



HAL
open science

Aspects multi échelles dans certains problèmes discrets non réguliers

Pierre Alart

► **To cite this version:**

Pierre Alart. Aspects multi échelles dans certains problèmes discrets non réguliers. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. hal-00574994

HAL Id: hal-00574994

<https://hal.science/hal-00574994v1>

Submitted on 26 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Aspects multiéchelles dans certains problèmes discrets non réguliers

P. Alart

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, UM2-CNRS, CC048, Place Eugène Bataillon F-34095 Montpellier
CEDEX 5
alart@lmgc.univ-montp2.fr

Résumé :

Certains problèmes discrets comportent un si grand nombre d'éléments qu'il peut être nécessaire de développer une analyse multiéchelle pouvant associer échelles discrète et continue. Une difficulté supplémentaire peut provenir du comportement non régulier à l'échelle discrète. Les stratégies numériques doivent alors tenir compte de ces différents aspects. Dans le but à terme de traiter les milieux granulaires, nous nous intéressons provisoirement aux systèmes de tensegrité.

Abstract :

Some discrete problems contain numerous components in such way one needs a multiscale analysis linking possibly discrete and continuous scales. Moreover the local behaviour between components may be non smooth. The numerical strategies to carry on have to account for these aspects. In order to deal soon with granular media, we focus first herein on tensegrity systems.

Mots-clefs :

Système discret, non régularité, analyse multiéchelle

1 Les approches multiéchelles et les systèmes discrets

L'étude des systèmes discrets découle de différentes préoccupations. Certains systèmes sont « naturellement » discrets à l'échelle de la modélisation usuelle ; il en est ainsi en mécanique des structures spatiales réticulées (treillis de barres) ; l'approche discrète fournit alors un modèle efficace. Quand le nombre d'éléments augmente, il peut être utile d'opter pour un modèle continu via une procédure d'homogénéisation [27] ; on distingue donc l'échelle discrète des éléments de l'échelle globale de la structure. Mais cette démarche reste exceptionnelle.

Plus couramment les modèles discrets interviennent pour enrichir localement des modèles initialement continus ; il s'agit là d'un aboutissement naturel de la démarche micro-macro devenue classique chez les mécaniciens des matériaux. Il s'agissait initialement de prendre en compte l'hétérogénéité matérielle en faisant dialoguer différents modèles restant continus à leurs échelles. Le développement des moyens de calcul a suscité une descente vers des échelles proches de l'atome où les modèles sont discrets. Le saut dans les échelles est cependant considérable et l'usage de calculs dits *ab initio* très utilisés par physiciens et chimistes [9, 11] fournit pour l'essentiel des informations qualitatives sur le comportement de la matière aux échelles supérieures. La simulation numérique est ici utilisée comme un outil d'investigation quasi-expérimental des possibles comportements collectifs de systèmes complexes par le nombre des éléments, molécules et atomes, et la nature des interactions entre eux. La dynamique moléculaire puise dans cette problématique l'essentiel de son succès.

Pour remonter à l'échelle du milieu continu plusieurs étapes, sont souvent nécessaires ; à ces échelles mésoscopiques, des systèmes parfois encore discrets comme les dislocations, peuvent interagir pour fournir le comportement plastique du monocristal [7, 8]. Sans recourir toujours à des échelles bien identifiées, un modèle discret peut aider à rendre compte de comportements plus exotiques encore comme des états

méta-stables dans les transformations de phases [24, 16]]. Certains auteurs ont essayé de réaliser des recouvrements entre des modèles discrets et continus [5, 13] dans le but de réaliser un zoom structural discret sur des zones de fortes déformations, comme des flambements dans les nanotubes [3, 28].

Les milieux granulaires ne se prêtent guère à une modélisation continue, surtout s'ils sont sollicités dynamiquement tout en restant denses. Leur comportement n'est ni fluide ni solide, mais empruntent des caractéristiques de ces deux modèles. L'approche discrète s'avère par conséquent particulièrement utile [10] et, associée à des calculs parfois volumineux, a fourni des résultats fins inobservables expérimentalement comme la bimodalité du réseau des forces de contact [25].

