



**HAL**  
open science

**Traitement numérique en thermographie infrarouge.  
Identification des paramètres thermodynamiques des  
matériaux. - Numerical Process in infrared  
thermography. Identification of thermodynamic  
parameters.**

Ginette Saracco

► **To cite this version:**

Ginette Saracco. Traitement numérique en thermographie infrarouge. Identification des paramètres thermodynamiques des matériaux. - Numerical Process in infrared thermography. Identification of thermodynamic parameters.. CNRS-Laboratoire de Mécanique & d'Acoustique Marseille. CNRS-Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Marseille, 1 (2191), 80p., 1985, Note-CNRS-LMA-Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique no 2191, 0750-7356. hal-00564097

**HAL Id: hal-00564097**

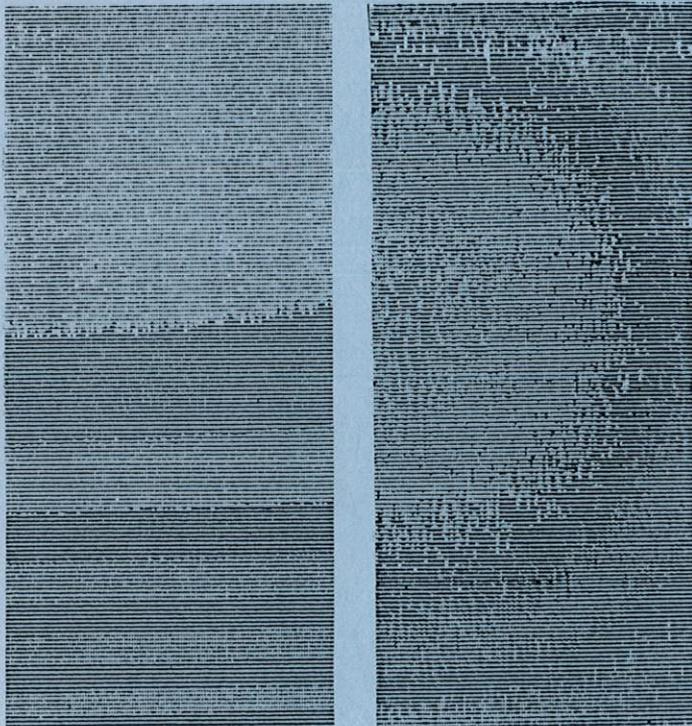
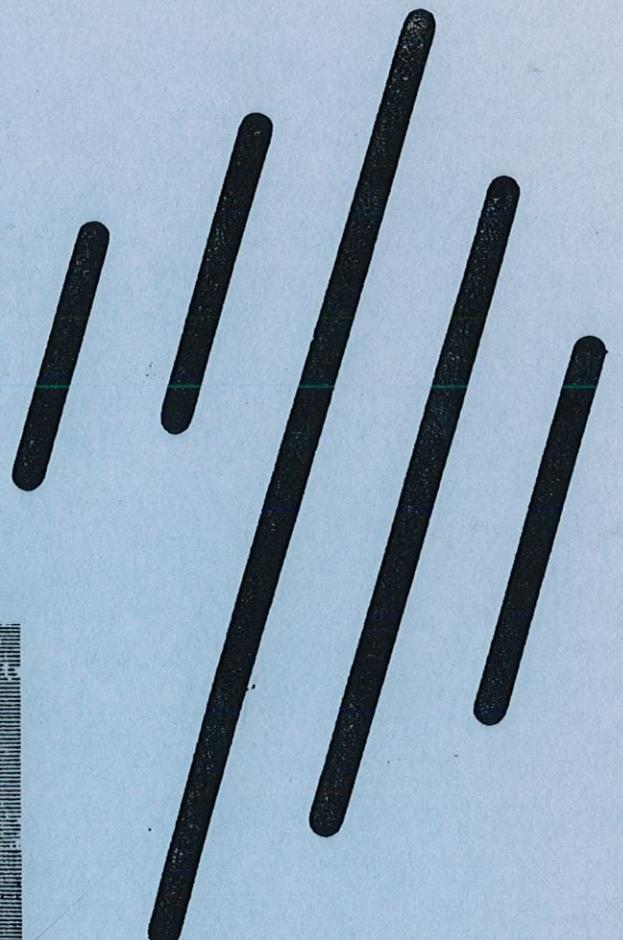
**<https://hal.science/hal-00564097>**

Submitted on 6 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

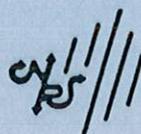
LABORATOIRE  
DE MECANIQUE  
ET D'ACOUSTIQUE



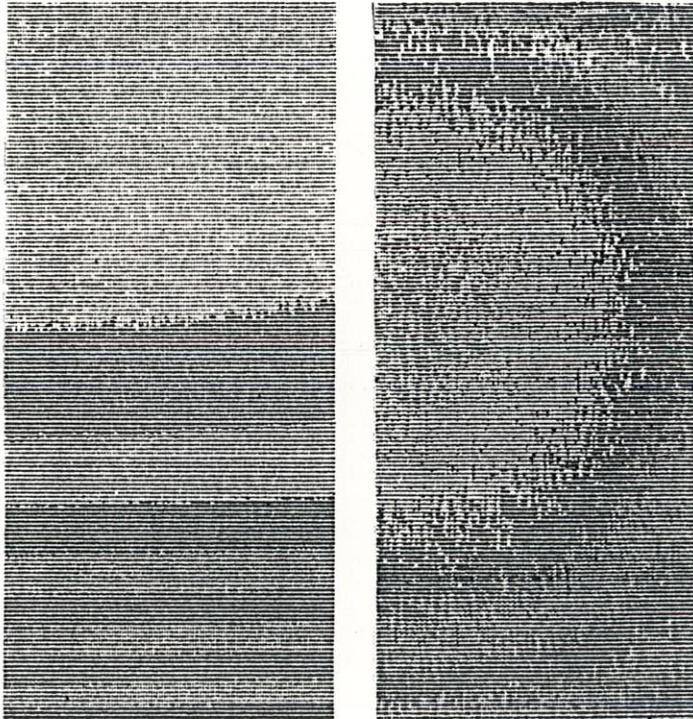
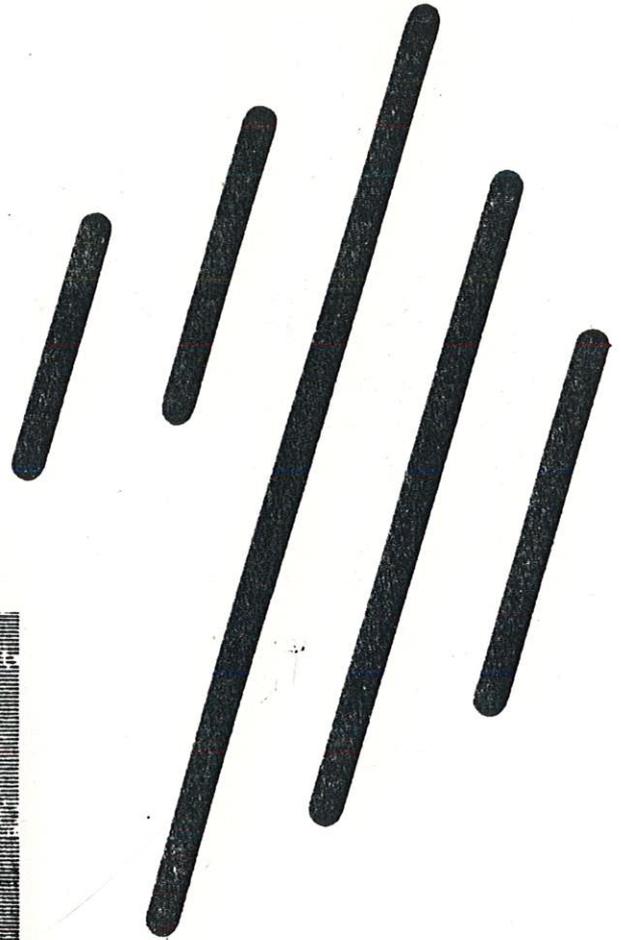
TRAITEMENT NUMERIQUE EN THERMOGRAPHIE INFRAROUGE.  
IDENTIFICATION DES PARAMETRES THERMODYNAMIQUES  
DES MATERIAUX.

G. SARACCO

Note-Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique n° 2191.



# LABORATOIRE DE MECANIQUE ET D'ACOUSTIQUE



TRAITEMENT NUMERIQUE EN THERMOGRAPHIE INFRAROUGE.  
IDENTIFICATION DES PARAMETRES THERMODYNAMIQUES  
DES MATERIAUX.

G. SARACCO

Note-Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique n° 2191.

**TRAITEMENT NUMERIQUE EN THERMOGRAPHIE INFRAROUGE.  
IDENTIFICATION DES PARAMETRES THERMODYNAMIQUES DES MATERIAUX**

**par G. SARACCO**

Travail effectué au C.N.R.S.  
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique-Marseille  
1983 & 1984

---

**Note-Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique n° 2191**

## INTRODUCTION GENERALE

---

Le laboratoire de Mécanique et d'Acoustique a commencé à s'intéresser il y a une dizaine d'années, aux possibilités et applications qu'apportait la thermographie infrarouge dans le domaine de la mécanique des structures et des vibrations.

L'équipe de Mécanique des Structures a dans ce but, amélioré les performances du matériel infrarouge existant et l'a adapté en fonction de ses besoins. Elle a donc créé une instrumentation de précision spécifique, c'est à dire un système d'acquisition et de numérisation du signal vidéo issu d'une caméra type AGA 780 SW <8>,<9>.

Le fait qu'on puisse acquérir et stocker un nombre important d'images numériques sur disque avec un temps de transfert contrôlable et suffisamment rapide ( 0,8s pour un temps d'acquisition de 0,16s ) permet d'étudier des phénomènes variables dans le temps.

Dans ce cadre, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la décroissance du champ de température d'une plaque mince, homogène, préalablement en déséquilibre thermique. Le but était de fournir des méthodes d'identification des paramètres thermodynamiques du matériau observé, à savoir la diffusivité et la constante thermique de temps à partir d'observations bruitées ( mesures thermographiques ) décrites par un modèle d'équation parabolique d'ordre deux ( équation de la chaleur ).

Deux méthodes seront développées, premièrement une méthode d'analyse spectrale bidimensionnelle des cartes de températures, deuxièmement une approche directe du laplacien bidimensionnel.

L'estimation des paramètres est obtenue par une technique de moindres carrés suivant un ou deux critères d'écart quadratique convenablement choisi où diffusivité et constante de temps apparaissent découplées. Des simulations de l'expérience de thermographie infrarouge seront effectuées permettant d'utiliser ces deux méthodes avant toute application sur des fichiers de données réelles.

Il est important de noter que bien que l'étude soit limitée à l'observation de données thermographiques et estimation de caractéristiques thermodynamiques intervenant dans l'équation de la chaleur, les techniques développées peuvent s'insérer dans un cadre beaucoup plus général à savoir identification de paramètres à partir d'observations bidimensionnelles décrites par un modèle sous forme d'équations aux dérivées partielles.

**TRAITEMENT NUMERIQUE EN THERMOGRAPHIE INFRAROUGE.  
IDENTIFICATION DES PARAMETRES THERMODYNAMIQUES DES MATERIAUX.**

**Sommaire.**

**1 - Position du problème.**

1.1 - Mise en équation du problème de thermomécanique.

1.2 - Principe de l'expérience.

1.3 - Application de la thermographie infrarouge à l'identification des caractéristiques thermodynamiques des matériaux.

1.4 - Conduite de l'étude.

**2 - Traitement par transformation de Fourier d'images thermiques numérisées.**

2.1 - Transformation de Fourier et application au signal physique de la transformation de Fourier rapide ( FFT ).

2.2 - Equation de la température transformée.

2.3 - Discrétisation spatiale des expressions et application de la FFT.

2.3-1. FFT bidimensionnelle

2.3-2. Intégrales de contour.

### **3 - Identification des caractéristiques thermodynamiques du matériau -**

#### **Diffusivité et constante thermique de temps par une méthode spectrale.**

3.1 - discrétisation temporelle de l'équation transformée.

3.2 - Choix d'un critère d'écart quadratique et du vecteur estimateur.

3.3 - Application et simulation

3.3-1. Récursivité - Erreur d'estimation

3.3-2. Simulation de l'expérience

3.3-3. Résultats

### **4 - Identification des caractéristiques thermodynamiques du matériau par des méthodes directes.**

4.1 - Discrétisation temporelle et spatiale de l'équation de la température.

Approximation du laplacien.

4.2 - Choix du critère et du vecteur d'estimation.

4.3 - Récursivité - Erreur d'estimation.

4.4 - Simulation et Résultats.

### **5 - Conclusion et perspective**

### **6 - Annexes**

**1 - POSITION DU PROBLEME.**

---

TRAITEMENT NUMERIQUE EN THERMOGRAPHIE INFRAROUGE.  
IDENTIFICATION DES PARAMETRES THERMODYNAMIQUES DES MATERIAUX.

1 - POSITION DU PROBLEME.

1.1 - Mise en équation du problème de thermomécanique.

On étudie la décroissance de la température d'une portion de plaque mince, homogène, préalablement en déséquilibre thermique, afin d'identifier les paramètres thermodynamiques de celle-ci. (diffusivité et constante thermique de temps  $\langle 1 \rangle, \dots, \langle 3 \rangle$ ).

L'établissement de l'équation de la chaleur pour une plaque de faible épaisseur, tenant compte des pertes de chaleur par rayonnement et convection par les faces de la plaque est très largement décrit  $\langle 2 \rangle, \dots, \langle 4 \rangle, \langle 6 \rangle, \langle 21 \rangle$ . Nous allons faire un simple rappel permettant de situer le point de départ du modèle d'observation qui nous intéresse.

a - En utilisant les principes de la thermodynamique et sous l'hypothèse de la loi linéaire de Fourier, on peut écrire classiquement l'équation régissant la variation locale de la température dans un milieu homogène et continu.

Soit  $\mathcal{V}$  un milieu homogène, tridimensionnel de volume  $\Omega$  et de frontière  $\partial\Omega$ , le premier principe de la thermodynamique concernant la conservation de l'énergie, nous permet d'écrire que la dérivée particulière de l'énergie totale du système  $\dot{\mathcal{E}}(\Omega)$  est à chaque instant égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs  $\dot{\mathcal{P}}_e(\Omega)$  et du taux de chaleur reçue  $\dot{Q}(\Omega)$ .

L'énergie totale du système  $\mathcal{E}(\Omega)$  est par définition égale à la somme de son énergie cinétique  $K(\Omega)$  et de son énergie interne  $E(\Omega)$ .

$$\dot{\mathcal{E}}(\Omega) = \dot{\mathcal{P}}_e(\Omega) + \dot{Q}(\Omega)$$

(1)

$$\mathcal{E}(\Omega) = K(\Omega) + E(\Omega)$$

Le théorème de l'énergie cinétique fournissant une expression de la puissance des efforts extérieurs, nous pouvons contenu de celui-ci et de (1), écrire une expression du taux de chaleur reçue par :

$$(2) \quad \dot{Q}(\Omega) = \dot{E}(\Omega) + \dot{\mathcal{P}}_i(\Omega) = \int_{\Omega} \rho \dot{e} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega$$

où  $e$  est l'énergie interne volumique,  $\sigma_{ij}$  le tenseur des contraintes et  $\epsilon_{ij}$  le tenseur des déformations tel que  $\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  et  $u$  représente le déplacement,  $\dot{\mathcal{P}}_i(\Omega)$  la puissance des efforts intérieurs.

D'autre part, on peut décomposer le taux de chaleur reçue  $\dot{Q}(\Omega)$  par un terme source surfacique, effets de contact à travers la surface  $\partial\Omega$ , soit la conduction et par un terme source volumique, effets extérieurs créant un taux de chaleur volumique  $r$ .

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{Q}(\Omega) &= - \int_{\partial\Omega} \vec{n}_o \cdot \vec{q} ds + \int_{\Omega} r d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (r - \text{div}(\vec{q})) d\Omega \end{aligned}$$

Le second principe décrit l'inégalité fondamentale suivante où  $S$  représente l'entropie du système,  $T$  la température absolue, scalaire non négatif et  $\dot{Q}(\Omega)$  le taux de chaleur reçue.

$$(4) \quad dS(\Omega)/dt \geq \dot{Q}(\Omega)/T$$

Ceci peut se traduire encore suivant l'expression :

$$(5) \quad \dot{Q}(\Omega) = \int_{\Omega} (T ds/dt - D) d\Omega \quad , \quad D \geq 0$$

$D$  valeur non négative est la densité volumique de puissance dissipée,  $s$  densité volumique d'entropie.

En appliquant l'axiome de l'état local <4> ; à tout instant  $t$  fixé, pour toute particule nous pouvons écrire l'énergie interne spécifique  $e$  , l'entropie spécifique  $s$  et l'énergie libre spécifique  $\Psi$  par les mêmes expressions qu'en thermostatique, suivant  $n+1$  paramètres  $X_0, \dots, X_n$ .

Soient  $T$  la température absolue,  $\mathcal{E}$  le tenseur de déformation et  $\eta$  paramètre interne de même structure que  $\mathcal{E}$  , les variables internes choisies, nous avons :

$$\Psi(\mathcal{E}, \eta, T) \quad , \quad e(\mathcal{E}, \eta, T) \quad , \quad s(\mathcal{E}, \eta, T)$$

Par définition de l'énergie libre nous avons :

$$(6) \quad s = -\partial\Psi/\partial T \quad , \quad \sigma_{ij} = \partial\Psi/\partial \mathcal{E}_{ij} \quad \text{avec} \quad \Psi = e - Ts$$

En écrivant la dérivée particulière de l'énergie libre et en utilisant les relations (3), (5) et (6) nous pouvons écrire la dissipation d'une particule comme l'expression :

$$(7) \quad D = -\partial\psi/\partial\eta\dot{\eta}, \quad D \geq 0 \quad \text{et} \quad d\psi/dt = \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{S}T - D$$

Les relations (3) et (5) expressions du taux de chaleur reçue permettent alors d'écrire l'égalité suivante :

$$(8) \quad \int_{\Omega} (r - \text{div}(q)) d\Omega = \int_{\Omega} (T ds/dt - D) d\Omega$$

En appliquant la loi linéaire de Fourier, loi de conduction qui est :

$$(9) \quad q = -k \text{ grad}(T) \quad \text{où} \quad k \text{ représente le tenseur de conductibilité}$$

et en utilisant la relation (6) nous pouvons déduire l'expression suivante :

$$(10) \quad r + \text{div}(k \text{ grad}(T)) = -T \left\{ \partial^2\psi/\partial\epsilon\partial T \dot{\epsilon} + \partial^2\psi/\partial\eta\partial T \dot{\eta} + \partial^2\psi/\partial T^2 \dot{T} \right\} - D$$

Soit l'équation de la chaleur sous forme locale :

$$(11) \quad C_{\epsilon,\eta} \dot{T} = \text{div}(k \text{ grad}(T)) - (l\dot{\epsilon} + m\dot{\eta}) T + D + r$$

$$C_{\epsilon,\eta} = -\partial^2\psi/\partial T^2 \quad T \text{ chaleur spécifique volumique à } \epsilon, \eta \text{ constants.}$$

$$l = -\partial^2\psi/\partial\epsilon\partial T, \quad m = -\partial^2\psi/\partial\eta\partial T \text{ coefficients de couplage thermoélastiques.}$$

Nous avons donc une relation exprimant la variation locale de la température correspondant respectivement pour le second membre à la diffusion thermique, aux couplages thermoélastiques réversibles et aux autres sources parmi lesquelles on peut distinguer la dissipation.

b - La téléthermographie ne permet d'étudier que des variations de températures surfaciques de l'objet observé. Nous associerons l'étude de la cible à un corps bidimensionnel de faible épaisseur. Dans le cas d'une plaque mince et homogène, les approximations permettent d'aboutir à une équation où le laplacien

tridimensionnel fait place au laplacien bidimensionnel augmenté d'un terme proportionnel à la température, et dont le coefficient multiplicateur  $\tau^{-1}$ , rend compte des pertes de chaleur par les faces de la plaque  $\langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 5 \rangle, \langle 6 \rangle$ .  $\tau$  est homogène à un temps et est appelé constante thermique de temps.

