



HAL
open science

Les estimateurs semi-locaux de périmètre

Alain Daurat, Mohamed Tajine, Mahdi Zouaoui

► **To cite this version:**

Alain Daurat, Mohamed Tajine, Mahdi Zouaoui. Les estimateurs semi-locaux de périmètre. 2011.
hal-00576881

HAL Id: hal-00576881

<https://hal.science/hal-00576881>

Submitted on 22 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les estimateurs semi-locaux de périmètre*

Alain Daurat, Mohamed Tajine, Mahdi Zouaoui
LSIIT CNRS UMR 7005, Université de Strasbourg,
Pôle API, Boulevard Sébastien Brant, 67400 Illkirch-Graffenstaden, France
tajine@unistra.fr

Résumé

Nous présentons dans ce papier une nouvelle classe d'estimateurs de périmètre : les estimateurs semi-locaux. Nous montrons que pour toute courbe $C(g)$ correspondant à une fonction g de classe \mathcal{C}^2 , l'estimation du périmètre de $C(g)$ par un estimateur semi-local, à partir de la discrétisation de $C(g)$ à la résolution r , converge vers la valeur exacte du périmètre de $C(g)$ lorsque la résolution r tend vers 0. Nous introduisons aussi une sous-classe des estimateurs semi-locaux qui n'utilisent comme motifs que les motifs qui sont des segments discrets.

Mots clés : Discrétisation, Estimateur semi-local, Estimateur semi-local basé sur les segments discrets, Périmètre, Motif, Segment discret, Convergence multi-grille.

1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce papier à l'estimation de périmètre de courbes à partir de leurs discrétisations. Plusieurs estimateurs de périmètre ont été proposés dans la littérature en imagerie [6, 8, 7, 12, 4, 5, 11, 1, 9, 2, 3, 10]. Dans [9], la classe des estimateurs locaux a été introduite dans un cadre général et la convergence de ces estimateurs a été étudiée et cette étude a été poursuivie dans [3, 10]. Nous avons notamment démontré dans [3, 10] que si $\mathcal{C}_r(g)$ est la discrétisation à la résolution r d'une courbe $C(g)$ d'une fonction g , alors l'estimation du périmètre de $C(g)$ utilisant les estimateurs locaux à partir de $\mathcal{C}_r(g)$ ne convergent presque jamais (au sens de la mesure de Lebesgue) vers la valeur exacte du périmètre de $C(g)$ lorsque la résolution de l'espace discret tend vers 0 même pour des courbes aussi simples que des morceaux de paraboles.

Nous présentons dans ce papier une nouvelle classe d'estimateurs de périmètre : les estimateurs semi-locaux. Si $\mathcal{C}_r(g)$ est la discrétisation à la résolution r d'une courbe continue $C(g)$ dont on cherche à estimer le périmètre, alors aussi bien les estimateurs locaux que semi-locaux sont obtenus en factorisant la courbe discrète $\mathcal{C}_r(g)$ en motifs de taille $H(r)$ où $r \mapsto H(r)$ est une fonction constante pour les estimateurs locaux, par contre cette fonction est décroissante en r et tend vers l'infini lorsque r tend vers 0 pour les estimateurs semi-locaux. Nous montrons que sous certaines conditions notamment concernant l'ordre de grandeur de $H(r)$ relativement à r , les estimateurs semi-locaux correspondants convergent vers le périmètre exacte pour toute courbe de classe \mathcal{C}^2 . Nous introduisons aussi une sous-classe d'estimateurs semi-locaux : la classe des estimateurs semi-locaux basés sur les segments discrets. Les estimateurs de cette sous-classe ne prennent en compte que les motifs qui sont des segments discrets.

Ce papier est organisé de la façon suivante : dans la deuxième section nous introduisons les notations et les définitions de bases utilisées tout au long de ce papier. Dans la troisième section nous introduisons les estimateurs locaux et nous montrons leur convergence vers la valeur exacte du périmètre lorsque la résolution de l'espace discret tend vers 0 pour les courbes de classe \mathcal{C}^2 . Dans la

*Ce travail a été soutenu par l'Agence Nationale de la Recherche par le contrat ANR-2010-BLAN-0205-01

section quatre nous introduisons une sous-classe de la classe des estimateurs semi-locaux (les estimateurs semi-locaux basés sur les segments discrets) et nous donnons un résultat de convergence concernant cette sous-classe. Le papier ce termine par une conclusion.

2 Définition et Notations

Dans cette section, nous introduisons les notations et les définitions de base qui vont être utilisées tout au long de ce papier.

Notations :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. et $x \in \mathbb{R}$.

