



**HAL**  
open science

## Sur une opérade ternaire liée aux treillis de Tamari

Frédéric Chapoton

► **To cite this version:**

| Frédéric Chapoton. Sur une opérade ternaire liée aux treillis de Tamari. 2011. hal-00578227v1

**HAL Id: hal-00578227**

**<https://hal.science/hal-00578227v1>**

Preprint submitted on 18 Mar 2011 (v1), last revised 12 May 2011 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur une opérade ternaire liée aux treillis de Tamari

F. Chapoton

18 mars 2011

## Résumé

On introduit une opérade anticyclique  $\mathbf{V}$  définie par une présentation ternaire quadratique. On montre qu'elle admet une base indexée par les arbres binaires plans. On relie cette construction à la famille des treillis de Tamari  $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 0}$  en construisant un isomorphisme entre  $\mathbf{V}(2n+1)$  et le groupe de Grothendieck de la catégorie  $\text{mod } \mathbf{Y}_n$  qui envoie la base de  $\mathbf{V}(2n+1)$  sur les classes des modules projectifs et qui transforme la structure anticyclique de  $\mathbf{V}$  en la transformation de Coxeter de la catégorie dérivée de  $\text{mod } \mathbf{Y}_n$ .

## Abstract

We introduce an anticyclic operad  $\mathbf{V}$  given by a ternary generator and a quadratic relation. We show that it admits a natural basis indexed by planar binary trees. We then relate this construction to the family of Tamari lattices  $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 0}$  by defining an isomorphism between  $\mathbf{V}(2n+1)$  and the Grothendieck group of the category  $\text{mod } \mathbf{Y}_n$ . This isomorphism maps the basis of  $\mathbf{V}(2n+1)$  to the classes of projective modules and sends the anticyclic map of the operad  $\mathbf{V}(2n+1)$  to the Coxeter transformation of the derived category of  $\text{mod } \mathbf{Y}_n$ .

## 0 Introduction

Les arbres binaires plans sont des objets combinatoires très classiques, qui sont apparus depuis quelques années dans des situations algébriques variées, dont l'une des plus remarquables est la description des algèbres dendriformes libres à l'aide d'arbres binaires plans, due à J.-L. Loday [19]. Ce résultat s'exprime, dans le cadre conceptuel des opérades, comme la description de l'opérade Dendriforme en termes d'arbres binaires plans.

Dans l'étude des algèbres dendriformes libres et de l'opérade Dendriforme, poursuivie depuis par différents auteurs [6, 7, 12, 25, 1, 20], il est progressivement devenu clair qu'une famille de posets jouait un rôle fondamental. Ce sont les treillis de Tamari, initialement introduits par D. Tamari de façon purement combinatoire [26] en termes de parenthésages. Ces treillis apparaissent en théorie des représentations de deux façons distinctes, soit comme ordres partiels sur les modules basculants [24, 11], soit parmi les treillis cambriens, comme ordres partiels sur les amas, dans la théorie des algèbres amassées de S. Fomin et A. Zelevinsky [8, 23].

Un aspect intrigant de cette relation profonde entre l'opérade dendriforme et les treillis de Tamari est le point suivant. Si  $Y_n$  est l'ensemble des arbres binaires plans à  $n$  sommets, on peut définir deux applications linéaires de  $\mathbb{Z}Y_n$  dans lui-même. La première application  $\tau$  provient de la structure anticyclique de l'opérade Dendriforme; elle est en particulier périodique, de période  $n + 1$ . La seconde application  $\theta$  provient de la catégorie  $\text{mod } Y_n$  des modules sur le poset  $Y_n$ . Elle décrit l'action d'un endofoncteur naturel de la catégorie dérivée  $D \text{ mod } Y_n$  de cette catégorie. Il se trouve que l'application  $\tau$  est (au signe près) le carré de  $\theta$  [2]. En particulier, l'application  $\theta$  est périodique, de période  $2n + 2$ .

Dans un article précédent [3], cette situation a été décrite et précisée en introduisant une catégorification de l'opérade Dendriforme via les catégories de modules sur les treillis de Tamari. Cette construction utilise de manière essentielle une famille d'éléments de l'opérade Dendriforme indexée par les arbres non-croisés. Il se trouve que les arbres non-croisés sont en bijection avec les arbres ternaires, qui forment une base de l'opérade ternaire libre. On peut donc se demander si une opérade ternaire ne pourrait pas jouer un rôle dans le contexte dendriforme.

L'objet du présent article est précisément de présenter une relation entre les treillis de Tamari et une certaine opérade ternaire. Cette opérade  $\mathbf{V}$  est engendrée par un élément impair de degré 3 modulo une unique relation quadratique. On montre qu'elle admet en degré  $2n + 1$  une base indexée par les arbres binaires plans à  $n$  sommets, en utilisant la méthode des bases de Gröbner pour les opérades [13, 5].