En l'absence de source de chaleur, la variation locale de la température s'écrit :

$$(12) \quad c \partial T(x,y,z,t) / \partial t - \text{div}(k \text{ grad} T(x,y,z,t)) = 0$$

Le corps considéré est homogène, isotrope et de faible épaisseur. On suppose que le temps de propagation de la chaleur dans l'épaisseur est petit devant le temps d'observation et qu'il n'y a pas de discontinuité de la température dans le solide. Ceci implique de prendre  $K$  tenseur de conductibilité,  $c$  chaleur spécifique volumique à contrainte nulle, constants. L'équation devient en posant  $\vec{r} = (x,y,z)$  :

$$(13) \quad c \partial T(\vec{r},t) / \partial t - k \Delta_{\vec{r}} T(\vec{r},t) = 0$$

Soit  $T_0(x,y)$  le champ de température de la plaque à l'équilibre thermodynamique, l'épaisseur  $e$  de la plaque étant très petite par rapport aux autres dimensions, les variations de température suivant l'épaisseur sont négligeables. Les variations de température observées, correspondent à de petites variations autour du champ de référence  $T_0$ . Soit  $T_r$  cette variation, on peut définir la valeur moyenne  $\Theta(x_p, y_p, t)$  pour un point  $P$  de la plaque observée comme l'intégrale suivant l'épaisseur de la fonction  $T_r(x,y,z,t)$ . L'équation (13) devient :

$$(14) \quad c \partial \Theta(x,y,t) / \partial t - k \Delta_{\vec{r}} \Theta(x,y,t) = - \left[ k \partial T_r(x,y,0) / \partial z - k \partial T_r(x,y,e) / \partial z \right] / e$$

$$\Theta(x,y,t) = 1/e \int_0^e T_r(x,y,z,t) dz \quad \text{et} \quad T_r(x,y,z,t) = T(x,y,z,t) - T_0(x,y)$$

Le second membre de l'équation correspond au flux de chaleur perdu par les faces de la plaque par rayonnement et convection. L'expérience s'effectuant sous vide partiel, les pertes par convection deviennent négligeables. Nous avons donc suivant la loi de Stefan pour les corps réels <14>, l'émittance de rayonnement :

$$(15) \quad W = \sigma_s \epsilon_e T^4$$

$\sigma_s$  constante de Stefan,  $\epsilon_e$  coefficient d'émissivité du corps et T température absolue.

Les variations de température étant très petites autour du champ de référence  $T_0$ , on peut linéariser l'équation (14). Nous obtenons l'équation de la chaleur suivante :

$$\partial \theta(x,y,t) / \partial t - d \Delta \theta(x,y,t) + 8\sigma_s \epsilon_e T_0 \theta(x,y,t) / ec = 0$$

$$(16) \quad k \partial T / \partial z = 4\sigma_s \epsilon_e T_0 T^3$$

$$T_r(x,y,z,t) \simeq T_r(x,y,0,t) \simeq \theta(x,y,t)$$

Soit :

$$(17) \quad \partial \theta(x,y,t) / \partial t - d \Delta \theta(x,y,t) + \theta(x,y,t) / \tau = 0$$

$d = k/c$  diffusivité exprimée en  $m^2/s$ .

$\tau = ec / 8\sigma_s \epsilon_e T_0$  constante thermique de la plaque et a la dimension d'un temps.

## 1.2 - Principe de l'expérience.

On veut identifier les caractéristiques thermiques ( diffusivité et constante de temps ) d'une portion de plaque réalisée en polychlorure de vinyle, à partir de la décroissance du champ de température de celle-ci.

L'éprouvette doit donc être au préalable en déséquilibre thermique. Pour cela, on intègre à une extrémité une partie en cuivre. Celle-ci sera chauffée par effet joule, par l'intermédiaire d'une résistance incorporée.

Nous imposons donc un fort gradient de température suivant un axe perpendiculaire à la longueur de la plaque. ( voir schéma 1 ci-dessous )

Le corps utilisé étant de faible épaisseur et étudié sous vide partiel, nous pouvons considérer les hypothèses suivantes :

- \_ Premièrement, les variations de température suivant l'épaisseur sont peu sensibles;
- \_ Deuxièmement, les échanges de chaleur par convection sont négligeables.

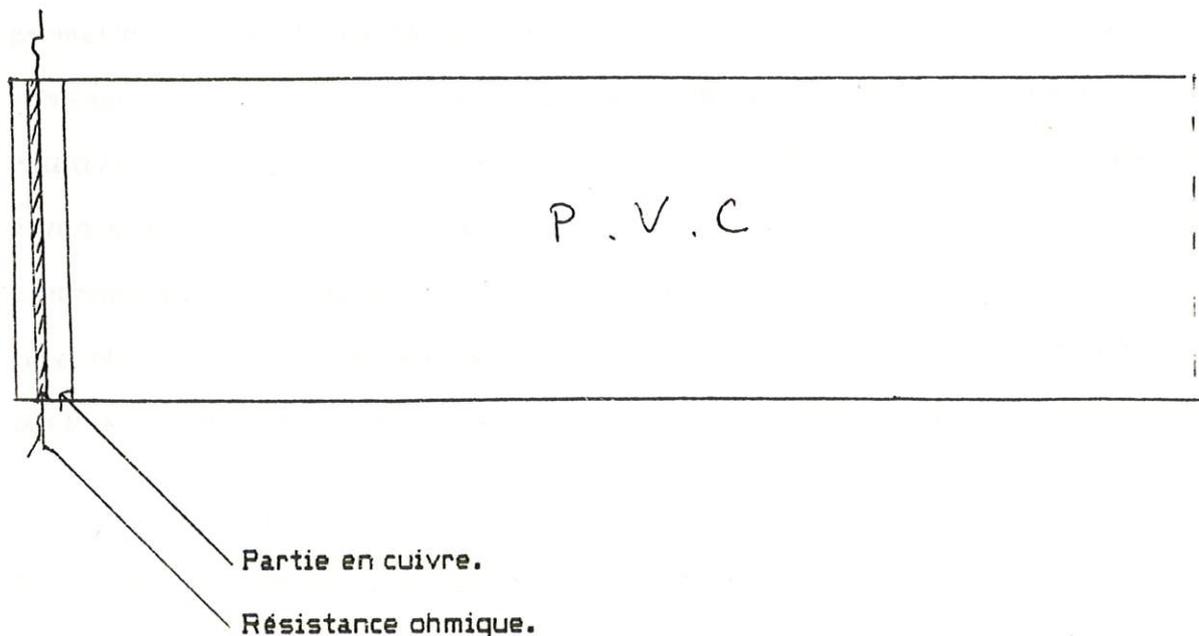


Schéma n° 1 : Représentation de l'éprouvette.

$$(\tau/e = 164\text{s/mm et } d = 7,27 \cdot 10^{-8} \text{m}^2/\text{s})$$

1.3 - Application de la thermographie infrarouge à l'identification des caractéristiques thermodynamiques du matériau.

L'équation qui régit la température  $\Theta_{th}(x,y,t)$  de la portion de plaque <2>,<3>, en l'absence de source de chaleur est :

$$(18) \quad \partial\Theta_{th}(x,y,t)/\partial t - d.\Delta\Theta_{th}(x,y,t) - \Theta_{th}(x,y,t)/\tau = 0$$

(  $\Theta_{th}$  signifie valeur théorique de  $\Theta$  , à distinguer de  $\Theta_{exp}$  valeur expérimentale que l'on rencontrera par la suite ).

$d$  représente la diffusivité thermique et  $\tau$  la constante thermique de temps de la plaque, qui rend compte des pertes par convection et rayonnement par ses faces; caractéristiques que l'on cherche à identifier.

Pour cela nous disposons d'une instrumentation infrarouge composée d'une caméra ( type AGA 780 SW ) <7>, à laquelle s'ajoute un système d'échantillonnage et de numérisation ( Schéma annexe n° 1 ) du signal vidéo <8>,<9>. Ceci nous permettra d'obtenir des cartes de variations d'énergie que l'on pourra faire correspondre, comme on le verra par la suite, à des cartes de températures relatives ( exemples: annexes A.13 , A.14 ). Nous nous intéressons au rayonnement infrarouge moyen, c'est à dire à des longueurs d'onde de rayonnement comprises entre 3 et 5 microns. Cet intervalle est fixé par les caractéristiques du détecteur quantique de la caméra ( InSb ) et correspond à la quatrième bande de transparence de l'atmosphère. <7>,<10>,...,<13>.

Le signal vidéo est proportionnel à l'énergie thermique émise par la cible. L'analyse est faite point par point par un système de balayage optoélectronique. Celui-ci est composé de deux prismes orthogonaux tournant dont les axes sont munis de capteurs de position. Une image thermique comporte quatre trames entrelacées de 100,25 lignes chacune, rapport des vitesses de rotation des deux prismes <2>,<7>.

Les variations d'énergie enregistrées correspondent en fait à des variations de température. Selon la loi de Stefan, l'émittance énergétique totale  $W$ , <14> pour un corps réel, de pouvoir émissif  $\epsilon_e$  (rapport de l'énergie de ce corps à l'énergie qu'aurait le corps noir à la même température et dans les mêmes conditions) et de température en valeur absolue  $T$ , est donnée par la formule :

$$(19) \quad W = \epsilon_e \sigma_s T^4 = \int_{\Delta\lambda} \epsilon_e(\lambda) W_{cn}(\lambda, T) d\lambda \quad (Wm^{-1})$$

$\sigma_s$  constante de Stefan.

L'émissivité étant constante dans notre cas (angle d'incidence constant), l'étude de  $d$  et  $1/\tau$  ne nécessite donc que la connaissance des variations relatives de la température. Au cours d'une expérience celles ci sont, après échantillonnage, stockées sur disque dur (schéma en annexe n° 2 : Chaîne de transmission de l'information).

L'acquisition est effectuée à des intervalles de temps  $t_n$  de l'ordre de 0,8s. Ces temps sont fonction du système d'acquisition et de l'ordinateur utilisé (PDP 11.60 ou 11.24). Ils correspondent aux temps de remplissage de la mémoire centrale (54272 bytes) et de transfert des données sur disque. Ce temps de transfert augmente globalement au cours de l'expérience à cause de l'organisation de stockage des données sur disque (Annexe n° 4 : Etude de l'évolution d'un point  $\Theta_{exp}$  au cours du temps). Cette augmentation est faible, mais elle a pour conséquence qu'un nombre entier variable d'images ne sont pas numérisées. L'adjonction d'une horloge numérique lors de l'enregistrement est donc nécessaire. La fréquence image  $F_i$  fournie par la caméra est de 6,25 images/s. La fréquence d'échantillonnage (fréquence point) est de 1Mhz pour une image numérique de 256 lignes de 240 pixels maximum chacune, ce qui remplit les conditions de Shannon. Nous avons en moyenne une image sur cinq qui est numérisée. A chaque pixel correspond un byte, l'information est ensuite transmise à l'ordinateur par mots de 16 bits. Le décodage s'effectue lors du traitement des données.

L'expérience réalisée au laboratoire par l'équipe de mécanique des structures et de thermographie, se résume en trois étapes qui sont :

\_ Premièrement, l'enregistrement de données thermiques correspondant à l'éprouvette avant toute sollicitation, à la température ambiante;

\_ Deuxièmement, l'échauffement de la plaque par effet Joule à une extrémité. On provoque un gradient de température en débitant un courant dans la résistance ohmique;

\_ Troisièmement, l'enregistrement de la décroissance de la température après arrêt de la source de chaleur.

Ces deux séries d'enregistrements fournissent deux suites de cartes :

\_ L'une correspondant au rayonnement infrarouge de l'éprouvette et de son environnement à la température ambiante  $\Theta'_e(x,y,t_n)$ , qui donne une estimation  $\Theta_e(x,y)$  "débruitée" du champ de température avec son ambiance à l'équilibre; (Annexe n° 6.2)

\_ L'autre, correspondant au rayonnement pendant la phase de décroissance, après suppression d'un apport de chaleur,  $\Theta_{exp}(x,y,t_n)$  valeurs expérimentales aux instants  $t_n$ . ( Annexe n° 6.1 )

Les grandeurs  $\Theta_{exp}(x,y,t_n)$  ne sont mesurées que pour des valeurs discrètes de  $x$  et  $y$  sur le domaine  $\mathcal{D} = ]0, Ma [ \times ]0, Nb [$  [ domaine de la portion de plaque. " a " et " b " représentent respectivement la résolution spatiale ligne et point du système infrarouge, M et N sont entiers.

L'identification des caractéristiques thermodynamiques  $\tau$  et  $d$  s'effectue en temps différé par traitement numérique sur PDP 11.60 ( 1<sup>ère</sup> expérience ) puis VAX 730 .

#### 1.4 - Conduite de l'étude.

$\Theta_{th}(x,y,t)$  valeur théorique solution de l'équation ( 18 ) vérifie :

$$(20) \quad \Theta_{exp} - \Theta_e = \Theta_{th} + \text{bruit}$$

On admet que le bruit est un bruit blanc gaussien de valeur moyenne nulle et d'écart type que l'on supposera indépendant des variables  $x$  et  $y$ . A cela s'ajoutent les erreurs de quantification par niveau lors de l'échantillonnage, le bruit résiduel dû à l'électronique et les rayonnements parasites des différents appareils et du milieu ambiant. Une expérience effectuée sous vide partiel atténue ces erreurs sans les éliminer.

L'étude consiste à appliquer aux fichiers de données thermiques bruitées "  $(\Theta_{exp} - \Theta_e)$  le traitement numérique suivant :

— Premièrement une FFT bidimensionnelle spatiale sur le domaine  $\mathcal{D}' =$   
 $\left[ 0, M \right] \times \left[ 0, N \right]$ .

La transformée de Fourier fournit une présentation simple de l'équation de la chaleur et permet une bonne approximation du laplacien  $\Theta_{exp}(\vec{v}, tn)$  en présence du bruit  $b(\vec{v}, tn)$  dans l'espace fréquentiel. Par contre ( Ch. 2 ) la mise en oeuvre de la FFT introduit différents types d'erreurs.

En utilisant cette méthode spectrale ( Ch. 3 ) , le choix du critère de minimisation sera d'abord appliqué et vérifié sur une simulation unidimensionnelle. Celle-ci est comme nous allons le voir, pour un corps homogène et isotrope, suivant les conditions aux limites imposées par l'expérience, parfaitement justifiée et représente parfaitement le phénomène. Une simulation bidimensionnelle dans un second temps sera effectuée pour couvrir un cas plus général.

Si le cas bidimensionnel a permis d'établir un logiciel plus général, le premier a donné des résultats plus rapidement; simulation de l'expérience et FFT d'images en 20mn au lieu de 18h pour un traitement de 1000 images, valeurs des estimateurs presque instantanées, stockage d'images en mémoire réduit.

— Deuxièmement : Nous avons envisagé en vue d'une application temps réel de substituer la méthode spectrale par une méthode directe ( Ch. 4 ). La variance de l'erreur d'estimation obtenue sur les estimateurs  $\hat{d}_k$  et  $\hat{\tau}_k^{-1}$  permettait de prévoir de bons résultats sur la constante thermique. Pour cela une méthode par différences finies a été utilisée ainsi qu'une interpolation polynomiale au sens des moindres carrés du laplacien. Une simulation unidimensionnelle a été faite. Le gain de temps par rapport au cas précédent pour une simulation unidimensionnelle est énorme ( rapport de 8 ). Nous ne travaillons plus sur des vecteurs complexes et nous avons création et traitement de 2000 images en un peu moins de 5mn, valeurs des estimateurs instantanées.

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.

61

2 - TRAITEMENT PAR TRANSFORMATION DE FOURIER D'IMAGES THERMIQUES  
NUMERISEES.

2.1 - Transformation de Fourier et application au signal physique de la transformation de Fourier rapide (FFT) <15>, <16>, <17>.

a - Soit  $R \times R \rightarrow R$ ,  $(x, y) \mapsto \Theta(x, y)$  une application sommable à support compact, la transformée de Fourier spatiale  $\mathcal{F}$  de  $\Theta(x, y)$  est par définition l'application de  $R \times R \rightarrow C$ ,  $(\nu_x, \nu_y) \mapsto \tilde{\Theta}(\nu_x, \nu_y)$  telle que :

$$(21.1) \quad \tilde{\Theta}(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}(\Theta(x, y))(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x, y) \exp(-2\pi i(\nu_x x + \nu_y y)) dx dy$$

On emploiera plutôt les notations  $\vec{r} = (x, y)$ ,  $\vec{\nu} = (\nu_x, \nu_y)$  et  $d\vec{r} = dx dy$ ;  $\vec{\nu} \cdot \vec{r}$  représentera le produit scalaire.

Si nous avons une application où la variable réelle indépendante  $t$  intervient, telle que  $(\vec{r}, t) \mapsto \Theta(\vec{r}, t)$ , on peut définir à chaque instant  $t$  la transformée de Fourier spatiale comme la transformation de  $\vec{r} \mapsto \tilde{\Theta}(\vec{\nu}, t)$  où :

$$(21.2) \quad \tilde{\Theta}(\vec{\nu}, t) = \mathcal{F}(\Theta(\vec{r}, t))(\vec{\nu}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\vec{r}, t) \exp(-2\pi i \vec{\nu} \cdot \vec{r}) d\vec{r}$$

De même, on définit la transformée de Fourier spatiale  $\overline{\mathcal{F}}$  de  $\tilde{\Theta}(\vec{\nu}, t)$  telle que

$$(21.3) \quad \Theta(\vec{r}, t) = \overline{\mathcal{F}}(\tilde{\Theta}(\vec{\nu}, t))(\vec{r}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Theta}(\vec{\nu}, t) \exp(2\pi i \vec{\nu} \cdot \vec{r}) d\vec{\nu}$$

$\overline{\mathcal{F}}$  est appelée transformée inverse. Pour cela,  $\mathcal{F}$  et  $\overline{\mathcal{F}}$  doivent être définies au moins sur  $L^1(\mathbb{R}^2)$ , ensemble des fonctions sommables sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\Theta(\vec{r}, t)$  doit être une fonction bornée de façon à admettre une image par  $\overline{\mathcal{F}}$ . On démontre <15> que suivant un choix convenable des domaines de définition de  $\mathcal{F}$  et  $\overline{\mathcal{F}}$ , on a  $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(\Theta)) = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(\Theta)) = \Theta$  et elles ont les mêmes propriétés.

Par ailleurs si l'application  $\vec{r} \mapsto \Theta(\vec{r}, t)$  n'est pas définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mais seulement sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , tel que  $\mathcal{D} = ]0, Ma[ \times ]0, Nb[$ , on convient de prendre la transformée de Fourier de l'extension en prolongeant cette fonction par zéro en dehors du domaine  $\mathcal{D}$ .

Ceci revient à multiplier le signal  $\Theta(\vec{r}, t)$  par une fonction "fenêtre"  $\Psi(\vec{r}, t)$  définie conformément à ce qui précède, soit à convoluer le spectre par  $\tilde{\Psi}(\vec{r}, t)$ .

b - Soit  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $(\vec{r}, t) \mapsto \Theta(\vec{r}, t)$  une application continue, localement sommable et  $\vec{T}$ -périodique, respectivement en  $x$  et  $y$ , de période  $T_x = Ma$  et  $T_y = Nb$ , nous avons formellement, suivant un choix convenable des domaines de définition, son développement de Fourier défini par :

$$(22.1) \quad \Theta(\vec{r}, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_{kl}(t) \exp(2\pi i(kx/Ma + ly/Nb))$$

où  $C_{kl}(t)$  transformée directe de Fourier représente les coefficients de Fourier tels que :

$$(22.2) \quad C_{kl}(t) = \frac{1}{MaNb} \iint_{\substack{0, T_x[x] \\ 0, T_y[y]}} \Theta(\vec{r}, t) \exp(-2\pi i(kx/Ma + ly/Nb)) dx dy$$

Si  $\Theta(\vec{r},t)$  est de carré localement sommable la série converge en moyenne quadratique vers  $\Theta(\vec{r},t)$ , si  $\Theta(\vec{r},t)$  est seulement localement sommable, il y a convergence de la série au sens des distributions.

Pour plus de précision sur l'aspect théorique de la transformation de Fourier et de la série de Fourier concernant les conditions d'existence et de convergence, on pourra se rapporter aux références <15>.

