



**HAL**  
open science

# Cibles rétrécissantes de rayon $n^{-\frac{1}{d}}$ : propriété du logarithme

Benjamin Mussat

► **To cite this version:**

| Benjamin Mussat. Cibles rétrécissantes de rayon  $n^{-\frac{1}{d}}$  : propriété du logarithme. 2010. hal-00574970

**HAL Id: hal-00574970**

**<https://hal.science/hal-00574970v1>**

Preprint submitted on 23 Mar 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Cibles rétrécissantes de rayon $n^{-\frac{1}{d}}$ : propriété du logarithme

Benjamin Mussat

23 mars 2011

## Résumé

On dit qu'une translation sur le tore de dimension  $d$  possède la propriété du logarithme si la propriété des cibles rétrécissantes est vérifiée dans le cas des boules de rayon  $n^{-\frac{1}{d}}$ . En dimension 1, toute rotation irrationnelle possède la propriété du logarithme. En dimension supérieure, nous donnons des critères permettant de déterminer si cette propriété est vérifiée ou non. Ces critères reposent sur une notion de type diophantien différente de la notion standard.

A l'aide d'une construction en dimension 2 de vecteurs dont nous contrôlons les types diophantiens, nous obtenons des contre-exemples à la propriété du logarithme pour lesquels les vecteurs de translation sont diophantiens d'exposants arbitrairement petits et des exemples possédant la propriété du logarithme pour lesquels les vecteurs sont Liouville.

## 1 Introduction

Soit  $(M, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique ergodique probabilisé inversible, où  $M$  est un espace compact métrique et  $\mathcal{B}$  l'ensemble de ses boréliens.

### 1.1 Cibles rétrécissantes

On suit les définitions de [7].

**Définition 1.1.** Une suite d'ensembles mesurables  $\mathcal{A} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est appelée une suite de Borel-Cantelli (BC) pour  $T$  si, pour presque tout  $x$  dans  $M$ , pour une infinité de  $n$ ,  $T^n(x)$  appartient à  $A_n$  autrement dit si

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} T^{-n} A_n) = 1.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, il est nécessaire que

$$\sum \mu(A_n) = \infty.$$

**Lemme 1.1.** *Une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante est une suite de Borel-Cantelli si*

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} T^{-n} A_n) > 0.$$

On note  $B = \limsup(T^{-n} A_n)$ . La suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, donc quel que soit  $n$  entier positif on a  $T^{-(n+1)} A_{n+1} \subset T^{-1} T^{-n} A_n$ , d'où  $B \subset T^{-1} B$ . Les  $T^{-i}(T^{-1} B \setminus B)$  sont deux à deux disjoints et de même mesure, d'où  $\mu(T^{-1} B \setminus B) = 0$ . L'ensemble  $B$  est invariant par  $T$  à un ensemble de mesure nulle près.

Le système étant supposé ergodique,  $B$  est de mesure nulle ou égale à un.

On dit que le système  $(M, \mathcal{B}, \mu, T)$  a la *propriété des cibles rétrécissantes* si pour tout  $x_0 \in M$ , toute suite de boules de centre  $x_0$  dont la série des mesures diverge est BC pour  $T$  et qu'il a la *propriété des cibles rétrécissantes monotone* si pour tout  $x_0 \in M$ , toute suite décroissante de boules de centre  $x_0$  dont la série des mesures diverge est BC pour  $T$ .

## 1.2 Translation sur le tore $\mathbb{T}^d$

On s'intéressera dans toute la suite au système ergodique  $(\mathbb{T}^d, \mu, T_\theta)$ , où  $\mathbb{T}^d$  est le tore de dimension  $d$  ( $d \geq 1$ ),  $\mu$  est la mesure de Lebesgue et  $T_\theta$  est la translation par un vecteur  $\theta$  dont les coordonnées sont rationnellement indépendantes modulo un. Un théorème prouvé par Kurzweil en 1955 ([16]) et redécouvert par Fayad ([7]) donne d'une part qu'aucune translation n'a la propriété des cibles rétrécissantes et d'autre part qu'elle possède la propriété des cibles rétrécissantes monotone si et seulement si son vecteur est de type constant.

Il est naturel de considérer le cas limite des boules de rayon  $n^{-\frac{1}{d}}$ , puisque nous nous intéressons à des cibles dont la série des mesures diverge. S'agissant d'une translation, le choix des  $x_0$  est indifférent, on se restreint à des boules de centre 0.

**Définition 1.2.** *On dit qu'une translation  $T_\theta$  possède la propriété du logarithme si la suite  $(B(x_0, n^{-\frac{1}{d}}))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est de Borel-Cantelli pour  $T_\theta$ .*

Nous utilisons dans la suite la distance sur le tore définie ci-dessous, le lecteur se convaincra facilement que nos résultats restent vrais pour les distances équivalentes.

Un problème lié est celui de "la loi du logarithme". On en donne une définition et on explicite ses liens avec la la propriété du logarithme dans la partie 1.5. Un article de Galatolo et Peterlongo ([9]) revient sur les liens entre la loi du logarithme

et les différents problèmes des temps d'approche d'un point  $x_0$  par les orbites d'un autre point.

### 1.3 Notations et définitions

Pour  $x$  réel, on notera par  $[x]$  la partie entière de  $x$ . Pour  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ , on note  $|x| = \max_{i=1..d} |x_i|$ . La notation  $\|\cdot\|$  sera utilisé pour la distance à l'entier le plus proche dans  $\mathbb{R}$  ou au point de  $\mathbb{Z}^d$  le plus proche dans  $\mathbb{R}^d$  (pour la norme  $|\cdot|$ ). On utilisera la distance donnée par  $\|x - y\|$  entre deux points  $x$  et  $y$  du tore  $\mathbb{T}^d$ .

Dans toute la suite, on considère  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^d$  à coordonnées rationnellement indépendantes modulo un. On utilise deux approximations de  $\theta$ , d'une part l'approximation linéaire, où pour  $\Delta = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}^d$ , on considère

$$\|\langle \Delta, \theta \rangle\| = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |s_1 \theta_1 + \dots + s_d \theta_d - p|;$$

et d'autre part l'approximation simultanée, où pour  $q \in \mathbb{Z}$ , on considère

$$\|q\theta\| = \max_{1 \leq i \leq d} \inf_{p \in \mathbb{Z}} |q\theta_i - p|.$$

Evidemment en dimension 1, les deux approximations sont confondues.

On dit qu'un vecteur  $\Delta$  de  $\mathbb{Z}^d$ , non nul, est une *meilleure approximation linéaire* de  $\theta \in \mathbb{R}^d$  si pour tout  $\Delta' \in \mathbb{Z}^d$  vérifiant  $0 < |\Delta'| < |\Delta|$ , on a

$$\|\langle \Delta, \theta \rangle\| < \|\langle \Delta', \theta \rangle\|.$$

Notons que  $\|\langle \Delta, \theta \rangle\| = \|\langle \Delta', \theta \rangle\|$  implique  $\Delta = \pm \Delta'$ , il existe donc une suite  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , rangée par normes strictement croissantes, composée, au signe près, de toutes les meilleures approximation linéaires. On l'appelle suite des meilleures approximations linéaires.

On dit qu'un entier  $q$ , strictement positif, est une *meilleure approximation simultanée* de  $\theta \in \mathbb{R}^d$  si que quel que soit  $q'$  entier tel que  $0 < q' < q$ , on a

$$\|q\theta\| < \|q'\theta\|.$$

On appelle suite des meilleures approximations simultanées la suite strictement croissante, notée  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , qui est composée de toutes les meilleures approximations simultanées.

On utilisera également les notations suivantes : pour  $h$  réel non nul

$$\varepsilon_s(h) = \min_{q \in \mathbb{Q}, |q| \leq |h|} \|q\theta\|$$

et

$$\varepsilon_l(h) = \min_{x \in \mathbb{Z}^d, |x| \leq |h|} \|\langle x, \theta \rangle\|.$$

La suite des meilleures approximations simultanées de  $\theta$  vérifie l'inégalité suivante

$$\frac{1}{2}q_{n+1}^{-1} < (q_n + q_{n+1})^{-1} \leq \|q_n \theta\| \leq q_{n+1}^{-\frac{1}{d}}. \quad (1)$$

Ce lemme est bien connu en dimension 1 et provient des propriétés du développement en fractions continues. En dimension supérieure, l'inégalité de droite se montre avec le principe de Dirichlet. Une démonstration de l'inégalité de gauche est donnée dans [2].

### 1.3.1 Notions habituelles d'approximation diophantienne en dimension $d$ .

Soit  $\tau$  un réel positif ou nul.

On rappelle que  $\theta$  est diophantien de type  $\tau$  pour l'approximation simultanée si

$$\inf_{q \neq 0} q^{\frac{1+\tau}{d}} \|q\theta\| > 0,$$

c'est-à-dire avec nos notations si  $\inf_{q \neq 0} q^{\frac{1+\tau}{d}} \varepsilon_s(q) > 0$ .

On rappelle que  $\theta$  est diophantien de type  $\tau$  pour l'approximation linéaire si

$$\inf_{|\Delta| \neq 0} |\Delta|^{d(1+\tau)} \|\langle \Delta, \theta \rangle\| > 0,$$

c'est-à-dire si  $\inf_{h \neq 0} h^{d(1+\tau)} \varepsilon_l(h) > 0$ .

On note  $\Omega_s^d(\tau)$  (respectivement  $\Omega_l^d(\tau)$ ) l'ensemble des vecteurs diophantiens de type  $\tau$  pour l'approximation simultanée (respectivement pour l'approximation linéaire).

Les deux types d'approximations sont liés par le théorème de transfert de Khintchine ([13], voir [4] et [17] en dimension 2).

**Théorème.** [Khintchine] Pour tout  $\tau \geq 0$ ,

$$\Omega_s^d \left( \frac{\tau}{(d-1)\tau + d} \right) \subset \Omega_l^d(\tau) \subset \Omega_s^d(d\tau).$$

En particulier, on a  $\Omega_l^d(0) = \Omega_s^d(0)$ . On appelle vecteurs de type constant les vecteurs de type 0. Cette notion concerne donc les mêmes vecteurs pour les approximations linéaires et simultanées.

