

Je parlerai des deux travaux suivants :

- Smooth Projectives Symmetric Variétés with Picard Number equal to one, à paraître dans International Journal of Mathematics en février 2011 (voir arXiv : [math.AG/0702340v2](https://arxiv.org/abs/math/0702340v2)).
- Geometrical description of smooth projectives symmetric variétés with Picard number equal to one, Transformation groups (2010), 15, n.1, pages 201-22.

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES

Soit G un groupe semi-simple (réductif) connexe sur \mathbb{C}

et soit θ un involution de G ($\theta \in \text{Aut}(G)$ et $\theta^2 = id$).

Si $(G^\theta)^0 \subset H \subset N_G(G^\theta)$, alors G/H est un espace symétrique.

Une variété symétrique est un plongement normale (ouvert et équivariant) de G/H .

On peut toujours supposer que G est simplement connexe.

Les variétés symétriques sont sphériques, i.e. $\exists B$ -orbite ouverte.

Exemples

1) une groupe semi-simple (réductif) \dot{G} :

$G = \dot{G} \times \dot{G}$ agit par multiplication sur \dot{G} ;

$$\theta(x, y) = (y, x) ;$$

$$G^\theta = \{(g, g) : g \in \dot{G}\} \cong \dot{G} ;$$

2) La variété des quadriques projectives non-dégénérées dans \mathbb{P}^n est $X_0 = \{A \in M_{n+1}(\mathbb{C}) : M^t = M \text{ et } \det(M) = 1\}$:

$G = SL_{n+1}$ agit par conjugation on X_0 ;

$$\theta(g) = (g^t)^{-1} ;$$

$$H = N_G(G^\theta) \text{ et } G^\theta = SO_{n+1}.$$

Les variétés symétriques (algébriques) sont liées à les espaces symétriques Riemanniens.

Une variété Riemannienne connexe \mathcal{O} est un espace symétrique Riemannien si, $\forall x \in \mathcal{O}$, $\exists \varphi_x \in \text{Isom } \mathcal{O}$ qui invertit les géodésiques par x .

Alors, $\exists G_{\mathbb{R}} \subset \text{Isom } \mathcal{O}$ groupe de Lie (réel) semi-simple qui agit transitivement sur \mathcal{O} .

$\theta_x(g) := \varphi_x g \varphi_x^{-1}$ alors $\theta_x \in \text{Aut}(G)$ et θ_x^2

$G_x \subset G$ compact et $(G_x^\theta)^\circ \subset G_x \subset G_x^\theta$.

Les espaces symétriques Riemanniens sont localement des formes réels des espace symétriques algébriques.

Systeme des racines restreintes

Soit $x_0 = H/H \in G/H$.

Soit $T \subset G$ une tore maximal tel que $\theta(T) = T$ et $\dim Tx_0$ est maximale.

L'involution θ induit un involution sur $\chi(T)_{\mathbb{R}}$ tel que $\theta(R_G) = R_G$, où R_G est le système des racines de G par respect à T .

L'ensemble $R_{G,\theta} := \{\alpha - \theta(\alpha) : \alpha \in R_G\} \setminus \{0\}$ est un système de racine pas nécessairement réduit ;

$R_{G,\theta}$ engendre le sous-espace propre de $\chi(T)_{\mathbb{R}}$ associé à la valeur propre -1 de θ .

On fixe un sous-groupe de Borel $B \subset G$ appropriée tel que Bx_0 est ouverte. Alors, l'ensemble $\{\alpha - \theta(\alpha) : \alpha \text{ simple}\} \setminus \{0\}$ est une base de $R_{G,\theta}$.

Soit $S := T/T \cap H$; alors $T \cdot x_0 \cong S \cdot x_0$ est isomorphe à S .

Le rang de G/H est $\dim S$;

$\dim S = \text{rang} R_{G,\theta}$ (si G est semi-simple) et est la codimension maximal d'une U -orbite, où U est le radical unipotent U de B .

Un poids dominant λ de G est un poids sphérique si $V_\lambda^{G^\theta} \neq 0$. Alors $\dim V_\lambda^{G^\theta} = 1$.

Le réseau de poids dominant de $R_{G,\theta}$ est engendré par les poids sphériques.