- $\llbracket a, b \rrbracket = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}$ est l'intervalle discret constitué des entiers consécutifs se trouvant entre a et b . Par définition, si $a > b$, on a alors $\llbracket a, b \rrbracket = \emptyset$.
- $\lfloor x \rfloor$ est l'entier tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. $\lfloor x \rfloor$ est appelé la **partie entière** du nombre réel x .
- $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$. On a donc $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$. $\lceil x \rceil$ est appelé la **partie entière supérieure** du nombre réel x .
- $\lceil x \rceil = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ est appelé l'**entier le plus proche** du nombre réel x
- $\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$ est appelé la **partie fractionnaire** du nombre réel x . On a donc $x = \lfloor x \rfloor + \langle x \rangle$.
- $D(\alpha, \beta) = \{(x, \alpha x + \beta) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est appelé la **droite euclidienne** de **pente α** et de **phase β** .
- $\mathcal{D}(\alpha, \beta) = \{(x, \lfloor \alpha x + \beta \rfloor) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ est appelé la **droite discrète** de **pente α** et de **phase β** .

Dans toute la suite, seules les droites euclidiennes $D(\alpha, \beta)$ et les droites discrètes $\mathcal{D}(\alpha, \beta)$ pour $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ seront considérées. En effet, on peut toujours se ramener à ce cas par des symétries relativement aux axes OX, OY et/ou la première bissectrice (c'est-à-dire la droite $D(1, 0)$) du repère.

Définitions 1 Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

- *Un motif est une fonction $\omega : \llbracket 0, m \rrbracket \mapsto \mathbb{Z}$ telle que $\omega(k+1) \in \{\omega(k), \omega(k)+1\}$ pour tout $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$. Le nombre m est appelé la **taille du motif** ω . Autrement dit, un motif ω de taille m peut-être vu comme un mot de taille $m+1$ sur l'alphabet \mathbb{Z} .*
- *Un motif ω de taille m est dit un **segment discret de taille m** , s'il existe $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tels que $\omega(k) = \lfloor \alpha x + \beta \rfloor$ pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$.*

Dans toute la suite de ce papier, nous considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

La fonction φ est 1-lipschitzienne c'est-à-dire que l'on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|.$$

La figure FIG. 1 contient la représentation graphique de la fonction φ .

Définitions 2 Soit $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ où a, b sont deux nombres réels tels que $a \leq b$.

- $C(g) = \{(x, g(x)) \mid x \in [a, b]\}$ est la **courbe** correspondant à la fonction g .
- $\mathcal{C}^0[a, b]$ est l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{C}^n[a, b]$ est l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur l'intervalle $[a, b]$ et dont les dérivées successives jusqu'à l'ordre n sont continues sur $[a, b]$ (i.e. Autrement dit $g \in \mathcal{C}^n[a, b]$, si $g^i \in \mathcal{C}^0[a, b]$ pour tout $0 \leq i \leq n$). Pour $g \in \mathcal{C}^n[a, b]$, on note $M_n(g) = \sup_{x \in [a, b]} (|g^n(x)|)$.

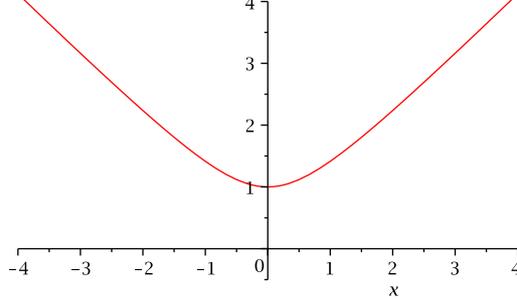


FIG. 1 – Représentation graphique de la fonction φ .

- Soit $g \in \mathcal{C}^1[a, b]$,

$$L_{\text{exact}}(g) = \int_a^b \varphi(g'(t)) dt.$$

$L_{\text{exact}}(g)$ est le périmètre de la courbe $C(g)$ relativement à la mesure usuelle.

- Soit $r > 0$,

$$\mathcal{C}_r(g) = \{r(X, \lfloor \frac{g(rX)}{r} \rfloor) \mid X \in \llbracket A_r, B_r \rrbracket\}$$

où $A_r = \lceil \frac{a}{r} \rceil$ et $B_r = \lfloor \frac{b}{r} \rfloor$.

$\mathcal{C}_r(g)$ est la discrétisation naïve à la résolution r de la courbe $C(g)$.

Remarques 1 1. $\mathcal{D}(\alpha, \beta) = \mathcal{C}_1(g)$ où $g : x \mapsto \alpha x + \beta$.

2. Soit $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Alors, $\mathcal{C}_r(g)$ peut être vu comme un mot sur l'alphabet \mathbb{Z} . En effet, Considérons le mot $\omega_r^g : \llbracket 0, B_r - A_r + 1 \rrbracket \mapsto \mathbb{Z}$ tel que $\omega_r^g(i) = \lfloor \frac{g(r(A_r+i))}{r} \rfloor$ pour tout $i \in \llbracket 0, B_r - A_r + 1 \rrbracket$. Par conséquent, $\mathcal{C}_r(g) = \{r(A_r + i, \omega_r^g(i)) \mid i \in \llbracket 0, B_r - A_r + 1 \rrbracket\}$

Notations :