Lorsqu'on s'intéresse à l'équation de la chaleur d'une plaque mince, homogène, le signal considéré est la température  $\Theta(\vec{r},t)$ . On suppose qu'il n'y a pas de discontinuité de la chaleur à l'intérieur du solide. Nous avons vu qu'en sortie de la caméra le signal vidéo subissait un double échantillonnage: temporel et spatial avant d'être stocké sur disque. De fait, l'étude du signal se limite au domaine de la portion de plaque pouvant être numérisé soit  $\mathcal{D} = ]0, Ma[ \times ]0, Nb[$ , où M et N sont entiers.

En développant en série de Fourier la fonction  $\vec{T}$ -périodique  $\Theta_1(\vec{r},t)$  coïncidant avec  $\Theta(\vec{r},t)$  sur  $\mathcal{D}$  nous pouvons écrire suivant ( 22.2 ) les coefficients de Fourier de  $\Theta(\vec{r},t)$ .

Sur un domaine discrétisé  $\mathcal{D}_{mn}$  où m et n varient par valeurs entières de telle sorte que :  $n = 0,1,\dots,N-1$  et  $m = 0,1,\dots,M-1$ , suivant un pas d'échantillonnage égal à " a " pour les lignes et " b " pour les colonnes, la transformée directe devient:

$$(23) \quad C_{kl}(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \Theta(m,n,t) \exp(-2\pi i(km/M + ln/N))$$

Cette définition est à la base de la FFT, elle suppose le signal périodique, ce qui n'est pas exact. La formule ( 22.1 ) est alors érronnée. Dans les deux cas ( a ) et ( b ), nous obtenons une erreur dans le calcul au contour de  $\mathcal{D}$ .

On voit donc apparaître plusieurs types d'erreurs dans l'application de cette méthode spectrale.

— Premièrement erreur d'ôe à la non périodicité du signal qui entraîne une erreur dans l'étude de la transformée au contour de la plaque; le calcul de la FFT à l'intérieur du domaine reste valable. On limite l'étude du spectre quand l'erreur sur le calcul des coefficients est trop grande.

— Deuxièmement erreur d'ôe au passage de l'intégrale à une somme discrète  $\sum$ . Ceci entraîne une approximation du calcul de l'aire par la méthode des rectangles. Une amélioration peut être obtenue par la méthode des trapèzes.

— Troisièmement une erreur d'ôe à la transformation de Fourier du laplacien de  $\Theta(\vec{r},t)$ , qui entraîne une erreur dans le calcul des pertes de chaleur au contour de la plaque.

En effet suivant la formule ( 22.1 ) ,si l'on pose :

$$( 24 ) \quad \Theta(u,v,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_{kl}(t) \exp(2\pi i(ku/M + lv/N)) \text{ transformée inverse de } C_{kl}(t) \text{ d'après ( 22.2 )}$$

On voit que:

$$( 25 ) \quad \frac{\partial^2 \Theta(u,v,t)}{\partial u^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 k^2 / M^2 C_{kl}(t) \exp(2\pi i(ku/M + lv/N))$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(u,v,t)}{\partial v^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 l^2 / N^2 C_{kl}(t) \exp(2\pi i(ku/M + lv/N))$$

Soit:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\vec{r}} \theta &= \partial^2 \theta(u, v, t) / \partial u^2 + \partial^2 \theta(u, v, t) / \partial v^2 \\
 (26) \quad &= - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 4 \pi^2 (k/M + l/N) C_{kl}(t) \exp(2\pi i (ku/M + lv/N)) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \widetilde{\Delta_{\vec{r}} \theta}(k, l, t) \exp(2\pi i (ku/M + lv/N)) \\
 &= \left[ \widetilde{\Delta_{\vec{r}} \theta} \right]_{\vec{v}}
 \end{aligned}$$

Où  $\widetilde{\Delta_{\vec{r}} \theta}(k, l, t)$  est la transformée de Fourier de  $\Delta_{\vec{r}} \theta(u, v, t)$

Par contre, en intégrant par parties par rapport aux variables d'espace  $u$  et  $v$ , le terme  $\Delta_{\vec{r}} \theta(u, v, t)$  après multiplication par l'exponentielle  $\exp(-2\pi i (ku/M + lv/N))$ , on obtient :

$$(27) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \quad \left[ \widetilde{\Delta_{\vec{r}} \theta(u, v, t)} \right]_{\vec{v}} = D_{kl}(t) + E_{kl}(t) + \widetilde{\Delta_{\vec{r}} \theta}_{kl}(t)$$

où

$$(28) \quad D_{kl}(t) = \frac{1}{MN} \int_0^N \left\{ \partial \theta(M, v, t) / \partial u - \partial \theta(0, v, t) / \partial u + \frac{2\pi k l}{M} \left[ \theta(M, v, t) - \theta(0, v, t) \right] \right\} \exp(-2\pi i l v) dv$$

(28)

$$E_{kl}(t) = \frac{1}{MN} \int_0^N \left\{ \partial \theta(u, N, t) / \partial v - \partial \theta(u, 0, t) / \partial v + \frac{2\pi l k}{N} \left[ \theta(u, N, t) - \theta(u, 0, t) \right] \right\} \exp(-2\pi i k u) du$$

L'expression ( 27 ) diffère de l'expression ( 26 ) par l'apparition de termes  $D_{kl}(t)$  et  $E_{kl}(t)$  au contour de  $\mathcal{D}'$ .

- $D_{kl}(t)$  intégrale en  $v = 0 ; v = N$
- $E_{kl}(t)$  intégrale en  $u = 0 ; u = M$ .

Nous allons donc en étudiant le signal sur  $\mathcal{D}'$  domaine de la portion de plaque numérisée, intégrer par parties après multiplication par l'exponentielle  $e(-2\pi i(kx/Ma + ly/Nb))$ , nous allons définir les coefficients de Fourier avec les mêmes définitions que ( 22.1 ). La double intégrations par parties de  $\Delta \varphi\theta$  laisse apparaître des termes au contour de  $\mathcal{D}'$ , qui s'annulent habituellement lorsque le signal est supposé périodique et qui fourniront ainsi la transformée de Fourier exacte de  $\Delta \varphi\theta$ .

## 2.2 - Equation transformée.

L'équation transformée ( 29 ) s'écrit en utilisant les variables réduites sans dimension  $\xi = x/a$  et  $\eta = y/b$ , après multiplication par  $\exp(-2\pi i(k\xi/M + l\eta/N))$  et intégration par parties sur les variables d'espace :

$$C_{kl}(t) + C_{kl}(t) \left[ 4\pi^2 \left( d_3^2 \frac{k^2}{M^2} + d_2^2 \frac{l^2}{N^2} \right) + 1/\tau \right] + d_3 D'_{kl} + d_2 E'_{kl} =$$

( 29 )

$$C'_{kl} \left[ 4\pi^2 \left( d_3^2 \frac{k^2}{M^2} + d_2^2 \frac{l^2}{N^2} \right) + 1/\tau \right] + d_3 D_{kl}(t) + d_2 E_{kl}(t)$$

avec  $d_3 = d/a^2$  et  $d_2 = d/b^2$

Soit:

$$C_{kl}(t) + \left[ d \sqrt{4\pi} \left( \frac{k^2}{Ma^2} + \frac{l^2}{Nb^2} \right) + 1/\tau \right] \left[ C_{kl}(t) - C'_{kl} \right] =$$

(30)

$$d \left[ \left( D_{kl}(t) - D'_{kl} \right) / a^2 + \left( E_{kl}(t) - E'_{kl} \right) / b^2 \right]$$

$C_{kl}(t)$  et  $C'_{kl}$  sont respectivement les coefficients de Fourier de  $\Theta_{\text{exp}}(\xi, \eta, t)$  et  $\Theta_e(\xi, \eta)$  sur  $\mathcal{D}'$ .

Il apparait au second membre le terme source dû au rayonnement des pertes de chaleur au contour de  $\mathcal{D}'$ , lors de la phase de décroissance et à l'équilibre.

Nous voyons apparaître en plus de la transformée bidimensionnelle spatiale, deux transformées monodimensionnelles associées à ces pertes. La FFT bidimensionnelle n'étant qu'une double application de la FFT monodimensionnelle sur les lignes puis sur les colonnes, nous utiliserons une méthode proche de la méthode généralisée de Cooley-Tuckey, afin de rendre le traitement plus rapide pour une matrice de dimension  $M \times N$  quelconque. On décomposera le nombre d'échantillons en facteurs premiers quand celui-ci n'est pas décomposable en puissance de deux et on travaillera en bases multiples.

Les termes au contour seront auparavant interpolés par une expression polynômiale au sens des moindres carrés.

## 2.3 - Discrétisation des expressions et application de la FFT.

<17>,<18>,<19>,<20>

### 2.3-1 . FFT bidimensionnelle.

Le choix de l'image numérisée se porte sur une dimension de 180 lignes de 128 points. La FFT se fera par contre sur un nombre d'échantillons  $M \times N$  centré, égal à  $160 \times 80$ . Les points restants servent à interpoler les termes au contour. Les valeurs " a " et " b " , résolution spatiale de la caméra sont respectivement  $1,33.10^{-4}m$  et  $1,35.10^{-4}m$ .

On a selon ( 23 ) , l'expression suivante qui sera approchée par la méthode des trapèzes:

$$(31) \quad C_{kl}(t) = \frac{1}{MN} \sum_{\eta=0}^{N-1} \left[ \sum_{\xi=0}^{M-1} \Theta(\xi, \eta, t_n) \exp(-2 \pi i k \xi / M) \right] \exp(-2 \pi i l \eta / N)$$

La dimension de l'image étant de  $M \times N$  et les valeurs de  $\Theta(x, y, t)$  étant réelles, on effectue d'abord  $N$  FFT monodimensionnelles sur  $M/2$  échantillons complexes suivant les colonnes, puis  $M$  FFT monodimensionnelles sur  $N/2$  échantillons complexes suivant les lignes. Au préalable on décompose  $N$  en facteurs premiers et on calcul l'exponentielle d'ordre un:  $\exp(-2 \pi i k \xi / (M/2))$  suivant la première colonne, c'est à dire pour  $\xi = 1$ . Un choix possible de base est  $N = 2^4 \times 5 = B1 \times B2 \dots \times B5$ . Soient cinq états intermédiaires à calculer correspondant à la décomposition au dépend de  $k$  du produit  $k \xi$ , et cela à  $l$  fixé.

$k \cdot \xi$

En notant  $E$  l'exponentielle citée plus haut ;

$N$

$$k_i = 0,1 \text{ pour } i = (0, \dots, 3) \text{ et } k_4 = 0,1,2,3,4 \text{ tel que } k = \sum_{i=0}^4 u_i k_i$$

$$\xi_0 = 0,1,2,3,4 \text{ et } \xi_i = 0,1 \text{ pour } i = (1, \dots, 4) \text{ tel que } \xi = \sum_{i=0}^4 v_i \xi_i$$

Les exponentielles de 2<sup>nd</sup> ordre sont après simplification,  $E \begin{matrix} e_i \\ N \end{matrix}$

$$\text{où } e_i = \sum_{j=0}^4 u_i k_j v_j \xi_j \quad \text{avec } j = r - 1 - i, \text{ telles que :}$$

$$\begin{aligned} e_0 &= 40 \xi_0 k_4 \\ e_1 &= 20(2 \xi_1 + \xi_0) k_3 \\ (32) \quad e_2 &= 10(4 \xi_2 + 2 \xi_1 + \xi_0) k_2 \\ e_3 &= 5(8 \xi_3 + 4 \xi_2 + 2 \xi_1 + \xi_0) k_1 \\ e_4 &= (16 \xi_4 + 8 \xi_3 + 4 \xi_2 + 2 \xi_1 + \xi_0) k_0 \end{aligned}$$

Les r états intermédiaires sont obtenus par récurrence, tels que pour l fixé suivant l'état i, C<sub>kl</sub>(tn) vérifient :

$$(33) \quad C_i(k_0, k_1, \dots, k_{i-1}, \xi_{r-i-1}, \xi_{r-i-2}, \dots, \xi_0, 1) = \sum_{j=0}^{i-1} C_{i-1}(k_0, \dots, k_{i-2}, \xi_{r-i-2}, \dots, \xi_0, 1) E \begin{matrix} e_i \\ N \end{matrix} /$$

$$\xi_{r-i-2} \neq \xi_0$$

L'état final C(k<sub>4</sub>, k<sub>3</sub>, ..., k<sub>0</sub>, 1) est obtenu par renversement du dernier état C<sub>r</sub>(k<sub>0</sub>, k<sub>1</sub>, ..., k<sub>4</sub>, 1)

On peut représenter ces différentes étapes à l'aide du graphe de fluence dont la structure est telle que :

Le premier état nous donne un treillis dans la base B1 = 2 de multiplicité N/B1 ie: 2<sup>35</sup>

\_ Le second état donne B1 treillis dans la base B2 = 2 de multiplicité N/B1.B2 , jusqu'au dernier état où nous avons

\_ B1.B2....B4 = 16 treillis dans la base B5 = 5 de multiplicité un.

Le même raisonnement est à faire suivant le produit  $l\eta$  et cela à k fixé.

On stockera ensuite en mémoire centrale l'image de dimension  $(M/2) \times N$  , à cause de la symétrie du spectre par rapport à l'origine des fréquences spatiales.

( FFT effectuée sur PDP 11-60 ( 1<sup>ère</sup> exp. ) et VAX 730 ( 2<sup>ème</sup> exp. ) respectivement: annexes n° 3.1 , 3.2 et 3.3 , 3.4 ). On peut voir la FFT d'une fonction test " cosinus "  $f_1(x,y) = \cos(2\pi y/N)$  de dimension  $M \times N = 21 \times 21$  ( an. 3.1 puis d'une image caméra ( 1<sup>ère</sup> exp. ) sur  $128 \times 128$  pts en représentation graphique 3 dim. en vue cachée ( an. 3.2 );

FFT d'une fonction test  $f_2(x,y) = (1+\cos(2\pi x/M))(1+\cos(2\pi y/N))$  de dimension  $M \times N = 160 \times 80$  , résultats sur fichier ( an. 3.3 ) et application de la FFT sur une image caméra ( 2<sup>ème</sup> exp. ) de même dimension que  $f_2$  ( Représentation graphique 3 dim. en vue cachée en 3.4).

### 2.3-2 . Intégrales au contour de $\mathcal{D}'$ .

Les pertes de chaleur sont en  $\Theta_{\exp}(\xi, \eta, t)$   $P_{kl}(t) = D_{kl}(t)/a^2 + E_{kl}(t)/b^2$ ,

telles que:

$$D_{kl}(t) = \frac{1}{MN} \left\{ \sum_{\eta=0}^{N-1} H_1(\eta, t) \exp(-2\pi i l \eta / N) + \frac{2\pi i k}{M} \sum_{\eta=0}^{N-1} H_2(\eta, t) \exp(-2\pi i l \eta / N) \right\}$$

( 34 )

$$E_{kl}(t) = \frac{1}{MN} \left\{ \sum_{\xi=0}^{M-1} G_1(\xi, t) \exp(-2\pi i k \xi / M) + \frac{2\pi i l}{N} \sum_{\xi=0}^{M-1} G_2(\xi, t) \exp(-2\pi i k \xi / M) \right\}$$

où  $H_1$  et  $G_1$  : expressions de la différence des dérivées premières (respectivement en  $\xi = M-1$  et  $0$  quelquesoit  $\eta$  et  $\eta = N-1$  et  $0$  quelquesoit  $\xi$  ), seront approchées par interpolation sur la normale par l'estimé  $\widehat{\Theta}'(0)$  .

$H_2$  et  $G_2$  : expressions de la différence de  $\Theta(M, \eta, t) - \Theta(0, \eta, t)$  (idem en  $\xi$  ) seront approchées par l'estimé  $\widehat{\Theta}(0)$

Les estimés  $\widehat{\Theta}'(0)$  et  $\widehat{\Theta}(0)$  sont obtenus par minimisation du critère d'écart quadratique  $\Omega$  tel que:

$$(35) \quad \Omega = \sum_{i=-\alpha}^{+\alpha} \left( \Theta(p_{j+i}) - \widehat{\Theta}''(0) i/2 - \widehat{\Theta}'(0) i - \widehat{\Theta}(0) \right)^2$$

et ceci pour des valeurs centrées autour des points  $p_j$  c'est à dire :  $\xi = 170, 10$  quelquesoit  $\eta$  et  $\eta = 25, 105$  quelquesoit  $\xi$  .

On applique ensuite une FFT monodimensionnelle aux fonctions  $H_i(\eta, t)$  et  $G_i(\xi, t)$  respectivement en  $N$  et  $M$  échantillons, que l'on stockera en mémoire centrale.

3 - IDENTIFICATION DES CARACTERISTIQUES THERMODYNAMIQUES DU  
MATERIAU  
DIFFUSIVITE ET CONSTANTE THERMIQUE DE TEMPS PAR UNE METHODE  
SPECTRALE.

&lt;17&gt;, ..., &lt;25&gt;

3.1 - Discrétisation temporelle de l'équation transformée.

&lt;20&gt;, &lt;21&gt;, &lt;22&gt;

Nous avons donc  $K$  cartes de coefficients  $C_{kl}(t)$  correspondant aux  $K$  images transformées prises à des intervalles de temps espacés de  $T_a$ , période image apparente : 0,8s. Nous avons supposé que les points de température  $\Theta(x,y,t)$  d'une même image thermique sont instantanés, car la température en un même point de la plaque, ne varie pas pendant le temps de balayage d'une trame, et pas suffisamment pendant le temps de balayage d'une image, soit  $T_i = 0,16s$ .

Le domaine temporel sur lequel est étudié le signal est donc:

$$\mathcal{D}_t = ]0, (K-1)T_a [.$$

L'équation (30) se ramène à un système de  $K$  équations temporelles (36) étudiées sur  $d_{tn} = ]t_n, t_{n+1} [$  c  $\mathcal{D}_t$ .

A chaque temps  $t_n$  nous avons une décomposition de l'équation (36) en  $M \times N$  équations suivant les fréquences spatiales  $k, l$ ;  $k = 0, \dots, M-1$  et  $l = 0, \dots, N-1$ .

$C_{kl}(t_n)$  est l'observation ou mesure entachée d'un bruit blanc aléatoire, gaussien de moyenne nulle  $b_{kl}(t_n)$ , supposé indépendant des variables  $x$  et  $y$ .

$K$  le nombre de ces observations pris aux instants  $t_n$ ,  $n = 0, \dots, K-1$

Soit  $C_{kl}(t_n) = dC_{kl}(t_n)/dt_n$ , ( $C_{kl}(t_n)$  est approché par différences finies centrées) nous avons:

$$(36) \quad C_{kl}(t_n) = -\left(d \alpha_{kl} + 1/\tau\right) A_{kl}(t_n) + d \beta_{kl}(t_n) + b_{kl}(t_n)$$

avec  $\alpha_{kl} = 4\pi^2 \left( \frac{2 \ 2 \ 2}{k/Mb} + \frac{2 \ 2 \ 2}{1/Nb} \right)$

(37)  $A_{kl}(tn) = C_{kl}(tn) - C'_{kl}$

$$\beta_{kl}(tn) = \gamma_{kl}(tn) + \delta_{kl}(tn)$$

où:

$$\gamma_{kl}(tn) = [D_{kl}(tn) - D'_{kl}] / a^2$$

(38)  $\delta_{kl}(tn) = [E_{kl}(tn) - E'_{kl}] / b^2$

$$d' = d\alpha_{kl} + 1/\tau$$

Identifier la diffusivité  $d$  et la constante de temps  $\tau$  revient à minimiser suivant l'observation  $C_{kl}(tn)$  décrite en (36), un critère d'écart quadratique convenablement choisi où  $\hat{H}_K$  sera l'estimateur le plus approprié à l'identification de  $d$  et  $\tau$ .

### 3.2 - Choix du critère et du vecteur estimateur. <20>, <23>, <24>

L'erreur trop importante qu'apporte le laplacien de  $\Theta$ , lié à la diffusivité, ainsi que l'erreur commise sur les coefficients  $C_{kl}(t)$  par transformation de Fourier, aussi bien que dans l'approximation des termes au contour de  $\mathcal{D}'$ , nous impose de choisir l'estimateur  $\hat{H}_K = \begin{bmatrix} \hat{d} \\ \hat{\tau}^{-1} \end{bmatrix}_K$  plutôt que de prendre  $\hat{H}'_K = \begin{bmatrix} \hat{d} \\ d\alpha_{kl} + 1/\tau \end{bmatrix}_K$

En effet, la difficulté ne résidant essentiellement que dans l'estimation de la diffusivité, l'identification des paramètres découplés  $\hat{d}_K$  et  $\hat{\tau}^{-1}_K$  permet de ne pas cumuler évidemment, l'erreur d'estimation de  $d$  sur  $\tau$ .

