_\pm$. Par conséquent, la composante ω_- est la limite des $d_-\gamma_j^+$, et ω_+ est la limite des $d_+\gamma_j^-$, donc ω est limite des $d_-e_{j,+} - d_+e_{j,-}$ où $e_j = \gamma_j^+ - \gamma_j^-$. Par conséquent, $\mathcal{B}^{k,p}(M,\xi)$ est contenu dans l'adhérence dans l'espace $\Omega^{k,p}_{-1}(H)$ des formes différentielles de la forme $d_-e_+ - d_+e_-$.

Réciproquement, soit $e \in \Omega^{k-1,p}(H)$ une forme différentielle. Fixons une fonction lisse χ sur $\mathbf{R}$ telle que $\chi = 0$ au voisinage de $-\infty$ et $\chi = 1$ au voisinage de $+\infty$. Notons $\pi : M \to H$ la projection sur le second facteur. Montrons que la forme

$$\omega = d\chi(t) \wedge \pi^* e$$

est dans $\Omega^{k,p}(G)$, et

$$P\omega = \pi^*(d_-e_+ - d_+e_-).$$

Comme $d\chi$ est à support compact, ω et $d\omega = -d\chi \wedge \pi^* de$ sont dans L^p. On calcule

$$B\omega = \chi(t)\pi^* e_- - (1-\chi(t))\pi^* e_+,$$

$$Bd\omega = \chi(t)\pi^*(-d_-e) - (1-\chi(t))\pi^*(-d_+e)$$

et enfin

$$\begin{aligned} P\omega &= \chi\pi^*(d_-e - de_-) - (1-\chi)\pi^*(d_+e - de_+) \\ &= \pi^*(d_-e_+ - d_+e_-). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $d_-e_+ - d_+e_- \in \mathcal{B}^{k,p}(M,\xi)$, lorsque cet espace est vu comme un espace de formes différentielles sur H. q.e.d.

6.4 Exemples

Conservons les notations du Corollaire 32. Pour que $\mathcal{B}^{k,p}$ soit non nul, il faut que l'un des deux espaces Λ^{k-1}_+ et Λ^k_+ soit non nul. Sinon, l'opérateur D est identiquement nul. De même, il faut que l'un des deux espaces Λ^{k-1}_- et Λ^k_- soit non nul.

Exemple. Pour l'espace hyperbolique réel, pour tout $p \geq 1$ non critique dans les degrés adéquats, il existe au plus un degré k pour lequel $\mathcal{B}^{k,p}(M,\xi) \neq 0$. En effet, comme le montre le tableau,

p	1	$\frac{n-1}{k}$	$\frac{n-1}{k-1}$	$+\infty$
$\Lambda^{k-1}_{+(p)}$	0	0	Λ^{k-1}_{k-1}	
$\Lambda^{k}_{+(p)}$	0	Λ^k_k	Λ^k_k	
$\Lambda^{k-1}_{-(p)}$	Λ^{k-1}_{k-1}	Λ^{k-1}_{k-1}	0	
$\Lambda^{k}_{-(p)}$	Λ^k_k	0	0	

Λ_+^{k-1} et Λ_+^k (ou bien Λ_-^{k-1} et Λ_-^k) sont simultanément nuls, sauf lorsque $\frac{n-1}{k} < p < \frac{n-1}{k-1}$, i.e. lorsque k est la partie entière de $\frac{n-1}{p} + 1$.

Exemple. Pour les autres espaces symétriques de rang un, le complexe $\mathcal{B}^{*,p}$ est de longueur au plus $\mathfrak{d}$, il est non nul seulement dans les $\mathfrak{d}$ degrés successifs $\frac{\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}-2}{p} + 1, \ldots, \frac{\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}-2}{p} + \mathfrak{d}$.

7 Restrictions sur la torsion

7.1 Cas où le champ est $(k-1,p)$-contractant

Proposition 33. *Soit M une variété riemannienne. Soit ξ un champ de vecteurs unitaire, complet, $(k-2,p)$-Anosov et $(k-1,p)$-contractant (resp. $(k-1,p)$-dilatant) sur M. Alors $T^{k,p}(M) = 0$.*

Preuve. D'après la proposition 30, $d\mathcal{B}^{k-1,p}(M,\xi) = 0$, car le sous-fibré Λ_+^{k-1} (resp. Λ_-^{k-1}) est nul. Par conséquent, la cohomologie en degré k du complexe $\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi)$ est séparée. Comme remarqué au Corollaire 31, l'hypothèse que p est non critique en degré $k-2$ n'est pas nécessaire pour cela, mais on en a besoin pour appliquer le Théorème 4, qui donne un isomorphisme $T^{k,p}(M) = T^k(\mathcal{B}^{*,p}(M,\xi)) = 0$. q.e.d.

Exemple. Avec la Proposition 5, on retrouve le résultat principal de [24] : si la courbure sectionnelle est suffisamment pincée, la torsion s'annulle.

Exemple. Pour les espaces symétriques de rang un, on trouve que la torsion s'annulle en degré k lorsque $k = 1$ (pour tout p) et sinon, si $\frac{\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}-2}{p} < \min \sigma(k-1)$ ou bien $\frac{\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}-2}{p} > \max \sigma(k-1)$, ce qui se traduit par $p < \frac{\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}-2}{k-2+\min\{k,\mathfrak{d}\}}$ ou $p > \frac{\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}-2}{k-1+\max\{0,k-1-\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}\}}$.

Exemple. Soit $G = \mathbf{R} \ltimes_\alpha \mathbf{R}^2$ où $\alpha = diag(1,-1)$. Ce groupe, parfois appelé Sol, est unimodulaire. Aucun exposant n'est critique en degré 1. Comme $\Lambda_+^1 = 0$, $d\mathcal{B}^{1,p}(G,\xi)$ est nul, donc la cohomologie du complexe $\mathcal{B}^{*,p}$ en degré 2 est séparée, c'est l'espace de Besov ordinaire $B_{p,p}^{2/p}(\mathbf{R}^2)$. V. Goldshtein et M. Troyanov ont montré que $H^{2,p}(G)$ est non nul pour tout $p > 1$, [10]. D'après [23], $H^{1,p}(G) = 0$. Par dualité de Poincaré, la cohomologie réduite est nulle en degré 2, donc $T^{2,p}(G) \neq 0$. Ce n'est pas contradictoire : comme p est critique en degré 0, seul l'énoncé 1 du théorème 4 s'applique et donne une surjection $H^2(\mathcal{B}^{*,p}) \to H^{2,p}(G)$. On voit que la condition supplémentaire (ξ est $(k-2,p)$-Anosov) de la Proposition 33 est nécessaire pour avoir l'annulation de la torsion.