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

- \mathcal{P}_m est l'ensemble des motifs de longueur m .
- $\mathcal{P} = \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \mathcal{P}_m$ est l'ensemble de tous les motifs.
- \mathcal{S}_m est l'ensemble des segments discrets de longueur m .
- $\mathcal{S} = \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \mathcal{S}_m$ est l'ensemble de tous les segments discrets.
- $\omega_{X,r,m}^g$ est le motif de longueur m de $\mathcal{C}_r(g)$ défini par

$$\omega_{X,r,m}^g(k) = \lfloor \frac{g(r(X+i))}{r} \rfloor - \lfloor \frac{g(rX)}{r} \rfloor, \quad \text{pour } 0 \leq i \leq m.$$

- Soit $\omega \in \mathcal{S}_m$.

$$PI(\omega) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times [0, 1[\mid \omega(k) = \lfloor \alpha k + \beta \rfloor, \quad \text{pour } 0 \leq k \leq m\}.$$

$PI(\omega)$ est appelé la pré-image du segment discret ω .

- La fréquence du motif ω de longueur m dans $\mathcal{C}_r(g)$ est définie par :

$$F_r^g(\omega) = \frac{\text{card}\{k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{B_r - A_r}{m} \rfloor - 1 \rrbracket \mid \omega_{A_r + km, r, m}^g = \omega\}}{\lfloor \frac{B_r - A_r}{m} \rfloor}.$$

Remarques 2 1. Si $g \in \mathcal{C}^1[a, b]$ et $M_1(g) = \max_{x \in [a, b]} |g'(x)|$, alors pour tout $0 \leq k \leq m$

$$\begin{aligned} |\omega_{X, r, m}^g(k)| &= \left| \frac{g(r(X+k))}{r} - \left\langle \frac{g(r(X+k))}{r} \right\rangle - \frac{g(rX)}{r} + \left\langle \frac{g(rX)}{r} \right\rangle \right| \\ &\leq 1 + k \left| \frac{g(r(X+k)) - g(rX)}{rk} \right|. \end{aligned}$$

Mais d'après, le théorème des accroissements finis, on a : $\left| \frac{g(r(X+k)) - g(rX)}{rk} \right| \leq M_1(g)$.
Donc

$$|\omega_{X, r, m}^g(k)| \leq 1 + kM_1(g) \text{ pour tout } 0 \leq k \leq m.$$

2. Soient $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, $r > 0$ et m un entier strictement positif. Alors, le mot ω_r^g correspondant à $\mathcal{C}_r(g)$ (Voir la Remarque 1) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\omega_r^g = w_0 w_1 \dots w_n w'$$

où $n = \lfloor \frac{B_r - A_r}{m} \rfloor - 1$, w_0, w_1, \dots, w_n sont des motifs de taille m et w' est un motif de taille strictement inférieure à m sur l'alphabet \mathbb{Z} . De plus, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le mot w_k est égal, à une translation près, au mot $\omega_{A_r + km, r, m}^g$. En effet, pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on a :

$$w_k(i) = \omega_{A_r + km, r, m}^g(i) + \left\lfloor \frac{g(r(A_r + km))}{r} \right\rfloor.$$

Voir la figure FIG. 2 pour l'illustration de la remarque précédente en considérant les discrétisations d'une courbe à différentes résolutions r et les décompositions de ces discrétisations en motifs de différentes tailles m .

3 Les estimateurs semi-locaux

Nous introduisons dans cette section une nouvelle classe d'estimateurs de périmètre : les estimateurs semi-locaux. Le principe des estimateurs semi-locaux ressemble à celui des estimateurs locaux, la seule différence est que, à la résolution r , la taille $H(r)$ des motifs utilisés par un estimateur semi-local est une fonction décroissante en r et est tend vers l'infini lorsque r tend vers 0 alors que pour un estimateur local la taille des motifs est constante à toutes les résolution.

3.1 Définition des estimateurs semi-locaux

Définition 1 Un estimateur semi-local est un couple (H, p) où

- H est une fonction de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{N}^* qui à chaque résolution r associe une longueur de motif $H(r)$ et
- p est une fonction de \mathcal{P} dans $[0, +\infty[$ qui à chaque motif ω associe un poids $p(\omega)$.

Définition 2 Soient (H, p) un estimateur semi-local, $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ et $r > 0$.

Le périmètre $L(H, p, g, r)$ estimé par (H, p) à la résolution r de la courbe $C(g)$ est définie par :

$$L(H, p, g, r) = r \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor - 1} p(\omega_{A_r + kH(r), r, H(r)}^g).$$

Autrement dit, comme c'est indiqué dans la Remarque 2, si $\mathcal{C}_r(g) = w_0 w_1 \dots w_n w'$ tel que $n = \lfloor \frac{B_r - A_r}{m} \rfloor - 1$, w_0, w_1, \dots, w_n sont des motifs de taille $m = H(r)$ w' est motif de taille strictement inférieure à $H(r)$, alors

$$L(H, p, g, r) = r \sum_{k=0}^n p(\omega_{A_r + km, r, m}^g)$$

où $w_k = \omega_{A_r + km, r, m}^g$ (à une translation près) pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et où la contibution du motif w' , dont la taille est strictement inférieure à $H(r)$, a été négligée. Voir la figure FIG. 2 une illustration de la décomposition des discrétisations d'une courbe en motifs de tailles $H(1) = 2, H(\frac{1}{2}) = 3$ et $H(\frac{1}{4}) = 5$.