On montre que l'opérade  $\mathbf{V}$  possède une structure anticyclique, ce qui donne une application linéaire  $\theta_{\mathbf{V}}$  de période  $2n + 2$  sur le groupe abélien  $\mathbf{V}(2n + 1)$ . Le résultat principal de l'article est un isomorphisme entre  $\mathbf{V}(2n + 1)$  et  $\mathbb{Z}Y_n$  qui identifie  $\theta_{\mathbf{V}}$  et  $\theta$  et donne donc une nouvelle preuve de la périodicité de  $\theta$  mentionnée plus haut.

On dispose donc ainsi de deux opérades dont la structure anticyclique est fortement reliée aux treillis de Tamari, chacune à sa manière. L'opérade Dendriforme permet de décrire le carré de  $\theta$ , et la base la plus naturelle de cette opérade correspond aux modules simples sur les treillis de Tamari. L'opérade  $\mathbf{V}$  permet de décrire  $\theta$  et possède une base correspondant aux modules projectifs. Ces deux structures forment ensemble une structure algébrique assez complexe et remarquable.

Pour terminer cette introduction, voici quelques mots sur le contexte en théorie des représentations. La périodicité de la transformation de Coxeter pour la catégorie  $D \text{ mod } Y_n$  se place en fait dans un ensemble plus vaste de conjectures. Le treillis de Tamari  $Y_n$  peut en effet être considéré soit comme le treillis cambrien associé aux carquois de type  $A_n$  équiorienté, soit comme le poset des modules basculants associé aux carquois de type  $A_{n+1}$  équiorienté. La propriété de périodicité semble également vraie pour tous les treillis cambriens et pour tous les posets de modules basculants associés aux carquois de type  $ADE$ .

Pour l'instant, cette propriété est démontrée pour tous les carquois de type  $A$ . Elle résulte du cas équiorienté, démontré ici ou dans [2] en utilisant la théorie des opérades, et des théorèmes de Ladkani montrant l'équivalence dérivée entre les treillis cambriens et les posets de modules basculants [16, 15] lorsque le carquois change par mutation en un puits ou une source.

Cette périodicité n'est par ailleurs qu'une conséquence d'une propriété conjecturale plus forte. En effet, elle est vraie si les catégories dérivées  $D \text{ mod } Y_n$  sont

Calabi-Yau fractionnaires. Pour l'instant, on sait seulement que cette propriété plus forte est vraie pour  $n \leq 3$ , où les catégories  $D \bmod Y_n$  admettent une description simple en termes de catégories héréditaires.

## 1 Construction et propriétés de $\mathbf{V}$

### 1.1 Généralités et notations

On se place dans la catégorie monoïdale symétrique des groupes abéliens gradués, avec la règle des signes de Koszul par rapport à cette graduation. Les morphismes sont les applications linéaires respectant la graduation.

Pour le cadre général de la théorie des opérades, on renvoie le lecteur aux ouvrages [22, 27].

On ne travaille dans cet article qu'avec des opérades non-symétriques, qu'on appelle simplement des opérades.

Soit  $\mathbf{P}$  une collection de groupes abéliens gradués  $\mathbf{P}(n) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}(n)_k$  pour  $n \geq 1$  et soit  $a \in \mathbf{P}(n)_k$ . On appelle  $n$  le degré de  $a$ , noté  $\#a$ . On appelle  $k$  le poids de  $a$ , simplement noté  $a$  dans les exposants de  $-1$ , par un abus de notation commode qui ne porte pas à confusion. La règle des signes de Koszul s'applique uniquement à la graduation par le poids.

On rappelle brièvement la définition des opérades.

**Définition 1** Une *opérade  $\mathbf{P}$*  est la donnée d'une collection de groupes abéliens gradués  $\mathbf{P}(n) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}(n)_k$  pour  $n \geq 1$ , d'une *unité*  $\mathbf{1} \in \mathbf{P}(1)_0$  et d'applications linéaires

$$\circ_i : \mathbf{P}(m) \otimes \mathbf{P}(n) \longrightarrow \mathbf{P}(m+n-1) \quad (1)$$

pour  $1 \leq i \leq m$ . Les *compositions*  $\circ_i$  doivent vérifier

$$(a \circ_i b) \circ_{j+i-1} c = a \circ_i (b \circ_j c), \quad (2)$$

et

$$(a \circ_i b) \circ_{j+\#b-1} c = (-1)^{bc} (a \circ_j c) \circ_i b \quad \text{si } i < j. \quad (3)$$

On note  $\circ_{\max}$  pour la composition la plus à droite, *i.e.*

$$a \circ_{\max} b = a \circ_{\#a} b. \quad (4)$$

On rappelle aussi la définition des opérades anticycliques.