CLASSIFICATION COMBINATOIRE

On classifie les variétés symétriques projectives X non-singulières avec $Pic(X) = \mathbb{Z}$ (en particulier $-K_X$ est ample).

On fera les hypothèses supplémentaires suivantes :

- X est simple, i.e. a une unique orbite fermée ;
- $R_{G,\theta}$ est irréductible ;
- H est semi-simple ;
- G/H est de type adjoint, i.e. $H = N_G(G^\theta)$.

En général,

- X a au plus deux orbites fermées ;
- $R_{G,\theta}$ est irréductible ou a type $A_1 \times A_1$;
- nombre de diviseurs premiers B -stable de $G/H = \text{rang}(G/H)$; de plus, si $\text{rang } X \geq 3$, alors H est semi-simple.

Quand si H est semi-simple la dernière condition est automatiquement satisfaite.

Les instruments principaux de la classification sont le suivants :

1. classification des variétés symétriques (sphérique) avec orbite ouverte fixée : théorie des éventails coloriés (Luna-Vust, '83)
2. description du groupe de Picard d'une variété symétrique (sphérique) : Brion, '89
3. critère de non-singularité

1) Si X est simple, H semi-simple et G est semi-simple adjoint, alors $\exists \lambda$ sphérique t.q. X est la normalisation X_λ de $\overline{Gv_H} \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$.

$$V_\lambda^H = \mathbb{C}v_H \text{ et } \mathbb{P}(V_\lambda)^H = [v_H]$$

$$X_\lambda \cong X_\mu \iff \text{supp } \lambda = \text{supp } \mu$$

Théorème [- ; 2008] *Si X est comme avant, il y a les cas suivantes :*

- $R_{G,\theta} = A_l$ et $\text{supp } \lambda = \alpha_1$ (ou α_l) ;
- $R_{G,\theta} = B_l$ et $\text{supp } \lambda = \alpha_1$;
- $R_{G,\theta} = BC_l$ et $\text{supp } \lambda = \alpha_1$;
- $R_{G,\theta} = G_2$ et $\text{supp } \lambda = \alpha_2$.

2) $D(G/H) = \{\text{couleurs de } G/H\} =$
 $\{\text{diviseurs premiers } B\text{-stables de } G/H\}$

$D(X_\lambda) = \{\text{couleurs de } X\} =$
 $\{D \in G/H : \bar{D} \supset G/P_\lambda\}$

$\text{Pic}(X_\lambda) = \bigoplus_{D \in D(G/H) \setminus D(X_\lambda)} \mathbb{Z}D$

$\#D(X_\lambda) = \#(R_{G,\theta} \setminus \text{supp } \lambda)$

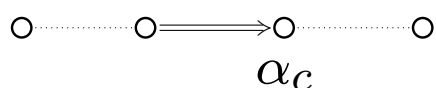
$\text{rang Pic}(X_\lambda) = \#\text{supp } \lambda$

critères de non-singularité :

- Brion, '91 ; variétés sphériques
- Timashev, '03 ; plongements projectifs d'un groupe reductive (plus normalité)
- -, '08 ; variétés symétriques
- Bravi, Gandini, Maffei, - , '10 ; variétés symétriques simples de type adjoint (plus normalité si $G/H = \dot{G}$)

3) **Théorème [Bravi, Gandini, Maffei, - ; 2010]** X_λ est non-singulier si et seulement si sont vérifiées les conditions suivantes :

(N) si $\text{supp } \lambda$ contient une racine longue, alors il contient la racine courte non orthogonale à une racine longue ;

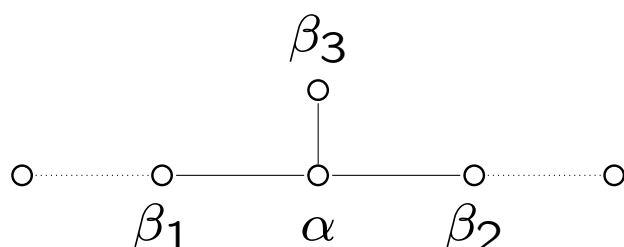


(A) chaque composant de $R_{G,\theta}^\vee - \text{supp } \lambda$ a type A ;

(Q1) $\text{supp } \lambda$ est connexe ;

(Q2) ou $\text{supp } \lambda$ est une extrémité de $R_{G,\theta}$ ou bien $\#\text{supp } \lambda \geq 2$;

(Q3) si $R_{G,\theta}$ a type D or E, alors $\text{supp } \lambda$ contient $\alpha, \beta_{i_1}, \beta_{i_2}$.