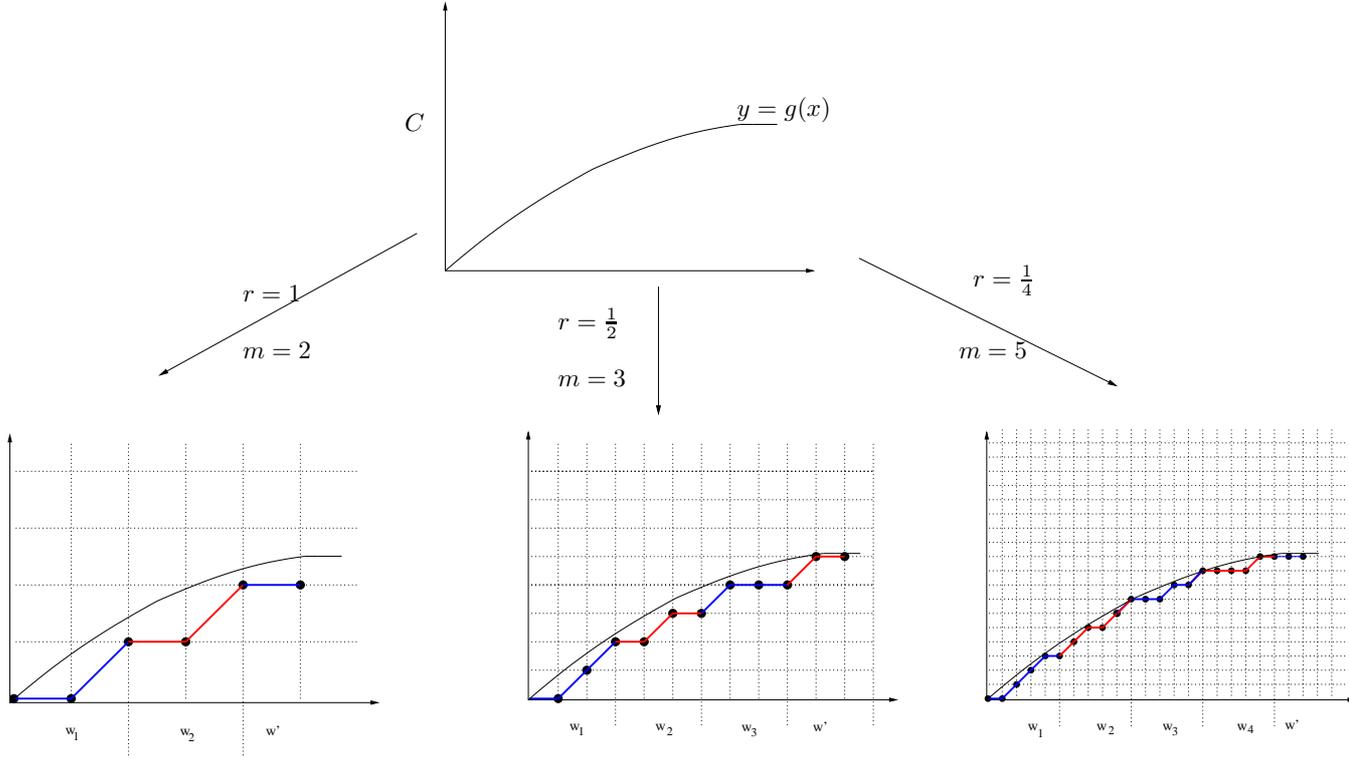


FIG. 2 – Discrétisation d'une courbe à différentes résolutions r et décomposition de ces discrétisations en motifs de différentes tailles m .

3.2 Convergence dans le cas $g \in \mathcal{C}^2[a, b]$

Proposition 1 Si (H, p) est un estimateur semi-local vérifiant les conditions suivantes :

1. $rH(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$
2. $H(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} +\infty$
3. Il existe une fonction $K : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $\omega \in \mathcal{P}$ on a

$$\left| \frac{p(\omega)}{m} - \sqrt{1 + \left(\frac{\omega(m)}{m} \right)^2} \right| \leq K(m)$$

où m est la taille du motif ω et $K(m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$.

Alors, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^2[a, b]$, l'estimation $L(H, p, g, r)$ converge vers le périmètre $L_{\text{exact}}(g)$ de la courbe $C(g)$.

Si de plus, $K(m) = \frac{A}{m}$ où A est une constante et $H(r) = \Theta(r^{-\frac{1}{2}})$, alors l'erreur d'estimation est en $O(r^{\frac{1}{2}})$.

Remarque 1 La condition 3 de la Proposition 1 est vérifiée si $K(m) = \frac{A}{m}$ où A est une constante.