Dans certains cas, des échelles très différentes sont à prendre en compte. Le cas du TexSol, mélange de sable et de fils est particulièrement intéressant. Sont incorporés au sable, de très long fils textiles dont le diamètre est d'un ordre de grandeur plus petit que la moyenne de celui des grains de sables, et dont la longueur est quasi infinie en rapport à la taille des grains. Un réflexe consiste à modéliser le fil comme un milieu continu unidimensionnel de type poutre puisque sollicité en flexion. Mais l'association dans un même modèle du sable et des fils passe par une discrétisation, en éléments finis par exemple, de ces derniers ; cette procédure est lourde. Nous avons par conséquent opté pour un modèle discret de fil sous la forme d'un « collier de perles », chaque perle entretenant avec les grains voisins des relations de contact avec frottement et avec ses deux perles voisines une liaison bilatérale ou unilatérale avec ou sans composante élastique (cf rapport de DEA d'O. Mouraille).

Mais une telle approche ne peut prétendre encore à un statut prédictif qui exige un changement d'échelle et un passage au milieu continu. Cette problématique est encore ouverte pour les milieux granulaires pour lesquels la définition d'un volume élémentaire représentatif reste une question d'actualité. Et ce d'autant que le choix du modèle continu équivalent n'est pas évident. Une théorie du premier gradient est-elle suffisante ? Faut-il introduire un milieu du second gradient, ou de Cosserat ? Ces questions, valables pour un milieu granulaire standard, le sont encore davantage pour le TexSol pour lequel des actions à distance via les fils peuvent être envisagées [14]. Le recours au calcul intensif pour simuler des échantillons de plus en plus complexes comporte deux axes. Le premier consiste à améliorer les solveurs non réguliers nécessaires à la résolution de grands systèmes d'équations et d'inéquations. C'est la voie suivie par Mathieu Renouf dans sa thèse et ses publications [26], sur lesquels nous revenons dans la deuxième section. Même si les algorithmes ainsi développés peuvent prendre avantage de l'architecture parallèle et multi-processeur de certains ordinateurs, ils ne comportent pas une stratégie multi-échelle ou même de sous structuration géométrique.

Le deuxième axe consiste justement à introduire une telle démarche dès la formulation du problème. Les méthodes de décomposition de domaine (DDM) offrent un cadre assez général pour mettre en œuvre une telle stratégie. Si Breitkopf et Jean se sont contentés de passage de messages entre sous domaines appelés « boîtes » [6], les développements ces dernières années des DDM, essentiellement sur les problèmes linéaires, ont montré que pour être efficaces ces méthodes devaient comporter une stratégie multi-échelle, que ce soit l'adjonction d'un problème grossier comme préconditionneur [21, 12], une décomposition micro-macro de certaines variables d'interface [19], voire une procédure d'homogénéisation [20].

2 Non régularité dans les systèmes discrets

2.1 Non régularité localisée / diffuse

Si nous définissons de manière générale un système discret comme un ensemble de points ou nœuds et de liens entre ces nœuds, la non régularité ne peut intervenir que dans les lois d'interaction associées aux liens. En dynamique moléculaire, ces lois sont en général régulières même si souvent fortement non linéaires, comme Lennard-Jones, Landau-Gizbourg, potentiels à puits. La principale origine de la non linéarité est le contact unilatéral associé ou pas au frottement.