Esquisse de la preuve

$$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \implies \# \text{supp } \lambda = 1$$

$$[Q2] \implies \text{supp } \lambda \text{ est une extreme de } R_{G,\theta}$$

$$[Q3] \implies R_{G,\theta} \neq D, E$$

$$[A] \implies R_{G,\theta} \neq F_4$$

Si $R_{G,\theta} = A_l$ alors (A) est (N) sont vérifiées trivialement

Si $R_{G,\theta} = B_l, BC_l$ or C_l

$$[A] \implies \text{supp } \lambda = \alpha_l$$

$$[N] \implies R_{G,\theta} = B_l, BC_l$$

Si $R_{G,\theta} = G_2$

$$[A] \implies \text{supp } \lambda = \alpha_1$$

(A) est (N) sont vérifiées

DESCRIPTION GÉOMÉTRIQUE

Théorème Soit X un plongement, non-singulier, projectif de G/H avec $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ (G est semi-simple et simplement connexe).

$\text{Aut}(X)$ n'agit pas transitivement sur X si et seulement si :

1. $R_{G,\theta} = A_2$ ou $R_{G,\theta} = G_2$;
2. $H = G^\theta$.

Dans ce cas,

$\text{Aut}^0(X) = G$, à isogénies près.

Un exemple de n'importe quel rang

Soit $V_m := \text{span}\{e_1, \dots, e_m\} \subset \mathbb{C}^n$; la forme bilinéaire symétrique standard est non-dégénère sur V_m .

$SO_n/S(O_m \times O_{n-m}) \cong SO_n \cdot V_m$ et
 $SO_n \cdot V_m \subset \mathbb{G}_m(n)$ est ouvert.

Donc $\mathbb{G}_m(n)$ est le plongement projectif non-singulier de $SO_n/S(O_m \times O_{n-m})$ avec nombre de Picard un.

$R_{G,\theta}$ de type G_2 .

Suppose de plus que $R_{G,\theta} = G_2$; alors il y a deux cas :

1. $G/H = G_2/(SL_2 \times SL_2)$. De plus :

– $Aut(X) = G_2$.

– On peut étendre θ à une involution de SO_7 telle que $SO_7^\theta = S(O_3 \times O_4)$.

– $\mathbb{G}_3(7) \subset \mathbb{P}^{34}$ est l'unique plongement non-singulier projectif de $SO_7/N_{SO_7}(S(O_3 \times SO_4))$ avec nombre de Picard un. De plus,

$$G_2/(SL_2 \times SL_2) \subset SO_7/N_{SO_7}(S(O_3 \times SO_4)).$$

- $X = \mathbb{G}_3(7) \cap \mathbb{P}^{27}$, où $\mathbb{P}^{27} \subset \mathbb{P}^{34}$ est stable par G_2 (le morphisme $\mathbb{G}_3(7) \hookrightarrow \mathbb{P}^{34}$ est le plongement de Plücker).
- Si on considère \mathbb{C}^7 comme le sous-espace des éléments imaginaires des octaves complexifiées $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, alors

$$X = \{W \subset \mathbb{C}^7 : W \oplus \mathbb{C}1 \subset \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \text{ est une sous-algèbre associative} \}$$

Quelques détails pour $G_2/(SL_2 \times SL_2)$

Soit $V = V_{\omega_1}$ la représentation standard de G_2 , $\dim V = 7$;

soit $\mathbb{G}_3(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^3 V)$ le plongement de Plücker ;

$\Lambda^3 V \cong V \oplus V_{2\omega_1} \oplus \mathbb{C}$ comme représentation par G_2 .

$V(2\omega_1) \oplus \mathbb{C}$ est le noyau de la restriction de l'associator $[\cdot, \cdot, \cdot] : \Lambda^3 \text{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$

(on a $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$).

La condition $X = \mathbb{G}_3(7) \cap \mathbb{P}^{27}$ permet de prouver la deuxième description.

$\overline{G_2/SL_2 \times SL_2} \subset X'' \subset G_3(V)$, où
 $X'' := G_3(V) \cap \mathbb{P}(V_{2\omega_1} \oplus \mathbb{C})$, car $V^H = 0$.