**Définition 2** Une *structure d'opérade anticyclique* sur une opérade  $\mathbf{P}$  est la donnée pour tout  $n \geq 1$  d'un opérateur  $\theta$  sur  $\mathbf{P}(n)$  vérifiant  $\theta(\mathbf{1}) = -\mathbf{1}$ ,  $\theta^{n+1} = \text{Id}$  et tels qu'on ait les axiomes suivants :

$$\theta(a \circ_i b) = \theta(a) \circ_{i-1} b \quad \text{si } i > 1, \quad (5)$$

et

$$\theta(a \circ_1 b) = -(-1)^{ab} \theta(b) \circ_{\max} \theta(a). \quad (6)$$



FIGURE 1 – Un arbre binaire plan dans  $\mathbf{Y}_4$

## 1.2 L'opérade anticyclique ternaire $\mathbf{V}$

Soit  $\mathbf{V}$  l'opérade définie par la présentation par générateurs et relations suivante.

On se donne un générateur  $\square$  de degré 3 et de poids 1 et on impose la relation

$$\square \circ_1 \square - \square \circ_2 \square + \square \circ_3 \square = 0. \quad (7)$$

On introduit sur  $\mathbf{V}$  une structure anticyclique.

**Proposition 1.1** *Il existe sur  $\mathbf{V}$  une unique structure d'opérade anticyclique, donnée pour tout  $n \geq 0$  par un opérateur  $\theta_{\mathbf{V}}$  sur  $\mathbf{V}(2n+1)$ , telle que*

$$\theta_{\mathbf{V}}(\square) = -\square. \quad (8)$$

**Preuve.** Par la théorie générale des opérades anticycliques, il suffit de vérifier la compatibilité de  $\theta_{\mathbf{V}}$  avec la relation (7), en montrant que l'image par  $\theta_{\mathbf{V}}$  de cette relation est un multiple de cette relation. On obtient, en utilisant (5) et (6) et en gardant les termes dans l'ordre initial,

$$\square \circ_3 \square + \square \circ_1 \square - \square \circ_2 \square,$$

qui est bien proportionnel à (7). ■

## 1.3 Base $Q$ de $\mathbf{V}$

On donne ici une base explicite de  $\mathbf{V}$ .

**Définition 3** *Un **arbre binaire plan** est un graphe connexe et simplement connexe, muni d'un plongement dans le plan considéré à isotopie près, dont les sommets sont soit trivalents (**sommets internes**) soit univalents, et muni d'un sommet univalent distingué (**racine**). On appelle **feuilles** les sommets univalents non distingués.*

On convient de dessiner les arbres binaires plans avec leurs feuilles en haut et leur racine en bas. Par commodité, on oriente (implicitement) les arêtes en direction de la racine.

Un arbre binaire plan est soit l'arbre trivial | sans sommet interne, soit se décompose de manière unique, par enlèvement de l'arête entrante en sa racine, en une paire  $(x, y)$  d'arbres binaires plans.

Pour  $n \geq 0$ , on note  $\mathbf{Y}_n$  l'ensemble des arbres binaires plans à  $n$  sommets internes.

A chaque élément  $x$  de  $\mathbf{Y}_n$ , on associe un élément  $Q_x$  de  $V(2n+1)_n$  par récurrence sur  $n$ . Si | est l'unique arbre sans sommet, on pose  $Q_| = \mathbf{1}$ , l'unité

de l'opérade  $\mathbf{V}$ . Sinon, on associe à l'arbre binaire plan  $z$  qui se décompose en une paire  $(x, y)$  l'élément

$$Q_z = (-1)^{Q_x + Q_x Q_y} (\square \circ_3 Q_y) \circ_1 Q_x = (-1)^{Q_x} (\square \circ_1 Q_x) \circ_{\max} Q_y. \quad (9)$$

L'égalité de ces deux expressions résulte de l'axiome (3) des opérades.

Par exemple, on a  $Q_\vee = \square$  et on associe à l'arbre  $x$  de la figure 1 l'élément

$$Q_x = (\square \circ_3 (\square \circ_1 \square)) \circ_1 \square.$$

On note  $Q$  l'ensemble des éléments  $Q_x$  ainsi définis.

On utilise ci-dessous le formalisme des bases de Gröbner pour les opérades, voir [13, 5] et [27, §8.1].

**Proposition 1.2** *La relation (7) forme une base de Gröbner de l'idéal qu'elle engendre dans l'opérade libre sur  $\square$ , pour un ordre admissible dans lequel la composition  $\circ_2$  domine les compositions  $\circ_1$  et  $\circ_3$ .*

**Preuve.** Pour cela, il suffit de montrer une propriété de confluence pour la réécriture de la paire critique

$$(\square \circ_2 \square) \circ_3 \square = \square \circ_2 (\square \circ_2 \square). \quad (10)$$

Il s'agit de vérifier que les deux calculs obtenus en appliquant à volonté

$$\square \circ_2 \square \longrightarrow \square \circ_1 \square + \square \circ_3 \square \quad (11)$$

à cette expression donnent le même résultat.