Le milieu granulaire avec contact et frottement sec constitue un exemple typique de système discret à

nonrégularité diffuse, c'est-à-dire répartie sur tout le système concernant tous les liens. Cette situation est rare pour les systèmes discrétisés issus d'une modélisation d'un milieu continu. Le contact ne concerne en général que le bord du domaine même s'il pilote le processus comme en mise en forme ; le contact est essentiellement localisé et ne concerne que peu de degrés de liberté. Il y a quelques cas particuliers où le contact —et la non régularité—est présente à travers tout le domaine tout en restant localisé, au sens du nombre de degrés de liberté concernés. Il s'agit des milieux cellulaires, pour lesquels on envisage l'auto-contact dans les cellules [4, 1], ou des milieux micro-fissurés [23]. Dans ce dernier cas la non régularité reste localisée car limitée aux défauts que constitue la fissure ; autrement dit dans les relations matérielles, la régularité (l'élasticité) reste la règle, la non régularité (le contact) l'exception. Le milieu granulaire est donc le modèle même du système à non régularité diffuse, et ce d'autant que les grains restent considérés comme des solides rigides. Si chaque grain est modélisé comme un milieu continu déformable [2], on retrouve une situation analogue au milieu micro-fissuré, même si la stratégie de décomposition y diffère de [23].

Mais il existe aussi des structures qui disposent de cette non régularité diffuse sans invoquer le contact. En effet les structures de tenségrité sont des systèmes constitués de barres et de câbles décrits par Fuller comme des « îlots de compression dans un océan de tension » [15]. Motro est plus précis en les définissant comme des « systèmes dans un état d'autocontrainte stable incluant un ensemble discret d'éléments en compression dans un continuum d'éléments en tension » [22]. Comme ces éléments en tension sont les câbles dont le comportement est unilatéral (aucune résistance en compression), l'unilatéralité est donc une caractéristique dominante traversant toute la structure. Pour tester des stratégies multiéchelles ces systèmes sont de meilleurs candidats que les milieux granulaires, car il est par exemple plus aisé d'y étendre les méthodes de décomposition de domaine. En effet, à moins de ne considérer que son équilibre statique, un granulat subit au cours de son écoulement des reconfigurations (changement de connectivité) des contacts entre grains. Ceci oblige, pour la sous-structuration, d'actualiser sans cesse le contour des sous structures, ce qui rajoute non seulement une difficulté technique mais également rend plus obscure la définition d'un sous domaine au comportement homogénéisé.

2.2 Formulations quasi-statique / dynamique

On se propose ici de comparer deux modélisations mécaniques d'un système de tenségrité, de mettre en évidence les caractéristiques mathématiques des formulations obtenues et de préciser en quoi ces propriétés ressemblent ou diffèrent de celles des formulations de systèmes granulaires.

L'équation d'équilibre statique des nœuds d'un système de tenségrité relie les tensions dans les barres et câbles et les efforts extérieurs appliqués aux nœuds via un opérateur de passage de l'ensemble des liens à celui des liens. On introduit une variation corrigée de longueur des câbles à partir du déplacement des nœuds, de la rigidité des câbles, de la tension dans les câbles ainsi que leur précontrainte (positive). On suppose que la structure globale est fixée au support de telle sorte à éliminer les mouvements de solide rigide, ce qui implique l'inversibilité de la matrice de raideur du treillis équivalent composé uniquement de barres. Après quelques manipulations, on obtient un problème de complémentarité linéaire (LCP) sur les variables, variation de longueur corrigée et tension dans les câbles. La matrice du LCP est singulière ; elle prend en compte notamment les mouvements de solide rigide de chaque barre, chacune étant isolée dans le réseau (« îlots de compression »). Le problème d'optimisation associé au LCP implique la minimisation d'une fonction quadratique non bornée inférieurement. Ainsi le LCP n'a pas forcément une solution pour tout chargement et si cette solution existe elle est automatiquement sur le bord du cône convexe des contraintes. Remarquons que le LCP issu de la dynamique des contacts dans un système granulaires comporte lui aussi une matrice singulière, mais que le problème d'optimisation associé présente une fonction coût bornée inférieurement [26].