7.2 Rôle de la non commutativité

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux produits semi-directs $G = \mathbf{R} \ltimes_\alpha H$.

On va voir que la non commutativité du groupe H force parfois la torsion $T^{*,p}(G)$ à être non nulle sur un intervalle plus grand que celui donné par la Proposition 33.

On identifiera $\mathcal{B}^{*,p}(G, \xi = \frac{\partial}{\partial t})$ à un espace de formes différentielles sur H, *noté* simplement $\mathcal{B}^{k,p}$.

Définition 34. *Si on identifie l'algèbre extérieure $\Lambda^*\mathfrak{h}^*$ aux formes différentielles invariantes à gauche sur H, alors la différentielle extérieure devient un opérateur algébrique* noté $\delta : \Lambda^{k-1}\mathfrak{h}^* \to \Lambda^k\mathfrak{h}^*$.

Remarquer que δ commute avec l'action de la dérivation α sur les formes.

Lemme 35. *Soit $G = \mathbf{R} \ltimes_\alpha H$ un produit semi-direct. On suppose que p est non critique en degré $k-1$. On suppose que δ est injectif sur Λ_+^{k-1} et que $\delta(\Lambda_+^{k-1}) \cap (\mathfrak{h}^* \otimes \Lambda_+^{k-1}) = \{0\}$. Alors $d\mathcal{B}^{k-1,p} \subset \mathcal{B}^{k,p}$ est fermé. Si, de plus, p est non critique en degré $k-2$, alors $T^{k,p}(G) = 0$.*

Preuve. D'après le Corollaire 31, si $e \in \mathcal{B}^{k,p}$ appartient à l'adhérence, de $d\mathcal{B}^{k-1,p}$, alors e appartient à l'adhérence, au sens des distributions, de $d(\Gamma(\Lambda_{+(p)}^{k-1}))$. On peut donc écrire $e = \lim da_j$ où $a_j \in \Gamma(\Lambda_{+(p)}^{k-1})$. Soit (ψ_i) une base de $\Lambda^{k-1}\mathfrak{h}^*$ formée de vecteurs propres de α, et telle que $(\psi_1, \dots, \psi_\ell)$ soit une base de Λ_+^{k-1}. On voit chaque ψ_i comme une forme différentielle invariante à gauche sur H. Ecrivons $a_j = \sum_{i=1}^{\ell} f_{ij}\psi_i$. Notons $Q : \Lambda^k\mathfrak{h}^* \to \Lambda^k\mathfrak{h}^*/(\mathfrak{h}^* \otimes \Lambda_+^{k-1})$ la projection. Alors, en chaque point,

$$\begin{aligned} Q(da_j) &= Q(\sum_{i=1}^{\ell} df_{ij} \wedge \psi^i + \sum_{i=1}^{\ell} f_{ij}\delta\psi^i) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} f_{ij} Q\delta\psi^i. \end{aligned}$$

Par hypothèse, l'opérateur algébrique $Q\delta$ admet un inverse à gauche $(Q\delta)^{-1} : \Lambda^k\mathfrak{h}^*/\mathfrak{h}^* \otimes \Lambda_+^{k-1} \to \Lambda_+^{k-1}$. On peut supposer que, comme δ et Q, $(Q\delta)^{-1}$ commute avec l'action de α sur les formes. Alors $a_j = (Q\delta)^{-1}Q(da_j)$ converge vers la section distribution $a = (Q\delta)^{-1}Q(e)$ de Λ_+^{k-1}, qui satisfait $da = e$. Sachant que da appartient déjà à $\mathcal{B}^{k-1,p}(G, \xi)$, le Corollaire 27 entraîne que a appartient à $\mathcal{B}^{k-1,p}(G, \xi)$, et e à $d\mathcal{B}^{k-1,p}(G, \xi)$.

Si, de plus, p est non critique en degré $k-2$, alors le Théorème 4 s'applique, et $T^{k,p}(G) = T^{k,p}(\mathcal{B}^{*,p}) = 0$. q.e.d.

7.3 Preuve du Théorème 1

Proposition 36. *Soit M un espace symétrique de rang 1 à courbure non constante, de dimension $n = \mathfrak{d}m$ ($\mathfrak{d} = 2$, 4 ou 8). Soit $k = 2, \dots, \frac{\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}-2}{2}$. Notons $\mathbf{p}_1^{k-1} < \mathbf{p}_2^{k-1} < \cdots$ les exposants critiques en degré $k-1$. Si $p < \mathbf{p}_2^{k-1}$, alors $T^{k,p}(M) = 0$ sauf peut-être pour $p = \mathbf{p}_1^{k-1}$.*

Preuve. Tout espace symétrique de rang 1 à courbure non constante est isométrique à un produit semi-direct $G = \mathbf{R} \ltimes_\alpha N$ où α admet les valeurs

propres 2 (de multiplicité $\mathfrak{d}-1=1$, 3 ou 7) et 1 (de multiplicité $\mathfrak{d}m-\mathfrak{d}$ paire). On note $h=\operatorname{tr}\alpha=\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}-2$. En outre, l'espace propre $\mathfrak{n}_2$ est central, la différentielle δ est nulle sur $\mathfrak{n}_1^*$ et si $e\in\mathfrak{n}_2^*$ est non nul, $\delta(e)\in\Lambda^2\mathfrak{n}_1^*$ est non dégénérée. L'algèbre extérieure se décompose en

$$\Lambda^k\mathfrak{n}^*=\bigoplus_{j=\max\{0,k-\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}\}}^{\min\{k,\mathfrak{d}-1\}}\Lambda^k_{k+j}\quad\text{où}\quad\Lambda^k_{k+j}=\Lambda^{k-j}\mathfrak{n}_1^*\otimes\Lambda^j\mathfrak{n}_2^*,$$

et α vaut $k+j$ sur Λ^k_{k+j}. On appelle poids l'indice $k+j$. Comme δ commute avec α, il préserve le poids, $\delta(\Lambda^k_{k+j})\subset\Lambda^{k+1}_{k+j}$.