### 1.3.2 Une autre notion de type diophantien

Nous nous intéressons à une notion différente introduite par Jarnik dans [12]. On pourra voir aussi un article de Khintchine ([15]). Laurent [17] reprend cette notion en vue d'un résultat qui précise le théorème de transfert de Khintchine.

**Définition 1.3.** Soit  $\tau \geq 0$ .

On note  $\Theta_l^d(\tau)$  l'ensemble des vecteurs  $\theta$  de  $\mathbb{R}^d$  tels que

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} h^{d(1+\tau)} \varepsilon_l(h) > 0,$$

et  $\Theta_s^d(\tau)$  l'ensemble des vecteurs  $\theta$  de  $\mathbb{R}^d$  tel que

$$\limsup_{q \rightarrow +\infty} q^{\frac{1+\tau}{d}} \varepsilon_s(q) > 0.$$

Autrement dit  $\theta$  appartient à  $\Theta_l^d(\tau)$  s'il existe une constante  $C$  tel que pour une infinité d'entiers  $n$ , pour tout  $\Delta$  de  $\mathbb{Z}^d$ , vérifiant  $0 < |\Delta| \leq n$ , on ait  $\|\langle \Delta, \theta \rangle\| \geq Cn^{-(1+\tau)d}$ . De même,  $\theta$  appartient à  $\Theta_s^d(\tau)$  s'il existe une constante  $C$  telle que pour une infinité d'entiers strictement positifs  $n$ , pour tout entier  $q$  avec  $q \leq n$ , on ait  $\|q\theta\| \geq Cn^{-\frac{(1+\tau)}{d}}$ .

On a bien sûr,  $\Omega_s^d(\tau) \subset \Theta_s^d(\tau)$  et  $\Omega_l^d(\tau) \subset \Theta_l^d(\tau)$ . Pour mieux pointer la différence entre ces définitions et les notions habituelles d'approximation diophantienne, réécrivons-les à l'aide des meilleures approximations. Si on a  $q_n \leq q < q_{n+1}$ , alors  $\varepsilon_s(q) = \|q_n\theta\|$ . D'où  $\theta \in \Theta_s^d(\tau)$  si et seulement si

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} q_{n+1}^{\frac{1+\tau}{d}} \|q_n\theta\| > 0,$$

tandis que  $\theta \in \Omega_s^d(\tau)$  si et seulement si

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} q_n^{\frac{1+\tau}{d}} \|q_n\theta\| > 0.$$

La différence est la même pour les approximations linéaires.

### 1.3.3 Le cas $\Theta_s^d(0)$ .

D'après l'inégalité (1), tout vecteur de  $\mathbb{R}^d$  à coordonnées rationnellement indépendantes modulo un appartient à  $\Theta_s^d(d-1)$ . Le cas de la dimension 1 est donc particulier puisque tout  $\theta$  irrationnel appartient à  $\Theta_s^1(0)$ .

En dimension  $d > 1$ , on montrera que ce n'est plus vrai (voir par exemple la partie 4). Toutefois Chevallier a montré dans [5] que pour presque tout  $\theta$ , on a

$$\limsup q_{n+1} \|q_n\theta\|^d > 0.$$

C'est-à-dire que  $\Theta_s^d(0)$  est de mesure 1.

## 1.4 Résultats

Ces notions diophantiennes moins usuelles vont nous permettre de donner une quasi-caractérisation des vecteurs  $\theta$  pour lesquels la translation  $T_\theta$  a ou n'a pas la propriété du logarithme.

**Théorème 1.** (i) Si  $\theta$  appartient à  $\Theta_s^d(0)$  alors la translation  $T_\theta$  possède la propriété du logarithme.

(ii) S'il existe  $\tau > 0$  tel que  $\theta$  n'appartienne pas à  $\Theta_s^d(\tau)$  alors  $T_\theta$  ne possède pas la propriété du logarithme.

On a l'analogie pour l'approximation linéaire.

**Théorème 2.** (i) Si  $\theta$  appartient à  $\Theta_l^d(0)$  alors la translation  $T_\theta$  possède la propriété du logarithme.

(ii) S'il existe  $\tau > 0$  tel que  $\theta$  n'appartienne pas à  $\Theta_l^d(\tau)$  alors  $T_\theta$  ne possède pas la propriété du logarithme.

Dans la partie 2, nous démontrons le théorème 1 (i) et le théorème 2 (ii). Pour finir de montrer les théorèmes 1 et 2 nous allons démontrer dans la partie 3 une variante adaptée à notre situation d'un théorème de transfert dû à Jarnik ([12]) :

**Théorème 3.** Pour tout  $\tau \geq 0$ ,

$$\Theta_s^d\left(\frac{\tau}{(d-1)\tau + d}\right) \subset \Theta_l^d(\tau) \subset \Theta_s^d(d\tau).$$

En effet, cela implique  $\Theta_s^d(0) = \Theta_l^d(0)$  et donc que les énoncés (i) des théorèmes 1 et 2 sont équivalents. D'après l'inclusion de droite la condition (ii) du théorème 1 implique la condition (ii) du théorème 2.

En dimension 1, les parties (i) des théorèmes 1 et 2 montrent en particulier que toute translation irrationnelle possède la propriété du logarithme. En dimension supérieure, d'après le résultat de Chevallier cité dans la partie 1.3.3, nous obtenons que pour presque tout  $\theta$  la translation  $T_\theta$  possède la propriété du logarithme.

Dans la dernière partie, pour  $d = 2$ , nous construirons des vecteurs dont nous contrôlons les approximations diophantiennes. Cela permet de montrer le théorème suivant :

**Théorème 4.** (i) Il existe des vecteurs  $\theta$  dans l'intersection de tous les  $\Omega_s^2(\tau)$  pour  $\tau$  strictement positif, pour lesquels  $T_\theta$  ne possède pas la propriété du logarithme.

(ii) Il existe des vecteurs  $\theta$  pour lesquels  $T_\theta$  possède la propriété du logarithme et qui n'appartiennent à aucun  $\Omega_s^2(\tau)$ .

D'après le théorème de transfert de Khintchine (1.3.1), on a les mêmes énoncés pour les  $\Omega_l^2(\tau)$ .

## 1.5 Propriété du logarithme et loi du logarithme

Nous donnons le lien entre la propriété du logarithme et la loi du logarithme et nous en déduisons des résultats. On suit la définition générale de [9] et on l'applique aux translations sur le tore de dimension  $d$ .

**Définition 1.4.** *On dit que la translation  $T_\theta$  vérifie la loi du logarithme si pour presque tout  $x$ ,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \|T_\theta^n(x)\|}{\log n} = \frac{1}{d}.$$

**Lemme 1.2.** *La propriété du logarithme implique la loi du logarithme.*

Remarquons que si la suite  $(B(0, n^{-\frac{1}{d}}))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est de Borel-Cantelli, alors pour presque tout  $x$  il existe alors une infinité de  $n$  tels que  $\|T_\theta^n(x)\| < n^{-\frac{1}{d}}$ , d'où

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \|T_\theta^n(x)\|}{\log n} \geq \frac{1}{d}.$$

Inversement, étant donné un réel  $\delta$  strictement positif, si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \|T_\theta^n(x)\|}{\log n} > \frac{1}{\delta},$$

on a, de la même manière, que la suite  $(B(0, n^{-\frac{1}{\delta}}))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est de Borel-Cantelli. Alors la somme des mesures des boules est nécessairement infinie, et  $\delta$  ne peut être strictement inférieur à  $d$ . On a donc toujours

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \|T_\theta^n(x)\|}{\log n} \leq \frac{1}{d}.$$

□

L'article de Galatolo et Peterlongo ([9]) donne, dans le cas des translations sur le tore de dimension 2, des contre-exemples à la loi du logarithme, qui sont donc également des contre-exemples à la propriété du logarithme.

### Remarque

Les théorèmes 1 et 2 restent vrais si on remplace “propriété du logarithme” par “loi du logarithme”. Pour les parties (i), cela résulte du lemme. Nous prouverons que c'est également vrai pour la partie (ii) du théorème 2 (corollaire 2.6) et donc aussi pour la partie (ii) du théorème 1 par le théorème de transfert.



## 2 Critères sur $\theta$ pour que $T_\theta$ possède ou non la propriété du logarithme

### 2.1 Démonstration du théorème 1(i)

Soit  $\theta \in \Theta_s^d(0)$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des meilleures approximations simultanées de  $\theta$ , il existe donc  $C > 0$ , tel que l'on ait pour une infinité de  $n$ ,

$$q_{n+1}^{\frac{1}{d}} \|q_n \theta\| \geq C.$$

Soit  $q \in \mathbb{N}$ . On choisit un  $n$  tel que  $q_{n+1} \geq q$  et  $q_{n+1}^{\frac{1}{d}} \|q_n \theta\| \geq C$  et on note

$$U = \bigcup_{l=q}^{q+q_{n+1}-1} T_\theta^{-l} B(0, \frac{1}{l^{\frac{1}{d}}}).$$

Les rayons de ces  $q_{n+1}$  boules sont supérieurs à  $(2q_{n+1})^{-\frac{1}{d}}$ . Les  $q_{n+1}$  points  $T_\theta^{-j} 0$ , avec  $q \leq j \leq q + q_{n+1} - 1$  sont à distance les uns des autres d'au moins  $\|q_n \theta\|$  et  $\|q_n \theta\| \geq C q_{n+1}^{-\frac{1}{d}}$ . Donc  $U$  contient  $q_{n+1}$  boules disjointes de rayons  $c q_{n+1}^{-\frac{1}{d}}$ , avec  $c = \min\left(\frac{C}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{d}}\right)$ .

Il en résulte

$$\mu(U) \geq q_{n+1} \frac{2^d c^d}{q_{n+1}} \geq 2^d c^d.$$

On a donc, quel que soit  $q$  entier,  $\mu\left(\bigcup_{l \geq q} T_\theta^{-l} B(0, \frac{1}{l^{\frac{1}{d}}})\right) \geq 2^d c^d > 0$ , d'où

$$\mu\left(\limsup T_\theta^{-l} B(0, \frac{1}{l^{\frac{1}{d}}})\right) > 0.$$

D'après le lemme 1.1, la suite de boules est de Borel-Cantelli.