D'une part, la réécriture en partant de  $(\square \circ_2 \square) \circ_3 \square$  donne

$$(\square \circ_1 \square + \square \circ_3 \square) \circ_3 \square = \square \circ_1 (\square \circ_3 \square) + \square \circ_3 (\square \circ_1 \square).$$

D'autre part, la réécriture en partant de  $\square \circ_2 (\square \circ_2 \square)$  donne

$$\square \circ_2 (\square \circ_1 \square + \square \circ_3 \square) = (\square \circ_2 \square) \circ_2 \square + (\square \circ_2 \square) \circ_4 \square.$$

On utilise à nouveau (11) deux fois pour obtenir

$$\begin{aligned} (\square \circ_1 \square + \square \circ_3 \square) \circ_2 \square + (\square \circ_1 \square + \square \circ_3 \square) \circ_4 \square = \\ \square \circ_1 (\square \circ_2 \square) - (\square \circ_2 \square) \circ_5 \square - (\square \circ_2 \square) \circ_1 \square + \square \circ_3 (\square \circ_2 \square). \end{aligned}$$

On utilise à nouveau (11) quatre fois pour obtenir

$$\begin{aligned} \square \circ_1 (\square \circ_1 \square + \square \circ_3 \square) - (\square \circ_1 \square + \square \circ_3 \square) \circ_5 \square \\ - (\square \circ_1 \square + \square \circ_3 \square) \circ_1 \square + \square \circ_3 (\square \circ_1 \square + \square \circ_3 \square). \end{aligned}$$

Dans cette somme, certains termes se simplifient par paires et il reste

$$\square \circ_1 (\square \circ_3 \square) + \square \circ_3 (\square \circ_1 \square),$$

ce qui est bien égal à l'autre réécriture. ■

**Proposition 1.3** *Pour tout  $n \geq 0$ , l'ensemble  $(Q_x)_{x \in \mathcal{Y}_n}$  forme une base de  $\mathbf{V}(2n+1)$ .*

**Preuve.** La propriété de Gröbner entraîne l'énoncé. On sait en effet qu'une base de l'opérade quotient par un idéal est donnée par les monômes réduits relativement à une base de Gröbner de cet idéal. Dans le cas présent, les monômes réduits de l'opérade libre sur  $\square$  par rapport à la relation (7), pour l'ordre admissible choisi, sont exactement les compositions itérées ne faisant pas intervenir la composition  $\circ_2$ , *i.e.* (au signe près) les éléments de  $Q$ . ■

**Corollaire 1.4** *L'opérade  $\mathbf{V}$  est de Koszul.*

**Preuve.** Ceci résulte du fait général qu'une opérade ayant une base de Gröbner quadratique est de Koszul, voir par exemple [13, Th. 3.10]. ■

## 1.4 Produits associatifs sur $\mathbf{V}$

Par abus de notation, on note aussi  $\mathbf{V}$  la somme directe

$$\bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{V}(2n + 1), \quad (12)$$

qui est un groupe abélien doublement gradué par le degré et par le poids.

On introduit les notations alternatives suivantes :

$$a/b = (-1)^{ab} b \circ_1 a \quad (13)$$

et

$$a * b = a \circ_{\max} b. \quad (14)$$

**Proposition 1.5** *Les produits  $/$  et  $*$  sont deux produits associatifs sur  $\mathbf{V}$ , qui vérifient de plus la relation de compatibilité suivante :*

$$(a/b) * c = a/(b * c). \quad (15)$$

**Preuve.** L'associativité résulte de l'axiome (2) et la compatibilité de l'axiome (3) des opérades. ■

La définition récursive (9) de la base  $Q$  se traduit, pour un arbre  $z$  qui se décompose en une paire  $(x, y)$  d'arbres, en fonction de  $/$  et  $*$  :

$$Q_z = Q_x / \square * Q_y, \quad (16)$$

où l'on peut omettre les parenthèses par la proposition 1.5.

On introduit deux opérations combinatoires sur les arbres binaires plans, voir figure 2 pour un exemple. Soient  $x, y$  deux arbres binaires plans.

L'arbre binaire plan  $x/y$  est obtenu par greffe à gauche de  $x$  sur  $y$ , *i.e.* en identifiant l'arête incidente à la racine de  $x$  avec l'arête incidente à la feuille la plus à gauche de  $y$ .

L'arbre binaire plan  $x \setminus y$  est obtenu par greffe à droite de  $y$  sur  $x$ , *i.e.* en identifiant l'arête incidente à la racine de  $y$  avec l'arête incidente à la feuille la plus à droite de  $x$ .