Les exposants critiques en degré k sont les nombres de la forme $\frac{h}{k+j}$ où j décrit les entiers compris entre $\max\{0,k-\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}\}$ et $\min\{k,\mathfrak{d}-1\}$. Pour $2\le k\le\mathfrak{d}m-1$, on vérifie que

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1^{k-1}<\mathbf{p}_2^{k-1}&=\frac{h}{\min\{2k-2,k+\mathfrak{d}-2\}-1}\\&\le\frac{h}{\min\{2k-4,k+\mathfrak{d}-3\}}\\&=\mathbf{p}_1^{k-2}<\mathbf{p}_2^{k-2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, si $p<\mathbf{p}_2^{k-1}$, alors p est non critique en degré $k-2$. Si de plus $p\neq\mathbf{p}_1^{k-1}$, alors p est non critique en degrés $k-1$ et $k-2$.

Si $p<\mathbf{p}_1^{k-1}$, alors $\Lambda^{k-1}_{+(p)}=0$, et la Proposition 33 donne immédiatement que $T^{k,p}(M)=0$. Supposons p compris entre $\mathbf{p}_1^{k-1}$ et $\mathbf{p}_2^{k-1}$. Alors $\Lambda^{k-1}_{+(p)}=\Lambda^{k-1}_{k-1+r}$, où $r=\min\{k-1,\mathfrak{d}-1\}$. Lorsque $k\le\mathfrak{d}$, $r=k-1$ donc $\Lambda^{k-1}_+=\Lambda^k_{2k-2}=\Lambda^{k-1}(\mathfrak{n}_2)^*$. Lorsque $k>\mathfrak{d}$, $r=\mathfrak{d}-1$ donc $\Lambda^{k-1}_+=\Lambda^{k-1}_{k+\mathfrak{d}-2}=\Lambda^{k-\mathfrak{d}}\mathfrak{n}_1^*\otimes\Lambda^{\mathfrak{d}-1}(\mathfrak{n}_2)^*$. Dans les deux cas, $\delta(\Lambda^{k-1}_+)$ a pour poids $k-1+r$, alors que dans $\mathfrak{n}^*\otimes\Lambda^{k-1}_+$, on rencontre seulement les poids $k+r$ et éventuellement $k+r+1$, donc $\delta(\Lambda^{k-1}_+)\cap(\mathfrak{n}^*\otimes\Lambda^{k-1}_+)=\{0\}$.

Montrons que si $k\le\frac{h}{2}$, dans les deux cas, δ est injectif sur Λ^{k-1}_+.

Supposons d'abord que $k\le d$. Soit $v_1,\dots,v_{\mathfrak{d}-1}$ une base du sous-espace $\mathfrak{n}_2$. Alors les 2-formes $\delta v_1,\dots,\delta v_\ell$ sont linéairement indépendantes dans $\Lambda^2(\mathfrak{n}_1)^*$. Si I est un sous-ensemble de $\{1,\dots,\mathfrak{d}-1\}$, notons

$$v_I=\bigwedge_{i\in I}v_i.$$

Alors

$$\delta v_I=\sum_{i\in I}\pm\delta v_i\otimes v_{I\setminus\{i\}},$$

et lorsque I décrit les sous-ensembles à $k-1$ éléments de $\{1,\dots,\mathfrak{d}-1\}$ et i décrit les éléments de I, les éléments $\delta v_i\otimes v_{I\setminus\{i\}}$ sont linéairement indépendants dans $\Lambda^2(\mathfrak{n}_1)^*\otimes\Lambda^{k-2}(\mathfrak{n}_2)^*$. Par conséquent δ est injectif sur Λ^k_{2k-2}.

Supposons maintenant que $k > \mathfrak{d}$. Pour $i = 1, \dots, \mathfrak{d}-1$, notons L_i le produit extérieur par $\delta(v_i)$. Notons $[\mathfrak{d}-1] = \{1, \dots, d-1\}$. Alors sur $\Lambda^{k-1}_{k+\mathfrak{d}-2} = \Lambda^{k-\mathfrak{d}}\mathfrak{n}_1^* \otimes \Lambda^{\mathfrak{d}-1}(\mathfrak{n}_2)^*$,

$$\delta(u \otimes v_{[\mathfrak{d}-1]}) = \sum_{1 \le i \le \ell} \pm L_i(u) \otimes v_{[\mathfrak{d}-1]\setminus\{i\}},$$

donc $\ker \delta = \bigcap_i \ker L_i$.

Comme les formes δv_i sont non dégénérées, les applications L_i sont injectives sur $\Lambda^q(\mathfrak{n}_1)^*$ tant que $q \le \frac{\mathfrak{d}m-\mathfrak{d}}{2} - 1$. On constate que

$$k - \mathfrak{d} \le \frac{\mathfrak{d}m - \mathfrak{d}}{2} - 1 \Leftrightarrow k \le \frac{h}{2}.$$

Par conséquent, si $\mathfrak{d} < k \le \frac{h}{2}$, δ est injectif sur $\Lambda^{k-1}_{k+\mathfrak{d}-2}$.

Du Lemme 35, il résulte que si $k \le \frac{h}{2}$, alors $T^{k,p}(G) = 0$. q.e.d.

Remarque. La borne $\frac{h}{2}$ de la proposition 36 n'est pas optimale.

7.4 Caractérisation de $d\mathcal{B}^{k-1,p}$

Proposition 37. *Soit M un espace symétrique de rang 1 à courbure non constante, de dimension $n = \mathfrak{d}m$ ($\mathfrak{d} = 2$, 4 ou 8). Notons τ un vecteur directeur de $\Lambda^{\mathfrak{d}-1}(\mathfrak{n}_2)^*$. Notons $\mathbf{p}_1^{\mathfrak{d}-1} = \frac{\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}-2}{2\mathfrak{d}-2} < \mathbf{p}_2^{\mathfrak{d}-1} = \frac{\mathfrak{d}m+\mathfrak{d}-2}{2\mathfrak{d}-3} < \cdots$ les exposants critiques en degré $\mathfrak{d}-1$. Supposons $\mathbf{p}_1^{\mathfrak{d}-1} < p < \mathbf{p}_2^{\mathfrak{d}-1}$. Alors*