### 2.2 Un critère pour que $T_\theta$ ne possède pas la propriété du logarithme

Nous donnons une condition suffisante pour ne pas posséder la propriété du logarithme. L'idée de la démonstration est que lorsque les approximations linéaires sont suffisamment bonnes, les éléments de l'orbite vont être assez proches d'un hyperplan pour que la mesure occupée par l'union des boules soit petite. Nous en déduirons le théorème 2 (ii)

**Théorème 5.** *S'il existe une suite de vecteurs à coefficients entiers, de normes strictement croissantes,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que*

$$\sum |X_{n+1}|^{\frac{d}{d+1}} \|\langle X_n, \theta \rangle\|^{\frac{1}{d+1}} < \infty, \quad (2)$$

*alors la translation  $T_\theta$  ne possède pas la propriété du logarithme.*

Supposons la condition (2) vérifiée. Notons  $\varepsilon_n = \|\langle X_n, \theta \rangle\|$  et  $B_n = B(0, n^{-\frac{1}{d}})$ . Nous devons montrer que  $\mu(\limsup T_\theta^{-n} B_n) = 0$ . Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe une suite de réels strictements positifs  $(L_n)_{n>0}$  tendant vers l'infini telle que

$$\sum_n \mu \left( \bigcup_{L_n \leq l < L_{n+1}} T_\theta^{-l} B_l \right) < +\infty. \quad (3)$$

Etant donnée une suite  $(L_n)$  de réels strictements positifs, soit  $U_n = \bigcup_{L_n \leq l < L_{n+1}} T_\theta^{-l} B_l$ . Soient  $x$  un point de  $U_n$  et  $k$  un entier avec  $L_n \leq k < L_{n+1}$ , tel que  $x \in T_\theta^{-k} B_k$ , c'est-à-dire  $\|x + k\theta\| \leq L_n^{-\frac{1}{d}}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \|\langle X_n, x \rangle\| &\leq k \|\langle X_n, \theta \rangle\| + \|\langle X_n, x + k\theta \rangle\|, \\ &\leq L_{n+1} \varepsilon_n + d \|x + k\theta\| |X_n|, \\ &\leq L_{n+1} \varepsilon_n + d L_n^{-\frac{1}{d}} |X_n|. \end{aligned}$$

L'application  $\tilde{X}_n$  de  $\mathbb{T}^d$  dans  $\mathbb{T}$  qui envoie  $x$  sur  $\langle X_n, x \rangle \pmod{1}$  est un morphisme surjectif de groupes compacts. L'image de  $\mu$  par  $\tilde{X}_n$  est donc la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{T}$  et il résulte de l'inégalité précédente que

$$\mu(U_n) \leq 2 \left( L_{n+1} \varepsilon_n + d L_n^{-\frac{1}{d}} |X_n| \right).$$

Il nous suffit donc de construire une suite  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers l'infini telle que

$$\sum_n \left( L_{n+1} \varepsilon_n + |X_n| L_n^{-\frac{1}{d}} \right) < \infty. \quad (4)$$

On pose  $L_n = |X_n|^{\frac{d}{d+1}} \varepsilon_{n-1}^{-\frac{d}{d+1}}$ . Cette suite tend bien vers l'infini et

$$L_n \varepsilon_{n-1} = |X_n| L_n^{-\frac{1}{d}} = |X_n|^{\frac{d}{d+1}} \varepsilon_{n-1}^{\frac{1}{d+1}}.$$

D'où l'hypothèse (2) entraîne (4), ce qui conclut la démonstration du théorème 5.

### 2.3 Démonstration du théorème 2 (ii)

Nous donnons des conditions équivalentes à la condition (2) du théorème 5.

**Lemme 2.1.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de vecteurs non nuls à coefficients entiers de normes strictement croissantes, telle que  $\sum |X_{n+1}|^{\frac{d}{d+1}} \|\langle X_n, \theta \rangle\|^{\frac{1}{d+1}} < \infty$ .*

(ii) *Il existe une sous-suite  $(\Delta_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  de la suite des meilleures approximations linéaires telle que  $\sum |\Delta_{\phi(n+1)}|^{\frac{d}{d+1}} \|\langle \Delta_{\phi(n)}, \theta \rangle\|^{\frac{1}{d+1}} < \infty$ .*

(iii)  $\sum (2^{nd} \varepsilon_l(2^n))^{\frac{1}{d+1}} < \infty$ .

(iv)  $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^{-1} (k^d \varepsilon_l(k))^{\frac{1}{d+1}} < \infty$ .

Montrons d'abord qu'on déduit le théorème 2 (ii) du lemme 2.1. Supposons qu'il existe  $\tau$  strictement positif tel que  $\theta$  n'appartienne pas à  $\Theta_l^d(\tau)$ . Alors pour tout  $k$  assez grand,  $\varepsilon_l(k) < k^{-d(1+\tau)}$ . On a donc

$$k^{-1} (k^d \varepsilon_l(k))^{\frac{1}{d+1}} \leq k^{-1 - \frac{d\tau}{d+1}}.$$

La propriété (iv) est vérifiée puisque  $\tau$  est strictement positif. D'après le lemme, l'hypothèse du théorème 5 est également vérifiée et donc  $T_\theta$  ne possède pas la propriété du logarithme.

#### Démonstration du lemme 2.1

Nous montrons tout d'abord que (i) implique (ii). Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs vérifiant la condition (i). On considère la suite  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des meilleures approximations linéaires. On définit la suite d'entiers  $(\phi(n))_{n \in \mathbb{N}}$  par la relation

$$|\Delta_{\phi(n)}| \leq |X_n| < |\Delta_{\phi(n)+1}|.$$

D'après la définition des meilleures approximations linéaires, on a pour tout  $n$ ,  $\|\langle \Delta_{\phi(n)}, \theta \rangle\| \leq \|\langle X_n, \theta \rangle\|$ . D'où

$$\sum (|\Delta_{\phi(n+1)}|^d \|\langle \Delta_{\phi(n)}, \theta \rangle\|)^{\frac{1}{d+1}} < \sum (|X_{n+1}|^d \|\langle X_n, \theta \rangle\|)^{\frac{1}{d+1}} < +\infty.$$

La suite  $(\phi(n))_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas nécessairement strictement croissante, mais on se ramène sans difficulté à ce cas.

Nous montrons maintenant que (ii) implique (iii). Soit  $(\Delta_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite des meilleures approximations linéaires vérifiant la condition (ii). Pour  $k \geq 0$ , notons  $h_k = |\Delta_{\phi(k)}|$ . Pour tout entier  $n$  tel que  $h_k \leq 2^n < h_{k+1}$ , on a  $\varepsilon_l(2^n) \leq \|\langle \Delta_{\phi(k)}, \theta \rangle\|$ , d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{h_k \leq 2^n < h_{k+1}} (2^{nd} \varepsilon_l(2^n))^{\frac{1}{d+1}} &\leq \|\langle \Delta_{\phi(k)}, \theta \rangle\|^{\frac{1}{d+1}} \sum_{h_k \leq 2^n < h_{k+1}} (2^{nd})^{\frac{1}{d+1}} \\
&\leq \|\langle \Delta_{\phi(k)}, \theta \rangle\|^{\frac{1}{d+1}} \frac{(2h_{k+1})^{\frac{d}{d+1}}}{2^{\frac{d}{d+1}} - 1}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{n \geq n_0} (2^{nd} \varepsilon_l(2^n))^{\frac{1}{d+1}} \leq c \sum_{k \geq 0} h_{k+1}^{\frac{d}{d+1}} \|\langle \Delta_{\phi(k)}, \theta \rangle\|^{\frac{1}{d+1}},$$

où  $n_0$  est un entier vérifiant  $2^{n_0} \geq h_0$  et  $c$  est une constante strictement positive.

Maintenant, pour déduire la propriété (i) de la propriété (iii), il suffit de remarquer qu'à  $\varepsilon_l(2^n)$  correspond une suite de droites  $(X_n)$ , avec  $|X_n| \leq 2^n$ , vérifiant

$$\|\langle X_n, \theta \rangle\| = \min_{|X| \leq 2^n} \|\langle X, \theta \rangle\| = \varepsilon_l(2^n).$$

On a alors

$$|X_{n+1}|^{\frac{d}{d+1}} \|\langle X_n, \theta \rangle\|^{\frac{1}{d+1}} \leq 2^{(n+1)\frac{d}{d+1}} \varepsilon_l(2^n)^{\frac{1}{d+1}} = 2^{\frac{d}{d+1}} (2^{nd} \varepsilon_l(2^n))^{\frac{1}{d+1}}.$$

On se ramène ensuite à une suite dont les normes sont strictement croissantes.

Nous finissons en montrant que les propriétés (iii) et (iv) sont équivalentes. Remarquons que pour  $n$  donné si on a  $2^n \leq k < 2^{n+1}$ , d'après les propriétés de meilleures approximations,  $\varepsilon_l(2^{n+1}) \leq \varepsilon_l(k) \leq \varepsilon_l(2^n)$  et donc

$$\frac{1}{2^{n+1}} (2^{nd} \varepsilon_l(2^{n+1}))^{\frac{1}{d+1}} \leq \frac{1}{k} (k^d \varepsilon_l(k))^{\frac{1}{d+1}} \leq \frac{1}{2^n} (2^{(n+1)d} \varepsilon_l(2^n))^{\frac{1}{d+1}}.$$

En sommant ces inégalités pour  $k$  compris entre  $2^n$  et  $2^{n+1}$

$$\frac{1}{2} (2^{nd} \varepsilon_l(2^{n+1}))^{\frac{1}{d+1}} \leq \sum_{2^n \leq k < 2^{n+1}} \frac{1}{k} (k^d \varepsilon_l(k))^{\frac{1}{d+1}} \leq (2^{(n+1)d} \varepsilon_l(2^n))^{\frac{1}{d+1}}.$$

Puis on somme sur les entiers  $n \geq 0$ ,

$$2^{-(1+\frac{d}{d+1})} \sum_{n \geq 1} (2^{nd} \varepsilon_l(2^n))^{\frac{1}{d+1}} \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} (k^d \varepsilon_l(k))^{\frac{1}{d+1}} \leq 2^{\frac{d}{d+1}} \sum_{n \geq 0} (2^{nd} \varepsilon_l(2^n))^{\frac{1}{d+1}}.$$

## 2.4 Un premier contre-exemple

Donnons maintenant un premier contre-exemple à la propriété du logarithme. Cet exemple s'inspire de l'idée d'alterner les meilleurs approximations des coordonnées de l'angle  $\theta$ . Cette idée a été utilisée par Yoccoz pour démontrer que la propriété de Denjoy-Koksma n'était plus vraie en dimension supérieure à 1 ([18]). On la retrouve par exemple dans [8] pour montrer que l'on peut construire des flots spéciaux au-dessus de rotations sur le tore de dimension 2 qui ne soient pas mélangeants, dans la construction de contre-exemples à la loi du logarithme par Galatolo et Peterlongo ([9]) ou dans le contre-exemples que donne Chevallier ([6]) d'un point dont la trajectoire est "mal répartie".