**Remarque 1.6** *On a la relation  $(x/y) \setminus z = x/(y \setminus z)$ .*

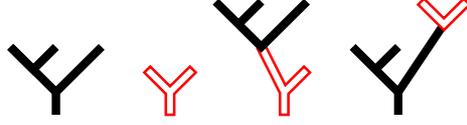


FIGURE 2 – Les opérations combinatoires / et \ :  $x, y, x/y$  et  $x \setminus y$

**Lemme 1.7** *On a la description suivante des opérations / et \* dans la base  $Q$  :*

$$\begin{aligned} Q_{x \setminus y} &= Q_x * Q_y, \\ Q_{x/y} &= Q_x / Q_y. \end{aligned}$$

*La famille  $Q$  est donc close pour / et \*.*

**Preuve.** Ceci résulte facilement de la définition (16) de  $Q_x$  et de la proposition 1.5, par récurrence. ■

## 1.5 Caractérisation de $\theta_{\mathbf{V}}$

**Proposition 1.8** *L'application  $\theta_{\mathbf{V}}$  vérifie*

$$\theta_{\mathbf{V}}(a/b) = -\theta_{\mathbf{V}}(a) * \theta_{\mathbf{V}}(b). \quad (17)$$

**Preuve.** On utilise le second axiome des opérades anticycliques (6) et les définitions (13) et (14) des produits / et \*.

**Proposition 1.9** *L'application  $\theta_{\mathbf{V}}$  vérifie*

$$\theta_{\mathbf{V}}(\square * (a / (\square * b))) = \theta_{\mathbf{V}}(\square * a) / \theta_{\mathbf{V}}(\square * b) - \theta_{\mathbf{V}}(\square * a) * \theta_{\mathbf{V}}(\square * b). \quad (18)$$

**Preuve.** En revenant aux expressions en les compositions  $\circ_i$ , on calcule le terme de gauche en utilisant (5) :

$$\begin{aligned} (-1)^{ab+a} \theta_{\mathbf{V}}(\square \circ_3 ((\square \circ_3 b) \circ_1 a)) &= -(-1)^{ab+a} \square \circ_2 ((\square \circ_3 b) \circ_1 a) \\ &= -(-1)^{ab+a} ((\square \circ_2 \square) \circ_4 b) \circ_2 a. \end{aligned}$$

En utilisant la relation (7) pour réécrire  $\square \circ_2 \square$ , on obtient

$$-(-1)^{ab+a} ((\square \circ_1 \square) \circ_4 b) \circ_2 a - (-1)^{ab+a} ((\square \circ_3 \square) \circ_4 b) \circ_2 a.$$

Par application des axiomes d'opérades, ceci vaut

$$(-1)^{ab+a+b+1} (\square \circ_2 b) \circ_1 (\square \circ_2 a) - (\square \circ_2 a) \circ_{\max} (\square \circ_2 b).$$

En utilisant l'axiome (5) des opérades anticycliques, on obtient

$$(-1)^{ab+a+b+1} \theta_{\mathbf{V}}(\square \circ_3 b) \circ_1 \theta_{\mathbf{V}}(\square \circ_3 a) - \theta_{\mathbf{V}}(\square \circ_3 a) \circ_{\max} \theta_{\mathbf{V}}(\square \circ_3 b).$$

En repassant aux formules utilisant / et \*, on trouve bien le second terme voulu.

■



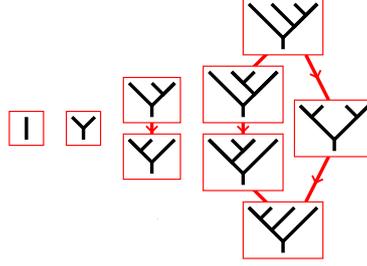


FIGURE 4 – Treillis de Tamari (minimum en bas)

On peut considérer le diagramme de Hasse de  $\mathcal{Y}_n$  comme un carquois-avec-relations, en orientant les arêtes du maximum vers le minimum, et en imposant comme relations l'égalité de toute paire de chemins ayant mêmes débuts et fins.

On fixe désormais un corps de base  $k$  pour les modules sur les carquois. Les constructions qui suivent en dépendent peu et la dépendance en  $k$  sera implicite.

On considère alors la catégorie  $\text{mod } \mathcal{Y}_n$  des modules sur le carquois-avec-relations  $\mathcal{Y}_n$ . Cette catégorie est équivalente à la catégorie des modules sur l'algèbre d'incidence de  $\mathcal{Y}_n$ . C'est une catégorie abélienne de dimension globale finie.

On dispose de trois bases de l'anneau de Grothendieck  $K_0(\text{mod } \mathcal{Y}_n)$  données par les classes des modules projectifs, injectifs et simples sur  $\mathcal{Y}_n$ , notées respectivement  $P_x, I_x$  et  $S_x$  pour  $x \in \mathcal{Y}_n$ .