1. *$\mathcal{B}^{\mathfrak{d},p} \subset \Gamma(\Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-1} \oplus \Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-2})$.*
2. *Soit $\omega = \omega_{2\mathfrak{d}-1} + \omega_{2\mathfrak{d}-2} \in \mathcal{B}^{\mathfrak{d},p}$. Alors*

$$\omega_{2\mathfrak{d}-1} = \alpha \wedge \tau, \quad \omega_{2\mathfrak{d}-2} = u\delta(\tau) + \psi,$$

   où $\alpha \in \Gamma(\mathfrak{n}_1^*)$, u est une fonction et ψ une $\mathfrak{d}$-forme différentielle à valeurs dans un supplémentaire de $\delta(\tau)$.
3. *$\omega \in d\mathcal{B}^{\mathfrak{d}-1,p}$ si et seulement si $\psi = 0$ et $\alpha = d_{\mathfrak{n}_1} u$ est la différentielle de u restreinte au champ de plans $\mathfrak{n}_1$.*

Preuve. Comme $\mathbf{p}_1^{\mathfrak{d}-1} < p < \mathbf{p}_2^{\mathfrak{d}-1}$, $\Lambda^{\mathfrak{d}}_{+(p)} = \Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-2} \oplus \Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-1}$ et $\Lambda^{\mathfrak{d}-1}_{+(p)} = \Lambda^{\mathfrak{d}-1}_{2\mathfrak{d}-2}$. De plus, $\mathfrak{n}^* \otimes \Lambda^{\mathfrak{d}-1}_{2\mathfrak{d}-2} = \Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-1}$ (car $(\mathfrak{n}_2)^* \otimes \Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-2} = 0$) et $\delta(\Lambda^{\mathfrak{d}-1}_{2\mathfrak{d}-2}) \subset \Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-2}$, donc $d\Lambda^{\mathfrak{d}-1}_{+(p)} \subset \Gamma(\Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-2} \oplus \Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-1})$. D'après la Proposition 30, $\mathcal{B}^{\mathfrak{d},p} \subset \overline{\Gamma(\Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-2} \oplus \Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-1})} = \Gamma(\Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-2} \oplus \Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-1})$.

Soit $\beta \in \mathcal{B}^{\mathfrak{d}-1,p}$, $\beta = a\tau$ où a est une fonction. Alors

$$d\beta = d_{\mathfrak{n}_1} a \wedge \tau + a\delta(\tau),$$

où le premier terme est une section de $\Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-1}$ et le second une section de $\Lambda^{\mathfrak{d}}_{2\mathfrak{d}-2}$. Pour qu'une $\mathfrak{d}$-forme $\omega \in \mathcal{B}^{\mathfrak{d},p}$ appartienne à l'image de d, il est nécessaire que sa composante $\omega_{2\mathfrak{d}-2}$ soit proportionnelle à $\delta(\tau)$, $\omega_{2\mathfrak{d}-2} = u\delta(\tau)$. Alors la seule solution possible de l'équation $d\beta = \omega$ est $\beta = u\tau$, ce qui impose que $\omega_{2\mathfrak{d}-1} = d_{\mathfrak{n}_1} u \wedge \tau$.

Inversement, supposons que $\omega \in \mathcal{B}^{\mathfrak{d},p}$ s'écrive $\omega = \alpha \wedge \tau + u\delta(\tau) + \psi$ avec $\psi = 0$ et $d_{\mathfrak{n}_1} u = \alpha$. Alors $\beta = u\tau$ satisfait $d\beta = \omega$. $d\beta$ appartient à $\mathcal{B}^{\mathfrak{d},p}$. De plus, $\beta = L\omega$ où $L = \delta^{-1}Q$ et $Q : \Lambda^{\mathfrak{d}}\mathfrak{n}^* \to \Lambda^{\mathfrak{d}}\mathfrak{n}^*$ est un projecteur α-invariant sur $\delta(\Lambda^{\mathfrak{d}-1}_{2\mathfrak{d}-2})$. Le Corollaire 27 entraîne que $\beta \in \mathcal{B}^{\mathfrak{d}-1,p}$. q.e.d.

Corollaire 38. *A l'exception du cas du plan hyperbolique complexe ($\mathfrak{d} = 2$ et $m = 2$), une forme $\omega \in \mathcal{B}^{\mathfrak{d},p}$ fermée appartient à $d\mathcal{B}^{\mathfrak{d}-1,p}$ si et seulement si sa composante $\omega_{2\mathfrak{d}-2}$ est proportionnelle à $\delta(\tau)$.*

Preuve. Soit $\omega \in \mathcal{B}^{\mathfrak{d},p}$ une forme fermée. Ecrivons $\omega = \alpha \wedge \tau + u\delta(\tau)$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega \\ &= (d\alpha) \wedge \tau + (d_{\mathfrak{n}_1} u - \alpha) \wedge \delta(\tau). \end{aligned}$$

Si $\mathfrak{d} \neq 2$ ou $m > 2$, alors $\dim(\mathfrak{n}_1) > 2$, la multiplication extérieure par $\delta(\tau)$ est une somme directe d'opérateurs de multiplication extérieure par des formes symplectiques. Il est donc injectif, on conclut que $\alpha = d_{\mathfrak{n}_1} u$, et, d'après la Proposition 37, $\omega \in d\mathcal{B}^{\mathfrak{d}-1,p}$. q.e.d.

8 Cup-produit

8.1 Valeur au bord et produit extérieur

Sous les hypothèses du Théorème 4, l'isomorphisme en cohomologie entre le complexe $\Omega^{*,p}$ et le complexe de Besov $\mathcal{B}^{*,p}$ n'est pas en général compatible avec le produit extérieur des formes différentielles. Toutefois, c'est le cas en degré k en présence d'un champ de vecteurs (j,p)-contractant pour tout $j \leq k-1$.