Pour  $d > 1$ , soit  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  et pour  $1 \leq i \leq d$ , on note  $(q_{i,n})$  la suite des dénominateurs de la fraction continue de  $\theta_i$  et on pose  $X_{dn+i} = (0, \dots, q_{i,n}, \dots, 0)$ . On a alors en particulier

$$\|\langle X_{dn+i}, \theta \rangle\| \leq \frac{1}{q_{i,n+1}}.$$

D'après le théorème 5, la translation  $T_\theta$  n'a pas la propriété du logarithme si ces suites vérifient

$$\sum_n \left( \left( \frac{q_{1,n}^d}{q_{d,n}} \right)^{\frac{1}{d+1}} + \left( \frac{q_{2,n}^d}{q_{1,n+1}} \right)^{\frac{1}{d+1}} + \dots + \left( \frac{q_{d,n}^d}{q_{d-1,n+1}} \right)^{\frac{1}{d+1}} \right) < \infty.$$

Cette condition est réalisée s'il existe une constante  $c > 1$  pour  $n$  assez grand, tel que

$$\left( \frac{q_{1,n}^d}{q_{d,n}} \right)^{\frac{1}{d+1}} \leq n^{-c}$$

et pour  $2 < i \leq d$ ,

$$\left( \frac{q_{i,n}^d}{q_{i-1,n+1}} \right)^{\frac{1}{d+1}} \leq n^{-c}.$$

On en déduit la proposition suivante

**Proposition 2.2.** *Soit  $d > 1$ . Soit  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$  et soit pour  $1 \leq i \leq d$ , la suite  $(q_{i,n})$  des dénominateurs des fractions continues de  $\theta_i$ . S'il existe  $\delta > d + 1$  tel que pour tout  $n$  assez grand,*

$$q_{d,n} \geq q_{1,n}^d n^\delta \text{ et } q_{i-1,n+1} \geq q_{i,n}^d n^\delta \text{ pour } 2 < i \leq d,$$

*alors  $T_\theta$  ne possède pas la propriété du logarithme.*

Il est aisé de construire des vecteurs  $\theta_i$  vérifiant les relations de la proposition 2.2, en construisant par récurrence, simultanément, les développements en fractions continues des  $\theta_i$ .

En dimension 2, on montre (voir [8] chapitre 7) que quel que soit  $\varepsilon$ , il existe des vecteurs  $\theta \in \Omega_s^2(1 + \varepsilon)$  vérifiant ces conditions. Par contre, on peut montrer (voir [2]) que de tels  $\theta$  ne peuvent avoir des types diophantiens plus petits.

## 2.5 Extensions du critère à des boules de rayon $n^{-\frac{1}{\delta}}$

Nous élargissons dans cette section le cadre du problème. Remarquons que dans la démonstration du théorème 5 le fait que les rayons des boules soient égaux à  $n^{-\frac{1}{\delta}}$  ne joue pas un rôle important. Soit  $(X_n)$  une suite de vecteurs à coefficients entiers. On considère les boules  $B(0, r_n)$ , avec  $r_n$  décroissant et une suite  $(L_n)$  de réels strictement positifs tendant vers l'infini. Comme dans la démonstration du théorème 5, on note  $\varepsilon_n = \|\langle X_n, \theta \rangle\|$  et on définit  $U_n = \bigcup_{L_n \leq l < L_{n+1}} T_\theta^{-l} B(0, r_l)$ . On obtient de la même manière que si un point du tore  $x$  appartient à  $U_n$ , alors

$$\|\langle X_n, x \rangle\| \leq L_{n+1} \varepsilon_n + dr_{L_n} |X_n|.$$

D'où

$$\mu(U_n) \leq 2(L_{n+1} \varepsilon_n + dr_{L_n} |X_n|).$$

En particulier, lorsque  $r_n = n^{-\frac{1}{\delta}}$ , en posant,

$$L_n = |X_n|^{\frac{\delta}{\delta+1}} \varepsilon_{n-1}^{-\frac{\delta}{\delta+1}},$$

et comme pour le théorème 5, on obtient

**Proposition 2.3.** *Soit  $\delta > 0$ . S'il existe une suite de vecteurs à coefficients entiers, de normes croissantes,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que*

$$\sum |X_{n+1}|^{\frac{\delta}{\delta+1}} \varepsilon_n^{\frac{1}{\delta+1}} < \infty,$$

où  $\varepsilon_n = \|\langle X_n, \theta \rangle\|$ , alors la suite des boules  $B(0, n^{-\frac{1}{\delta}})$  n'est pas de Borel-Cantelli pour  $T_\theta$ .

Remarquons que les suite de boules  $B(0, n^{-\frac{1}{\delta}})$  avec  $\delta < d$  ne peuvent pas être de Borel-Cantelli, car la somme de leurs mesures est finie.

Dans la démonstration du lemme 2.1, on peut sans difficultés remplacer  $d$  par  $\delta$ , et on obtient de même

**Lemme 2.4.** *Soit  $\delta > 0$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de vecteurs à coefficients entiers de normes strictement croissantes, telle que  $\sum |X_{n+1}|^{\frac{\delta}{\delta+1}} \|\langle X_n, \theta \rangle\|^{\frac{1}{\delta+1}} < \infty$ .*

(ii)  $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^{-1} (k^\delta \varepsilon_l(k))^{\frac{1}{\delta+1}} < \infty$ .

Il en résulte

**Proposition 2.5.** *Soit  $\delta \geq d$ . Si  $\theta$  n'appartient pas à  $\Theta_l^d(\tau)$  pour un  $\tau > \frac{\delta}{d} - 1$ , les suite de boules  $B(0, n^{-\frac{1}{\delta}})$  ne sont pas de Borel-Cantelli pour  $T_\theta$ .*

En effet, supposons qu'il existe  $\tau$  avec  $\tau > \frac{\delta}{d} - 1$  tel que  $\theta$  n'appartienne pas à  $\Theta_l^d(\tau)$ . Alors pour tout  $k$  assez grand,  $\varepsilon_l(k) < k^{-d(1+\tau)}$ . On a donc

$$k^{-1}(k^\delta \varepsilon_l(k))^{\frac{1}{\delta+1}} \leq k^{-1-\frac{d+d\tau-\delta}{d+1}}$$

On a  $d + d\tau - \delta > 0$ , donc la propriété (ii) du lemme 2.4 est vérifiée et la proposition 2.3 s'applique.

**Corollaire 2.6.** *S'il existe  $\tau > 0$ , tel que  $\theta$  n'appartienne pas à  $\Theta_l^d(\tau)$ , alors la translation  $T_\theta$  ne vérifie pas la loi du logarithme.*

En choisissant  $d < \delta < d(1 + \tau)$ , la suite de boules  $B(0, n^{-\frac{1}{\delta}})$  n'est pas de Borel-Cantelli d'après la proposition 2.5. D'après la démonstration du lemme 1.2, on ne peut pas alors avoir  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \|T_\theta^n(x)\|}{\log n} > \frac{1}{\delta}$ , d'où

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \|T_\theta^n(x)\|}{\log n} < \frac{1}{d}.$$

### 3 Relation de transfert entre les $\Theta_l^d(\tau)$ et les $\Theta_s^d(\tau)$

#### 3.1 Démonstration du théorème de transfert

Nous montrons le théorème 3 en en donnant une version plus précise. Cela complétera la démonstration des théorèmes 1 et 2. Nous en déduirons également une variante du théorème 5 avec une condition portant sur les approximations simultanées.

**Théorème 6.** (i) *Quels que soient  $h > 0$  et  $d$  entier non nul on a*

$$\varepsilon_l(h) \leq \frac{1}{Ch^{d-1}} \varepsilon_s(Ch^d),$$

où  $C = \frac{1}{2(d+1)}$ .

(ii) *Soient  $\tau > 0$  et  $\eta > 0$ . Si  $\limsup h^{d(1+\tau)} \varepsilon_l(h) < \eta$ , alors*

$$\limsup q^{\frac{1+\tau}{d+(d-1)\tau}} \varepsilon_s(q) \leq C' \eta^{\frac{1}{d^2+d(d-1)\tau}},$$

où  $C'$  est une constante strictement positive.

Le théorème 3 en résulte bien. Soit en effet  $\tau \geq 0$ , en posant  $q = Ch^d$ , l'inégalité (i) s'écrit

$$h^{d(1+\tau)} \varepsilon_l(h) \leq c_1 q^{\frac{1+d\tau}{d}} \varepsilon_s(q),$$

où  $c_1$  est une constante strictement positive. Ce qui implique que  $\Theta_l^d(\tau) \subset \Theta_s^d(d\tau)$ .

D'autre part, si  $\theta$  n'appartient pas à  $\Theta_l^d(\tau)$  alors  $\limsup h^{d(1+\tau)} \varepsilon_l(h) = 0$  et d'après (ii),

$$\limsup q^{\frac{1+\tau}{d+(d-1)\tau}} \varepsilon_s(q) = 0.$$

Or on a  $\frac{1+\tau}{d+(d-1)\tau} = \frac{1}{d} \left(1 + \frac{\tau}{d+(d-1)\tau}\right)$ , donc  $\theta$  n'appartient pas à  $\Theta_s^d\left(\frac{\tau}{(d-1)\tau+d}\right)$ .

La preuve du théorème reprend la démonstration par Khintchine ([15]) du théorème de transfert de Jarnik. A partir d'un lemme de Minkowski, Khintchine montre le lemme ci-dessous. On pourra également voir un article d'Apfelbeck ([1]) donnant une amélioration du théorème de transfert de Jarnik et qui reprend ce lemme clef de Khintchine.