X'' a une unique orbite fermée par G_2 , car V est une G_2 -représentation simple.

X'' est connexe car X'' est stable par G_2 .

La normalisation de X' est $X_{2\omega_1}$.

C'est suffisant de prouver que X'' est lisse de dimension 8 dans le voisinage d'un point arbitraire de l'orbite fermée.

2. $G/H = G_2$. Alors :

– $\text{Aut}(X) = \text{span}\{G_2 \times G_2, \theta\}$ et

$$\text{Aut}^0(X) = G_2 \times G_2.$$

– On peut étendre θ à une involution de $SO_7 \times SO_7$ telle que $(SO_7 \times SO_7)^\theta$ est la diagonale.

– \mathbb{S}_7 est l'unique plongement projectif non-singulier de SO_7 avec nombre de Picard un. De plus,

$$X = \overline{G_2} \subset \overline{SO_7} = \mathbb{S}_7$$

(\mathbb{S}_7 est une composante connexe de $\mathbb{I}G_7(14)$).

- *Il y a un plongement $S_7 \hookrightarrow \mathbb{P}^{63}$ équivariant par $Spin_{14}$.*

Je peux considérer SO_7 comme une $(Spin_7 \times Spin_7)$ -variété ;

il y a un plongement

$$G_2 \times G_2 \subset Spin_7 \times Spin_7$$

que relève le plongement

$$G_2 \times G_2 \subset SO_7 \times SO_7.$$

- *$X = IG_7(14) \cap \mathbb{P}^{49}$, où $\mathbb{P}^{49} \subset \mathbb{P}^{63}$ est stable par $G_2 \times G_2$.*

$R_{G,\theta}$ de type A_2 .

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \mathbb{R} & & \mathbb{C} & & \mathbb{H} & & \mathbb{Q} & & \\
 & & & & & & & & & \\
 SL_3/SO_3 & \hookrightarrow & SL_3 & \hookrightarrow & SL_6/Sp_6 & \hookrightarrow & E_6/F_4 & & (So) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \overline{SL_3/SO_3} & \hookrightarrow & \overline{SL_3} & \hookrightarrow & \overline{SL_6/Sp_6} & \hookrightarrow & \overline{E_6/F_4} & & (Sf) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 LG_3(6) & \hookrightarrow & G_3(6) & \hookrightarrow & S_{12} & \hookrightarrow & G_3(\mathbb{O}^6) & & (F3) \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 Sp_6/P_3 & \hookrightarrow & Sl_6/P_3 & \hookrightarrow & SO_{12}/P_6 & \hookrightarrow & E_7/P_7 & & (F3)
 \end{array}$$

Dans (So) il y a les G/G^θ avec $R_{G,\theta} \equiv A_2$;

Dans (Sf) il y a leur plongements lisses avec nombre de Picard un ;

$(F3)$ est la troisième ligne du carré magique de Freudenthal.

On peut décrire les variétés dans (F3) comme Grassmanniennes Lagrangiennes $\mathbb{L}\mathbb{G}(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$ sur une algèbre de composition complexe \mathbb{A} .

De plus, $\overline{G/G^\theta}$ est une section hyperplane de la variété dans (F3) associée.

Les variétés dans cette dernière ligne sont variétés de Legendre.

Le plongement de SL_3 a été étudié par

J. Buczyński.

$Aut(SL_3)$ a 4 composantes connexes et

$$Aut^0(SL_3) = (SL_3 \times SL_3) / \{(g, g) : g^3 = id\}.$$

Dans les autres cas $Aut^0(X) = G$ et

$$Aut(X) = span\{G, \theta\}.$$

Quelques mots pour le cas de \mathbb{A}_2

Soit $\mathbb{A}_{\mathbb{C}} = \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ où \mathbb{A} est \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} or \mathbb{O} .

$$\text{Soit } \mathcal{J}_3(\mathbb{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & \bar{x}_3 & \bar{x}_2 \\ x_3 & r_2 & \bar{x}_1 \\ x_2 & x_1 & r_3 \end{pmatrix}, r_i \in \mathbb{C}, x_i \in \mathbb{A} \right\}$$

l'espace de matrices \mathbb{A} -hermitien de ordre trois, avec coefficients dans \mathbb{A} .