Nous pouvons écrire le critère suivant:

$$(39) \quad \mathcal{E} = \sum_{n=1}^K \sum_{k,l} \left| C_{kl}^n + A_{kl}^n / \tau + d(\lambda_{kl}^n - \beta_{kl}^n) \right|^2$$

avec  $U_{kl}^n$  variable associée à  $U_{kl}(tn)$

$U$  matrice à valeurs complexes de dimension  $M \times N$  de terme général  $U_{kl}^n$ , où

$$\|U\|^2 = \sum_{k,l} |U_{kl}^n|^2 = \text{Tr}(U U^T) = \sum_{k=0}^{N-1} |U_{kl}^n|^2$$

$C$  étant l'observation à l'instant  $n$ ;

$\beta^n$  est l'expression discrétisée des pertes de chaleur au contour

$$(40) \quad \lambda^n = 4\pi^2 \left[ (1/Ma) K A^n + (1/Nb) A L^n \right]$$

$K, L$  sont des matrices diagonales à valeurs réelles de dimension respective  $M \times M$ ;  $N \times N$  et de terme général  $k^2; l^2$ .

Posons :

$$(41) \quad Y^n = C^n \quad \text{et} \quad B^n = \lambda^n - \beta^n$$

telle que l'observation soit :

$$(42) \quad Y^n = -X^n T H + \text{bruit}$$

le critère  $\mathcal{E}$  devient :

$$(43.1) \quad \mathcal{E} = \sum_{n=1}^K \left| Y^n + X^n T H_K \right|^2$$

$X^n$ ,  $\hat{H}_K$  matrices composées des blocs matriciels, en utilisant les expressions (37) et (41)

$$(44) \quad \hat{X} = \begin{bmatrix} A^n \\ \hline B^n \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_K = \begin{bmatrix} d \cdot \mathbb{I} \\ \hline \tau^{-1} \mathbb{I} \end{bmatrix}_K$$

L'estimé  $\hat{H}_K$  vérifie donc l'équation :  $\hat{Y}_K = \mathcal{X}_K \hat{H}_K$ , où  $\hat{Y}_K$  est la matrice dont les composantes sont les  $K$  matrices d'observation  $\begin{bmatrix} Y^n \\ \hline X^n \end{bmatrix}_{(M,N)}$  à valeurs complexes ;  $\mathcal{X}_K$  matrice dont les composantes sont les  $K$  matrices  $\begin{bmatrix} Y^n \\ \hline X^n \end{bmatrix}_{(M,2N)}$  à valeurs complexes.

Dans ce cas l'estimateur  $\hat{H}_K$  à valeurs réelles est :

$$(45) \quad \hat{H}_K = \left[ \sum_{n=1}^{KN-1} \sum_{\substack{K=0 \\ K=1}}^{N-1} \mathcal{R}e \left[ \begin{bmatrix} X_{K,1}^n & X_{K,1}^n \end{bmatrix} \right] \right]^{-1} \sum_{n=1}^{KN-1} \sum_{\substack{K=0 \\ K=1}}^{N-1} \mathcal{R}e \left[ \begin{bmatrix} X_{K,1}^n & Y_{K,1}^n \end{bmatrix} \right]$$

\* - L'erreur obtenue sur le calcul des coefficients de Fourier ( cas bidimensionnel ) peut nous amener à ne prendre en compte dans le calcul, que les premières fréquences.

L'étude de la plaque où la diffusivité est supposée indépendante des variables d'espace, peut se ramener à une étude locale suivant le rang des premiers harmoniques. La minimisation devient une minimisation suivant chaque fréquence spatiale.

L'expression de l'estimateur suivant chaque fréquence devient en utilisant la formule ( 45 ) :

$$(46) \quad \hat{H}_K = \left[ \sum_{n=1}^K \operatorname{Re} \left[ \begin{matrix} n & n \\ X & X^T \end{matrix} \right] \right]^{-1} \sum_{n=1}^K \operatorname{Re} \left[ \begin{matrix} n & n \\ X & Y \end{matrix} \right]$$

ou encore :

$$(47) \quad \hat{d}_K = \frac{S1 S3 - S2 S5}{S4 S5 - S3^2} \quad \hat{\tau}^{-1}_K = \frac{S2 S3 - S1 S4}{S4 S5 - S3^2}$$

avec :

$$S1 = \sum_{n=1}^K \operatorname{Re} \left[ \begin{matrix} n & n \\ B & Y \end{matrix} \right] \quad S2 = \sum_{n=1}^K \operatorname{Re} \left[ \begin{matrix} n & n \\ A & Y \end{matrix} \right] \quad S3 = \sum_{n=1}^K \operatorname{Re} \left[ \begin{matrix} n & n \\ B & A \end{matrix} \right]$$

$$S4 = \sum_{n=1}^K |A^n|^2 \quad S5 = \sum_{n=1}^K |B^n|^2$$

\* - Si on considère que : - le matériau est homogène et isotrope ;  
- la conduction se propage suivant un front d'onde régulier, perpendiculairement à la longueur de la plaque, ( Annexe n° 6 : image "caméra " numérisées. Représentation isothermique ), nous avons suivant cet axe une température ne variant pratiquement pas : soit  $\Theta(x,y,t) \simeq \Theta(x,t)$ .

Par ailleurs, d'un point de vue physique où les caractéristiques thermiques  $d$  et  $\tau$  ont été supposées constantes sur toute la plaque, la recherche de ces mêmes constantes sur toute la plaque, devient inutile. Une estimation simple et correcte de la diffusivité du corps, ramenée à l'étude d'une barre : c'est à dire passage d'un cas bidimensionnel à un cas monodimensionnel, est tout à fait justifiée.

Les deux expressions ( 45 ) et ( 46 ) , dans le cas unidimensionnel, seront utilisées. Elles sont toutes deux faciles à mettre en oeuvre et prennent pratiquement le même temps de calcul, pour  $K, l$  petits. On pourra cependant voir la valeur de la diffusivité seule, osciller et cela à cause des erreurs qu'apporte le laplacien  $\Theta(\vec{r},t)$ , lui-même lié à la diffusivité. ( cas bidimensionnel )

Posons :

$$(48) \quad \widehat{H}_K = S_K T_K \quad \text{tel que :}$$

$$(49) \quad S_K = \left[ \sum_{n=1}^K \mathcal{R}_e \left[ \begin{matrix} n & n \\ \underline{X} & \underline{X}^T \end{matrix} \right] \right]^{-1}, \quad T_K = \sum_{n=1}^K \mathcal{R}_e \left[ \begin{matrix} n & n \\ \underline{X} & \underline{Y} \end{matrix} \right]$$

on a 
$$S_K^{-1} = S_{K-1}^{-1} + \mathcal{R}_e \left[ \begin{matrix} K & K \\ \underline{X} & \underline{X}^T \end{matrix} \right] \quad \text{et} \quad T_K = T_{K-1} + \mathcal{R}_e \left[ \begin{matrix} K & K \\ \underline{X} & \underline{Y} \end{matrix} \right]$$

or  $\mathcal{R}_e \left[ \begin{matrix} \underline{X} & \underline{X} \end{matrix} \right] \neq \mathcal{R}_e \left[ \begin{matrix} \underline{X} \end{matrix} \right] \mathcal{R}_e \left[ \begin{matrix} \underline{X} \end{matrix} \right] \implies \widehat{H}_K$  ne peut pas se mettre sous forme réursive.

L'expression du " gain optimal " dans ce cas, au sens du filtrage de Kalman <23>..<24> ne se détache pas de l'expression de l'estimateur. Une autre possibilité est de calculer le vecteur  $\widehat{H}_K^*$  estimateur complexe, de passer par les formules récursives classiques, mais avec un " gain complexe ", puis de déterminer à partir de ce  $\widehat{H}_K^*$ , les modules  $|\widehat{d}_K^*|$  et  $|\widehat{\tau}_K^{-1*}|$ .

On peut voir que l'erreur d'estimation  $\mathcal{E}_r$  est dans ce cas, en supposant le bruit indépendant des variables d'espace et du temps :

$$(50.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_r &= H - \widehat{H}_{Kr} = \mathbb{1} H - \left[ \begin{matrix} K_T & K \\ X_r & X_r \end{matrix} \right]^{-1} \begin{matrix} K_T & K \\ X_r & Y_r \end{matrix} \\ &= \left[ \begin{matrix} K_T & K \\ X_r & X_r \end{matrix} \right]^{-1} \begin{matrix} K_T \\ X_r \end{matrix} \left( \begin{matrix} K \\ X_r H - Y_r \end{matrix} \right) \\ &= \left[ \begin{matrix} K_T & K \\ X_r & X_r \end{matrix} \right]^{-1} \begin{matrix} K_T \\ X_r \end{matrix} b_r \end{aligned}$$

où  $U_r$  représente la variable associée à la partie réelle et  $U_i$  la variable associée à la partie imaginaire. " b " représente le bruit blanc, gaussien de valeur moyenne nulle et d'écart type  $\sigma$ . Nous avons  $E[b_i] = E[b_r] = E[b] = 0$ .

La moyenne de l'erreur d'estimation  $E[\hat{\epsilon}_r]$  est donc nulle et la variance  $E[\hat{\epsilon}_r \hat{\epsilon}_r^T]$ , est telle que :

$$\begin{aligned}
 (50.2) \quad E[\hat{\epsilon}_r \hat{\epsilon}_r^T] &= \begin{bmatrix} K_T & K \\ X_r & X_r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K \\ X_r \end{bmatrix} E[b b^T] \begin{bmatrix} K \\ X_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_T & K \\ X_r & X_r \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \sigma^2 \begin{bmatrix} K_T & K \\ X_r & X_r \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \sigma^2 S_{Kr}
 \end{aligned}$$

Les estimateurs sont donc non biaisés et nous avons une variance de l'erreur d'estimation qui décroît en fonction du nombre d'observations.

Cette méthode ne rend pas le traitement plus rapide et plus efficace, la première sera donc appliquée.

Par contre, suivant le critère choisi nous avons une erreur d'estimation pour  $d$  où interviennent le laplacien transformé et les intégrales de contour multipliés par le bruit. L'erreur d'estimation sur  $\tau^{-1}$  ne fait intervenir au numérateur que la transformée de  $\Theta_{\exp}(x,y,t)$ .

Afin de minimiser les erreurs sur  $d$  on peut combiner à ce critère, le critère  $\mathcal{E}'$  où l'observation est décrite en (36).

On estimera ainsi  $\tau^{-1}$  suivant  $\mathcal{E}$  et  $d$  suivant  $\mathcal{E}'$ . Le critère  $\mathcal{E}'$  vérifie :

$$(43.2) \quad \mathcal{E}' = \sum_{n=1}^K \left| Y_{K1} + X'_{K1} H'_K \right|^2 \quad \text{où} \quad X'_{K1} = \begin{bmatrix} \beta_{K1} \\ A_{K1} \end{bmatrix}$$

L'estimateur  $\hat{d}_K$  vérifiera d'une part la relation ( 46 ) suivant  $\mathcal{E}'$ , d'autre part les relations ( 45 ) et ( 46 ) suivant  $\mathcal{E}$  . Les meilleurs résultats seront exploités.

L'étude de l'image de référence, correspondant à la plaque à la température  $\Theta_e(x,y,t)$  a montré en fait, une petite variation de la température au cours du temps et suivant  $x$  et  $y$  ( dérive de la caméra, rayonnements parasites de l'enceinte et du milieu ambiant qui évoluent passablement au cours de la manipulation ) ( Annexe n° 6 ). On la suppose négligeable dans un premier temps, par rapport au gradient de température imposé au matériau à  $t = 0$ , et lors de la simulation. Les expressions ( 50.1 ) et ( 50.2 ) correspondant à l'erreur d'estimation ainsi qu'à la variance d'estimation, découlent de cette supposition.

### 3.3-2. Simulation <5>,<25>

---

A partir de la résolution de l'équation de la variation locale de la température, suivant des conditions aux limites déterminées en fonction des conditions imposées par l'expérience, on se crée deux séries de cartes de température fictive, bruitée. Le bruit simulé est rajouté à chaque valeur  $\Theta(\vec{r},t)$  créée, indépendamment des variables d'espace et du temps. Ces cartes correspondant au rayonnement infrarouge de l'éprouvette et de son milieu ambiant, sont calculées pour des temps fictifs espacés de 0,7s, suivant une direction  $\vec{r}$  (cas unidimensionnel).

— L'une des séries correspond au rayonnement lors de la décroissance de la température de l'éprouvette, préalablement chauffée à une extrémité. On s'impose un gradient de température élevé en  $r = 0$  et proche de l'ambiante à l'autre extrémité. ( Annexe n° 5 : Représentation isothermale de  $\Theta(\vec{r},t)$  simulée sans bruit, suivant les conditions aux limites choisies. );

— L'autre, correspond au rayonnement associé aux fluctuations de la température de l'objet et de son environnement autour de l'ambiante, avant toute sollicitation thermique.

Puisque, suivant les hypothèses admises sur le bruit, ( c'est à dire bruit blanc non corrélé aux variables d'espace et au temps ), nous obtenons des estimateurs non biaisés et que d'autre part seule la connaissance des variations relatives de la température intervient dans l'identification des paramètres thermodynamiques, la création d'images fictives bruitées à la température ambiante n'est pas nécessaire.

Dans le cas bidimensionnel, on effectue un balayage de l'image en faisant une rotation de  $\pi/2$  du vecteur  $\vec{r}$ .

On a l'équation de la température en absence de source de chaleur, suivant une direction  $\vec{r}$  :

$$(51) \quad \partial \Theta(\vec{r}, t) / \partial t - d \Delta \Theta(\vec{r}, t) + \Theta(\vec{r}, t) / \tau = 0$$

Posons :  $\Theta(\vec{r}, t) = R(\vec{r})T(t)$ , il s'ensuit :

$$(52) \quad \frac{\partial T(t) / \partial t}{T(t)} - d \frac{\Delta R(\vec{r}) / R(\vec{r})}{R(\vec{r})} + \frac{1}{\tau} = 0$$

une seule condition suffit à résoudre l'équation.

$$\text{Soit la condition initiale : } t = 0, \Theta(\vec{r}, 0) = F(\vec{r}) \quad (53)$$

Posons :  $F(\vec{r}) = A \exp(-\beta \vec{r})$ , suivant les conditions aux bords en  $r = 0$  et  $r = aM$  que l'on se fixe, on obtient :

$$(54) \quad \beta = (1/aM) \text{ LOG}(A/\Theta(aM, 0))$$

avec :

$$(55) \quad -\alpha^2 - d\beta^2 + 1/\tau = 0$$

Cette solution n'admettant pas un couple unique  $(d, \tau^{-1})$ , on ajoute une solution particulière à la première.

$$\text{Posons : } \Theta(\vec{r}, t) = \Theta_1(\vec{r}, t) + \Theta_2(\vec{r}, t)$$

$$\text{Soit : } \Theta(\vec{r}, t) = R_1(\vec{r}) T(t) + R_2(\vec{r})$$

(56)

$$= A \exp(-\beta_1 \vec{r}) \exp(-\alpha_1^2 t) + \exp(-\beta_2 \vec{r})$$

nous obtenons deux nouvelles relations :

$$\lambda_1^2 = -d\beta_1^2 + 1/\tau$$

(57)

$$1/\tau = d\beta_2^2$$

A, B,  $\beta_1$  étant donnés par les conditions aux limites, en prenant pour valeurs simulées  $d = 1$  et  $\tau^{-1} = 10^{-2}$ , on déduit suivant les relations (57), les valeurs de  $\beta_2$  et  $\lambda_1$ . La simulation est faite pour un pas "a" de un. (simulation de la décroissance de la température d'une barre, préalablement chauffée à une extrémité annexe  $n = 5$ . Représentation graphique isothermale de  $\Theta(\vec{r}, t)$  sur Apple II).

### 3.3-3 Résultats

-----

Les valeurs " catalogue " du matériau utilisé sont pour la diffusivité  $d = 7,27 \cdot 10^{-8} \text{m}^2/\text{s}$  et pour la constante de temps  $\tau/e = 164 \text{mm/s}$  où e représente l'épaisseur de la plaque ( $e = 2 \text{mm}$ ), soit  $1/\tau = 0,3048 \cdot 10^{-1} \text{s}^{-1}$ .

Les valeurs choisies lors de la simulation sont  $d = 1$  et  $1/\tau = 10^{-1} \text{s}^{-1}$ .

Les matrices de dimension  $M \times N = 180 \times 128$  sont dans le cas unidimensionnel rapportées à un vecteur de dimension  $M = 180$

Le nombre d'images simulées ( images de référence à  $\Theta_e(\vec{r},t)$  et images expérimentales à  $\Theta_{exp}(\vec{r},t)$  ) est respectivement de 300 et 900.

Les programmes ont tous été testés ( cas bidimensionnel et monodimensionnel ), lors d'une première simulation en absence de bruit, avec identification des estimateurs. Nous avons obtenu ( cas unidimensionnel )  $d = 0.99995345E+00$  et  $\tau^{-1} = 1.0000017E-02$  selon ( 45 ). Si on utilise la formule ( 46 ) ( non équivalente à ( 45 ) pour un matériau non homogène et isotrope ) et sans limitation du spectre, on obtient des résultats équivalents à ( 45 ) et qui fluctuent suivant le rang des harmoniques. Dans le cas unidimensionnel on passe de ( 46 ) à ( 45 ) par simple sommation sur les éléments. ( Résultats ci-contre en 58, seuls les 40 premiers éléments sont donnés ).

Par contre en limitant le spectre aux premières fréquences les résultats sont sensiblement moins bons selon ( 45 ), ( cas monodim. ) ( DES = 0.98681009E+00 et TES = 0.99998144E-02 )

Le cas bidimensionnel a donné des résultats équivalents pour  $\tau^{-1}$  ( TES = 0.96836839E-02 ) et sensiblement moins bons pour d ( DES = 0.88623458E+00 ).

soient ( 58 ) :

TEST(I) =

0. 10037422E-01	0. 10000048E-01	0. 10000087E-01	0. 10000057E-01	0. 10000073E-01	0. 10000079E-01
0. 10000046E-01	0. 10000070E-01	0. 10000063E-01	0. 10000017E-01	0. 10000108E-01	0. 10000098E-01
0. 10000030E-01	0. 10000044E-01	0. 10000039E-01	0. 10000033E-01	0. 10000072E-01	0. 99999765E-02
0. 99998880E-02	0. 10000025E-01	0. 10000034E-01	0. 99998107E-02	0. 99999430E-02	0. 10000191E-01
0. 10000193E-01	0. 10000143E-01	0. 99998866E-02	0. 10000286E-01	0. 10000451E-01	0. 99991467E-02
0. 10000445E-01	0. 10001252E-01	0. 99996822E-02	0. 10001545E-01	0. 10001106E-01	0. 10000715E-01
0. 10001260E-01	0. 10000234E-01	0. 10000654E-01	0. 10001318E-01		

DEST(I) =

0. 10013528E+00	0. 99992961E+00	0. 10000095E+01	0. 99994802E+00	0. 99999422E+00	0. 99999326E+00
0. 99997008E+00	0. 99977979E+00	0. 99997365E+00	0. 99993354E+00	0. 99999648E+00	0. 99996078E+00
0. 99994594E+00	0. 99975226E+00	0. 99995422E+00	0. 99994218E+00	0. 10000083E+01	0. 99993777E+00
0. 9999854E+00	0. 99974725E+00	0. 99992061E+00	0. 9999913E+00	0. 99990761E+00	0. 99984843E+00
0. 99990195E+00	0. 10000443E+01	0. 10000117E+01	0. 10002680E+01	0. 99999088E+00	0. 99971551E+00
0. 10001475E+01	0. 10004925E+01	0. 10002636E+01	0. 10005491E+01	0. 10001167E+01	0. 10001644E+01
0. 99992812E+00	0. 99988741E+00	0. 10001780E+01	0. 10003759E+01		

L'écart type  $\sigma$  du bruit  $b(r,t)$  étant de 0,06 sous vide partiel lors de la première expérience, a été conservé bien que celui-ci fut ensuite inférieur à cette valeur. Une seconde simulation avec un bruit blanc non gaussien de valeur moyenne nulle et d'écart type  $\sigma = 1$  a été faite également.