Lemme 39. *Soit M une variété riemannienne complète de dimension n. Soient k, ℓ des entiers tels que $k + \ell \leq n$. Soient p, q, r des réels positifs tels que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r}$. Soit ξ un champ de vecteurs unitaire sur M, supposé (j,q)-contractant pour tout $j \leq k-1$, (j,r)-contractant pour tout $j \leq \ell - 1$ et (j,p)-contractant pour $j = k+\ell-1$. Soit V un ouvert invariant par le flot de ξ. Alors l'application $P : \Omega^{*,p}(V) \to \mathcal{B}^{*,p}(V)$, qui est bien définie et induit un isomorphisme en cohomologie en degrés k, ℓ et $k+\ell$, satisfait, pour $\alpha \in \Omega^{k,q}(V)$, $\beta \in \Omega^{\ell,r}(V)$ fermées, $P(\alpha \wedge \beta) = P(\alpha) \wedge P(\beta)$.*

Preuve. Par hypothèse, le flot ϕ_t de ξ contracte toutes les i-formes L^q et toutes les j-formes L^r transversalement à ξ. Autrement dit, pour un $\eta > 0$.

$$\| \Lambda^i(d\phi_t) \| \det(d\phi_t)^{1/q} \leq C\, e^{-\eta t} \quad \text{et} \quad \| \Lambda^j(d\phi_t) \| \det(d\phi_t)^{1/r} \leq C\, e^{-\eta t}.$$

Comme $\Lambda^{i+j}(\ker(\iota_\xi))$ est engendré par les produits extérieurs de formes transverses de degrés i et j respectivement, on en déduit que

$$\| \Lambda^{i+j}(d\phi_t) \| \det(d\phi_t)^{1/q+1/r} \leq C^2\, e^{-2\eta t},$$

i.e. que ξ contracte toutes les $i+j$-formes L^p transversalement à lui-même. Mais cela ne donne pas la contraction sur les $k+\ell-1$-formes, il est donc nécessaire de le supposer.

Dans ces conditions, l'application P est, pour les formes fermées de degrés k, ℓ et $k+\ell$, une valeur au bord, voir Lemme 13, elle s'écrit

$$P\omega = \lim_{t\to+\infty} \phi_t^*(\omega),$$

donc passe au travers des produits extérieurs. Cela prouve que la forme $P(\alpha)\wedge P(\beta)$ est bien définie et qu'elle est égale à $P(\alpha\wedge\beta)$. q.e.d.

Lemme 40. *Soit M une variété riemannienne complète de dimension n. Soit $q>1$. Soit ξ un champ de vecteurs unitaire sur M, supposé $(0,q)$-contractant. Soit V un ouvert invariant par le flot de ξ.*

1. *Soit u une fonction sur V telle que $du\in L^q$. Alors u possède une limite le long de presque toute trajectoire de ξ, notée u_∞. L'application $P:\Omega^{1,q}(V)\to\mathcal{B}^{1,q}(V)$, qui est bien définie et induit un isomorphisme en cohomologie en degré 1, satisfait*

$$P(du) = d(u_\infty).$$

2. *Si u et v sont deux fonctions bornées à différentielles L^q sur V, alors $d(uv)\in L^q$ et*

$$P(d(uv)) = u_\infty P(dv) + v_\infty P(du).$$

Preuve. 1. Comme du est L^q et fermée et ξ est $(0,q)$-contractant, la fonction $u-Bdu$ est bien définie sur V. Sa différentielle au sens des distributions vaut

$$d(u-Bdu) = (1-dB)(du) = P(du),$$

elle appartient à $\mathcal{B}^{1,q}(V,\xi)$, donc $u-Bdu$ est constante sur les trajectoires de ξ. Par définition de l'opérateur B,

$$\begin{aligned} Bdu &= -\int_0^{+\infty} \phi_t^*(\iota_\xi du)\,dt \\ &= -\int_0^{+\infty} (\xi u)\circ\phi_t\,dt \\ &= u - \lim_{t\to+\infty} u\circ\phi_t, \end{aligned}$$

donc $u-Bdu = \lim_{t\to+\infty} u\circ\phi_t$, qu'on peut noter u_∞.

2. La différentielle du produit $d(uv) = udv+vdu$ est dans L^q. Il vient

$$\begin{aligned} P(d(uv)) &= d((uv)_\infty) \\ &= u_\infty dv_\infty + v_\infty du_\infty \\ &= u_\infty P(dv) + v_\infty P(du). \ q.e.d. \end{aligned}$$

8.2 Localisation en courbure négative

Dans une variété à courbure négative, on peut enrichir la notion de cohomologie L^p (resp. d'algèbre de Royden) en la localisant près du bord à l'infini.

Définition 41. *Soit M une variété riemannienne complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle négativement pincée. On note $\partial_\infty M$ son bord à l'infini. On note $\bar{M} = M \cup \partial_\infty M$ la compactification visuelle de M. Soit η un point de $\partial_\infty M$, soit ξ le champ de vecteurs de Busemann correspondant. On note $\Omega^{k,p}_{loc}(M,\eta)$ plutôt que $\Omega^{k,p}_{loc}(M,\xi)$ la cohomologie des formes qui sont Ω^p dans tout ouvert dont l'adhérence dans $\bar{M}$ ne contient pas η.*

Définition 42. *Soit M une variété riemannienne complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle négativement pincée. Soit η un point de $\partial_\infty M$. On note $\mathcal{R}^q_{loc}(M,\eta)$ l'algèbre des fonctions sur M qui sont bornées et à différentielle L^q dans tout ouvert dont l'adhérence dans $\bar{M}$ ne contient pas η. On note $\bar{\mathcal{R}}^q_{loc}(M,\eta)$ le quotient de $\mathcal{R}^q_{loc}(M,\eta)$ par l'idéal des fonctions qui sont bornées et L^q dans tout ouvert dont l'adhérence dans $\bar{M}$ ne contient pas η.*

8.3 Preuve du Théorème 2

La proposition suivante est une version localisée, plus forte, du Théorème 2.

Proposition 43. *Soit M une variété riemannienne complète de dimension n, simplement connexe, dont la courbure sectionnelle K satisfait $-1 \leq K \leq \delta < 0$. Soit η un point de $\partial^\infty M$. Soient $r > p \geq 1$, soit q le réel tel que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Supposons que*

$$p < 1 + \frac{n-k}{k-1}\sqrt{-\delta} \quad \text{et} \quad r < 1 + \frac{n-k+1}{k-2}\sqrt{-\delta}.$$

1. *Soit $\kappa \in H^{k-1,r}_{loc}(M,\eta)$. Alors l'ensemble*

$$\mathcal{R}_\kappa = \{u \in \mathcal{R}^q(M,\eta) \,|\, [du] \smile \kappa = 0\}$$

est une sous-algèbre de $\mathcal{R}^q(M,\eta)$.