Preuve : Soit $r > 0$ et $X \in \llbracket A_r, B_r - H(r) \rrbracket$, $M_1(g) = \max_{x \in [a, b]} |g'(x)|$ et $M_2(g) = \max_{x \in [a, b]} |g''(x)|$, on a

$$\frac{\omega_{X, r, H(r)}(H(r))}{H(r)} = \frac{G_r(X + H(r)) - G_r(X)}{H(r)}$$

où $G_r(X) = \lfloor \frac{g(rX)}{r} \rfloor$. Or

$$\left| \frac{G_r(X + H(r)) - G_r(X)}{H(r)} - g'(rX) \right| \leq \frac{|G_r(X + H(r)) - \frac{g(r(X+H(r)))}{r} + \frac{g(rX)}{r} - G_r(X)|}{H(r)} + \left| \frac{g(rX + rH(r)) - g(rX)}{rH(r)} - g'(rX) \right|$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $x, x + h \in [a, b]$ on a

$$\left| \frac{g(x + h) - g(x)}{h} - g'(x) \right| \leq \frac{M_2(g)h}{2}.$$

De plus, $G_r(X + H(r)) - \frac{g(r(X+H(r)))}{r} \in]-1, 0]$ et $\frac{g(rX)}{r} - G_r(X) \in [0, 1[$, on en déduit :

$$\left| \frac{G_r(X + H(r)) - G_r(X)}{H(r)} - g'(rX) \right| \leq \frac{1}{H(r)} + \frac{M_2(g)rH(r)}{2}.$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Comme φ est 1-lipschitzienne on a :

$$|\varphi(\frac{\omega_{X,r,H(r)}(H(r))}{H(r)}) - \varphi(g'(rX))| \leq \frac{1}{H(r)} + \frac{M_2(g)rH(r)}{2}.$$

Donc d'après la condition 3 on a :

$$|\frac{p(\omega_{X,r,H(r)})}{H(r)} - \varphi(g'(rX))| \leq K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \frac{M_2(g)rH(r)}{2}.$$

Soit $L_{\text{exact}}(g)$ la longueur de la courbe C . On a :

$$L_{\text{exact}}(g) - L(H, p, g, r) = \int_a^b \varphi(g'(t))dt - r \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor - 1} p(\omega_{A_r + kH(r), r, H(r)}^g).$$

Pour $t \in [rX, rX + rH(r)]$ on a :

$$\begin{aligned} \left| \varphi(g'(t)) - \frac{p(\omega_{X,r,H(r)})}{H(r)} \right| &\leq |\varphi(g'(t)) - \varphi(g'(rX))| + \left| \frac{p(\omega_{X,r,H(r)})}{H(r)} - \varphi(g'(rX)) \right| \\ &\leq M_2(g)rH(r) + K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \frac{M_2(g)rH(r)}{2} \\ &= K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \frac{3}{2}M_2(g)rH(r) \end{aligned}$$

En intégrant sur chaque intervalle $[rX, rX + rH(r)]$ et en sommant pour tout $X = A_r + kH(r)$ avec $k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor - 1 \rrbracket$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \int_{rA_r}^{r(A_r + \lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor)} \varphi(g'(t))dt - rH(r) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor} \frac{p(\omega_{A_r + kH(r), r, H(r)})}{H(r)} \right| \\ \leq rH(r) \lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor \left(K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \frac{3}{2}M_2(g)rH(r) \right) \\ \leq rH(r) \frac{b - a}{rH(r)} \left(K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \frac{3}{2}M_2(g)rH(r) \right) \\ = (b - a) \left(K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \frac{3}{2}M_2(g)rH(r) \right) \end{aligned}$$

On a : $a \leq rA_r < a + r$ et $b - rH(r) < r(A_r + \lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor) \leq b$, donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi(g'(t))dt - L(H, p, g, r) \right| &\leq (r(H(r) + 1)\varphi(M_1(g)) + (b - a) \left(K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \frac{3}{2}M_2(g)rH(r) \right)) \\ &\leq (b - a) \left(K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \left(\frac{3}{2}M_2(g) + \frac{\varphi(M_1(g))}{b - a} \right) rH(r) + r\varphi(M_1(g)) \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Or les conditions 1, 2 et 3 entraînent que le membre droit de cette inégalité tend vers 0 quand r tend vers 0, donc on a bien $L(H, p, g, r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} L_{\text{exact}}(g)$.

De plus, si $K(m) = \frac{A}{m}$ où A est une constante et $H(r) = \Theta(r^{-\frac{1}{2}})$, alors la même formule montre que $|L(H, p, g, r) - L_{\text{exact}}(g)| = O(r^{\frac{1}{2}})$. \square

Remarque 2 Supposons que $K(m) = \frac{A}{m}$. La borne supérieure de l'erreur d'estimation donnée par la formule (1) est minimale pour

$$H(r) = \sqrt{\frac{A + 1}{\frac{3}{2}M_2(g) + \frac{\varphi(M_1(g))}{b - a}}} r^{-\frac{1}{2}}.$$

