

Lettre à une amie fidèle

To print higher resolution math symbols, click the Print button in the right-hand side of the control panel.



Le 12 avril 2009, par **Xavier Caruso**

Chargé de Recherche CNRS, Université de Rennes I ([page web](#))

Le vocabulaire mathématique est certainement très technique, mais il est aussi souvent très imagé. Voici une lettre, sans prétention, que je me suis amusé à écrire pour illustrer ce propos. Pour les non-initiés, les explications de texte sont données en note de bas de page.

C HÈRE THÉORIE DE HODGE p -ADIQUE

Te souviens-tu de notre première rencontre ? Nous étions à la bibliothèque. Nous nous sommes croisés dans un rayon, puis tu es venue t'installer à ma table [1]. Nous avons commencé à parler, puis nous nous sommes revus les jours suivants, et nous avons pu discuter plus longuement. Je ne sais pas pourquoi j'ai été attiré par toi, sans doute à cause de ton côté mystérieux, indéchiffrable.

Tu m'as rapidement fait découvrir ta Fontaine [2]. Ce fut un moment vraiment extraordinaire. Il en jaillissait de somptueux cristaux [3] qui s'agençaient en anneaux [4] d'une structure et d'une complexité déconcertante. Ton préféré, je crois, était le « semi-stable » [5] Qu'est-ce que cela signifiait ? Fallait-il comprendre que cet anneau fût forgé à partir d'une quelconque matière radioactive ?

Tu m'as vite détrompé en m'expliquant le rôle de ces objets mystiques. Il te servait en fait dans tes occupations quotidiennes. Je ne saurais dire exactement pourquoi, tu t'étais passionnée pour un certain Monsieur Galois [6], et même plus spécialement pour certains groupes [7] qu'il avait eu l'audace de former il y a presque deux siècles, et qui étaient encore très actifs aujourd'hui.

Tu cherchais à comprendre comment ces groupes arrivaient encore à se représenter [8] dans des lieux un peu particuliers, des espaces disais-tu, à la fois compacts et totalement déconnectés [9] Ce n'était pas une mince affaire, c'est certain ! Mais, tu as été patiente et tu as su expliquer à merveille la magie de tes cristaux et de tes anneaux, leur cohérence [10] malgré leurs puissances divisées [11], et leur utilisation pour analyser et littéralement décomposer ces représentations [12].

Je crois dire — et j'espère que tu seras d'accord — que ton caractère [13] n'était pas toujours facile. J'aurais bien dit que tu étais lunatique, mais tu m'as appris un mot beaucoup mieux adapté à la situation : ton caractère était en fait cyclotomique [14] ! Tel un cyclotron, il changeait régulièrement avec une précision d'horloge, et après avoir compris cela, il m'a été assez facile d'anticiper tes sautes d'humeur.

À peine avais-je commencé à maîtriser un peu les anneaux de ta Fontaine que tu as voulu me faire quitter ce monde rationnel pour m'entraîner dans un nouveau monde de torsion [15] Le mot n'était certainement pas mal choisi, un monde en effet absolument tortionnaire ! À chaque endroit, on pouvait assister à une scène où l'on se faisait tuer par une grande puissance [16]. Personne n'y échappait. J'ai eu vraiment peur, je l'avoue, mais là encore tu m'as pris par la

main, et tu m'as montré que les groupes de Galois arrivaient aussi à se réunir dans ces endroits peu fréquentables. Ils étaient certes très discrets [17], mais les étudier n'en devenait que plus fascinant.

Cette visite était fort intéressante mais pas désintéressée : tu avais une idée derrière la tête, tu aurais bien aimé que je t'aide à aller plus loin dans tes investigations. Tu voulais que l'on explore ensemble un nouveau monde, où les corps pouvaient être ramifiés [18]. Et je t'ai suivi [19]. Nous nous sommes à ce moment beaucoup concentrés sur l'inertie [20] de nos représentations, et je dois dire que ce fut un moment inoubliable.

Après quelques années de dur labeur, ce fut le retour dans le premier monde, plutôt plat [21] en comparaison. Tu m'as alors présenté tes réseaux [22] qui t'avaient ouvert la porte vers le monde de torsion. Ils étaient hélas fortement divisibles [23], ce qui rendait la discussion avec eux jamais très facile [24]. Mais nous sommes quand même retournés les voir régulièrement, et ils ont fini par nous apprendre des choses. Nous sommes aussi retournés dans le monde de la torsion, pour y explorer de nouvelles ramifications de moins en moins modérées [25], parfois sauvages voire féroces [26]. Nous avons aussi rencontré de l'inertie bien plus sauvage [27] et bornée [28] qu'auparavant.