2. *Soient $\kappa_1, \ldots, \kappa_\ell \in H^{k-1,r}_{loc}(M,\eta)$. Notons*

$$\mathcal{R}_{\kappa_1,\ldots,\kappa_\ell} = \bigcap_{j=1}^{\ell} \mathcal{R}_{\kappa_j}.$$

C'est une sous-algèbre de $\mathcal{R}^q(M,\eta)$. Alors l'ensemble

$$\mathcal{M}_{\kappa_1,\ldots,\kappa_\ell} = \{(u_1,\ldots,u_\ell) \in (\mathcal{R}^q(M,\eta))^\ell \,|\, \sum_{j=1}^{\ell} [du_j] \smile \kappa_j = 0\}$$

est un $\mathcal{R}^q_{\kappa_1,\ldots,\kappa_\ell}$-module.

Preuve. Soit ξ le champ de vecteur de Busemann dont les trajectoires sont contenues dans V. D'après la proposition 5, ξ est (j,r)-contractant pour tout degré $j \leq k-2$, et (j,p)-contractant en degré $j = k-1$. Il est automatiquement $(0,q)$ contractant. En particulier, il est $(k-2,p)$-Anosov. Si $u \in \mathcal{R}^q(M,\eta)$, $du \in \Omega^{1,q}(M,\eta)$. Soit ω un représentant de la classe κ, i.e. une $k-1$-forme fermée sur M qui est L^r sur les ouverts dont l'adhérence dans $\bar{M}$ ne contient pas η. Du lemme 39, il résulte que $P(du \wedge \omega) = P(du) \wedge P(\omega)$.

1. Soient u et $v \in \mathcal{R}^q(V)$ deux fonctions telles que $[du] \smile \kappa = 0$ et $[dv] \smile \kappa = 0$. D'après le théorème 4, $P(du) \wedge P(\omega) = 0$ et $P(dv) \wedge P(\omega) = 0$. Le lemme 40 donne

$$P(d(uv)) \wedge P(\omega) = u_\infty P(dv) \wedge P(\omega) + v_\infty P(du) \wedge P(\omega) = 0.$$

On applique encore le théorème 4 pour conclure que $[d(uv)] \smile \kappa = 0$. On conclut que $\mathcal{R}^q_\kappa$ est une sous-algèbre.

2. Soient $\kappa_1, \ldots, \kappa_\ell \in H^{k-1,r}(M,\eta)$. Soit $u \in \mathcal{R}^q_{\kappa_1,\ldots,\kappa_\ell}$, i.e. $u \in \mathcal{R}^q(M,\eta)$ satisfait

$$[du] \smile \kappa_j = 0 \quad \text{pour tout } j = 1, \ldots, \ell.$$

Soit $(u_1, \ldots, u_\ell) \in \mathcal{M}_{\kappa_1,\ldots,\kappa_\ell}$, i.e. les u_j sont des éléments de $\mathcal{R}^q(M,\eta)$ tels que

$$\sum_{j=1}^{\ell} [du_j] \smile \kappa_j = 0$$

dans $H^{k,p}(M,\eta)$. Pour chaque j, choisissons une forme fermée L^r β_j représentant κ_j. Alors, d'après le théorème 4, $P(\sum_j du_j \wedge \beta_j) = 0$. Avec les hypothèses sur p et r et le Lemme 39, cela signifie que

$$\sum_j P(du_j) \wedge P(\beta_j) = 0.$$

De même, pour tout j, $P(du) \wedge P(\beta_j) = 0$ dans $\mathcal{B}^{k,p}(M,\eta)$. Le lemme 40 donne

$$\begin{aligned} \sum_j P(d(uu_j)) \wedge P(\beta_j) &= u_\infty (\sum_j P(du_j) \wedge P(\beta_j)) + \sum_j u_{j,\infty} P(du) \wedge P(\beta_j) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où $P(\sum_j d(uu_j) \wedge \beta_j) = 0$, et enfin $\sum_j [d(uu_j)] \smile \kappa_j = 0$. On conclut que $(uu_1, \ldots, uu_\ell) \in \mathcal{M}_{\kappa_1,\ldots,\kappa_\ell}$, i.e. que $\mathcal{M}_{\kappa_1,\ldots,\kappa_\ell}$ est un $\mathcal{R}^q_{\kappa_1,\ldots,\kappa_\ell}$-module. q.e.d.

8.4 Preuve du Théorème 3

Proposition 44. *Soit $M = \mathbb{C}H^2$ le plan hyperbolique complexe. Soit p tel que $2 < p < 4$. Soit $q = r = 2p$. Soit η un point du bord à l'infini de M. Il existe une classe $\kappa \in H^{1,r}_{loc}(M,\eta)$ et une fonction $u \in \mathcal{R}^q_{loc}(M,\eta)$ telles que*

1. *$[du] \smile \kappa = 0$ dans $H^{2,p}_{loc}(M,\eta)$,*

2. $[d(u^2)] \smile \kappa \neq 0$ *dans* $H^{2,p}_{loc}(M,\eta)$.

Preuve. On identifie le bord à l'infini privé de η au groupe d'Heisenberg N de dimension 3. Soient (x,y,z) des coordonnées exponentielles sur N, de sorte que (x,y) donnent des coordonnées sur $\mathbf{R}^2 = N/[N,N]$. Alors une base de l'espace des formes différentielles invariantes à gauche est (dx, dy, τ), où $\mathfrak{n}_1 = \mathrm{span}(dx, dy)$ et $\mathfrak{n}_2 = \mathrm{span}(\tau)$. On calcule $\tau = dz - xdy$, $\delta(\tau) = -dx \wedge dy$. Le produit semi-direct $G = \mathbf{R} \ltimes_\alpha N$ agit simplement transitivement sur M, on l'identifie à M. On a donc une projection $\pi : M \to N$ dont les fibres sont les géodésiques issues de η, et une quatrième coordonnée, t, sur M (c'est la fonction de Busemann centrée en η).

On considère les fonctions $u_\infty(x,y,z) = x$ et $v_\infty(x,y,z) = y$ sur N. Soit χ une fonction lisse sur $\mathbf{R}$, nulle sur $]-\infty, 0[$, et valant 1 sur $]1, +\infty[$. On définit deux fonctions sur M par $u = \chi(t)\pi^* u_\infty$ et $v = \chi(t)\pi^* v_\infty$. Par construction, u et v s'annulent sur l'horoboule $\{t \leq 0\}$.