La base  $S$  des simples est reliée à la base  $P$  des projectifs par la formule

$$P_x = \sum_{y \leq x} S_y, \quad (22)$$

et à la base  $I$  des injectifs par la formule

$$I_x = \sum_{y \geq x} S_y. \quad (23)$$

## 2.2 Structures algébriques

On rappelle dans cette section des structures algébriques qui sont déjà bien étudiées, notamment dans les articles [12, 21, 1, 20]. Pour cette raison, on ne donne que des indications de preuves.

On considère maintenant la somme directe

$$\bigoplus_{n \geq 0} K_0(\text{mod } \mathcal{Y}_n) \quad (24)$$

et plusieurs produits sur ce groupe abélien.

On a tout d'abord deux produits associatifs  $/$  et  $\backslash$  définis sur la base  $S$  par

$$S_x / S_y = S_{x/y}, \quad (25)$$

$$S_x \backslash S_y = S_{x \backslash y}. \quad (26)$$

On a par ailleurs un autre produit associatif  $*$ , qui est le produit associatif de l'algèbre dendriforme libre. On peut le définir par la caractérisation suivante, due à Loday et Ronco [21].

**Proposition 2.1** *Soient  $x, y$  deux arbres. Alors*

$$S_x * S_y = \sum_{x/y \leq z \leq x \setminus y} S_z. \quad (27)$$

On peut par ailleurs donner du produit  $*$  une description combinatoire alternative, voir [19, Prop. 5.11] pour un énoncé qui implique celui ci-dessous.

**Proposition 2.2** *Le produit  $S_x * S_y$  est la somme des  $S_z$  où  $z$  décrit les arbres binaires plans obtenus en identifiant le coté droit de  $x$  avec le coté gauche de  $y$  par un homéomorphisme croissant qui n'envoie pas de sommet interne sur un sommet interne.*

L'élément  $S_1$  est une unité pour les trois produits  $/$ ,  $\setminus$  et  $*$ .

**Proposition 2.3** *On a la description suivante des opérations  $/$  et  $*$  dans la base  $P$  :*

$$P_{x \setminus y} = P_x * P_y, \quad (28)$$

$$P_{x/y} = P_x / P_y. \quad (29)$$

**Preuve.** Pour la première formule, il s'agit de voir que les arbres  $z$  qui sont inférieurs ou égaux à l'arbre  $x \setminus y$  (condition **A**) sont exactement ceux qui s'obtiennent par recollement du bord droit d'un arbre inférieur à  $x$  avec le bord gauche d'un arbre inférieur à  $y$  (condition **B**). Il est facile de déduire de la forme locale de l'ordre de Tamari que la condition **B** est stable par diminution dans le poset de Tamari, donc que la condition **A** entraîne la condition **B**. Réciproquement, étant donné un arbre  $z$  vérifiant la condition **B**, on peut l'écrire comme un des termes de  $S_{x'} * S_{y'}$  avec  $x' \leq x$  et  $y' \leq y$ . En appliquant une suite convenable de mouvements locaux définissant l'ordre de Tamari, on peut montrer que  $z \leq x' \setminus y'$ . Comme  $x' \setminus y' \leq x \setminus y$ , ceci entraîne que  $z$  vérifie la condition **A**.

Montrons la seconde formule, en établissant l'énoncé suivant : pour tous  $x, y$ , on a une bijection

$$\begin{aligned} \{x' \mid x' \leq x\} \times \{y' \mid y' \leq y\} &\simeq \{z \mid z \leq x/y\} \\ (x', y') &\mapsto x'/y'. \end{aligned}$$

Le fait que  $x'/y' \leq x/y$  résulte de la nature locale de l'ordre de Tamari. L'injectivité est claire. Pour montrer la surjectivité, il suffit de voir que l'existence pour  $z$  d'une décomposition de la forme souhaitée entraîne l'existence d'une telle décomposition pour tout  $z'$  couvert par  $z$ . On conclut en partant de la décomposition de  $x/y$ . ■

En utilisant l'unique anti-automorphisme des treillis de Tamari, on obtient la proposition suivante.

**Proposition 2.4** *On a la description suivante des opérations  $\setminus$  et  $*$  dans la base  $I$  :*

$$I_{x/y} = I_x * I_y, \quad (30)$$

$$I_{x \setminus y} = I_x \setminus I_y. \quad (31)$$

On note  $\theta$  la transformation de Coxeter du poset  $Y_n$ . C'est un endomorphisme de  $K_0(\text{mod } Y_n)$  qui provient d'un endofoncteur  $\tau_{AR}$  de la catégorie dérivée de  $\text{mod } Y_n$ .

L'endomorphisme  $\theta$  est défini sur  $K_0(\text{mod } Y_n)$  par la formule

$$\theta(P_x) = -I_x, \quad (32)$$

pour tout  $x \in Y_n$ .