Mais, il est clair que nous n'avons pas encore tout visité. Je t'écris aujourd'hui pour te témoigner une fois de plus mon amitié, mon dévouement et ma fidélité. J'espère que nous aurons rapidement l'occasion de nous embarquer dans de nouvelles incroyables aventures, toi et moi.

Notes

[▲1] Bien sûr, « tu » ici désigne un livre — ou disons un corpus de livres et d'articles — traitant de théorie de Hodge p -adique.

[▲2] Je triche sans doute un peu ici, mais Jean-Marc Fontaine est le fondateur de la théorie de Hodge p -adique.

[▲3] Un cristal est un objet de la géométrie algébrique — qu'il serait trop compliqué de définir ici — qui joue un rôle très important dans notre contexte.

[▲4] La cohomologie des précédents cristaux fournit des objets mathématiques appelés « anneaux de périodes p -adiques » (ce sont en particulier des anneaux pour ceux qui savent de quoi il s'agit) qui servent de base à toute la théorie.

[▲5] L'un d'entre eux s'appelle B_{st} et correspond aux représentations (on verra le terme apparaître plus tard) semi-stables.

[▲6] Il s'agit d'Evariste Galois (1811-1823).

[▲7] Les groupes de Galois sont des objets mathématiques qui permettent d'étudier les extensions de corps (un autre concept mathématique pas du tout à prendre donc dans le sens usuel).

[▲8] La théorie de Hodge p -adique s'intéresse à certaines représentations de ces groupes de Galois.

[▲9] Ces représentations se font dans des \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels, qui d'un point de vue topologique sont qualifiés de compacts et totalement déconnectés. En fait, on dit plutôt « totalement discontinus » en français (« totalement déconnectés » est un anglicisme), mais le terme « déconnecté » me semblait plus approprié ici pour l'interprétation dans le langage courant.

[▲10] La cohérence (de même que la quasi-cohérence) est une certaine propriété des cristaux.

[▲11] Une des principales caractéristiques des cristaux et de certains anneaux de périodes p -adiques est de posséder ce que les mathématiciens appellent des puissances divisées.

[▲12] Je pense par exemple à la décomposition de Hodge-Tate.

[▲13] Un caractère est par définition une représentation de dimension 1.

[▲14] Le caractère cyclotomique, comme on pourra s'en douter, est un caractère particulier qui joue un rôle fondamental en théorie de Hodge p -adique.

[▲15] Les notions de représentations rationnelles et de représentations de torsion ont un sens dans ce contexte. Les premières sont celles dans lesquelles p est inversible ; les secondes celles dans lesquelles il est nilpotent.

[▲16] Une représentation de torsion est par définition tuée (on dit parfois aussi annulée) par une grande puissance du nombre premier p . Si la représentation s'appelle T , on entend par là qu'il existe un entier n tel que $p^n T = 0$.

[▲17] En torsion, les représentations que l'on considère se réalisent dans des espaces topologiques discrets, et même finis.

[▲18] Dans toute cette théorie, on fixe un corps de base. S'il est absolument ramifié (notion mathématique que je n'ai pas envie de définir), l'étude est plus délicate.

[▲19] C'était en effet l'objectif de ma thèse que d'apporter une contribution à cette étude.

[▲20] J'entends par là que nous nous sommes concentrés sur l'action du sous-groupe d'inertie du groupe de Galois.

[▲21] La notion de représentation plate existe en mathématiques. Les représentations rationnelles en sont des exemples.

[▲22] Un réseau est un objet qui apparaît à l'intérieur des représentations rationnelles, et qui peut donner, par un procédé appelée réduction modulo p^n , un objet dans le monde de torsion.

[▲23] Les réseaux intéressants (qui correspondent à des réseaux dans les représentations) sont qualifiés de fortement divisibles.

[▲24] Il est vrai que la condition de forte divisibilité n'est pas toujours facile à manipuler.

[▲25] La ramification dont j'ai parlé précédemment (celle que j'ai étudiée pendant ma thèse) était en fait un cas très particulier. Elle était notamment modérée, comme on dit en mathématiques.

[▲26] Après la ramification modérée, il y a dans l'ordre de difficulté la ramification sauvage, puis

féroce. Je n'ai pour l'instant encore jamais rien regardé de féroce.

[▲27] De même que pour la ramification, il y a l'inertie modérée et l'inertie sauvage. Dans ma thèse, je me suis intéressé exclusivement à l'inertie modérée ; ce n'est que plus tard que j'ai commencé à étudier l'inertie sauvage.

[▲28] Un des mes résultats, en commun avec Tong Liu, a été de borner cette inertie dans le sens mathématique du terme.

► **Crédits images**

Pour citer cet article : **Xavier Caruso**, **Lettre à une amie fidèle** . *Images des Mathématiques*, CNRS, 2009. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Lettre-a-une-amie-fidele.html>