Vérifions que u et $v \in \mathcal{R}^{2p}_{loc}(M,\xi)$. Soit W un ouvert de M dont l'adhérence $\bar{W}$ dans $\bar{M}$ ne contient pas η. Alors $\bar{W} \cap \partial_\infty M$ est un compact de N. Soit U un ouvert borné à bord lisse de N contenant $\bar{W}$, $V = \mathbf{R} \times U$ le cône de base U et de sommet η. Alors $W \setminus V$ est relativement compact dans M donc, quitte à agrandir U, on peut supposer que $W \subset V$. Il existe alors un $T \in \mathbf{R}$ tel que $W \subset V_T :=]T, +\infty[\times U$.

Comme $2p > 4$, $\Lambda^1_{-(2p)} = 0$ et u_∞ et du_∞ appartiennent à $L^{2p}(U)$, donc $du = \pi^* u_\infty \chi'(t)dt + \chi(t)\pi^* du_\infty$ est L^{2p} sur V. De même pour v. Par conséquent, $u_{|V}$, $v_{|V} \in \mathcal{R}^{2p}(V)$. A fortiori, $u_{|W}$, $v_{|W} \in \mathcal{R}^{2p}(W)$. On conclut que u et $v \in \mathcal{R}^{2p}_{loc}(M,\xi)$. En particulier, du, $dv \in \Omega^{1,2p}_{loc}(M,\eta)$, et $du \wedge dv \in \Omega^{2,p}_{loc}(M,\eta)$.

Pour $2 < p < 4$, $\Lambda^1_{+(p)} = \mathfrak{n}_2^*$, $\Lambda^1_{-(p)} = \mathfrak{n}_1^*$. Par conséquent, le champ de vecteurs de Busemann $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ n'est pas $(1,p)$-contractant. Néanmoins, la conclusion du Lemme 39 reste vraie,

$$P(du \wedge dv) = P(dv) \wedge P(du).$$

En effet, comme du_∞ et dv_∞ sont des sections de $\Lambda^1_{-(p)}$, l'opérateur P se comporte comme une valeur au bord. Voici les détails.

$$du \wedge dv = \chi'(t)\chi(t)dt \wedge \pi^*(u_\infty dv_\infty - v_\infty du_\infty) + \chi(t)^2 \pi^*(du_\infty \wedge dv_\infty),$$

$$\iota_\xi(du \wedge dv) = \chi'(t)\chi(t)\pi^*(u_\infty dv_\infty - v_\infty du_\infty)$$

est une section de $\Lambda^1_{-(p)}$,

$$\begin{aligned} B(du \wedge dv) &= -(\int_0^{+\infty} \chi'(t+s)\chi(t+s)\, ds)\pi^*(u_\infty dv_\infty - v_\infty du_\infty) \\ &= \frac{1}{2}(\chi(t)^2 - 1)\pi^*(u_\infty dv_\infty - v_\infty du_\infty), \end{aligned}$$

dont la différentielle vaut

$$\chi'(t)\chi(t)dt \wedge \pi^*(u_\infty dv_\infty - v_\infty du_\infty) + (\chi(t)^2 - 1)\pi^*(du_\infty \wedge dv_\infty).$$

Il vient

$$\begin{aligned} P(du \wedge dv) &= \chi(t)^2 \pi^*(du_\infty \wedge dv_\infty) + (1-\chi(t)^2)\pi^*(du_\infty \wedge dv_\infty) \\ &= \pi^*(du_\infty \wedge dv_\infty) \\ &= -\pi^* d\tau \\ &= -d\pi^*(\tau). \end{aligned}$$

Comme $\Lambda^0_{+(p)} = 0$, $\mathcal{B}^{1,p}(V,\xi) \subset \Gamma(\mathfrak{n}_2^*)$. En fait, la fonction z est une section L^p, à différentielle L^p, de $\Lambda^0_{-(p)}$ sur U. Alors $d_+ z = dz - xdy = \tau$. D'après le Corollaire 32, la forme $\pi^*\tau$ appartient à $\mathcal{B}^{1,p}(V,\xi)$. Cela entraîne que $[P(du \wedge dv)] = 0$ dans $H^2(\mathcal{B}^{*,p}(V))$. Le Corollaire 12 donne donc $[du \wedge dv] = 0$ dans $H^{2,p}(W)$. On conclut que $[du] \smile [dv] = 0$ dans $H^{2,p}_{loc}(M,\eta)$.

Pour la même raison,

$$P(d(u^2) \wedge dv) = P(d(u^2)) \wedge P(dv) = \pi^*(d(u_\infty^2) \wedge dv_\infty).$$

D'après la Proposition 37, la forme $\pi^*(d(v_\infty^2) \wedge dv_\infty) = \pi^*(2xdx \wedge dy)$ n'appartient pas à $d\mathcal{B}^{1,p}(V)$. En effet, elle s'écrit $-2x\delta(\tau)$ mais ne possède pas de composante $d(-2x) \wedge \tau$. Le Lemme 14 donne donc $[d(u^2) \wedge dv] \neq 0$ dans $H^{2,p}(V_T)$. Comme $W \subset V_T$, $[d(u^2)] \smile [dv] \neq 0$ dans $H^{2,p}(W)$. On conclut que $[du] \smile [dv] \neq 0$ dans $H^{2,p}_{loc}(M,\eta)$. q.e.d.

9 Intervention des quasiisométries

9.1 Invariance de la cohomologie et du cup-produit

Voici la version technique du Théorème 1.5 dont nous avons besoin.

Proposition 45. [21] *Soient M, M' des variétés riemanniennes complètes, simplement connexes, à courbure pincée négativement. Soit $f : M \to M'$ une quasiisométrie. Soit $\eta \in \partial_\infty M$. Alors f induit, pour tout $p > 1$, un isomorphisme $f^* : H^{*,p}_{loc}(M', f(\eta)) \to H^{*,p}_{loc}(M,\eta)$ qui préserve le cup-produit. De plus, f induit, pour tout $q > 1$, un isomorphisme d'algèbres $f^* : \bar{\mathcal{R}}^q_{loc}(M', f(\eta)) \to \bar{\mathcal{R}}^q_{loc}(M,\eta)$.*

9.2 Preuve du Corollaire 3

Soit M une variété riemannienne complète de dimension n, simplement connexe, dont la courbure sectionnelle K satisfait $-1 \leq K \leq \delta < 0$. Notons $M' = \mathbb{C}H^2$. Supposons qu'il existe une quasiisométrie $f : M \to \mathbb{C}H^2$.