La première simulation a donné d'excellente valeur pour  $\tau^{-1}$ , en utilisant les expressions ( 45 ) et ( 46 ). Les fichiers " résultats " fournissent une estimation partielle pour un pas de 100 images. Dès le premier pas nous avons un résultat parfaitement acceptable. Une meilleure précision est apportée lorsque l'on utilise la formule ( 46 ) pour  $k, l$  petits.

Les résultats sur l'estimation de la constante thermique se sont également avérés tout aussi bons dans le second cas et pour un nombre d'observations tout aussi petit ( 300 )

Soit :

TEST = 0.99209844E-02      ( 1 cas au bout de 100 observations )

TEST = 0.99701155E-02      ( 1 cas au bout des 900 observations )

TEST = 0.96869022E-02      ( 2 cas au bout de 900 observations )

En revanche pour la diffusivité, les résultats ne sont pas aussi bons.

Soit :

DEST = 0.87670081E+00      ( 1 cas ) 900 observations

DEST = 0.5780638E+00      ( 2 cas ) 900 observations

Suivant les hypothèses choisies sur le bruit, c'est à dire bruit blanc gaussien de valeur moyenne nulle et indépendant des variables  $x, y$ , nous avons une erreur d'estimation pour  $d$  ( 50.1 ) où les intégrales de contour ( liées au

calcul du laplacien ) interviennent au numérateur, multipliées par le bruit. Seule  $\Theta(x,y,t)$  transformée intervient pour  $\tau^{-1}$ .

Deux buts étaient fixés au début de ce travail, l'aboutissement à l'identification de  $d$  et  $\tau^{-1}$  par une méthode spectrale, puis la réalisation vers une méthode proche du temps réel. Pour cela une méthode directe en vue d'un résultat immédiat a été testée. On pourra se référer à titre comparatif à des méthodes classiques concernant la détermination de caractéristiques thermophysiques des solides ( diffusivité ) <26>.

4 - IDENTIFICATION DES CARACTERISTIQUES THERMODYNAMIQUES DU  
MATERIAU PAR DES METHODES DIRECTES.

4 - IDENTIFICATION DES CARACTERISTIQUES THERMODYNAMIQUES DES MATERIAUX PAR DES METHODES DIRECTES.

<20>, <27>, <28>, <29>.

4.1- Discretisation temporelle et spatiale de l'équation de la température. Approximation du laplacien.

Suivant l'équation ( 18 ) qui régit la température de la portion de plaque, nous avons au bruit de mesure près la relation suivante :

$$(59) \quad \partial \theta_{\text{exp}}(\vec{r}, t) / \partial t - d \left( \Delta_r \theta_{\text{exp}}(\vec{r}, t) - \Delta_r \theta_e(\vec{r}) \right) - \left( \theta_{\text{exp}}(\vec{r}, t) - \theta_e(\vec{r}) \right) / \tau = 0$$

Par analogie au chapitre 3.1 , le domaine temporel sur lequel est étudié le signal est  $\mathcal{D}_t = ]0, (K-1)Ta[$ .

L'équation ( 59 ) se ramène à un système de K équations temporelles étudiées sur  $d_{tp} = ]tp, tp+1[ \subset \mathcal{D}_t$ .

De même à chaque temps  $tp$ , nous avons une décomposition de l'équation (59) en  $M \times N$  équations suivant les variables d'espace  $x_m, y_n$  c  $\mathcal{D}_{mn}$ , où  $m$  et  $n$  varient par valeurs entières suivant un pas d'échantillonnage égal respectivement à  $a$  et  $b$ .

$\partial \theta_{\text{exp}}(r_{mn}, tp) / \partial tp$ , notée  $\theta_{\text{exp}}(r_{mn}, tp)$  est approchée par différences finies centrées et vérifie :

$$(60) \quad \theta_{\text{exp}}(r_{mn}, tp) = d \left( \Delta \theta_{\text{exp}}(r_{mn}, tp) - \Delta \theta_e(r_{mn}) \right) - \left( \theta_{\text{exp}}(r_{mn}, tp) - \theta_e(r_{mn}) \right) / \tau$$

\* - Approximation du laplacien

On approchera le laplacien dans le cas général bidimensionnel suivant deux techniques : premièrement par différences finies <20>, <27> et deuxièmement par interpolation polynômiale au sens des moindres carrés suivant le critère d'écart quadratique  $\Omega$  décrit en ( 35 ). Ces deux techniques seront utilisées lors des simulations.

a - Soient  $U = ]0,1[ \times ]0,1[$  l'élément unité  $R^2$ ,  $(m,n) \in N^2 \rightarrow u(m,n) \in R$  de coordonnées cartésiennes :  $u_1 = ma$  et  $u_2 = nb$ , nous avons suivant le développement de Taylor au point  $u(m,n)$  avec  $\theta(u(m,n))$ ,  $0 < m, n < M-1$

$$\frac{\partial^2 \theta(u(m,n))}{\partial u_1^2} + O(a^2) = (1/a^2) \left\{ \theta(u(m-1,n)) - 2\theta(u(m,n)) + \theta(u(m+1,n)) \right\}; 1 < m < M-2$$

( 61 )

$$\frac{\partial^2 \theta(u(m,n))}{\partial u_2^2} + O(b^2) = (1/b^2) \left\{ \theta(u(m,n-1)) - 2\theta(u(m,n)) + \theta(u(m,n+1)) \right\}; 1 < n < N-2$$

Soit  $\theta_{m,n}$  la valeur moyenne au point  $u(m,n)$ , nous pouvons également écrire :

$$( 62 ) \frac{\partial^2 \theta(u(m,n))}{\partial u_1^2} + O(a^4) = (1/24 a^2) \left\{ -2\theta_{m-2,n} + 32\theta_{m-1,n} - 60\theta_{m,n} + 32\theta_{m+1,n} - 2\theta_{m+2,n} \right\}, 2 < m < M-3$$

idem pour la seconde composante

b - Soit  $\Omega$  le critère d'écart quadratique décrit en (35) tel que :

$$(63) \quad \Omega = \sum_{i=-\alpha}^{+\alpha} \left( \theta(p_j+i) - \widehat{\theta}''(0) i/2 - \widehat{\theta}'(0) i - \widehat{\theta}(0) \right)^2$$

L'expression correspondant à la dérivée partielle  $\partial^2 \theta(\xi, \eta, \tau) / \partial \eta^2$  (idem en  $\xi$ ) suivant les points  $p_j$  appartenant à  $\mathcal{D}'$ , sera approchée par l'estimateur  $\widehat{\theta}''(0, \eta)$ , (idem  $\widehat{\theta}'(0)$  par rapport à  $\xi$ ).

Soit  $\vec{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \widehat{\theta}(0, \eta) \\ \widehat{\theta}'(0, \eta) \\ \widehat{\theta}''(0, \eta) \end{bmatrix}$  le vecteur estimateur, par minimisation du critère

nous obtenons le système d'équations :

$$(64) \quad \vec{\nabla}_{\vec{T}} \Omega = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 \theta(0, \eta) + A_1 \theta'(0, \eta) + (A_2/2) \theta''(0, \eta) = B_0 \\ A_1 \theta(0, \eta) + A_2 \theta'(0, \eta) + (A_3/2) \theta''(0, \eta) = B_1 \\ A_2 \theta(0, \eta) + A_3 \theta'(0, \eta) + (A_4/2) \theta''(0, \eta) = B_2 \end{cases}$$

Il vérifie le système de Cramer d'où l'on tire la relation :

$$\widehat{\theta}''(0) = 2(B_1 A_0 - B_0 A_2) / (A_4 A_0 - A_2^2)$$

$$(65) \quad B_S = \sum_{i=-\alpha}^{+\alpha} i^S \theta(p_j + i, \eta) \quad \text{et} \quad A_S = \sum_{i=-\alpha}^{+\alpha} (p_j + i, \eta)^S$$

avec  $A_{2S+1} = 0$ ,  $S \in \mathbb{N}$  tel que  $S = 0, \dots, 4$

#### 4.2-Choix du critère et du vecteur d'estimation

Nous avons K observations ou mesures  $\Theta_{\text{exp}}(m,n,tp)$  entachées d'un bruit blanc aléatoire  $b(m,n,tp)$ , indépendant des variables d'espace.

Posons :

$$(66) \quad Y_{mn}^p = \Theta_{\text{exp}}(m,n,tp) ; \quad X_{mn}^p = \begin{bmatrix} X1_{mn}^p & X2_{mn}^p \end{bmatrix} \text{ tels que :}$$

$$X1_{mn}^p = -\Delta\Theta_{\text{exp}}(m,n,tp) + \Delta\Theta_e(m,n) \quad \text{et} \quad X2_{mn}^p = \Theta_{\text{exp}}(m,n,tp) - \Theta_e(m,n)$$

On garde les mêmes notations qu'en (39), c'est à dire  $U_{mn}^p$  variable associée à  $U(m,n,tp)$  et U matrice à valeurs réelles de dimension  $M \times N$  et de terme général  $U_{mn}^p$ .

L'observation  $Y^p$  vérifie :

$$(67) \quad Y^p = X^T A + \text{bruit}$$

Nous pouvons écrire le critère  $\mathcal{L}$  suivant :

$$(68) \quad \mathcal{L} = \sum_{p=1}^K (Y^p - X^T A_K)^2$$

où  $X^T$  et  $A_K$  sont les matrices composées de blocs matriciels à valeurs réelles telles que :

$$(69) \quad X^T = \begin{bmatrix} X1^P \\ \hline X2 \end{bmatrix} \quad A_K = \begin{bmatrix} Dd \\ \hline D\tau^{-1} \end{bmatrix}$$

L'estimé  $A_K$  vérifie donc l'équation  $Y_K = X_K A_K$ , où  $Y_K$  est la matrice dont les composantes sont cette fois les  $K$  matrices d'observations à valeurs réelles  $[Y^P]_{(M,N)}$ ;  $X_K$  matrice dont les composantes sont les  $K$  matrices à valeurs réelles  $[X^P]_{(M,2N)}$ .

En se référant au chapitre 3.2, selon la relation (45) nous pouvons écrire l'expression du vecteur estimateur  $\hat{A}_K$  à valeurs réelles (Si on prend la formule développée (47),  $\hat{A}_K$  diffère de  $\hat{H}_K$  par un changement de signe de  $d$ ), tel que :

$$(70) \quad \hat{A}_K = \frac{\sum_{p=1}^K \sum_{m=0}^{M-1} X_{m,n} X_{m,n}}{\sum_{p=1}^K \sum_{m=0}^{M-1} X_{m,n} Y_{m,n}}$$

#### 4.3 Récursivité - Erreur d'estimation

Bien que les formules récursives classiques s'appliquent très bien dans ce cas, et sont faciles à mettre en oeuvre, nous avons pour des raisons de rapidité et d'efficacité utilisé les expressions analogues au chapitre 3.2 et 3.3 selon la relation (52).

Suivant les hypothèses admises sur le bruit, nous avons un vecteur estimateur non biaisé, avec une moyenne de l'erreur d'estimation  $E[\mathcal{E}]$  nulle.

#### 4.4 Simulation et résultats.

La simulation est évidemment la même que celle décrite au chapitre 3.3-2, mais nous n'effectuons pas de transformation de Fourier sur les images fictives créées.

Le gain de temps est évident ( rapport de 8 ). Une simulation unidimensionnelle et traitement d'images au nombre de 2000, avec résultats des valeurs estimées, s'effectue en un peu moins de 5mn. Le temps de calcul ne joue pas suivant la méthode employée pour calculer le laplacien, mais par contre le travail sur des matrices à valeurs réelles diminue l'encombrement mémoire.

#### \*-Résultats

Les deux méthodes développées ont été mises en oeuvre sur des fichiers de simulation non bruités. Dans les deux cas nous avons obtenues  $\tau_{est}^{-1} / \tau_{th}^{-1} = 1$  et  $d_{est} / d_{th} = 1$ . Dans le cas où le laplacien est calculé selon ( 62 ) nous avons obtenu pour  $d$  et  $\tau^{-1}$  les valeurs  $0.10054597E+01$  et  $0.99991765E-02$ , et ce, avec 2000 observations. On peut noter que les résultats sont très acceptables pour la diffusivité à partir de 400 observations et pour la constante thermique à partir de 100.

Avec un bruit blanc gaussien d'écart type  $\sigma = 0,06$ , nous obtenons  $\tau^{-1} = 0.99711604E-02$  ( 700 observations ) et une valeur similaire pour un bruit d'écart type  $\sigma = 1$  ( 1000 observations ).

L'estimation de la diffusivité dont la variance de l'erreur est liée au laplacien(  $\Theta$  ) ne donne des résultats acceptable que pour de faibles valeurs de

l'écart type du bruit, soit  $\sigma < 0,02$  selon la formule ( 62 ). La simulation sur des fichiers bruités pour des valeurs d'écart type  $\sigma \geq 0,02$  en utilisant la formule ( 63 ), n'a pu être effectuée.

5 - CONCLUSION ET PERSPECTIVES.

---

## 5 - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le but de ce travail était de fournir des méthodes afin d'identifier la diffusivité  $d$  et la constante thermique de temps qui apparaissent dans l'équation de la chaleur d'une plaque mince et homogène. Deux méthodes ont été développées, la première utilisant une analyse spectrale bidimensionnelle des cartes de température et la seconde, une approche directe du laplacien bidimensionnel.

### 5.1 - Méthode spectrale.

Celle-ci a nécessité :

\_ L'utilisation et le calcul du laplacien  $(\Theta(x,y,t))$  par les coefficients de Fourier, ainsi que les termes au contour de  $\partial\Omega$ . La double intégration par parties sur les variables d'espace de ce signal non périodique, fait introduire des intégrales au contour du domaine étudié.

\_ Interpolation des termes de contour et transformation de Fourier monodimensionnelle.

L'identification des paramètres se fait par une technique de moindres carrés, suivant deux critères d'écart quadratique. Ceux-ci sont choisis d'une part pour déterminer des estimateurs  $(d, \tau^{-1})$  découplés donc n'influant pas l'un sur l'autre, d'autre part afin de minimiser l'erreur d'estimation pour chacun d'eux.

L'application numérique a demandé principalement :

- \_ Optimisation d'une FFT bidimensionnelle et l'application à une matrice de dimension quelconque;
- \_ FFT monodimensionnelle pour les termes de pertes au contour;
- \_ Débruitage par moyenne arithmétique des fichiers correspondant au rayonnement infrarouge à la température ambiante  $\Theta_e(x,y,t)$ ;
- \_ Optimisation d'un programme général devant traiter successivement 1000 images " caméra ", avant toute identification.

Le programme ainsi constitué a donné lieu à des simulations et à une application à des fichiers réels

#### 5.1.1 - Simulations.

##### a - Monodimensionnelles.

Ces simulations s'effectuent avec un gain de temps énorme par rapport aux simulations bidimensionnelles ( rapport de 38 ); en outre elles permettent de donner des valeurs estimées presque immédiates, et un stockage d'images en mémoire réduit.

\_ En absence de bruit, nous obtenons des résultats où  $\tau_{est}^{-1} / \tau_{th}^{-1} \approx 1$  et  $d_{est} / d_{th} = 1$

\_ Avec adjonction de bruit blanc gaussien de valeur moyenne nulle, et d'écart type  $\sigma = 0,06$  nous obtenons  $\tau_{est}^{-1} / \tau_{th}^{-1} \approx 1$  et  $d_{est} / d_{th} \approx 0,88$

\_ Avec un bruit blanc de valeur moyenne nulle et d'écart type  $\sigma = 1$ , nous avons un résultat équivalent pour  $\tau^{-1}$  et un rapport  $d_{est} / d_{th} \approx 0,58$

Les images simulées sont obtenues à partir de la résolution analytique de l'équation de la chaleur bidimensionnelle. ( balayage de la solution monodimensionnelle suivant une direction )

Pour des fichiers non bruités les résultats obtenus sur la constante thermique de temps sont du même ordre de grandeur que pour le cas monodimensionnel. Pour la diffusivité nous avons obtenu un résultat inférieur soit  $d_{est}/d_{th} \simeq 0,89$ .

L'étude sur des fichiers bruités simulés n'a pu être effectuée.

#### 5.1.2 - Etude sur des fichiers réels.

Les résultats obtenus n'ont pas été significatifs, en effet, l'estimation de  $d$  et  $\tau^{-1}$  sur des fichiers réels s'est heurtée à des difficultés d'ordre essentiellement expérimentales :

— Variation totale de la température de  $3,32^{\circ}\text{C}$  sur l'ensemble de l'expérience ( 18mn ), pour un bruit d'écart type de  $0,05^{\circ}\text{C}$ , ( gradient de température insuffisant ). ( Dans cette variation se trouve compris notamment l'échauffement dû aux réflexions parasites des éléments entrant dans l'expérience ), résolution thermique de la caméra comprise entre 0,01 et 0,02 ;

— Dérive de la caméra non maîtrisée ( recalage à l'aide d'un corps noir, pendant le retour ligne insuffisant );

— Mauvaise utilisation de la dynamique des convertisseurs, 123 niveaux informatiques utilisés sur 256 permis ( valeur inférieure à la première expérience ) ( mars 1983/ 28 mai 1984 )).

A cela s'ajoute certainement le fait que le bruit soit corrélé aux variables d'espace et évolue en fonction du temps suffisamment pour ne pas le négliger. Présence des rayonnements parasites tels celui de l'enceinte à vide, de l'objectif, de la résistance ainsi que le mors de l'éprouvette. La dérive de la caméra augmente, elle, au cours du temps. ( Annexe n° 6 : Etude des images de référence).

L'identification est alors biaisée, reste à calculer le biais de ces estimateurs.

D'autre part, nous avons supposé les pertes par convection négligeables par rapport aux pertes par rayonnement, l'expérience elle, ne s'effectue que sous vide partiel.

## 5.2 - Méthodes directes.

Deux méthodes directes plus adaptées à une éventuelle application temps réel ont été utilisées.

Celles-ci ont demandé :

- \_ L'approximation du laplacien par différences finies.
- \_ L'interpolation du laplacien par une expression polynômiale suivant un critère d'écart quadratique.

L'identification des paramètres est faite par une technique de moindres carrés suivant un seul critère d'écart quadratique.

\* -Simulations.

Ces techniques n'ont pu être testées que dans le cas de simulations unidimensionnelles.

Le gain de temps apporté par les méthodes directes par rapport aux méthodes spectrales est important ( rapport de 8 dans le cas unidimensionnel ). La valeur des estimateurs est immédiate et nous ne travaillons plus sur des vecteurs ou matrices complexes. l'encombrement mémoire s'en trouve diminué.

Ces simulations ont donné de bons résultats en absence de bruit ( $d_{est}/d_{th} = 1$  et  $\tau_{est}^{-1}/\tau_{th}^{-1} = 0,9999$ ).

— Avec adjonction d'un bruit blanc gaussien de valeur moyenne nulle et d'écart type  $\sigma = 0,06$  et  $\sigma = 1$  nous obtenons pour la constante thermique, des résultats satisfaisants  $\tau_{est}^{-1}/\tau_{th}^{-1} = 0,997$ . La convergence nécessite un nombre d'observations ( image  $\Theta$  ) d'autant plus grand que  $\sigma$  est grand.

— En ce qui concerne la diffusivité, nous avons des résultats corrects que pour de faibles valeurs de l'écart type du bruit  $\sigma < 0,02$ . Nous n'avons pu effectuer de simulations pour des valeurs d'écart type  $\sigma \gg 0,02$  selon la relation ( 63 ).

---

Les simulations montrent avant tout la difficulté d'identifier la diffusivité pour un écart type de bruit important (  $\sigma > 0,05$  ),  $d$  étant liée au laplacien. Une identification découplée des paramètres thermodynamiques est de ce fait préférable. De plus il est important de noter que bien que fournissant de bons résultats, les méthodes spectrales ne sont pas les plus efficaces au niveau

de la vitesse d'exécution. En effet dans le cas où le bruit a un écart type faible, les méthodes directes fournissent une estimation des caractéristiques thermodynamiques beaucoup plus rapide.