**Proposition 2.5** *Les applications  $\theta$  vérifient*

$$\theta(P_{\vee}) = -P_{\vee}, \quad (33)$$

$$\theta(a/b) = -\theta(a) * \theta(b), \quad (34)$$

$$\theta(a * b) = -\theta(a) \setminus \theta(b). \quad (35)$$

**Preuve.** La première formule pour  $P_{\vee}$  est immédiate, car  $P_{\vee} = I_{\vee}$ .

Pour la seconde formule, on calcule

$$\theta(P_x/P_y) = \theta(P_{x/y}) = -I_{x/y} = -I_x * I_y = -\theta(P_x) * \theta(P_y).$$

Pour la troisième formule, on calcule

$$\theta(P_x * P_y) = \theta(P_{x \setminus y}) = -I_{x \setminus y} = -I_x \setminus I_y = -\theta(P_x) \setminus \theta(P_y).$$

■

**Lemme 2.6** *On a*

$$(P_{\vee} \setminus a) * (P_{\vee} \setminus b) = P_{\vee} \setminus (a * (P_{\vee} \setminus b)) + (P_{\vee} \setminus a) / (P_{\vee} \setminus b). \quad (36)$$

**Preuve.** Ceci résulte de la description des trois produits  $/$ ,  $\setminus$  et  $*$  dans la base  $S$ , voir (25), (26) et la proposition 2.2. Le produit  $(P_{\vee} \setminus a) * (P_{\vee} \setminus b)$  se coupe naturellement en deux termes selon que le sommet interne inférieur provienne de  $P_{\vee} \setminus a$  ou de  $P_{\vee} \setminus b$ . ■

**Proposition 2.7** *On a*

$$\theta(P_{\vee} * (a/(P_{\vee} * b))) = \theta(P_{\vee} * a) / \theta(P_{\vee} * b) - \theta(P_{\vee} * a) * \theta(P_{\vee} * b). \quad (37)$$

**Preuve.** On calcule le terme de gauche :

$$-\theta(P_{\vee} \setminus \theta(a/(P_{\vee} * b))) = -\theta(P_{\vee} \setminus (\theta(a) * (\theta(P_{\vee} \setminus \theta(b)))),$$

soit

$$-P_{\vee} \setminus (\theta(a) * (P_{\vee} \setminus \theta(b))).$$

On calcule le terme de droite :

$$(\theta(P_{\vee} \setminus \theta(a)) / (\theta(P_{\vee} \setminus \theta(b))) - (\theta(P_{\vee} \setminus \theta(a)) * (\theta(P_{\vee} \setminus \theta(b))),$$

soit

$$(P_{\vee} \setminus \theta(a)) / (P_{\vee} \setminus \theta(b)) - (P_{\vee} \setminus \theta(a)) * (P_{\vee} \setminus \theta(b)).$$

Par le lemme 2.6, on déduit l'égalité voulue. ■

### 3 Isomorphisme

Pour tout  $n \geq 0$ , on définit une application linéaire  $\psi$  de  $\mathbf{V}(2n+1)$  dans  $K_0(\text{mod } \mathbf{Y}_n)$  par

$$\psi(Q_x) = P_x, \quad (38)$$

pour tout arbre binaire plan  $x$ .

**Proposition 3.1** *L'application  $\psi$  est un isomorphisme de groupes abéliens.*

**Preuve.** En effet, l'ensemble  $(P_x)_{x \in \mathbf{Y}_n}$  est une base de  $K_0(\text{mod } \mathbf{Y}_n)$ . ■

**Proposition 3.2** *L'application  $\psi$  est un morphisme pour  $/$  et  $*$ .*

**Preuve.** Ceci résulte de la description identique de ces produits dans les bases  $Q$  et  $P$  à l'aide des opérations combinatoires  $/$  et  $\setminus$  sur les arbres binaires plans, par les propositions 1.7 et 2.3. ■

**Théorème 3.3** *L'isomorphisme  $\psi$  de  $\mathbf{V}(2n+1)$  dans  $K_0(\text{mod } \mathbf{Y}_n)$  transforme l'endomorphisme  $\theta_{\mathbf{V}}$  en l'endomorphisme  $\theta$  :*

$$\psi\theta_{\mathbf{V}} = \theta\psi. \quad (39)$$

**Preuve.** L'idée de la preuve est la suivante : les morphismes  $\theta_{\mathbf{V}}$  et  $\theta$  sont caractérisés par des propriétés similaires qui ne font intervenir que les produits  $*$  et  $/$ .

Pour faciliter la preuve, on identifie  $P_x$  avec  $Q_x$  pour tout  $x$ . On va donc montrer que  $\theta_{\mathbf{V}} = \theta$ .