**Lemme 3.1.** [Khintchine] Soient  $f_1, \dots, f_n$  et  $g_1, \dots, g_n$  des formes linéaires sur  $\mathbb{R}^n$ , avec  $\det(g_1, \dots, g_n) = \lambda$ , telles que la forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $(u, v) \rightarrow \sum_{i=1}^n f_i(u)g_i(v)$  soit à coefficients entiers, soient  $t_1, \dots, t_n$  des réels strictement positifs. S'il existe  $u \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$  tel que  $|f_i(u)| \leq t_i$ , pour  $1 \leq i \leq n$  et  $f_i(u) \neq 0$  pour au moins un  $i$ , alors il existe  $v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$  tel que pour  $1 \leq k \leq n$ ,

$$|g_k(v)| \leq (2n\lambda)^{\frac{1}{n-1}} \frac{(\prod_{i=1}^n t_i)^{\frac{1}{n-1}}}{t_k}.$$

### Démonstration du théorème 6

On applique le lemme, avec  $n = d + 1$ , aux formes linéaires sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  définies par

$$\begin{cases} f_i(u) = u_i - \theta_i u_{d+1}, & 1 \leq i < d \\ f_{d+1}(u) = u_{d+1} \\ g_i(v) = v_i, & 1 \leq i \leq d \\ g_{d+1}(v) = \sum_{i=1}^d v_i \theta_i + v_{d+1} \end{cases}$$

On trouve  $\sum_{i=1}^{d+1} f_i(u)g_i(v) = \sum_{i=1}^{d+1} u_i v_i$ , il s'agit donc bien d'une forme bilinéaire à coefficients entiers. On a  $\det(g_1, \dots, g_{d+1}) = 1$  et  $\det(f_1, \dots, f_{d+1}) = 1$ .

On commence par montrer la partie (i). Soient  $q$  un réel strictement positif et  $\varepsilon = \varepsilon_s(q)$ . On choisit  $u = (u_1, \dots, u_{d+1})$  dans  $\mathbb{Z}^{d+1}$  tel que  $|u_{d+1}| < q$  et  $\|u_{d+1}\theta\| = \max_{1 \leq i \leq d} |u_{d+1}\theta_i - u_i| = \varepsilon$ . Alors  $|f_i(u)| \leq \varepsilon$ , pour  $1 \leq i \leq d$ , et  $|f_{d+1}(u)| \leq q$ .



D'après le lemme, il existe  $v = (v_1, \dots, v_{d+1})$  non nul appartenant à  $\mathbb{Z}^{d+1}$  tel que, en notant  $\Delta = (v_1, \dots, v_d)$  on ait,

$$\begin{cases} |\Delta| = \max_{1 \leq i \leq d} |v_i| = \max_{1 \leq i \leq d} |g_i(v)| \leq c \frac{(\varepsilon^d q)^{\frac{1}{d}}}{\varepsilon} = cq^{\frac{1}{d}} \\ \|\langle \Delta, \theta \rangle\| = |\sum_{i=1}^d v_i \theta_i + v_{d+1}| = |g_{d+1}(v)| \leq c \frac{(\varepsilon^d q)^{\frac{1}{d}}}{q} = cq^{-\frac{d-1}{d}} \varepsilon \end{cases}$$

où  $c = (2(d+1))^{\frac{1}{d}}$ .

Il en résulte que

$$\varepsilon_l(cq^{\frac{1}{d}}) \leq cq^{-(1-\frac{1}{d})} \varepsilon.$$

Pour  $h > 0$  donné, en posant  $q = Ch^d$ , c'est-à-dire  $h = cq^{\frac{1}{d}}$ , on trouve bien

$$\varepsilon_l(h) \leq \frac{1}{Ch^{d-1}} \varepsilon_s(Ch^d).$$

On montre maintenant la partie (ii) du théorème. On utilise le lemme 3.1 avec les mêmes formes linéaires que dans la démonstration de la partie (i), mais on inverse les rôles des  $f_i$  et des  $g_i$ .

Etant donné  $\tau > 0$  et  $\eta > 0$ , soit  $h > 0$  tel que  $h^{d(1+\tau)} \varepsilon_l(h) < \eta$ , et soit  $v$  un vecteur non nul de  $\mathbb{Z}^d$  tel que  $|g_i(v)| = |v_i| \leq |h|$ , pour  $1 \leq i \leq d$ , et

$$|g_{d+1}(v)| = \varepsilon_l(h) \leq \frac{\eta}{h^{d(1+\tau)}}.$$

D'après le lemme 3.1, il existe un vecteur  $u$  non nul de  $\mathbb{Z}^{d+1}$  tel que pour  $1 \leq i \leq d$ , on a

$$|f_i(u)| = |u_{d+1} \theta - u_i| \leq \frac{c}{h} \left( \frac{h^d \eta}{h^{d(1+\tau)}} \right)^{\frac{1}{d}} = c \frac{\eta^{\frac{1}{d}}}{h^{(1+\tau)}},$$

et

$$|f_{d+1}(u)| = |u_{d+1}| \leq c \frac{h^{d(1+\tau)}}{\eta} \left( \frac{h^d \eta}{h^{d(1+\tau)}} \right)^{\frac{1}{d}} = c \eta^{\frac{1}{d}-1} h^{d+(d-1)\tau}.$$

En posant  $q = c \eta^{\frac{1}{d}-1} h^{d+(d-1)\tau}$ , on obtient

$$\varepsilon_s(q) \leq c \eta^{\frac{1}{d}} h^{-(1+\tau)}.$$

Comme

$$q^{\frac{1+\tau}{d+(d-1)\tau}} = \left( c \eta^{\frac{1}{d}-1} \right)^{\frac{1+\tau}{d+(d-1)\tau}} h^{(1+\tau)},$$

$$q^{\frac{1+\tau}{d+(d-1)\tau}} \varepsilon_s(q) \leq \left( c \eta^{\frac{1}{d}-1} \right)^{\frac{1+\tau}{d+(d-1)\tau}} c \eta^{\frac{1}{d}} = C' \eta^{\frac{1}{d^2+d(d-1)\tau}},$$

où  $C'$  est une constante strictement positive.

Sous l'hypothèse de (ii), on peut choisir  $h$  et donc  $q$  arbitrairement grands vérifiant ces inégalités, ce qui conclut la démonstration du théorème 6.

### 3.2 Critère en approximations simultanées pour ne pas avoir la propriété du logarithme

**Proposition 3.2.** *S'il existe une suite d'entiers strictement croissante  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , telle que*

$$\sum_{n \geq 0} (q_n^{\frac{1}{d}} \|q_{n-1} \theta\|)^{\frac{1}{d+1}} < \infty,$$

alors  $T_\theta$  ne possède pas la propriété du logarithme.

Commençons par réécrire la condition (iv) du lemme 2.1 sous la forme

$$\int_1^\infty \frac{1}{h} (h^d \varepsilon_l(h))^{\frac{1}{d+1}} dh < \infty.$$

D'après le théorème 6, on a

$$\int_1^\infty \frac{1}{h} (h^d \varepsilon_l(h))^{\frac{1}{d+1}} dh \leq \frac{1}{C^{\frac{1}{d+1}}} \int_1^\infty \frac{1}{h} (h \varepsilon_s(Ch^d))^{\frac{1}{d+1}} dh.$$

On applique le changement de variable  $q = Ch^d$ ,

$$\int_1^\infty \frac{1}{h} (h^d \varepsilon_l(h))^{\frac{1}{d+1}} dh \leq \frac{1}{d} \frac{1}{C^{\frac{1}{d}}} \int_C^\infty \frac{1}{q} (q^{\frac{1}{d}} \varepsilon_s(q))^{\frac{1}{d+1}} dq,$$

Donc si  $\sum_{q \in \mathbb{N}^*} q^{-1} \left( q^{\frac{1}{d}} \varepsilon_s(q) \right)^{\frac{1}{d+1}} < \infty$ , alors  $T_\theta$  ne possède pas la propriété du logarithme.

On montre que cette condition est équivalente à la condition de l'énoncé de la même manière que dans la démonstration du lemme 2.1.

## 4 Construction, en dimension 2, d'exemples et de contre-exemples à la propriété du logarithme

Dans [17], Laurent démontre l'optimalité d'une inégalité de transfert en construisant un vecteur  $\theta$  dont il contrôle les approximations diophantiennes. Nous allons reprendre sa construction en l'adaptant à nos définitions.

**Théorème 7.** *Etant donné  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(h_n^\circ)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites d'entiers strictement positifs, avec  $a_n > 2^5$  et  $h_{n+1}^\circ \geq 24a_n h_n^\circ$ , on peut construire un vecteur  $\theta$  appartenant à  $\mathbb{T}^2$  de manière que*

(i) Si

$$\sum_{n \geq 0} a_n^{-\frac{1}{3}} < \infty,$$

alors  $T_\theta$  ne possède pas la propriété du logarithme.

(ii) Si la suite  $(a_n)$  admet une sous-suite bornée alors  $\theta \in \Theta_l^2(0)$ .

(iii) Soit  $\tau \geq 0$ . On a  $\theta \in \Omega_s^2(\tau)$  si et seulement si

$$\inf a_{n+1}^{-1} a_n^{\frac{1+\tau}{2}} (h_n^\circ)^{1+\tau} (h_{n+1}^\circ)^{-1} > 0.$$

Avant de faire la construction, on montre que l'on peut en déduire le théorème 4. D'après la première assertion du théorème, si on choisit  $a_n = n^4$  (pour  $n \geq 3$ ) alors  $T_\theta$  ne possède pas la propriété du logarithme. On choisit également  $h_{n+1}^\circ = 24a_n h_n^\circ$ . Alors, quelque soit  $\tau > 0$ ,

$$\inf a_{n+1}^{-1} a_n^{\frac{1+\tau}{2}} (h_n^\circ)^{1+\tau} (h_{n+1}^\circ)^{-1} = \inf \frac{1}{24} (h_n^\circ)^\tau (n+1)^{-4} n^{2(\tau-1)} > 0,$$

car,  $(h_n^\circ)$  a une croissance au moins exponentielle. Donc  $\theta \in \Omega_s^2(\tau)$  pour tout  $\tau > 0$ .