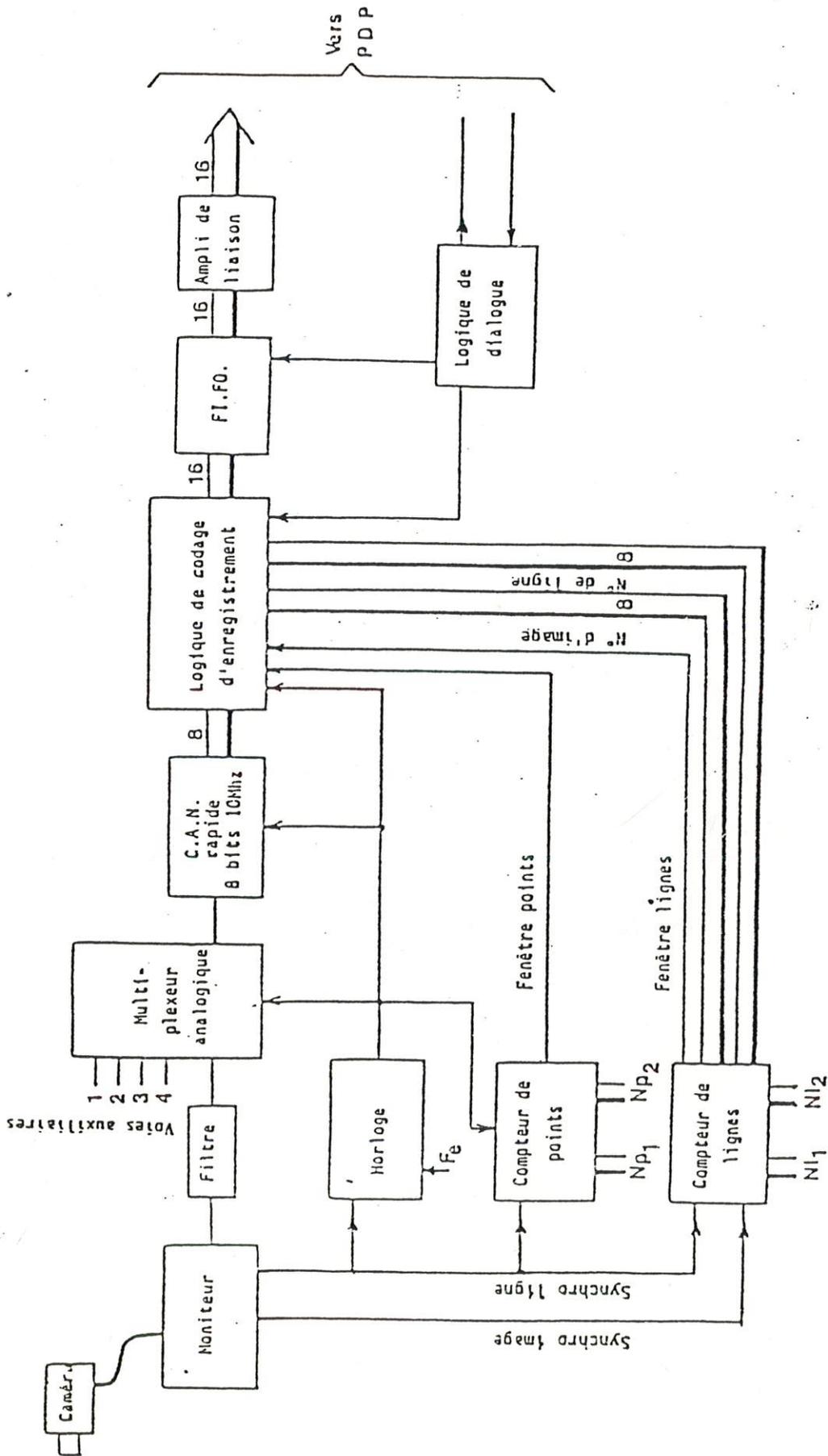
Il est donc nécessaire suivant les conditions de l'expérience de choisir la méthode la plus appropriée.

de la vitesse d'exécution. En effet dans le cas où le bruit a un écart type faible,  
les méthodes directes fournissent une estimation des caractéristiques  
des paramètres d'intérêt.  
Les méthodes indirectes sont plus précises que les méthodes directes de ce point de vue.

10

6 - ANNEXES.

---



$f_{Fe}$  : Choix de la fréquence d'échantillonnage.

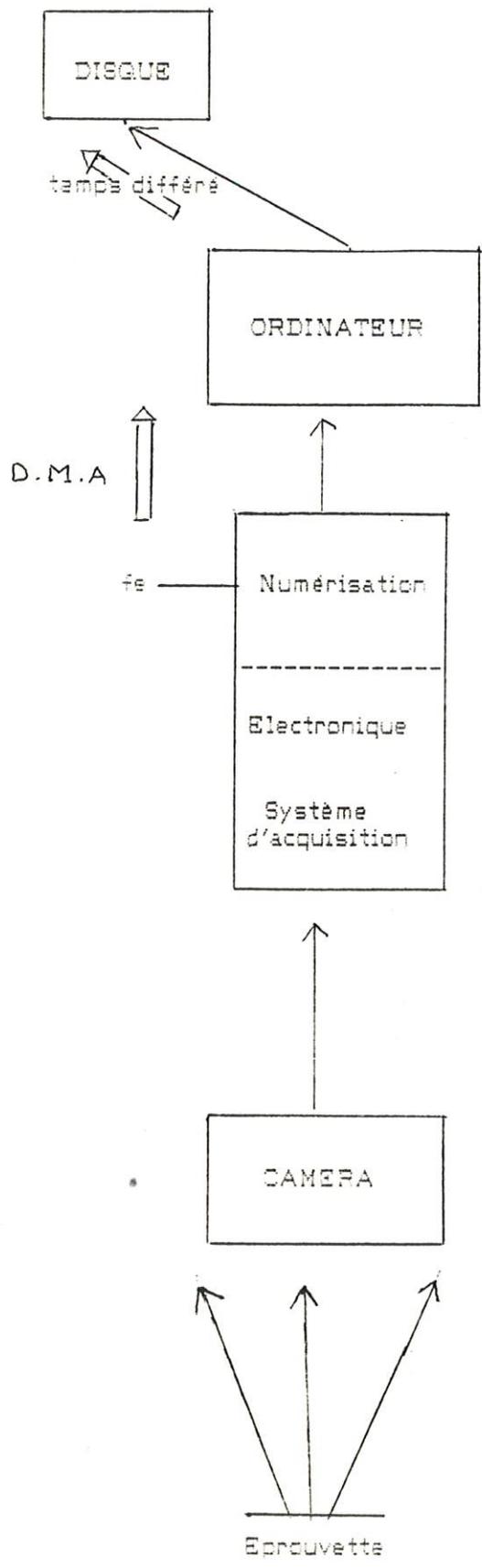
$Nl_1$  : Première ligne à acquérir.

$Nl_2$  : Nombre de lignes à acquérir.

$Np_1$  : Premier point à acquérir.

$Np_2$  : Nombre de points à acquérir.

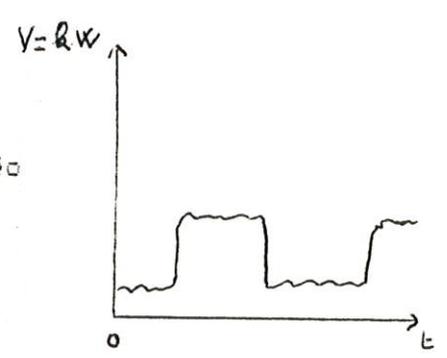
Annexe n° 1 : Synoptique du système d'acquisition et de numérisation du signal vidéo.



fichiers de données thermiques

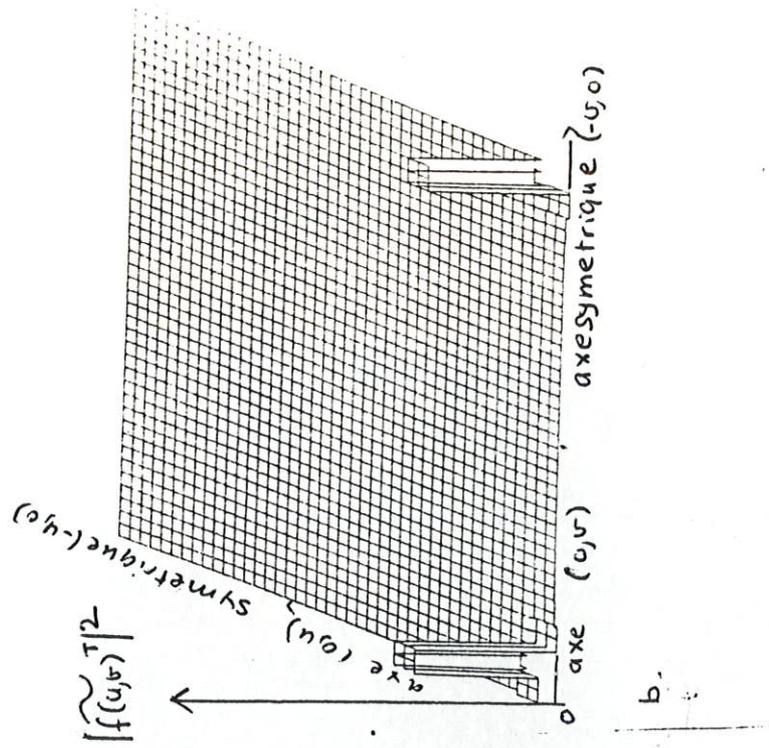
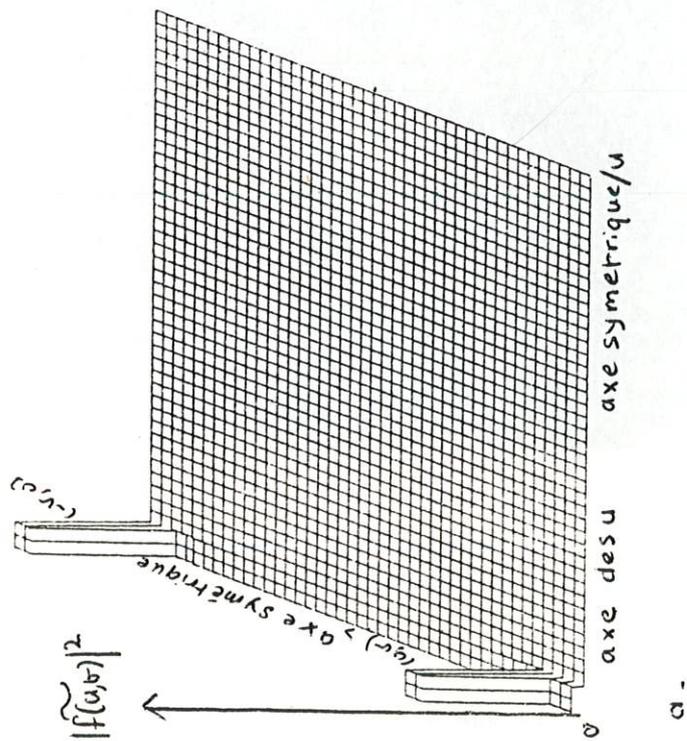
signal numérisé

signal vidéo



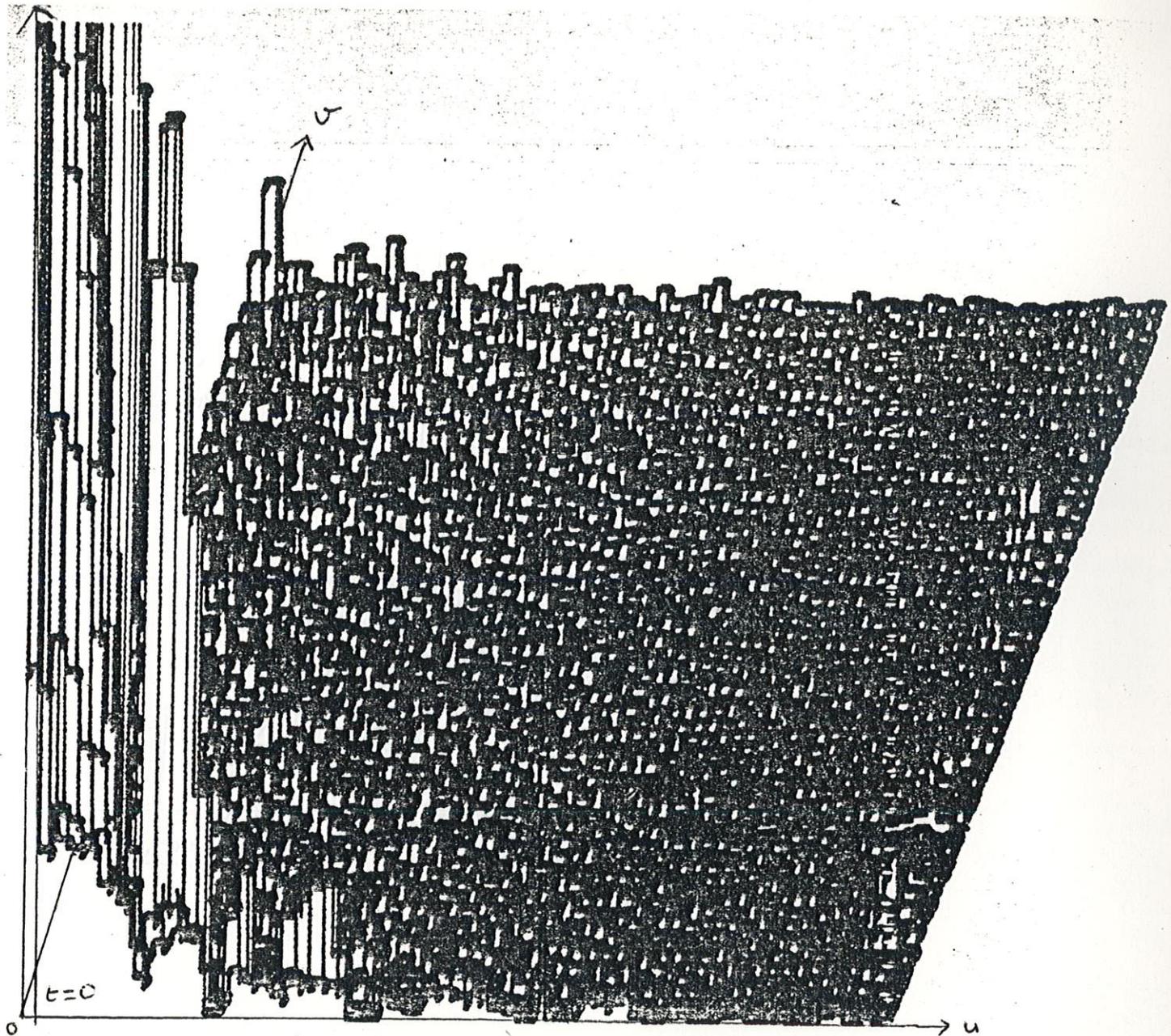
rayonnement infrarouge  
(émission de photons)

Annexe n°2 : Chaîne de transmission de l'information



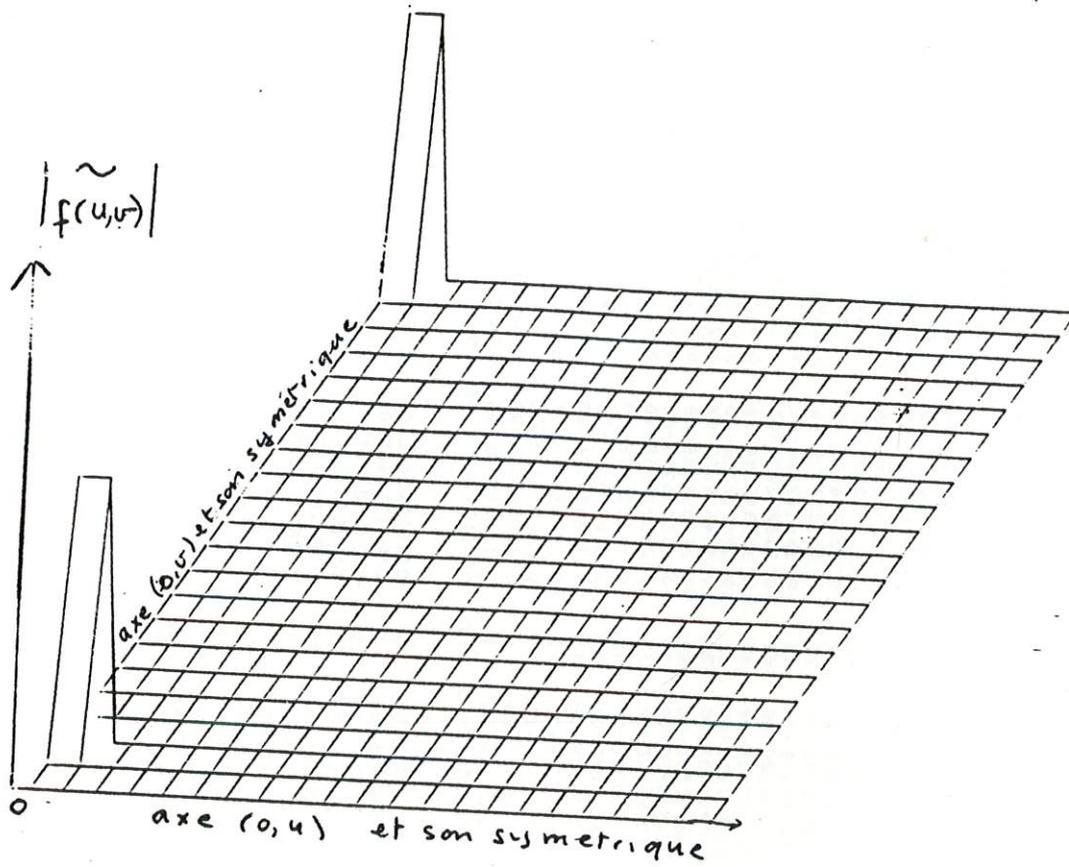
Annexe n° 3.1 : Représentation 3 dim., en vue cachée de la fonction test "cosinus". a :  $f(x,y) = \cos(2\pi y/N)$  après FFT sur  $21 \times 21$  points, testée sur PDP 11-60, tracée sur Benson. La partie symétrique du spectre se trouve représentée. b : même fonction que 3.1-a, mais la matrice transformée  $f(u,v)$  a été transposée.

$$|\tilde{\theta}(u, \sigma)|$$



$t=0$

Annexe n° 3.2 : représentation d'une image caméra après FFT lors de la 1<sup>ère</sup> expérience ( 3/83 ). FFT sur 128x128 points au temps  $t = 0$ , effectuée sur PDP 11-60, tracée sur Hard-Copy Techtroniks. ( Expérience annulée à cause du manque de maîtrise des images au cours du temps ie: période image apparente décelable qu'à 0,08s près ou une 1/2 image près et de l'imprécision de  $\theta(\vec{r}, t)$  par niveau informatique, ie: dynamique des convertisseurs non utilisée au maximum ). Partie symétrique du spectre non tracée.