Vérifions d'abord les conditions initiales. Pour  $n = 0$ ,  $\theta_{\mathbf{V}} = -\text{Id}$  car  $\mathbf{V}$  est une opérade anticyclique et  $\theta = -\text{Id}$ . Pour  $n = 1$ ,  $\theta_{\mathbf{V}} = -\text{Id}$  et  $\theta = -\text{Id}$ .

En utilisant les propositions 2.5 et 2.7, on vérifie que la collection de morphismes  $\theta$  satisfait, après identification des bases  $Q$  et  $P$ , les conditions (17) et (18) qui caractérisent  $\theta_{\mathbf{V}}$  selon la proposition 1.10. ■

### Références

- [1] Marcelo Aguiar and Frank Sottile. Structure of the Loday-Ronco Hopf algebra of trees. *J. Algebra*, 295(2) :473–511, 2006.
- [2] Frédéric Chapoton. On the Coxeter transformations for Tamari posets. *Canad. Math. Bull.*, 50(2) :182–190, 2007.
- [3] Frédéric Chapoton. Categorification of the dendriform operad. In Jean-Louis Loday and Bruno Vallette, editors, *Proceedings of Operads 2009*, Séminaire et Congrès. SMF, 2012. oai :arXiv.org :0909.2751.
- [4] Charles W. Curtis and Irving Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XI. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1962.
- [5] Vladimir Dotsenko and Anton Khoroshkin. Gröbner bases for operads. *Duke Math. J.*, 153(2) :363–396, 2010.

- [6] Kurusch Ebrahimi-Fard and Dominique Manchon. Dendriform equations. *J. Algebra*, 322(11) :4053–4079, 2009.
- [7] Kurusch Ebrahimi-Fard, Dominique Manchon, and Frédéric Patras. New identities in dendriform algebras. *J. Algebra*, 320(2) :708–727, 2008.
- [8] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2) :497–529 (electronic), 2002.
- [9] Haya Friedman and Dov Tamari. Problèmes d’associativité : Une structure de treillis finis induite par une loi demi-associative. *J. Combinatorial Theory*, 2 :215–242, 1967.
- [10] Dieter Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, volume 119 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [11] Dieter Happel and Luise Unger. On a partial order of tilting modules. *Algebr. Represent. Theory*, 8(2) :147–156, 2005.
- [12] F. Hivert, J.-C. Novelli, and J.-Y. Thibon. The algebra of binary search trees. *Theoret. Comput. Sci.*, 339(1) :129–165, 2005.
- [13] Eric Hoffbeck. A Poincaré-Birkhoff-Witt criterion for Koszul operads. *Manuscripta Math.*, 131(1-2) :87–110, 2010.
- [14] Samuel Huang and Dov Tamari. Problems of associativity : A simple proof for the lattice property of systems ordered by a semi-associative law. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 13 :7–13, 1972.
- [15] Sefi Ladkani. Universal derived equivalences of posets of cluster tilting objects, 2007.
- [16] Sefi Ladkani. Universal derived equivalences of posets of tilting modules, 2007.
- [17] Sefi Ladkani. On derived equivalences of categories of sheaves over finite posets. *J. Pure Appl. Algebra*, 212(2) :435–451, 2008.
- [18] Helmut Lenzing. Coxeter transformations associated with finite-dimensional algebras. In *Computational methods for representations of groups and algebras (Essen, 1997)*, volume 173 of *Progr. Math.*, pages 287–308. Birkhäuser, Basel, 1999.
- [19] Jean-Louis Loday. Dialgebras. In *Dialgebras and related operads*, volume 1763 of *Lecture Notes in Math.*, pages 7–66. Springer, Berlin, 2001.
- [20] Jean-Louis Loday. Arithmetree. *J. Algebra*, 258(1) :275–309, 2002. Special issue in celebration of Claudio Procesi’s 60th birthday.
- [21] Jean-Louis Loday and María O. Ronco. Order structure on the algebra of permutations and of planar binary trees. *J. Algebraic Combin.*, 15(3) :253–270, 2002.
- [22] Martin Markl, Steve Shnider, and Jim Stasheff. *Operads in algebra, topology and physics*, volume 96 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [23] Nathan Reading. Cambrian lattices. *Adv. Math.*, 205(2) :313–353, 2006.
- [24] Christine Riedtmann and Aidan Schofield. On a simplicial complex associated with tilting modules. *Comment. Math. Helv.*, 66(1) :70–78, 1991.

- [25] María Ronco. Primitive elements in a free dendriform algebra. In *New trends in Hopf algebra theory (La Falda, 1999)*, volume 267 of *Contemp. Math.*, pages 245–263. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [26] Dov Tamari. The algebra of bracketings and their enumeration. *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, 10 :131–146, 1962.
- [27] Bruno Vallette and Jean-Louis Loday. *Algebraic Operads*. a paraitre, 2010. xviii+512 pp.