On choisit, maintenant, la suite  $(a_n)$  bornée, donc  $\theta \in \Theta_l^2(0)$  et  $T_\theta$  possède la propriété du logarithme. On veut de plus que  $\theta$  n'appartienne à aucun  $\Omega_s^2(\tau)$  pour  $\tau > 0$ , soit d'après (iii) que  $\inf a_{n+1}^{-1} a_n^{\frac{1+\tau}{2}} (h_n^\circ)^{1+\tau} (h_{n+1}^\circ)^{-1} = 0$  pour tout  $\tau > 0$ . Comme la suite  $(h_n^\circ)$  est soumise à la seule condition que  $h_{n+1}^\circ \geq 24a_n h_n^\circ$ , il suffit de la construire par récurrence en choisissant  $h_{n+1}^\circ$  suffisamment grand devant  $h_n^\circ$ .

## 4.1 Préliminaires

La première idée est de se placer dans l'espace projectif. On considère les points  $P = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ , avec  $x, y, z$  premiers entre eux, auxquels on associe les points  $\tilde{P} = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$  dans  $\mathbb{R}^2$  lorsque  $z \neq 0$  et les triplets  $\Delta = (r, s, t)$  de  $\mathbb{Z}^3$ , avec  $r, s, t$  premiers entre eux associés aux droites  $\tilde{\Delta} : rx + sy + t = 0$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

On notera  $P \wedge P'$  le produit extérieur dans  $\mathbb{R}^3$  et  $|P| = \max(|x|, |y|, |z|)$ . Pour cette norme on a  $|P \wedge P'| \leq 2|P||P'|$ .

Si  $\tilde{P}, \tilde{P}'$  appartiennent à la droite  $\tilde{\Delta}$ , ce qui correspond au fait que les points  $P$  et  $P'$  appartiennent au réseau  $\Gamma = \{P \in \mathbb{Z}^3 \mid \langle \Delta, P \rangle = 0\}$ , alors  $P \wedge P' = k\Delta$  avec  $k$  entier et de plus  $P$  et  $P'$  engendrent le réseau  $\Gamma$  si et seulement si  $P \wedge P' = \pm\Delta$ .

On utilisera également la version suivante d'un lemme bien connu en norme euclidienne,

**Lemme 4.1.** Soit  $\Delta$  appartenant à  $\mathbb{Z}^3$ , le réseau  $\Gamma = \{P \in \mathbb{Z}^3 \mid \langle \Delta, P \rangle = 0\}$  et soit  $P$  un élément du réseau, dont les coordonnées sont premières entre elles. Alors, il existe  $P'$  tel que  $P$  et  $P'$  engendrent  $\Gamma$ , avec  $|P'| \leq 2 \max\left(|P|, \frac{|\Delta|}{|P|}\right)$ .

## 4.2 Construction de $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Nous allons construire  $\theta$  comme limite d'une suite de points  $(\tilde{P}_n)$  tout en construisant une suite d'approximations linéaires  $(\tilde{\Delta}_n)$ .

Les normes respectives  $h_n$  et  $q_n$  de  $\Delta_n$  et  $P_n$  seront prescrites à une constante près. On demande de plus que le point  $\tilde{P}_n$  soit l'intersection de  $\tilde{\Delta}_n$  et de  $\tilde{\Delta}_{n+1}$ .

Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(h_n^\circ)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites d'entiers strictement positifs, avec  $a_n > 2^5$  et  $h_{n+1}^\circ \geq 24a_n h_n^\circ$ . On note  $q_n^\circ = a_n h_n^{\circ 2}$ .

Nous commençons la récurrence avec  $\Delta_0 = (h_0^\circ, -1, 0)$  et  $P_0 = (1, h_0^\circ, q_0^\circ)$ , qui sont associés respectivement à la droite  $\tilde{\Delta}_0 : h_0^\circ x - y = 0$  et le point  $\tilde{P}_0 \left( \frac{1}{q_0^\circ}, \frac{h_0^\circ}{q_0^\circ} \right)$ . Alors  $q_0 = q_0^\circ$ ,  $h_0 = h_0^\circ$  et le point  $\tilde{P}_0$  appartient à la droite  $\tilde{\Delta}_0$ . Supposons que soient construits  $\Delta_n$  et  $P_n$ , à coordonnées premières entre elles, tels que  $\tilde{P}_n$  appartienne à  $\tilde{\Delta}_n$ , et vérifiant les inégalités

$$\frac{1}{2}h_n^\circ \leq |\Delta_n| = h_n \leq 2h_n^\circ$$

et

$$\frac{1}{2}q_n^\circ \leq |P_n| = q_n \leq 2q_n^\circ.$$

On construit d'abord  $\Delta_{n+1}$ . D'après le lemme 4.1, il existe un point  $\Delta'$  engendrant avec  $\Delta_n$  le réseau  $\{\Delta \in \mathbb{Z}^3 | \langle P_n, \Delta \rangle = 0\}$  et vérifiant  $|\Delta'| \leq 2 \max(h_n, q_n h_n^{-1})$ . On a  $q_n h_n^{-1} \leq 4a_n h_n^\circ$ , donc  $|\Delta'| \leq \frac{1}{3}h_{n+1}^\circ$ . Quitte à changer de signe, on suppose  $\Delta_n \wedge \Delta' = P_n$ .

On pose

$$\Delta_{n+1} = \left[ \frac{h_{n+1}^\circ}{h_n} \right] \Delta_n + \Delta'$$

et  $h_{n+1} = |\Delta_{n+1}|$ . On a encore  $\Delta_n \wedge \Delta_{n+1} = P_n$ , ce qui implique que les coordonnées de  $\Delta_{n+1}$  sont premières entre elles et que  $\tilde{P}_n$  appartient à  $\tilde{\Delta}_{n+1}$ . De plus

$$\begin{aligned} \left[ \frac{h_{n+1}^\circ}{h_n} \right] h_n - |\Delta'| &\leq h_{n+1} \leq \left[ \frac{h_{n+1}^\circ}{h_n} \right] h_n + |\Delta'|, \\ h_{n+1}^\circ - h_n - |\Delta'| &\leq h_{n+1} \leq h_{n+1}^\circ + |\Delta'|. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{2}h_{n+1}^\circ \leq h_{n+1} \leq 2h_{n+1}^\circ.$$

On construit  $P_{n+1}$  de la même manière ; le lemme 4.1 donne l'existence d'un  $P'$  engendrant avec  $P_n$  le réseau  $\{P \in \mathbb{Z}^3 | \langle \Delta_{n+1}, P \rangle = 0\}$  et vérifiant  $|P'| \leq$

$2 \max(q_n, h_n q_n^{-1})$ . Donc  $|P'| \leq \frac{1}{3} q_{n+1}^\circ$ . On pose alors  $P_{n+1} = [\frac{q_{n+1}^\circ}{q_n}] P_n + P'$  et  $q_{n+1} = |P_{n+1}|$ . Alors le point  $\tilde{P}_{n+1}$  appartient à  $\tilde{\Delta}_{n+1}$  et on vérifie

$$\frac{1}{2} q_{n+1}^\circ \leq q_{n+1} \leq 2 q_{n+1}^\circ.$$

Quitte à changer de signe on supposera  $P_n \wedge P_{n+1} = \Delta_{n+1}$ .

### 4.3 Convergence de la suite $(\tilde{P}_n)$ et définition de $\theta$

Suivant la démonstration de [17], on considère une “distance” projective entre deux points  $\tilde{P}$  et  $\tilde{P}'$  de  $\mathbb{R}^2$

$$d(\tilde{P}, \tilde{P}') = \frac{|P \wedge P'|}{|P||P'|}$$

et qui vérifie l’inégalité triangulaire suivante pour trois points  $\tilde{P}, \tilde{P}', \tilde{P}''$

$$d(\tilde{P}, \tilde{P}'') \leq d(\tilde{P}, \tilde{P}') + 2d(\tilde{P}', \tilde{P}'').$$

Cette “distance” coïncide avec la distance dans  $\mathbb{R}^2$  pour deux points assez proches de l’origine. En effet, si  $P = (x, y, z)$  et  $P' = (x', y', z')$  vérifient  $|z| \geq 2 \max(|x|, |y|)$  et  $|z'| \geq 2 \max(|x'|, |y'|)$ , un calcul immédiat montre que

$$d(\tilde{P}, \tilde{P}') = |\tilde{P} - \tilde{P}'|.$$

Remarquons que  $|z| \geq 2 \max(|x|, |y|)$  si et seulement si  $d(0, \tilde{P}) \leq \frac{1}{2}$ , puisque  $d(0, \tilde{P}) = \frac{|(-y, x, 0)|}{|P|}$ .

Cela va nous permettre d’évaluer les distances  $|\tilde{P}_n - \tilde{P}_{n+1}|$ . On a pour tout  $n$  entier,

$$d(\tilde{P}_n, \tilde{P}_{n+1}) = \frac{|P_n \wedge P_{n+1}|}{|P_n||P_{n+1}|} = \frac{|\Delta_{n+1}|}{|P_n||P_{n+1}|} = \frac{h_{n+1}}{q_n q_{n+1}}.$$

Donc

$$\frac{1}{8} \frac{1}{a_{n+1} a_n h_n^{\circ 2} h_{n+1}^\circ} \leq \frac{1}{8} \frac{h_{n+1}^\circ}{q_n^\circ q_{n+1}^\circ} \leq d(\tilde{P}_n, \tilde{P}_{n+1}) \leq 8 \frac{h_{n+1}^\circ}{q_n^\circ q_{n+1}^\circ} \leq \frac{8}{a_{n+1} a_n h_n^{\circ 2} h_{n+1}^\circ}.$$

Compte tenu de l’encadrement précédent et des conditions portant sur  $(a_n)$  et  $(h_n^\circ)$ , on obtient

$$d(\tilde{P}_n, \tilde{P}_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{18} 3^3} d(\tilde{P}_{n-1}, \tilde{P}_n). \quad (5)$$

Pour  $n = 0$ , on a  $d(0, \tilde{P}_0) = \frac{h_0^\circ}{q_0} = \frac{1}{a_0 h_0^\circ} < \frac{1}{32}$ . Et en évaluant grossièrement,  $d(\tilde{P}_i, \tilde{P}_{i+1}) \leq \frac{1}{32^{i+1}}$ , d'où,

$$d(0, \tilde{P}_n) \leq d(0, \tilde{P}_0) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} d(\tilde{P}_i, \tilde{P}_{i+1}) < \frac{1}{32} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{32^{i+1}} < \frac{1}{8}.$$