Lemme 1 Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in \mathcal{S}_m$ et $(\alpha, \beta) \in PI(\omega)$ et posons $p(\omega) = m\sqrt{1 + \alpha^2}$. Alors

$$\left| \frac{p(\omega)}{m} - \varphi\left(\frac{\omega(m)}{m}\right) \right| \leq \frac{1}{m}$$

Preuve : Si $(\alpha, \beta) \in PI(\omega)$, alors $\omega(m) \leq \alpha m + \beta < \omega(m) + 1$. On en déduit que

$$\alpha + \frac{\beta - 1}{m} < \frac{\omega(m)}{m} \leq \alpha + \frac{\beta}{m}.$$

Comme $\beta \in [0, 1[$ on en déduit que $\left| \alpha - \frac{\omega(m)}{m} \right| \leq \frac{1}{m}$, comme la fonction φ est 1-lipschitzienne on en déduit que $\left| \frac{p(\omega)}{m} - \varphi\left(\frac{\omega(m)}{m}\right) \right| \leq \frac{1}{m}$ et donc $p(\omega)$ vérifie la condition 3 de la proposition 1 avec $K(m) = \frac{1}{m}$. \square

D'après le Lemme 1 ci-dessus, les exemples ci-dessous vérifient les conditions de la Proposition 1.

Exemples :

Soit $r > 0$

- $H(r) = \lfloor r^{-\frac{1}{2}} \rfloor$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \mathcal{P}_m, p(\omega) = d_2((0, \omega(0)), (m, \omega(m))) = \sqrt{m^2 + \omega(m)^2}$ et par conséquent, la Condition 3 de la Proposition 1 est vérifiée en prenant $K(m) = 0$ pour tout m .
- $H(r) = \lfloor r^{-\frac{1}{2}} \rfloor$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \mathcal{P}_m, p(\omega) = \lfloor d_2((0, \omega(0)), (m, \omega(m))) \rfloor = \lfloor \sqrt{m^2 + \omega(m)^2} \rfloor$ et par conséquent, la Condition 3 de la Proposition 1 est vérifiée en prenant $K(m) = \frac{1}{m}$ pour tout m .
- $H(r) = \lfloor r^{-\frac{1}{2}} \rfloor$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*$,
 - $\forall \omega \in \mathcal{P}_m \setminus \mathcal{S}_m, p(\omega) = d_2((0, \omega(0)), (m, \omega(m))) = \sqrt{m^2 + \omega(m)^2}$
 - $\forall \omega \in \mathcal{S}_m$, si $(\alpha, \beta) \in PI(\omega)$, alors $p(\omega) = m\sqrt{1 + \alpha^2}$ (i.e $p(\omega)$ est la longueur du segment de sommets $(0, \beta)$ et $(m, \alpha m + \beta)$).

Par conséquent, la Condition 3 de la Proposition 1 est vérifiée en prenant $K(m) = \frac{1}{m}$ pour tout m .

- $H(r) = \lfloor r^{-\frac{1}{2}} \rfloor$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*$,
 - $\forall \omega \in \mathcal{P}_m \setminus \mathcal{S}_m, p(\omega) = \lfloor d_2((0, \omega(0)), (m, \omega(m))) \rfloor = \lfloor \sqrt{m^2 + \omega(m)^2} \rfloor$.
 - $\forall \omega \in \mathcal{S}_m$, si $(\alpha, \beta) \in PI(\omega)$, alors $p(\omega) = \lfloor m\sqrt{1 + \alpha^2} \rfloor$ (i.e $p(\omega)$ est la partie entière de longueur du segment de sommets $(0, \beta)$ et $(m, \alpha m + \beta)$).

Par conséquent, la Condition 3 de la Proposition 1 est vérifiée en prenant $K(m) = \frac{2}{m}$ pour tout m .

4 Les estimateurs semi-locaux basés sur les segments discrets

Nous introduisons dans cette section une sous-classe des estimateurs semi-locaux : les estimateurs semi-locaux basés sur les segments discrets. Ce sont des estimateurs dont lesquels on ne compte pas la contibution des motifs qui ne sont pas des segments discrets.

Définition 3 Soient $g \in \mathcal{C}^2[a, b]$ et $r > 0$. La fréquence, dans $\mathcal{C}_r(g)$, des motifs de longueur m qui ne sont pas des segments discrets est définie par :

$$FNS_{r,m}^g = \frac{\text{card}\{k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{B_r - A_r - m}{m} \rfloor \rrbracket \mid \omega_{A_r + km, r, m}^g \in \mathcal{P}_m \setminus \mathcal{S}_m\}}{\lfloor \frac{B_r - A_r - m}{m} \rfloor + 1}.$$

Définition 4 Un estimateur semi-local basé sur les segments discrets est un couple (H, p') où

- H est une fonction de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{N}^* qui à chaque résolution r associe une longueur de motif $H(r)$ et
- p' est une fonction de \mathcal{S} dans $[0, +\infty[$ qui à chaque segment discret ω associe un poids $p'(\omega)$.

Définition 5 Soient (H, p') un estimateur semi-local basé sur les segments discrets, $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ et $r > 0$.