La dynamique, approchée sur un pas de temps, du système de tenségrité avec concentration des masses aux nœuds fournit encore un LCP liant cette fois-ci une vitesse moyenne corrigée d'allongement des composants, nulle sur les barres, et une impulsion en tension dans les liens (de signe opposée à

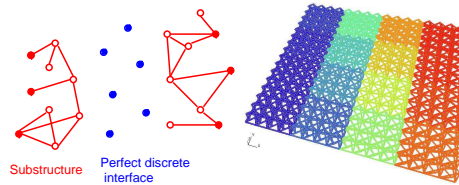


FIG. 1 – Interface discrète et décomposition d'une structure de tenségrité

une impulsion de réaction de contact). Le système d'équations et d'inéquations ainsi obtenu devient un LCP standard après élimination des variables associées aux barres. La matrice du LCP comporte un terme additionnel diagonal qui la rend régulière et dote donc le problème d'une solution unique. Ceci provient de la composante élastique dans les liens que l'on ne retrouve pas dans la formulation issue de la dynamique des contacts dans un milieu granulaire. Nous adoptons donc un système de tenségrité en équilibre statique comme objet de mise en œuvre d'une première approche multiéchelle basée sur une méthode de décomposition de domaine.

Quand le nombre d'éléments devient très important le système à résoudre peut devenir très volumineux. Il est courant pour des simulations de « boîtes à sable », utilisées par les géophysiciens, d'avoir plus de 100 000 grains et 300 000 contacts. Sans recours à une approche de décomposition de domaine, nous avons développé des solveurs de type Gradient Projeté Conjugué, qui s'avèrent très efficaces pour gérer les liaisons unilatérales et peuvent même être étendus au contact frottant [26]. S. Nineb a testé avec succès cette méthode sur les structures de tenségrité (cf la communication lors de ce congrès). Cependant si dans le cas de la formulation dynamique la matrice de masse diagonale est aisée à inverser il n'en est pas de même dans la formulation quasi-statique pour la matrice de raideur du treillis. Une approche multiniveau de type DDM s'impose donc avec force dans ce dernier cas.

3 Equilibre d'une structure de tenségrité en décomposition de domaine

3.1 Sous structuration

La première étape d'une méthode de décomposition de domaine consiste à définir une stratégie de sous structuration. Nous adoptons ici l'approche initiée par Ladevèze [17], où sous domaines et interfaces disposent au même titre de ses propres variables et équations. Mais un choix nous est laissé. Les sous domaines sont constitués de nœuds et de liens, mais les interfaces peuvent ne comporter soit que des liens soit que des nœuds. Nous avons adopté la deuxième stratégie où les sous domaines n'interagissent entre eux que par des interfaces constituées de nœuds. Ceci permet de disposer d'interfaces parfaites et d'isoler la non régularité à l'intérieur des sous domaines. En ce sens cette stratégie est comparable à celle adoptée dans [4, 2] pour les milieux cellulaires où les interfaces des sous domaines partagent les parois des cellules. Mais elle est duale de celle préconisée par [23] pour les milieux microfissurés où les interfaces de décomposition contiennent obligatoirement les fissures, les sous domaines ne comportant aucune non régularité de type contact. Notre choix a bien évidemment été guidé par le caractère diffus de la non régularité qui ne peut être concentrée dans les interfaces - à moins d'avoir des sous domaines limités à une seule barre ! Notre stratégie est donc parfaitement extensible aux milieux granulaires (collections de solides rigides), les nœuds étant les centres de masse des grains et les liens les contact ponctuels entre eux.

3.2 Une approche numérique multiéchelle

Nous suivons ici l'approche proposée dans [18, 19, 20] en l'adaptant à un problème discret. Nos commentaires vont pour l'essentiel concerner ces adaptations.

Description micro-macro. Seules les variables d'interface, déplacements et efforts, sont décomposées en parties micro et macro. Cette partie macro est constituée de champs moyens sur l'interface, en prenant des moments d'ordre au moins 1. Pour les efforts on considère la résultante des forces (3 composantes), le moment (3), les tensions (2), le cisaillement et la dilatation, soit 10 paramètres. Pour les déplacements on prend les moyennes équivalentes.