En particulier,  $d(0, \tilde{P}_n) < \frac{1}{2}$ , pour tout  $n$  et

$$|\tilde{P}_n - \tilde{P}_{n+1}| = d(\tilde{P}_n, \tilde{P}_{n+1}).$$

La décroissance de  $|\tilde{P}_n - \tilde{P}_{n+1}|$  étant au moins géométrique, la suite  $\tilde{P}_n$  est de Cauchy et on note  $\theta$  sa limite. On a encore

$$|\theta| \leq \frac{1}{8} < \frac{1}{4}. \quad (6)$$

De (5), il résulte aussi  $\frac{1}{2}|\tilde{P}_n - \tilde{P}_{n+1}| \leq |\tilde{P}_n - \theta| \leq \frac{3}{2}|\tilde{P}_n - \tilde{P}_{n+1}|$ , soit encore

$$\frac{1}{2} \frac{h_{n+1}}{q_n q_{n+1}} \leq |\tilde{P}_n - \theta| \leq \frac{3}{2} \frac{h_{n+1}}{q_n q_{n+1}}. \quad (7)$$

## 4.4 Meilleures approximations diophantiennes de $\theta$

### 4.4.1 Approximations simultanées

Nous montrons ici que les meilleures approximations simultanées de  $\theta = (\theta', \theta'')$  sont les  $|P_n| = q_n$  à l'exception possible des premiers termes et de certains termes  $(q_{n+1} - q_n)$  :

**Lemme 4.2.** *Si  $q$  est un entier avec  $0 < q < q_{n+1}$  et  $q \neq q_n$ ,  $q \neq q_{n+1} - q_n$ , alors*

$$\|q\theta\| > \|q_n\theta\|.$$

D'après (7), on a  $q_n|\theta - \tilde{P}_n| \leq \frac{1}{2}$ , donc  $\|q_n\theta\| = q_n|\theta - \tilde{P}_n|$  et

$$\frac{h_{n+1}}{2q_{n+1}} \leq \|q_n\theta\| \leq \frac{3h_{n+1}}{2q_{n+1}}, \quad (8)$$

Soit  $q$  un entier satisfaisant les condition du lemme. Il existe  $x$  et  $y$  entiers tels que et  $\|q\theta\| = \max(|x - q\theta'|, |y - q\theta''|)$ . Soit  $P = (x, y, q)$ . D'après (6),  $|x| < \frac{q}{4} + \frac{1}{2} < q$  et de même  $|y| < q$ . On a donc  $|P| = q$ . Si  $|\tilde{P}| > \frac{1}{2}$  alors on a  $|\tilde{P} - \theta| > \frac{1}{4}$ , or d'après (8),  $\|q_n\theta\| < \frac{1}{4}$ . Nous supposons donc que  $|\tilde{P}| \leq \frac{1}{2}$ ,

On décompose

$$\|q\theta\| = q|\tilde{P} - \theta| \geq q \left( |\tilde{P} - \tilde{P}_{n+1}| - |\tilde{P}_{n+1} - \theta| \right)$$

D'après (7),  $q|\tilde{P}_{n+1} - \theta| \leq \frac{3}{2} \frac{h_{n+2}}{q_{n+2}}$ , d'où

$$q|\tilde{P}_{n+1} - \theta| \leq \frac{6}{a_{n+2}h_{n+2}^\circ} \leq \frac{1}{4 a_{n+2}a_{n+1}h_{n+1}^\circ} \leq \frac{h_{n+1}^\circ}{4 a_{n+2}q_{n+1}^\circ} \leq \frac{h_{n+1}}{a_{n+2}q_{n+1}},$$

donc

$$q|\tilde{P}_{n+1} - \theta| < \frac{1}{2} \frac{h_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

Pour conclure la démonstration du lemme, il suffit maintenant de montrer que

$$q|\tilde{P} - \tilde{P}_{n+1}| \geq 2 \frac{h_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

Rappelons que l'on suppose  $|\tilde{P}| \leq \frac{1}{2}$ , on a donc

$$|\tilde{P} - \tilde{P}_{n+1}| = \frac{|P \wedge P_{n+1}|}{|P||P_{n+1}|} = \frac{1}{q q_{n+1}} |P \wedge P_{n+1}|. \quad (9)$$

Il reste à évaluer  $|P \wedge P_{n+1}|$ .

Première possibilité,  $\tilde{P}$  n'appartient pas à  $\tilde{\Delta}_{n+1}$ , auquel cas la droite joignant  $\tilde{P}$  et  $\tilde{P}_{n+1}$  passe par  $\tilde{P}_{n+1}$  tout en n'étant pas colinéaire à  $\tilde{\Delta}_{n+1}$ . Il existe alors un entier  $l$  non nul tel que

$$(P \wedge P_{n+1}) \wedge \Delta_{n+1} = lP_{n+1}.$$

D'où

$$|P \wedge P_{n+1}| \geq \frac{|P_{n+1}|}{2|\Delta_{n+1}|} = \frac{q_{n+1}}{2h_{n+1}} \geq 2h_{n+1}.$$

Deuxième possibilité,  $\tilde{P}$  appartient à  $\tilde{\Delta}_{n+1}$ , c'est à dire  $P$  appartient au réseau  $\{P \in \mathbb{Z}^3 | \langle \Delta_{n+1}, P \rangle = 0\}$ . Les points  $P_n$  et  $P_{n+1}$  engendrant ce réseau, il existe  $k$  et  $k'$  entiers tels que  $P = kP_n + k'P_{n+1}$ . On a

$$|P \wedge P_{n+1}| = |k||\Delta_{n+1}| = |k|h_{n+1}.$$

Remarquons que  $k$  est non nul car  $|P| < |P_{n+1}|$ . Si  $|k| = 1$ , on a alors  $P = k'P_{n+1} \pm P_n$  et  $q = k'q_{n+1} \pm q_n$ . Comme  $0 < q < q_{n+1}$  on a  $k' = 0$  ou  $k' = 1$ , mais comme  $q \neq q_n$  et  $q \neq q_{n+1} - q_n$ , ces cas sont également exclus. D'où  $|k| \geq 2$  et on a encore

$$|P \wedge P_{n+1}| \geq 2h_{n+1}.$$

D'après (9),  $q|\tilde{P} - \tilde{P}_{n+1}| \geq 2 \frac{h_{n+1}}{q_{n+1}}$ , ce qui conclut la démonstration du lemme.

#### 4.4.2 Approximations linéaires

Notons ici  $\bar{\theta} = (\theta', \theta'', 1) \in \mathbb{R}^3$  et  $\Delta_n = (r_n, s_n, t_n)$ , alors  $|\langle \Delta_n, \bar{\theta} \rangle| = |r_n \theta' + s_n \theta'' + t_n|$ .

Nous allons montrer que  $(r_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite des meilleures approximations linéaires de  $\theta$ , à l'exception possible des premiers termes et de certains  $(r_{n+1}, s_{n+1}) \pm (r_n, s_n)$ .

Donnons tout d'abord un encadrement de  $|\langle \Delta_n, \bar{\theta} \rangle|$ .

**Lemme 4.3.** *Pour tout  $n$  entier, on a*

$$\frac{3}{4} \frac{1}{q_{n+1}} \leq |\langle \Delta_n, \bar{\theta} \rangle| \leq \frac{5}{4} \frac{1}{q_{n+1}}.$$

On décompose,

$$|\langle \Delta_n, \bar{\theta} \rangle| = \left| \left\langle \Delta_n, \frac{P_{n+1}}{|P_{n+1}|} \right\rangle + \left\langle \Delta_n, \bar{\theta} - \frac{P_{n+1}}{|P_{n+1}|} \right\rangle \right|.$$

Etudions  $\langle \Delta_n, P_{n+1} \rangle$ , on a

$$\Delta_n \wedge (P_n \wedge P_{n+1}) = \Delta_n \wedge \Delta_{n+1} = P_n.$$

Mais aussi, d'après la formule classique sur le double produit vectoriel

$$\Delta_n \wedge (P_n \wedge P_{n+1}) = \langle \Delta_n, P_{n+1} \rangle P_n - \langle \Delta_n, P_n \rangle P_{n+1} = \langle \Delta_n, P_{n+1} \rangle P_n.$$

Donc,  $\langle \Delta_n, P_{n+1} \rangle = 1$ , et

$$\left| \left\langle \Delta_n, \frac{P_{n+1}}{|P_{n+1}|} \right\rangle \right| = \frac{1}{q_{n+1}}.$$

D'autre part d'après (7),

$$\left| \left\langle \Delta_n, \bar{\theta} - \frac{P_{n+1}}{|P_{n+1}|} \right\rangle \right| \leq 2h_n |\theta - \tilde{P}_{n+1}| \leq \frac{3h_n h_{n+2}}{q_{n+1} q_{n+2}} \leq \frac{24h_n}{a_{n+2} q_{n+1} h_{n+2}} \leq \frac{1}{4} \frac{1}{q_{n+1}}.$$

D'où le résultat.

En particulier,  $|\langle \Delta_n, \bar{\theta} \rangle| < \frac{1}{2}$ , donc

$$|\langle \Delta_n, \bar{\theta} \rangle| = |r_n \theta' + s_n \theta'' + t_n| = \| \langle (r_n, s_n), \theta \rangle \|.$$



Pour montrer qu'il s'agit des meilleures approximations, nous allons comparer  $\Delta_n$  à d'autres vecteurs  $\Delta$  de  $\mathbb{Z}^3$ . Rappelons que

$$|\theta| = \max(|\theta'|, |\theta''|) < \frac{1}{4}.$$

Comme  $|\langle \Delta_n, \bar{\theta} \rangle| < \frac{1}{2}$ , on a  $|t_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|(r_n, s_n)| < |(r_n, s_n)|$  et donc  $|(r_n, s_n)| = h_n$ . Soient  $(r, s)$  un vecteur du tore tel que  $0 < |(r, s)| < h_{n+1}$  et  $t$  entier tel que  $\|\langle (r, s), \theta \rangle\| = |r\theta' + s\theta'' + t|$ . En notant  $\Delta = (r, s, t)$ ,  $\langle \Delta, \bar{\theta} \rangle = \langle (r, s), \theta \rangle$  et de même  $|\Delta| = |(r, s)| < h_{n+1}$ .

Pour vérifier que  $(r_n, s_n)$  est la suite des meilleures approximations linéaires de  $\theta$  à l'exception possible des premiers termes et de certains termes  $\pm(r_{n+1}, s_{n+1}) \pm (r_n, s_n)$ , il nous suffit donc de montrer le lemme suivant.