La longueur $L'(H, p', g, r)$ estimé par (H, p') à la résolution r de la courbe $C(g)$ est définie par :

$$L'(H, p', g, r) = r \sum_{k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{B_r - H(r) - A_r}{H(r)} \rfloor \rrbracket \text{ et } \omega_{A_r + kH(r), r, H(r)}^g \in \mathcal{S}} p'(\omega_{A_r + kH(r), r, H(r)}^g).$$

Remarque 3 L'estimateur $L'(H, p', \cdot, r)$ est obtenu à partir de l'estimateur $L(H, p, \cdot, r)$ en négligeant dans $L(H, p, \cdot, r)$ les contributions des motifs qui ne sont pas des segments discrets.

La figure FIG. 3 présente des discrétisations d'une courbe à différentes résolutions contenant des motifs qui ne sont pas des segments discrets ils ne seront donc pas pris en compte par l'estimateur semi-local L' .

Téorème 1 Soit (H, p') un estimateur semi-local basé sur les segments discrets et soit $g \in \mathcal{C}^2[a, b]$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $rH(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$
2. $H(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} +\infty$
3. Il existe une fonction $K : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $\omega \in \mathcal{S}$ on a

$$\left| \frac{p'(\omega)}{m} - \sqrt{1 + \left(\frac{\omega(m)}{m}\right)^2} \right| \leq K'(m)$$

où m est la taille du segment discret ω et $K'(m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$.

4. $FNS_{r, H(r)}^g \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$.

Alors,

$$L'(H, p', g, r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} L_{\text{exact}}(g) = \int_a^b \sqrt{1 + g'(t)^2} dt.$$

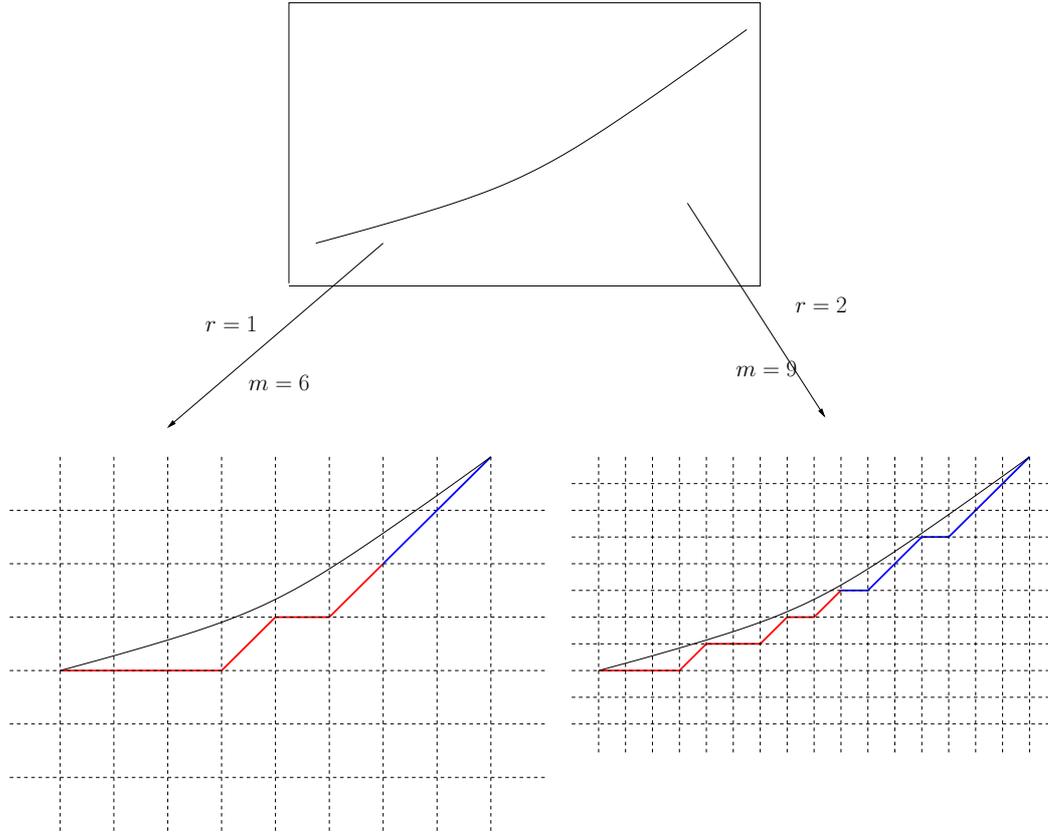


FIG. 3 – Les motifs rouges ne sont pas des segments discrets, les motifs bleus sont des segments discrets.

Preuve : Considérons une extension p de p' telle que $p : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}^+$ et pour tout $\omega \in \mathcal{P}$

$$\left| \frac{p(\omega)}{m} - \sqrt{1 + \left(\frac{\omega(m)}{m} \right)^2} \right| \leq K(m)$$

où m est la longueur de ω et $K(m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$.

Il suffit, par exemple, de prendre pour tout m et tout $\omega \in \mathcal{P}_m \setminus \mathcal{S}_m$, $p(\omega) = \sqrt{m^2 + \omega(m)^2}$ et $K(m) = \sup(K'(m), \frac{1}{m})$. On a bien donc $K(m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$.