Les systèmes discrets présentent deux spécificités. Les interfaces entre sous domaines ne sont pas des variétés de dimension $n-1$ (plan) ou $n-2$ (coin) comme dans le cas continu. Il s'agit encore d'ensemble de nœuds. Certains peuvent être trop petits (moins de 4 nœuds) pour définir un espace grossier. On parle alors d'interface faible et on ne considère pas de partie macro sur cette interface. De plus les nœuds d'une interface ne sont nécessairement coplanaires. Il convient donc à partir du nuage de nœuds de définir au sens des moindres carrés le plan interfacial approché et son centre de « masse ».

Étape locale—solveur non régulier. Conformément à la démarche de la méthode LATIN, l'étape locale consiste à trouver une solution approchée respectant les « lois de comportement » dans les sous domaines et les interfaces à partir d'un itéré précédent dans une certaine direction, dite de recherche. Les interfaces étant parfaites on impose aux parties micro et macro séparément de vérifier l'équilibre des forces et la continuité des déplacements. Modulo deux directions de recherche micro et macro, on obtient explicitement les valeurs de la solution approchée.

Pour les sous domaines, on a choisi dans un premier temps une direction de recherche scalaire. Dans les barres on en déduit immédiatement les nouvelles valeurs approchées, variations d'allongement et tensions. Pour chaque câble, le couple (variation corrigée d'allongement et tension) vérifie un LCP « scalaire » très simple à résoudre. Une stratégie en cours de développement consiste à rajouter dans les équations à satisfaire l'équation de compatibilité des déplacements (liant déplacements des nœuds internes et allongement dans les éléments) sur l'ensemble du sous domaine ce qui nous conduirait alors à devoir résoudre des LCP « vectoriels » sous domaine par sous domaine.

Étape linéaire—opérateur linéaire tangent. L'itéré de l'étape précédente obtenu, on a à déterminer un nouvel itéré satisfaisant les équations d'équilibre et d'admissibilité des déformations par sous structure. De plus il nous faut imposer la continuité de certains champs macro aux interfaces. Un choix particulier de direction de recherche macro permet de symétriser la formulation en imposant en fait la continuité des champs macro d'efforts et de déplacements aux interfaces.

Une reformulation algébrique de l'étape linéaire conduit à la résolution d'un problème de petite taille portant sur les efforts généralisés aux interfaces et sur les amplitudes des mouvements de corps rigides servant à imposer la continuité des déplacements macro. L'opérateur linéaire comporte une flexibilité homogénéisée sous structure par sous structure condensée sur les bords.

4 Exemple d'une nappe de tenségrité

4.1 Description du problème

On considère une nappe de tenségrité constituée de 256 modules élémentaires de tenségrité. Chaque module est un demi-cuboctaèdre comportant 8 nœuds, 12 câbles et 4 barres. La structure est décomposée en 16 sous structures (de 16 modules) et 42 interfaces, dont 18 interfaces faibles. A titre de comparaison la sous structuration d'une plaque continue équivalente avec 16 sous domaines aurait seulement 24 interfaces, dont aucune faible. Nous prenons un chargement légèrement inférieur à la charge limite qui conduirait à une perte de stabilité de la structure comparable à un flambement. Dans une telle situation un nombre significatif de câbles sont détendus.

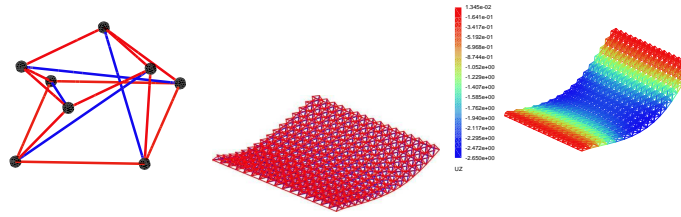


FIG. 2 – Module de base de la nappe et déformée

4.2 Résultats

Remerciements. Ces recherches ont bénéficié du soutien du CINES (Centre Informatique National de l'Enseignement Supérieur) sur le projet Modélisation du comportement de milieux divisés et du projet européen SICONOS (Modelling, Simulation and Control of NonSmooth Dynamical Systems) n° IST-2001-37172.