**Lemme 4.4.** *Soit  $\Delta = (r, s, t)$  un vecteur de  $\mathbb{Z}^3$  tel que  $|\Delta| < h_{n+1}$ ,  $\Delta \neq \pm\Delta_n$  et  $\Delta \neq \pm\Delta_{n+1} \pm \Delta_n$ . Alors*

$$|\langle \Delta, \bar{\theta} \rangle| > |\langle \Delta_n, \bar{\theta} \rangle|.$$

On décompose de la même manière que dans le lemme 4.3 et on obtient

$$\left| \left\langle \Delta, \bar{\theta} - \frac{P_{n+1}}{|P_{n+1}|} \right\rangle \right| \leq \frac{24h_{n+1}}{a_{n+2}q_{n+1}h_{n+2}} \leq \frac{1}{4} \frac{1}{q_{n+1}}.$$

De plus ,

$$\left| \left\langle \Delta, \frac{P_{n+1}}{|P_{n+1}|} \right\rangle \right| = \frac{1}{q_{n+1}} |\langle \Delta, P_{n+1} \rangle|.$$

D'où

$$|\langle \Delta, \bar{\theta} \rangle| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \left( |\langle \Delta, P_{n+1} \rangle| - \frac{1}{4} \right).$$

D'après le lemme 4.3, il suffit donc de montrer que

$$|\langle \Delta, P_{n+1} \rangle| \geq 2.$$

Tout d'abord remarquons que  $\langle \Delta, P_{n+1} \rangle$  est non nul. Dans le cas contraire,  $\tilde{P}_{n+1}$  appartiendrait à  $\tilde{\Delta}$ , qui est non colinéaire à  $\tilde{\Delta}_{n+1}$  puisque  $|\Delta| < h_{n+1}$ . Alors  $\Delta \wedge \Delta_{n+1} = kP_{n+1}$ , avec  $k$  un entier non nul, et donc

$$|\Delta| \geq \frac{q_{n+1}}{2h_{n+1}} \geq \frac{a_n h_{n+1}}{16} \geq 2h_{n+1},$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Supposons maintenant que,  $\langle \Delta, P_{n+1} \rangle = \pm 1$ . Quitte à changer  $\Delta$  en  $-\Delta$ , on peut supposer  $\langle \Delta, P_{n+1} \rangle = \langle \Delta_n, P_{n+1} \rangle$ , d'où  $\langle \Delta - \Delta_n, P_{n+1} \rangle = 0$ .

Alors la droite correspondant au triplet  $\Delta - \Delta_n$ , passe par  $\tilde{P}_{n+1}$ . Si cette droite n'est pas colinéaire à  $\tilde{\Delta}_{n+1}$ , on en déduit de même

$$|\Delta - \Delta_n| \geq \frac{q_{n+1}}{2h_{n+1}} \geq 2h_{n+1},$$

ce qui est de nouveau impossible, puisque  $h_n < h_{n+1}$ . On a donc  $\Delta = \Delta_n + k\Delta_{n+1}$ , avec  $k$  entier.

Si  $k = 0$  ou  $k = \pm 1$ , on a respectivement  $\Delta = \Delta_n$  ou  $\Delta = \pm\Delta_{n+1} + \Delta_n$ , ces deux cas ont été exclus. De plus  $|k| \geq 2$  impliquerait  $|\Delta| > h_{n+1}$ , ce qui est en contradiction avec notre hypothèse.

Donc  $|\langle \Delta, P_{n+1} \rangle| \leq 1$  est impossible, ce qui conclut la démonstration du lemme.

## 4.5 Démonstration du théorème 7

Nous avons donné une construction d'un vecteur  $\theta$  permettant d'en contrôler les meilleures approximations, selon le choix de deux suites  $(a_n)$  et  $(h_n^\circ)$ . Il ne nous reste plus qu'à préciser les types diophantiens selon  $(a_n)$  et  $(h_n^\circ)$  et vérifier si  $\theta$  possède ou non la propriété du logarithme.

D'après le lemme 4.3, on a

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}h_{n+1}^2 \frac{1}{q_{n+1}} &\leq |\Delta_{n+1}|^2 |\langle \Delta_n, \bar{\theta} \rangle| \leq \frac{5}{4}h_{n+1}^2 \frac{1}{q_{n+1}}, \\ \frac{3}{32} \frac{1}{a_{n+1}} &\leq |\Delta_{n+1}|^2 |\langle \Delta_n, \bar{\theta} \rangle| \leq \frac{10}{a_{n+1}}. \end{aligned}$$

En dimension 2, en utilisant les  $(\Delta_n)$ , la condition du théorème 5 s'écrit

$$\sum (|\Delta_{n+1}|^2 |\langle \Delta_n, \bar{\theta} \rangle|)^{\frac{1}{3}} < \infty.$$

Donc si la suite  $(a_n)$  vérifie  $\sum a_n^{-\frac{1}{3}} < \infty$ , alors  $T_\theta$  ne possède pas la propriété du logarithme. Par contre, si la suite  $(a_n)$  a une sous-suite bornée, alors d'après l'inégalité de gauche, il existe une constante  $c$  strictement positive telle que pour tout  $n$

$$|\Delta_{n+1}|^2 \varepsilon_l(|\Delta_n|) \geq c,$$

d'où  $\theta \in \Theta_l^2(0)$ .

Nous avons montré les assertions (i) et (ii) du théorème.

On cherche maintenant les conditions sur  $(a_n)$  et  $(h_n^\circ)$  pour que  $\theta$  appartienne ou non à  $\Omega_s^2(\tau)$  pour un  $\tau \geq 0$  donné. D'après l'encadrement (8), on a

$$\frac{1}{8} \frac{1}{a_{n+1} h_{n+1}^\circ} \leq \|q_n \theta\| \leq \frac{6}{a_{n+1} h_{n+1}^\circ},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \frac{q_n^{\frac{1+\tau}{2}}}{a_{n+1} h_{n+1}^\circ} &\leq q_n^{\frac{1+\tau}{2}} \|q_n \theta\| \leq 6 \frac{q_n^{\frac{1+\tau}{2}}}{a_{n+1} h_{n+1}^\circ}, \\ c_0 \frac{a_n^{\frac{1+\tau}{2}} (h_n^\circ)^{1+\tau}}{a_{n+1} h_{n+1}^\circ} &\leq q_n^{\frac{1+\tau}{2}} \|q_n \theta\| \leq c_1 \frac{a_n^{\frac{1+\tau}{2}} (h_n^\circ)^{1+\tau}}{a_{n+1} h_{n+1}^\circ}, \end{aligned} \quad (10)$$

où  $c_0$  et  $c_1$  sont deux constantes strictement positives.

Pour les éventuelles meilleures approximations de la forme  $q_{n+1} - q_n$ , remarquons que

$$(q_{n+1} - q_n)^{\frac{1+\tau}{2}} \varepsilon_s(q_{n+1} - q_n) \geq 2^{-\frac{1+\tau}{2}} q_{n+1}^{\frac{1+\tau}{2}} \|q_{n+1} \theta\|,$$

puisque  $\varepsilon_s(q_{n+1} - q_n) \geq \varepsilon_s(q_{n+1})$  et  $q_{n+1} - q_n \geq \frac{1}{2} q_{n+1}$ .

Donc  $\theta \in \Omega_s^2(\tau)$  si et seulement si  $\inf q_n^{\frac{1+\tau}{2}} \|q_{n+1} \theta\| > 0$  et d'après (10), cela est vrai si et seulement si

$$\inf a_n^{\frac{1+\tau}{2}} (h_n^\circ)^{1+\tau} (a_{n+1} h_{n+1}^\circ)^{-1} > 0.$$

Ce qui conclut la démonstration du théorème.

## Références

- [1] A. Apfelbeck, *A contribution to Khintchine's principle of transfer*, Czechoslovak Math. J., 01 (1951), 3 119-147.
- [2] P. Bernard, *Une propriété de transfert en approximation diophantienne*, Annale de la faculté des sciences de Toulouse vol. XXII (4) (2003), 453-463.
- [3] E. Bombieri and J. Vaaler, *On Siegel's Lemma*, Invent. math 73 (1983), 11-32.
- [4] Cassels, *An Introduction to diophantine Approximation*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, **45** Cambridge Univ. Press (1965).
- [5] N. Chevallier, *Meilleure approximation diophantienne d'un élément du tore  $\mathbb{T}^d$* , Acta Arith. 97(2001) 219-240.
- [6] N. Chevallier, *Meilleures approximations diophantienne simultanées (2001)*.
- [7] B.Fayad, *Mixing in the absence of the shrinking target property* Bull. London Math. Soc. 38 (2006) 829-838.
- [8] B.Fayad, *Analytic Mixing reparametrizations of irrational flows*, Ergodic Theory Dynam. Systems 22 (2002), 437-468.
- [9] S. Galatolo, P. Peterlongo, *Long hitting time, slow decay of correlations and arithmetical properties*, preprint arXiv :0801.3109.

- [10] V. Jarnik, *Über ein Satz von A. Khintchine*, Prace Mat. -Fiz. 43 (1935), 1-16.
- [11] V. Jarnik, *Über ein Satz von A. Khintchine, 2. Mitteilung*, Acta Arith. 2 (1936), 1-22.
- [12] V. Jarnik, *Zum Khintchineschen "Übertragungssatz"*, Trav. Inst. Math. Tbilissi 3 (1938), 193-212.
- [13] A. YA. Khintchine, *Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen* Rendiconti Circ. Mat. Palermo, 50 (1926), 170-195
- [14] A. YA. Khintchine, *Continued Fraction* Dover Publication Inc, Mineola, New York.
- [15] A. YA. Khintchine, *On some applications of the additional variable* Uspehi mat. nauk Vol. 3 (1948) 6(28)188-200
- [16] Kurzweil, *On the metric theory of inhomogeneous diophantine approximation*, Studia Math 15 (1955) 84-112 .
- [17] M. Laurent *Exponents of Diophantine approximation in dimension two*
- [18] J.-C. Yoccoz, *Sur la disparition de la propriété de Denjoy-Koksma en dimension 2*, Astérisque, 231, Appendice 1 (1995)

LAGA, UNIVERSITÉ PARIS 13, CNRS UMR 7539.

*E-mail address* : mussat@math.univ-paris13.fr