Ceci implique que pour tout $\omega \in \mathcal{P}_m$, $p(\omega) \leq \sqrt{m^2 + \omega(m)^2} + K(m)m$ et d'après la Remarque 2.1, si $\omega = \omega_{X,r,m}^g$, alors $|\omega_{X,r,m}^g(m)| \leq 1 + mM_1(g)$. Donc, si $\omega = \omega_{X,r,m}^g$, alors

$$p(\omega) \leq m \sqrt{1 + (M_1(g) + \frac{1}{m})^2} + K(m)m.$$

$$\begin{aligned} |L(H, p, g, r) - L'(H, p', g, r)| &= r \sum_{k \in [0, \lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} - 1 \rfloor] \text{ et } \omega_{A_r + kH(r), r, H(r)}^g \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{S}} p(\omega_{A_r + kH(r), r, H(r)}^g) \\ &\leq r \left(\lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor FNS_{r, H(r)}^g (\sqrt{H(r)^2 + (H(r)M_1(g) + 1)^2} + K(H(r))H(r)) \right) \\ &\leq ((b - a) \sqrt{1 + (M_1(g) + \frac{1}{H(r)})^2} + K(H(r))) FNS_{r, H(r)}^g \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Mais comme, d'après la Proposition 1, $L(H, p, g, r)$ converge vers $L_{\text{exact}}(g)$ quand r tend vers 0, alors $L'(H, p', g, r)$ converge vers $L_{\text{exact}}(g)$ quand r tend vers 0. \square

Remarque 4 Si $H(r) = \Theta(r^{-\frac{1}{2}})$ et $K(m) = \frac{A}{m}$ où A est une constante, alors

$$|L'(H, p', g, r) - L_{\text{exact}}(g)| = O(r^{\frac{1}{2}}) + O(FNS_{r, H(r)}^g)$$

5 Conclusion

Nous avons proposé dans ce papier une nouvelle classe d'estimateurs de périmètre : les estimateurs semi-locaux. Nous avons notamment démontré que les estimations de périmètre basées sur les estimateurs semi-locaux convergent vers la valeur exacte du périmètre pour toute courbe de classe \mathcal{C}^2 . Nous avons ensuite introduit une sous-classe de la classe des estimateurs semi-locaux : les estimateurs semi-locaux basés sur les segments discrets. Nous avons démontré aussi un résultat de convergence "implicite" concernant cette sous-classe d'estimateurs.

À la mémoire d'Alain : Alain Daurat, co-auteur de ce papier, est décédé le 25 juin 2010. Cet article est dédié à sa mémoire.

Références

- [1] David Coeurjolly. Algorithmique et géométrie pour la caractérisation des courbes et des surfaces. PhD thesis, Université Lyon 2, December 2002., 2002.
- [2] David Coeurjolly and Reinhard Klette. A comparative evaluation of length estimators. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 26(2) :252–258, 2004.
- [3] Alain Daurat, Mohamed Tajine, and Mahdi Zouaoui. Patterns in discretized parabolas and length estimation. In *Proc. of DGCI 2009*, volume 5810 of *Lecture Notes in Comp. Sci.*, pages 373–384, 2009.
- [4] Leo Dorst and Arnold W. M. Smeulders. Length estimators for digitized contours. *Comput. Vision Graph. Image Process.*, 40(3) :311–333, 1987.
- [5] Leo Dorst and Arnold W.M. Smeulders. Discrete straight line segments : Parameters, primitives and properties. In *Vision Geometry*, volume 119 of *Contemp. Math.*, pages 45–62. American Mathematical Society, 1991.
- [6] H. Freeman. Boundary encoding and processing. In : *Picture Processing and Psychopictorics (B.S. Lipkin and A. Rosenfeld, eds.)*, 33(1) :241–266, 1970.
- [7] F.C.A. Groen and P.W. Verbeek. Freeman code probabilities of object boundary quantized contours. *Computer Graphics and Image Processing*, 7(1) :391–402, 1978.
- [8] Z. Kulpa. Area and perimeter measurement of blobs in discrete binary pictures. *Computer Vision and Image Processing*, 6(1) :434–454, 1977.
- [9] Mohamed Tajine and Alain Daurat. On local definitions of length of digital curves. In *Proc. of DGCI 2003*, volume 2886 of *Lecture Notes in Comp. Sci.*, pages 114–123, 2003.
- [10] Mohamed Tajine and Alain Daurat. Patterns for multigrid equidistributed functions. application to general parabolas and length estimation. *Theoret. Comput. Sci.*, (À paraître), 2011.
- [11] Anne Vialard. *Chemins Euclidiens : Un modèle de représentation des contours discrets*. PhD thesis, 1996.
- [12] A.M. Vossepoel and A.W.M. Smeulders. Vector code probability and metrication error in the representation of straight lines of finite length. *Computer Graphics and Image Processing*, 20(1) :347–364, 1982.