Soit $p_0 = 1 + 2\sqrt{-\delta}$. Si $\delta < -\frac{1}{4}$, $p_0 > 2$. Pour $2 < p < p_0$, posons $q = r = 2p$. Choisissons un point $\eta \in \partial_\infty M$. Le Théorème 2 (plus précisément, la Proposition 43) entraîne que, dans M, si $\kappa \in H^{1,r}_{loc}(M,\eta)$ et $u \in \mathcal{R}_\kappa$, alors $u^2 \in \mathcal{R}_\kappa$. Or le Théorème 3 (plus précisément, la Proposition 44) fournit une classe $\kappa' \in H^{1,r}_{loc}(M,\eta')$ et une fonction $u' \in \mathcal{R}_\kappa$ telles que $u'^2 \notin \mathcal{R}_{\kappa'}$, cela contredit le fait que les quasiisométries préservent la cohomologie, y compris dans sa version localisée, ainsi que le cup-produit. On conclut que M n'est pas quasiisométrique au groupe de Heisenberg. q.e.d.

Références

[1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II.* Commun. Pure Appl. Math. **17**, 35–92, (1964).

[2] J. BEMELMANS, MIN OO, E. RUH, *Smoothing Riemannian metrics.* Math. Z. **188**, 69–74, (1984).

[3] A. BOREL, *The L^2-cohomology of negatively curved Riemannian symmetric spaces.* Ann. Acad. Sci. Fennicae **10**, 95–105, (1985).

[4] M. BOURDON et H. PAJOT, *Cohomologie l_p et espaces de Besov.* J. Reine Angew. Math. **558**, 85–108, (2003).

[5] M. CHAYET, N. LOHOUE, *Sur la cohomologie L^p des variétés.* C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I **324**, 211–213, (1997).

[6] R. FORMAN, *Spectral sequences and adiabatic limits.* Comm. Math. Phys. **168**, 57–116,(1995).

[7] M. GROMOV, *Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory.* J. Differen. Geom. **33**, 253–320, (1991).

[8] M. GROMOV, *Asymptotic invariants of infinite groups.* Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **182**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1993).

[9] V. GOLDSTEIN, V. KUZMINOV, I. SHVEDOV, *The Kuenneth formula for L_p cohomologies of warped products.* Sib. Math. J. **32**, No.5, 749–760, (1991) ; translation from Sib. Mat. Zh. **32**, No.5 (189), 29–42, (1991).

[10] V. GOLDSTEIN, M. TROYANOV, *The $L^{p,q}$ cohomology of SOL.* Ann. Fac. Sci. Toulouse **7**, 687–689, (1998).

[11] Ya. A. KOPYLOV, *On the normal solvability of the exterior differentiation operator on a surface of revolution.* Sibirsk. Mat. Zh. **38** (1997), no. 6, 1300–1307 ; translation in Siberian Math. J. **38** (1997), no. 6, 1130–1136

[12] Ya. A. KOPYLOV, *Some properties of the operator of exterior derivation on surfaces of revolution and L_p-cohomology.* Complex geometry of groups (Olmué, 1998), 247–257, Contemp. Math., **240**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[13] Ya. A. KOPYLOV, *On the Künneth formula for the reduced cohomology of the tensor product of complexes of Hilbert spaces.* Sibirsk. Mat. Zh. **40** (1999), no. 5, 1067–1073 ; translation in Siberian Math. J. **40** (1999), no. 5, 901–906

[14] Ya. A. KOPYLOV, *$L_{p,q}$-cohomology and normal solvability.* Arch. Math. (Basel) **89** (2007), no. 1, 87–96.

[15] V. KUZMINOV, I. SHVEDOV, *On compact solvability of the operator of exterior derivation.* Sib. Mat. Zh. **38**, (1997), no. 3, 573–590 ; translation in Sib. Math. J. **38**, (1997), no. 3, 492–506.

[16] A.N. LIVSIC, *Cohomology of dynamical systems.* Isv. Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **36**, 1296–1320, (1972) ; translation from Math. USSR Izvestia **6**, 1278–1301, (1972).

[17] N. LOHOUE, *Stabilité de la cohomologie L^p au voisinage de 2 pour les espaces localement symétriques.* Ann. Global Anal. Geom. **16**, 543–571, (1998).

[18] N. LOHOUE, *Cohomologie L^p et formes harmoniques.* Manuscrit (2008).

[19] R. MAZZEO, R. MELROSE, *The adiabatic limit, Hodge cohomology and Leray's spectral sequence for a fibration.* J. Differen. Geom. **31**, 185–213,(1990).

[20] P. PANSU, *Differential forms and connections adapted to contact structures, after M. Rumin.* P. 183-196 in "Symplectic Geometry", D. Salamon ed., L.M.S. Lect. Notes Vol. **192**, London Math. Soc., London (1993).

[21] P. PANSU, *Cohomologie L^p : invariance sous quasiisométrie.* Manuscrit (1995).

[22] P. PANSU, *Cohomologie L^p, espaces homogènes et pincement.* Texte disponible depuis 1999 à la page `http://www.math.u-psud.fr/%7Epansu/liste-prepub.html`.

[23] P. PANSU, *Cohomologie L^p en degré 1 des espaces homogènes.* Potential Anal. **27**, 151–165 (2007).

[24] P. PANSU, *Cohomologie L^p et pincement.* Comment. Math. Helv. **83**, 327–357 (2008).

[25] H. TRIEBEL, *Theory of function spaces II.* Birkhaüser, Basel (1992).

Mots clé : Cohomologie L^p, courbure négative, espace symétrique, espace de Besov, algèbre de Royden.

Keywords : L^p-cohomology, negative curvature, symmetric space, Besov space, Royden algebra.

Mathematics Subject Classification : 43A15, 43A80, 46E35, 53C20, 53C30, 58A14.

Laboratoire de Mathématique d'Orsay
UMR 8628 du C.N.R.S.
Université Paris-Sud XI
Bâtiment 425
91405 Orsay
France
`Pierre.Pansu@math.u-psud.fr`
`http://www.math.u-psud.fr/~pansu`