$\mathcal{J}_3(\mathbb{A})$ est une algèbre de Jordan avec produit $A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA)$, où AB est le produit de matrices usuel. Soit :

$$SL_3(\mathbb{A}) := \{g \in GL_{\mathbb{C}}(\mathcal{J}_3(\mathbb{A})) : \det(gA) = A \\ \forall A \in \mathcal{J}_3(\mathbb{A})\} \text{ et}$$

$$SO_3(\mathbb{A}) := \{g \in SL_3(\mathbb{A}) : g(A \circ B) = gA \circ gB \\ \forall A, B \in \mathcal{J}_3(\mathbb{A})\}.$$

Le déterminant est une forme cubique sur $\mathcal{J}_3(\mathbb{A})$,
tel que $\text{com}(P)P = \det(P)I \quad \forall P \in \mathcal{J}_3(\mathbb{A})$,

où $\text{com } P$ est la co-matrice de P :

$$\text{com } P = P^2 - (\text{trace } P)P + \frac{1}{2}((\text{trace } P)^2 - \text{trace } P^2)I$$

$$\exists P^{-1} \iff \det(P) \neq 0.$$

Les variétés $SL_3(\mathbb{A})/SO_3(\mathbb{A})$ sont les espaces
symétriques avec $R_{G,\theta}$ de type A_2 et $H = G^\theta$.

Soit $\mathcal{Z}_2(\mathbb{A}) := \mathbb{C} \oplus \mathcal{J}_3(\mathbb{A}) \oplus \mathcal{J}_3(\mathbb{A})^* \oplus \mathbb{C}^*$ l'espace de matrices de Zorn.

$\exists!$ sous-groupe $Sp_6(\mathbb{A}) \subset GL_{\mathbb{A}}(\mathcal{Z}_2(\mathbb{A}))$ connexe et fermé tel que $Lie((Sp_6(\mathbb{A}))) = \mathfrak{sp}_6(\mathbb{A}) := \mathbb{C}^* \oplus \mathcal{J}_3(\mathbb{A})^* \oplus (Lie(SL_3(\mathbb{A})) + \mathbb{C}) \oplus \mathcal{J}_3(\mathbb{A}) \oplus \mathbb{C}$;

de plus il y a une forme symplectique invariante par $Sp_6(\mathbb{A})$ sur $\mathcal{Z}_2(\mathbb{A})$.

La $Sp_6(\mathbb{A})$ -orbite fermée dans $\mathbb{P}(\mathcal{Z}_2(\mathbb{A}))$ est l'image de l'application rationnelle équivariante :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \mathcal{J}_3(\mathbb{A})) & \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Z}_2(\mathbb{A})) \\ (x, P) & \rightarrow (x^3, x^2 P, x \operatorname{com}(P), \det(P)). \end{aligned}$$

Si on pense \mathbb{C} comme l'espace de matrices diagonales
et (I, P) comme une matrice de 3 vecteurs
lignes,

alors ϕ a la même expression du plongement
de Plücker.

$P \in \mathcal{J}_3(\mathbb{A}) \iff$ les 3 vecteurs (I, P) sont or-
thogonaux
par rapport à la forme symplectique Hermi-
tienne

$$\omega(X, Y) = {}^t X \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \bar{Y}$$

Donc, on peut interpréter ces variétés comme $\mathbb{L}\mathbb{G}(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$.

$$SL_3(\mathbb{A})/SO_3(\mathbb{A}) := \phi(SL_3(\mathbb{A}) \cdot [1, I])$$

$$\subset X' := \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{L}\mathbb{G}(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6) : x_1 = x_4\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \mathcal{J}_3(\mathbb{A}) \oplus \mathcal{J}_3(\mathbb{A})^* \oplus \mathbb{C}^*).$$

La normalisation de X' est le plongement lisse projectif X de $SL_3(\mathbb{A})/SO_3(\mathbb{A})$ avec $Pic(X) = \mathbb{Z}$

(grâce à la classification des variétés symétriques par le moyen des éventails coloriés).

X' est lisse par un résultat de J. M. Landsberg et L. Manivel sur la dimension du lieu singulier des sections hyperplanes des $\mathbb{L}\mathbb{G}(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$.

Variétés de Legendre

Les variétés dans (3F) sont variétés de Legendre.