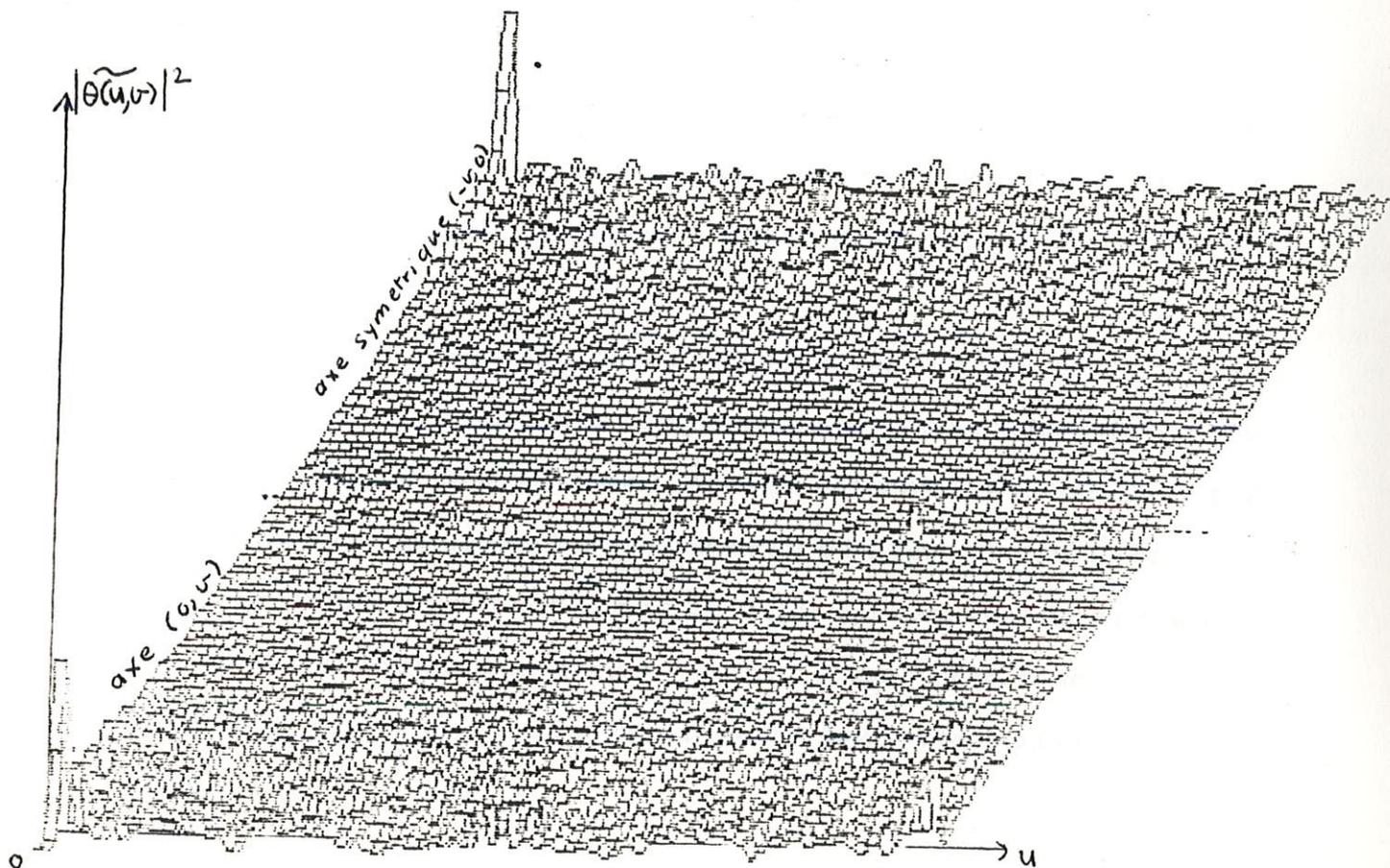
Annexe n°3.3-a. Représentation 3 dim., après FFT de la fonction test "cosinus"  
 : (idem que 3.1), testée sur VAX 730, tracée avec la partie symétrique, sur  
 Benson.

$\cos(2\pi x/M)) (1 + \cos(2\pi y/N))$  de même dimension que 3.3-a, testée sur VAX 730.

La partie symétrique du spectre / v n'est pas donnée ici. On peut voir le coefficient d'ordre (0,0), raie à l'origine d'amplitude 1, puis une raie d'amplitude 0,5 en  $(u,v) = (1,0)$  et  $(0,1)$  correspondant resp. aux transf. de  $\cos(2\pi x/M)$  et  $\cos(2\pi y/N)$  ainsi que le symétrique / u de  $\cos(2\pi y/N)$  en  $(0,-1)$  et une raie d'amplitude 0,25 en  $(u,v) = (1,1)$ , correspondant à la transf. du produit  $\cos(2\pi x/M) \cos(2\pi y/N)$  et son symétrique / u en  $(1,-1)$ .

FICHER: TFRMN.DAT.ierTEST.  
(J,F(I,J)) J=1,K2

1	0.10000004E+01	0.00000000E+00	0.50000018E+00	0.50008172E-08	-0.660033447E-08	0.10522498E-07
4	-0.10785385E-07	0.11513128E-07	-0.11034150E-07	-0.64973369E-08	0.71643380E-09	-0.15220008E-07
7	0.84732349E-09	0.24943927E-08	-0.43859685E-08	0.88688692E-08	0.20806388E-08	0.39294734E-09
10	-0.24373970E-08	0.50683335E-08	-0.29579172E-08	-0.73008138E-09	-0.35267598E-08	0.40076129E-08
13	-0.13814416E-07	-0.16207585E-08	0.93399155E-08	0.32539975E-08	0.37495658E-09	-0.24814408E-08
16	-0.69394752E-08	-0.12291083E-09	0.74856832E-08	0.13196189E-09	0.50464836E-08	0.42411337E-08
19	-0.28241476E-08	0.74872880E-09	-0.15986288E-08	0.15884393E-08	-0.13224782E-08	0.47625512E-08
22	-0.13723376E-07	0.75260957E-08	-0.1451573E-09	-0.10219046E-07	0.32403735E-08	-0.61328335E-08
25	0.3882677E-08	0.94749719E-09	0.15233065E-08	-0.72287748E-09	0.13278147E-08	0.35590417E-08
28	0.60061067E-08	-0.10864994E-08	-0.4765926E-08	0.45525481E-08	-0.1200327E-07	-0.12745506E-08
31	0.17675501E-09	-0.84286276E-08	0.70303985E-08	0.12463770E-09	0.11837852E-07	0.16658594E-09
34	0.51675015E-08	-0.10827384E-07	0.1397547E-07	0.83387226E-08	0.82990370E-08	0.11739028E-07
37	0.14025195E-08	-0.68284849E-08	0.10846163E-07	0.10896227E-07	-0.57164518E-08	0.22334641E-07
40	-0.11152589E-08	-0.43226671E-08	0.16398147E-07	0.00000000E+00	-0.1152589E-08	0.83276671E-08
43	-0.57164518E-08	-0.22334641E-07	0.10846163E-07	-0.10896227E-07	0.14025195E-08	0.68284849E-08
46	0.82990370E-08	-0.11739028E-07	0.1397547E-07	0.83387226E-08	0.51675015E-08	0.10827384E-07
49	-0.11837852E-07	-0.16658594E-09	-0.12745506E-08	-0.4765926E-08	0.17675501E-09	0.18428627E-08
52	-0.14200327E-07	0.35590417E-08	0.12463770E-09	-0.45525481E-08	0.60061067E-08	0.10864994E-08
55	-0.12278147E-08	0.12745506E-08	0.1451573E-09	0.72287748E-09	0.60061067E-08	-0.94749719E-09
58	-0.32403735E-08	0.61328335E-08	-0.47625512E-08	0.10219046E-07	0.3882677E-08	-0.75260957E-08
61	0.13224782E-08	-0.47625512E-08	0.42411337E-08	-0.15986288E-08	-0.13723376E-07	0.75260957E-08
64	0.50468363E-08	-0.2411337E-08	0.42411337E-08	-0.15986288E-08	-0.28241476E-08	-0.74872880E-09
67	0.37495658E-09	0.24814408E-08	0.74856832E-08	0.13196189E-09	-0.69394752E-08	0.12291083E-09
70	-0.35267598E-08	-0.40076129E-08	0.93399155E-08	0.32539975E-08	-0.13814416E-07	0.16207585E-08
73	0.20806388E-08	-0.39294734E-09	-0.29579172E-08	-0.73008138E-09	0.24373970E-08	-0.50683335E-08
76	0.71643380E-09	0.15220008E-07	0.43859685E-08	-0.88688692E-08	0.84732349E-09	-0.24943927E-08
79	-0.660033447E-08	-0.10522498E-07	0.50000018E+00	0.50008172E-07	-0.10785385E-07	-0.11513128E-07
(J,F(I,J)) J=1,K2						
1	0.50000018E+00	-0.40233136E-07	0.25000009E+00	0.74505806E-08	-0.35315937E-08	0.62427277E-08
4	-0.53992371E-08	0.66411956E-08	-0.52034661E-08	-0.30762146E-08	-0.13878884E-09	-0.86806260E-08
7	0.10017724E-09	0.51213578E-09	-0.22129956E-08	0.31143901E-08	0.17010257E-09	-0.40234407E-09
10	-0.17519539E-08	0.19000495E-08	-0.27584690E-08	0.15108294E-09	-0.24943995E-08	0.17193059E-08
13	-0.69698394E-08	-0.87348288E-10	0.4131094E-08	-0.15941224E-09	-0.10376193E-09	0.2358264E-09
16	-0.49041171E-08	0.10605411E-08	0.39037227E-08	0.82532625E-09	0.23242426E-08	0.21353954E-08
19	-0.96656871E-09	0.56639293E-09	-0.24212377E-08	0.99960384E-09	-0.85024099E-09	0.29548304E-08
22	-0.87079650E-08	0.30039973E-08	0.24806787E-09	-0.46107838E-08	-0.16503486E-08	-0.29397957E-08
25	0.14373904E-08	0.20698696E-09	0.99449093E-09	-0.44218285E-09	-0.59757907E-10	0.15179336E-08
28	0.35958536E-08	0.20899105E-10	-0.15994880E-08	0.29959262E-08	0.70229738E-08	0.65932995E-10
31	-0.40264353E-09	-0.43923596E-08	0.57682198E-08	0.28933120E-09	-0.58633178E-08	0.50122995E-09
34	0.26149340E-08	-0.55375797E-08	0.71601050E-08	0.34630463E-08	-0.37497681E-08	0.58525658E-08
37	-0.13270343E-09	0.30559630E-08	-0.49069309E-08	0.54795146E-08	-0.26813121E-08	-0.11044099E-07
40	0.32899266E-08	-0.17559150E-08	0.87345704E-08	0.11479343E-08	0.35081674E-09	-0.17349955E-09
43	-0.31014298E-08	-0.11297231E-07	0.54678759E-08	-0.52939978E-08	0.17981283E-08	0.25303593E-08
46	-0.36037218E-08	0.63670136E-08	0.75777939E-08	-0.46879096E-08	0.32474317E-08	0.54699423E-08
49	0.55504188E-08	0.73818884E-09	0.64737174E-10	-0.18344830E-08	0.34931447E-09	0.37654346E-08
52	-0.74324551E-08	0.10174566E-08	-0.25989264E-08	-0.19804700E-08	0.30952916E-08	0.76429908E-09
55	0.11892543E-08	-0.19736672E-08	0.60166472E-09	0.13261036E-10	0.25313580E-08	-0.72400608E-09
58	-0.19605257E-08	0.32332825E-08	-0.30284857E-08	0.51220272E-08	-0.61945276E-08	0.49265911E-08
61	-0.16024782E-09	-0.22340956E-08	0.12355850E-08	-0.29372532E-09	0.14324023E-08	0.38646001E-08
64	0.29200333E-08	-0.19418267E-08	0.39315964E-08	0.82375001E-09	-0.30249825E-08	0.80231377E-11
67	0.19888159E-09	0.22111444E-08	0.1388701E-08	0.15311454E-08	0.70787305E-08	0.72041395E-09
70	-0.12343895E-08	-0.16048802E-08	-0.31130301E-08	-0.30715960E-09	-0.69154432E-09	0.31270728E-08
73	0.79886239E-09	0.45894488E-09	-0.24417357E-08	-0.57597167E-08	-0.18349411E-10	-0.10741618E-08
76	-0.25895699E-09	0.76144451E-08	-0.54355063E-08	0.47670694E-08	-0.43680233E-08	-0.47146629E-08
79	-0.24564606E-08	-0.47813442E-08	0.25000009E+00	-0.44703484E-07	-0.43680233E-08	-0.47146629E-08
(J,F(I,J)) I=1,41 ET J=1,40						
1	0.10000004E+01	0.00000000E+00	0.50000018E+00	0.50008172E-07	-0.660033447E-08	0.10522498E-07
4	-0.10785385E-07	0.11513128E-07	-0.11034150E-07	-0.64973369E-08	0.71643380E-09	-0.15220008E-07
7	0.84732349E-09	0.24943927E-08	-0.43859685E-08	0.88688692E-08	0.20806388E-08	0.39294734E-09
10	-0.24373970E-08	0.50683335E-08	-0.29579172E-08	-0.73008138E-09	-0.35267598E-08	0.40076129E-08
13	-0.13814416E-07	-0.16207585E-08	0.93399155E-08	0.32539975E-08	0.37495658E-09	-0.24814408E-08
16	-0.69394752E-08	-0.12291083E-09	0.74856832E-08	0.13196189E-09	0.50464836E-08	0.42411337E-08
19	-0.28241476E-08	0.74872880E-09	-0.15986288E-08	0.15884393E-08	-0.13224782E-08	0.47625512E-08
22	-0.13723376E-07	0.75260957E-08	-0.1451573E-09	-0.10219046E-07	0.32403735E-08	-0.61328335E-08
25	0.3882677E-08	0.94749719E-09	0.15233065E-08	-0.72287748E-09	0.13278147E-08	0.35590417E-08
28	0.60061067E-08	-0.10864994E-08	-0.4765926E-08	0.45525481E-08	-0.1200327E-07	-0.12745506E-08
31	0.17675501E-09	-0.84286276E-08	0.70303985E-08	0.12463770E-09	0.11837852E-07	0.16658594E-09
34	0.51675015E-08	-0.10827384E-07	0.1397547E-07	0.83387226E-08	0.82990370E-08	0.11739028E-07
37	0.14025195E-08	-0.68284849E-08	0.10846163E-07	0.10896227E-07	-0.57164518E-08	0.22334641E-07
40	-0.11152589E-08	-0.43226671E-08	0.16398147E-07	0.00000000E+00	-0.1152589E-08	0.83276671E-08
43	-0.57164518E-08	-0.22334641E-07	0.10846163E-07	-0.10896227E-07	0.14025195E-08	0.68284849E-08
46	0.82990370E-08	-0.11739028E-07	0.1397547E-07	0.83387226E-08	0.51675015E-08	0.10827384E-07
49	-0.11837852E-07	-0.16658594E-09	-0.12745506E-08	-0.4765926E-08	0.17675501E-09	0.18428627E-08
52	-0.14200327E-07	0.35590417E-08	0.12463770E-09	-0.45525481E-08	0.60061067E-08	0.10864994E-08
55	-0.12278147E-08	0.12745506E-08	0.1451573E-09	0.72287748E-09	0.60061067E-08	-0.94749719E-09
58	-0.32403735E-08	0.61328335E-08	-0.47625512E-08	0.10219046E-07	0.3882677E-08	-0.75260957E-08
61	0.13224782E-08	-0.47625512E-08	0.42411337E-08	-0.15986288E-08	-0.13723376E-07	0.75260957E-08
64	0.50468363E-08	-0.2411337E-08	0.42411337E-08	-0.15986288E-08	-0.28241476E-08	-0.74872880E-09
67	0.37495658E-09	0.24814408E-08	0.74856832E-08	0.13196189E-09	-0.69394752E-08	0.12291083E-09
70	-0.35267598E-08	-0.40076129E-08	0.93399155E-08	0.32539975E-08	-0.13814416E-07	0.16207585E-08
73	0.20806388E-08	-0.39294734E-09	-0.29579172E-08	-0.73008138E-09	0.24373970E-08	-0.50683335E-08
76	0.71643380E-09	0.15220008E-07	0.43859685E-08	-0.88688692E-08	0.84732349E-09	-0.24943927E-08
79	-0.660033447E-08	-0.10522498E-07	0.50000018E+00	0.50008172E-07	-0.10785385E-07	-0.11513128E-07
(J,F(I,J)) I=1,41 ET J=1,40						
1	0.50000018E+00	-0.40233136E-07	0.25000009E+00	0.74505806E-08	-0.35315937E-08	0.62427277E-08
4	-0.53992371E-08	0.66411956E-08	-0.52034661E-08	-0.30762146E-08	-0.13878884E-09	-0.86806260E-08
7	0.10017724E-09	0.51213578E-09	-0.22129956E-08	0.31143901E-08	0.17010257E-09	-0.40234407E-09
10	-0.17519539E-08	0.19000495E-08	-0.27584690E-08	0.15108294E-09	-0.24943995E-08	0.17193059E-08
13	-0.69698394E-08	-0.87348288E-10	0.4131094E-08	-0.15941224E-09	-0.10376193E-09	0.2358264E-09
16	-0.49041171E-08	0.10605411E-08	0.39037227E-08	0.82532625E-09	0.23242426E-08	0.21353954E-08
19	-0.96656871E-09					



$$t = 0$$

Annexe n° 3.4 : Représentation 3 dim., en vue cachée d'une image caméra après FFT pour  $t = 0$ , lors de la 2<sup>ème</sup> expérience ( 7/84 ). Fonction  $\Theta(x,y,t)$  de dimension  $M \times N = 160 \times 80$  effectuée sur VAX 730, tracée avec la partie symétrique, sur table traçante Techtroniks. Le coefficient d'ordre 0, valeur moyenne de la fonction n'est pas représenté ici ( coefficient trop élevé / au facteur d'échelle ).

Etude de l'évolution d'un point  $\Theta_{\text{exp}}(x_0, y_0, t_n)$  de la plaque au cours du temps.

Le point  $\Theta_{\text{exp}}(x_0, y_0, t)$  choisi est le point le plus chaud de la plaque à  $t = 0$ .

Chaque nouvelle valeur de  $\Theta_{\text{exp}}(x_0, y_0, t_n)$  correspond à une nouvelle image acquise. Nous avons dans ce cas deux images par burst rempli en accès direct (D.M.A), qui correspondent à des points de température presque confondus sur la courbe (4-a, 4-b).

Le contenu de la mémoire centrale ou burst, une fois plein est transféré au disque. Il y a donc interruption de la numérisation et perte d'information pendant ce transfert (grands intervalles sur la courbe). Cette perte est variable au cours de l'expérience et correspond à un nombre entier d'images non numérisées.

Ce nombre compris entre 15 et 20 images est déterminé après extraction des valeurs extrémales de la fonction " rampe " faisant alors, office d'échelle de temps et du nombre de niveau informatique par image ( soit  $0,0775\text{s} / \text{niv. inf.}$  estimé qu'à  $2 \cdot 10^{-2}\text{s}$  près ).

Lors de cette première expérience, la plaque d'épaisseur  $e = 10\text{mm}$ , est chauffée par effet Joule par l'intermédiaire de trois résistances collées à une extrémité du matériau ( polychlorure de vynile ).

La valeur théorique de la constante thermique de temps est  $164\text{s/mm}$ , soit  $\tau = 1640\text{s}$

Nous avons  $0,027^\circ\text{C/niv inf}$  en amplitude et  $0,0775\text{s/niv. inf.}$  sur l'axe des temps.

tf valeur finale de l'expérience est de  $306\text{s}$ .

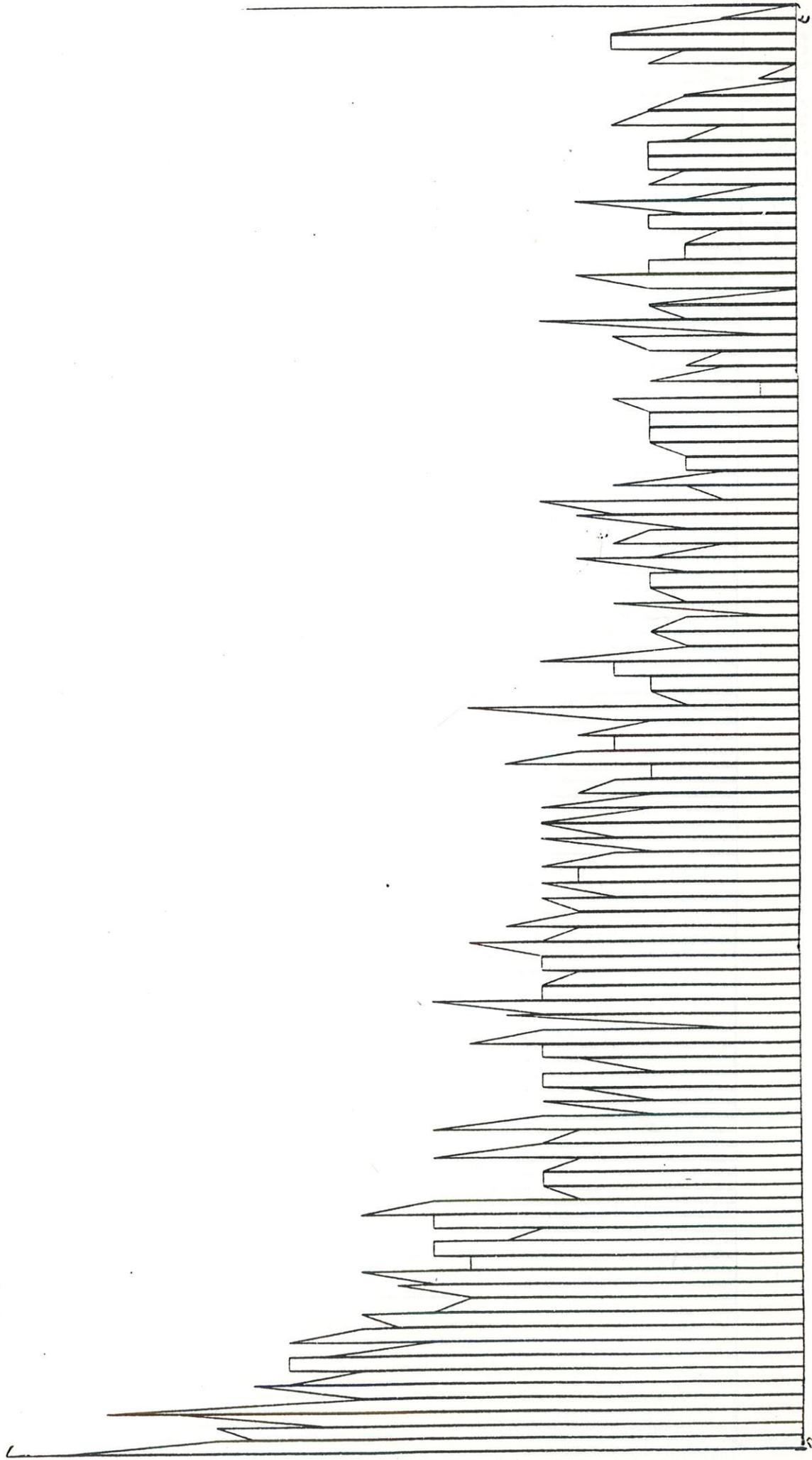
L'étude de l'évolution du point  $\Theta(r_0, t)$  en fonction du temps, fournit une variation  $\delta\Theta(r_0, t) = 0,56^\circ\text{C}$

Une estimation grossière de  $\tau^{-1}$  peut être faite, à partir des courbes expérimentales.