Références

- [1] P. Alart, M. Barboteu, and J. Gril. A numerical modelling of non linear 2d-frictional multicontact problems : application to post-buckling in cellular media. *Computational Mechanics*, 34, 2004.
- [2] P. Alart, M. Barboteu, P. Le Tallec, and M. Vidrascu. Méthode de schwarz additive avec solveur grossier pour problèmes non symétriques. *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences — Analyse numérique*, (331) :399–404, 2000.
- [3] M. Arroyo and T. Belytschko. A finite deformation membrane based on inter-atomic potentials for the transverse mechanics of nanotubes. *Mechanics of Materials*, 35(3-6) :193–215, March-June 2003.
- [4] M. Barboteu, P. Alart, and M. Vidrascu. A domain decomposition strategy for nonclassical frictional multi-contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :4785–4803, 2001.
- [5] H. BenDhia. Problème de mécanique multiéchelle : la méthode arlequin. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 326 :899–904, 1998.
- [6] P. Breitkopf and M. Jean. Modelisation parallele des matériaux granulaires. *4° Colloque National en Calcul des Structures*, pages 387–392, 1999.
- [7] V. V. Bulatov and L. P. Kublin. Dislocation modelling at atomistic and mesoscopic scales. *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, 3(6) :558–561, December 1998.
- [8] B. D. C. Lemarchand and L. Kubin. Homogenization method for a discrete-continuum simulation of dislocation dynamics. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 49(9) :1969–1982, 2001.
- [9] F. Cimpoesu and K. Hirao. The ab initio analytical approach of vibronic quantities : Application to inorganic stereochemistry. *Advances in Quantum Chemistry*, 44 :369–387, 2003.
- [10] P. Cundall and O. Stack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29(1) :47–65, 1979.
- [11] W. K. C. L. B. E. Cancã's, M. Defranceschi and Y. Maday. Computational quantum chemistry : A primer. *Hanbook of Numerical Analysis*, 10 :3–270, 2003.

- [12] C. Farhat and F.-X. Roux. Implicit parallel processing in structural mechanics. In J. T. Oden, editor, *Computational Mechanics Advances*, volume 2. North-Holland, June 1994.
- [13] J. Fish and W. Chen. Discrete-to-continuum bridging based on multigrid principles. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(17-20) :1693–1711, 7 May 2004.
- [14] M. Frémond. *Non smooth thermomechanics*. Springer Verlag, Berlin, 2002.
- [15] R. Fuller. *The dymaxion world of Buckingham Fuller*.
- [16] O. Kresse and L. Truskinovsky. Mobility of lattice defects : discrete and continuum approaches. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(7) :1305–1332, July 2003.
- [17] P. Ladevèze. *Mécanique non-linéaire des structures — Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*. Hermès, Paris, 1996.
- [18] P. Ladevèze and D. Dureisseix. Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 327 :1237–1244, 1999.
- [19] P. Ladevèze and D. Dureisseix. A micro / macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1 :18–28, 2000.
- [20] P. Ladevèze, O. Loiseau, and D. Dureisseix. A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1–2) :121–138, 2001.
- [21] P. Le Tallec. Domain decomposition methods in computational mechanics. In *Computational Mechanics Advances*, volume 1. North-Holland, 1994.
- [22] R. Motro. *Tensegrity*. Hermes Science Publishing, London, 2003.
- [23] A. Nouy, P. Ladevèze, and O. Loiseau. A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :4869–4891, 2002.
- [24] G. Puglisi and L. Truskinovsky. Mechanics of a discrete chain with bi-stable elements. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(1) :1–27, January 2000.
- [25] F. Radjai, D. E. Wolf, M. Jean, and J.-J. Moreau. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Phys. Rev. Lett.*, 80(1) :61–6', 1998.
- [26] M. Renouf and P. Alart. Conjugate gradient type algorithms for frictional multi-contact problems : applications to granular materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004.
- [27] H. Tollenaere and D. Caillerie. Continuous modeling of lattice structures by homogenization. *Advances in Engineering Software*, 29(7-9) :699–705, 11 August 1998.
- [28] S. P. Xiao and T. Belytschko. A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(17-20) :1645–1669, 7 May 2004.