X est de Legendre si $\exists X \subset \mathbb{P}(V)$ t.q. :

- 1) $\dim V = 2\dim X + 2$;
 - 2) $\exists q$ anti-symétrique non-dégénéré sur V ;
 - 3) $\forall [x] \in X \quad q|_{T_x C(X)} = 0$,
- où $C(X)$ est le cône affine sur X .

Aussi les variétés dans (Sf) sont de Legendre.

Les variétés de Legendre sont liées à les groupes d'holonomie des variétés Riemanniennes.

Conjecture A (LeBrun, Salomon) : M compacte, de Kähler, $\dim X = 4n$ et quaternionique (i.e. $Hol(M) \subset (Sp_1 \times Sp_n)/\mathbb{Z}_2$) $\Rightarrow M$ est espace symétrique Riemannien.

Pour les autres $Hol(M)$, ils existent des des M compacte et non-homogène.

Conjecture B : Y (complexe), de contact, non-singulière et de Fano $\Rightarrow X$ est une variété adjointe, i.e. $\exists G$ de Lie (complexe) semi-simple t.q. $Y = G/P \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$.

Conjecture B \Rightarrow Conjecture A :

$\forall M$ comme dans Conjecture A \exists un espace twistoriel Y i.e. une S^2 -fibré de structures complexes sur TM .

Y est de contact, non-singulier et de Fano.

Pour $y \in Y$ générique, l'ensemble $X \subset \mathbb{P}(T_y Y)$ des tangents à les droites de contacts sur Y par y est de Legendre non-singulier ;

si Y est adjointe, X est homogène (X est appelé une variété sous-adjointe)

Les variétés dans (F4) sont adjointes pour les groupes simples G exceptionnels $G \neq G_2$,

Les variétés dans (F3) sont les variétés sous-adjointes pour tels groupes.

Conjecture C : X de Legendre non singulier et normale linéairement $\Rightarrow X$ est sous-adjointes.

$X \subset \mathbb{P}^n$ est normale linéairement si le plongement est donné par une système linéaire complet.

Une variété complexe Y est de contact si : 1) $\dim Y = 2n + 1$; 2) il y a $F \subset TY$ avec $\text{rang} F = 2n$ et les parenthèses de Lie

$$F \otimes F \longrightarrow TY/F$$

ne sont jamais dégénérée .

Une courbe rationnelle $C \subset Y$ est une droite de contact si $-K_Y \cdot C$ est minimal (i.e. $n + 1$).

Étude de $\text{Aut}(X)$

Une sous-variété lisse de X stable par G est une orbite (fermée).

Donc, ou $\text{Aut}^0(X)$ agit transitivement sur X ou bien $\text{Aut}^0(X)$ stabilise une orbite fermée.

Soit Y une orbite fermée de X , alors $\text{Aut}^0(X)$ stabilise Y si et seulement si $H^0(Y, N_{Y,X}) = 0$.

On vérifie explicitement que, si $\text{Aut}^0(X)$ n'agit pas transitivement sur X alors X a rang 2 et toutes les orbites fermées sont stabilisées par $\text{Aut}^0(X)$.

Dans ce cas, on définit \widetilde{X} comme l'éclatement de X le long des orbites fermées ;

$\text{Aut}^0(X)$ est isomorphe à $\text{Aut}^0(\widetilde{X})$.

Le diviseur $\widetilde{X} \setminus (G/H)$ est un diviseur avec croisements normaux.

C'est beaucoup plus facile d'étudier $Aut^0(\widetilde{X})$ (et $Aut(\widetilde{X})$).

Par exemple, on peut prouver que $Aut^0(\widetilde{X})$ est réductif et stabilise toutes les G -orbites de \widetilde{X} (grâce à un résultat de M. Brion).

On peut aussi prouver que $Aut(\widetilde{X}) = Aut(G/H)$. Ce fait permet d'étudier $Aut(\widetilde{X})$.

Il y a un morphisme

$$Aut(\widetilde{X}) \rightarrow Aut_{equiv}(G) \equiv Aut_{equiv}(Aut^0(\widetilde{X}))$$

avec noyau

$$Aut_G(\widetilde{X}) \equiv Aut_G(G/H) \cong N_G(H)/H.$$

$Aut(X) \subset Aut(G/H)$ et chaque automorphisme de \widetilde{X} descend à X .