Soient  $\Theta(x_0, y_0, t_1)$  et  $\Theta(x_0, y_0, t_2)$ , ils vérifient l'équation de la température décrite en (18). Nous obtenons deux équations en ces points identiquement nulles. En les différenciant et en supposant la variation suivant les variables d'espace nulle, ( $\Delta\Theta \simeq 0$ ), nous obtenons une relation dépendant du temps et de la constante thermique  $\tau$ .

température en niveau informatique - Soit 0,027°C / niv. inf.

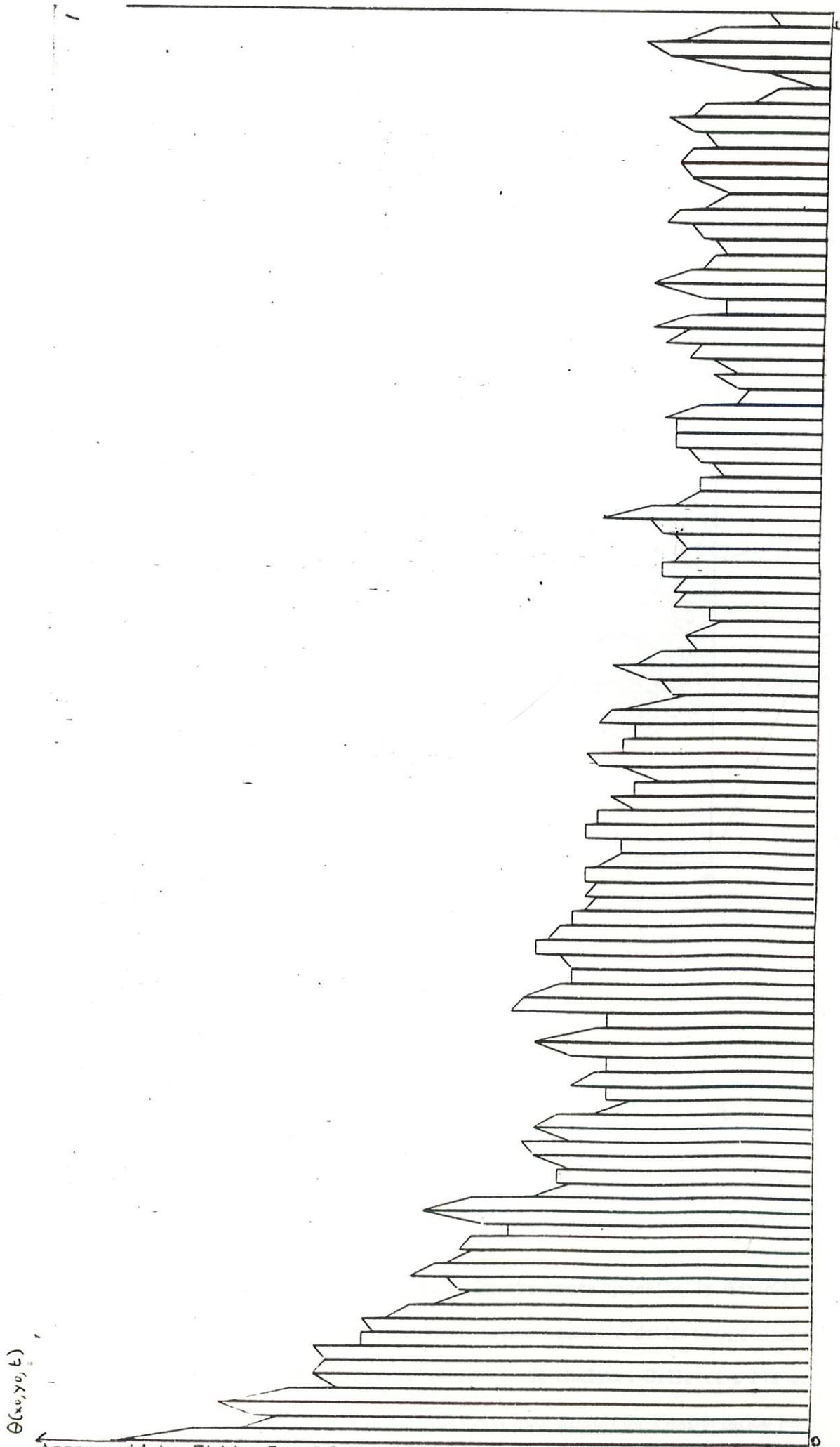
$\theta(x_0, y_0, t)$



temps en niveau informatique  
0,0775s / niv. inf.

Annexe n°4-a : Fichier  $\theta_{exp}(x_0, y_0, t_n)$  " bruité " avant interpolation linéaire.

amplitude en niveau informatique (0,027°c / niv.inf.)

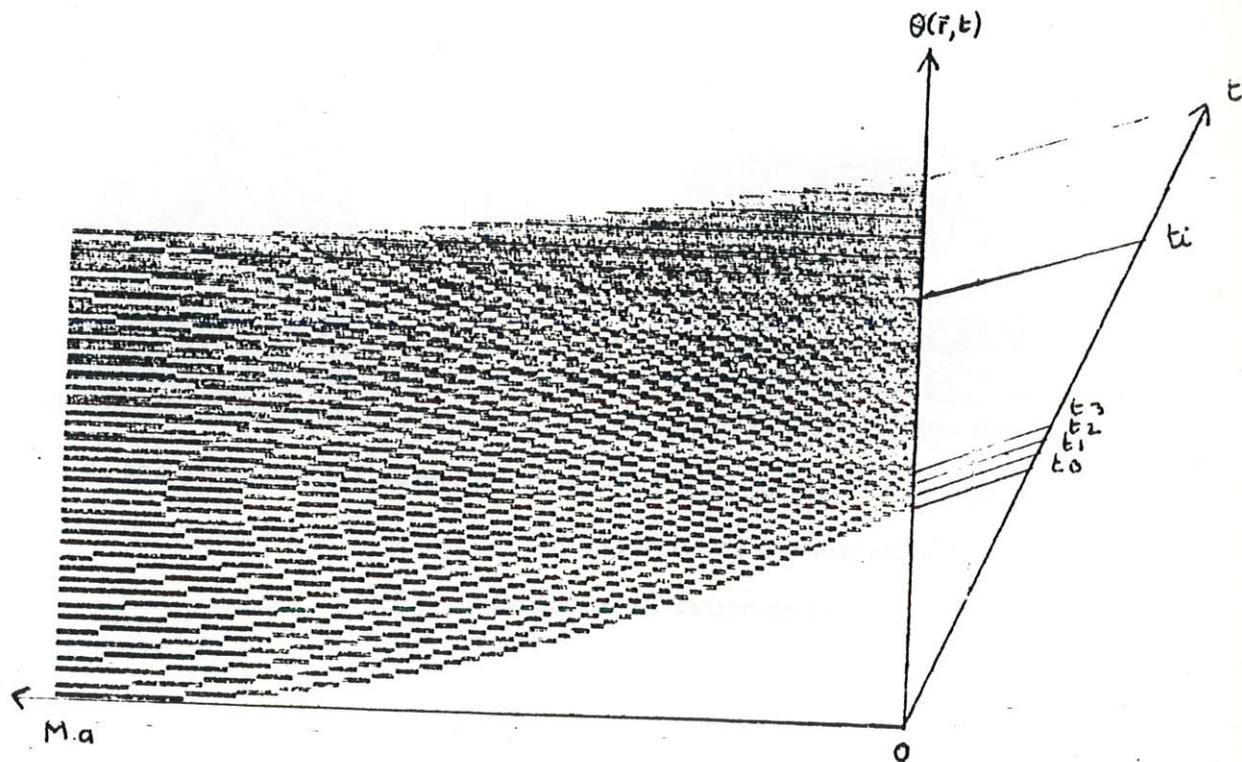


Annexe n° 4-b : Fichier  $\Theta_{exp}(x_0, y_0, t_n)$  après un premier lissage par interpolation

linéaire.

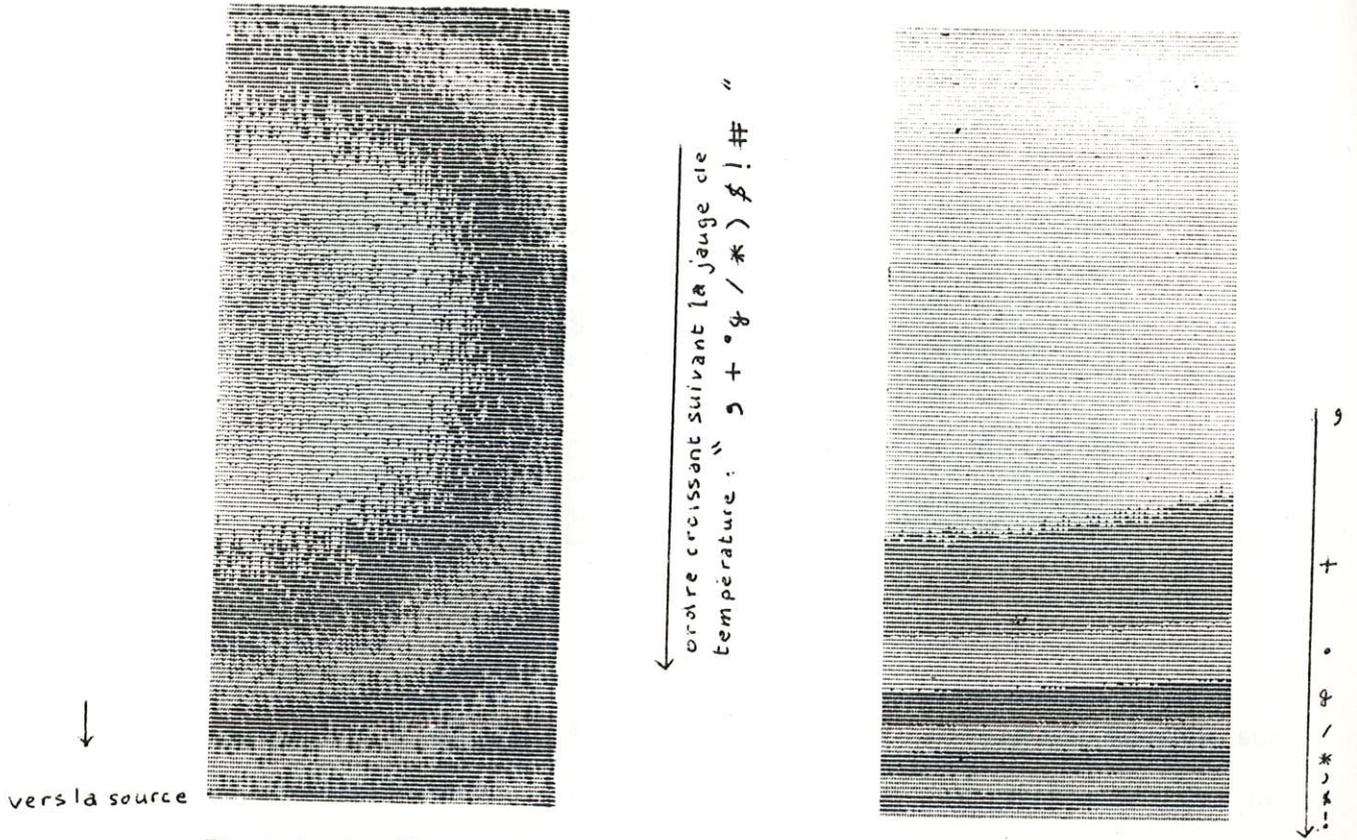
temps en niveau  
informatique

0,0775 s / niv.inf.



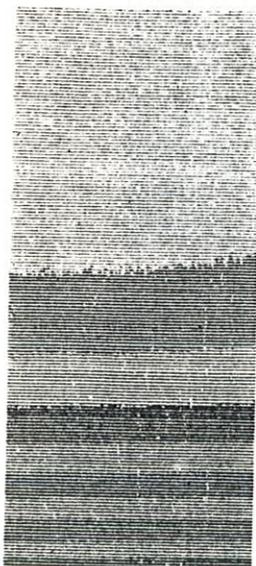
Annexe n° 5 : Simulation unidimensionnelle. Courbe isothermale de  $\theta_{th}(\vec{r}, t)$  (sur Apple II) . On a à chaque temps la représentation spatiale de la température  $\theta_{th}(\vec{r}, t)$  d'une portion de barre en absence de source de chaleur. Celle-ci a été au préalable, chauffée par effet joule à une extrémité. ( condition de l'expérience )

Représentations isothermique obtenues par moyenne arithmétique sur 200 images.



a- Phase de chauffe (par effet joule)  
(quantification de 0,27°C)

b- Arrêt de la source. Période de dé-  
croissance de la température à son  
début.(quantification de 0,189°C)



(quantif. de 0,243°C)



(quantif. de 0,162°C)



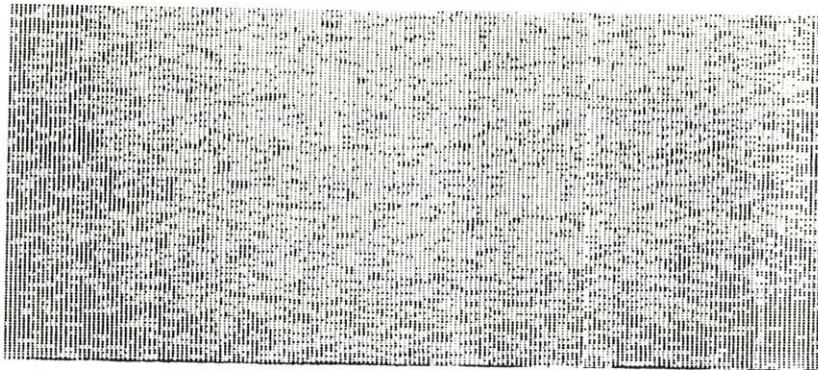
(quantif. de 0,108°C)

c- Etapes successives au cours de l'expérience pendant la phase de décroissance de la température. On peut voir  $\Theta_{exp}(x,y,t) \simeq \Theta_{exp}(x,t)$ .

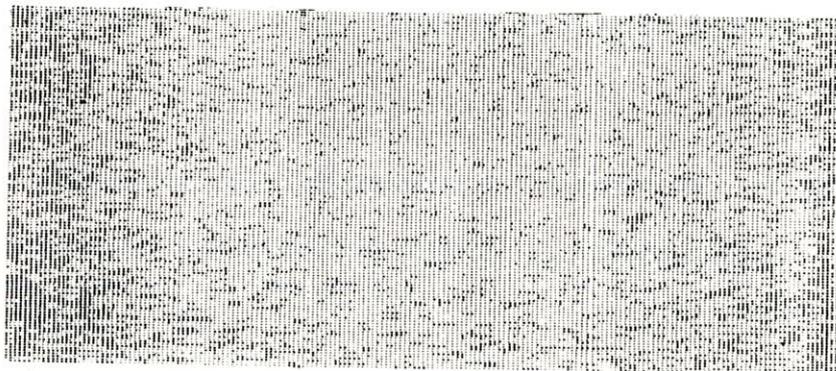
Annexe n° 6.2 : Images " caméra " numérisées à la température ambiante  $\Theta_e(x,y,t)$ .

Représentation isothermique obtenue par moyenne arithmétique sur 100 images.

( même jauge de température que 6.1 : "  $\rho + \sigma / \tau$  )  $\delta ! \#$  "



a - Image à la température ambiante ( sans source ) obtenue par moyenne sur les 100 premières images. ( Représentation suivant 9 niveaux quantifiés de  $0,243^\circ\text{C}$  )



b - Image à la température ambiante 30s plus tard. Il apparaît clairement une corrélation entre l'espace et le bruit. il semblerait également qu'il y ait une corrélation avec le temps.

( Représentation suivant neuf niveaux quantifiés de  $0,243^\circ\text{C}$  )

### Bibliographie.

- <1> : Holeman B.R , Wreathall W.M : Juin 1971 , " Thermal-imaging camera tubes with pyroelectric targets " , J.Phys.D: Appl.Phys., Vol. 4., Printed in G.B
- <2> : Brémond P. : nov. 1982 , " Développement d'une instrumentation infrarouge pour l'étude des structures mécaniques. Application à l'étude des extrémités de fissures." , Thèse de docteur ingénieur, spécialité acoustique, L.M.A - Marseille .
- <3> : Nayroles B. , Bouc R. , Caumon H., Chezeaux J.C , Giacometti E.: 1981 , " Téléthermographie infrarouge et Mécanique des structures." , Int.J.Engineering Sci. , 19,929-947.
- <4> : Germain P. : 1973 , " Mécanique des milieux continus " , T.1 , Masson , Paris.
- <5> : Boley B. and Weiner J. : 1960 , " Theory of Thermal Stress." , John Wiley and Sons, Inc.
- <6> : Bouc R. , Chezeaux J.C. , Giacometti E., Nayroles B. : 23 nov. 1979 , " Repérage et estimation des sources de chaleur par thermovision " , Séminaire L.M.A - Marseille.
- <7> : Documentation AGA - Thermovision 780 , Operating Manual.
- <8> : Chezeaux J.C. : 1981 , " Application de la radiométrie infrarouge à l'étude des structures mécaniques: numérisation et acquisition de l'image thermique de la caméra AGA 780 SW " , Rapport D.G.R.S.T n: 797 1535 , L.M.A - Marseille.
- <9> : Chezeaux J.C. : sept 1984 , " Instrumentation - Traitement de l'image thermique " , Rapport d'activité L.M.A - Marseille.

- <10> : Gaussorgues G. : 1981 , " La Thermographie Infrarouge " , imprim. Jouve ,  
Technique et Documentation , Paris.
- <11> : Charrier J. , Marucic J.A. : Avri. 1982 , " Possibilités d'utilisation des  
méthodes thermiques à des fins d'essais non destructifs en génie civil. Synthèse  
bibliographique." , Rapport de recherche LPC n 113 , Paris.
- <12> : Chretien N. : 1975 , " Les méthodes thermiques de contrôles non  
destructifs." , Journées sur la thermographie , C.E.A. , Sevran , Paris.
- <13> : Dauguet A. : 1964 , " La détection des radiations infrarouges." , Dunod ,  
Paris.
- <14> : Kittel C. : 1969 , " Thermals Physics " , John Wiley and Sons , Inc , U.S.A.
- <15> : Schwartz L. : 1961 , " Méthodes mathématiques pour les sciences physique "  
 , Hermann , Paris.
- <16> : Max J : 1970 , " Les principales méthodes de traitement du signal et  
applications aux mesures physiques " , Rapport 4018 , C.E.A
- <17> : Rabiner Lawrence R. , Gold B. : 1975 , " Theory and application of digital  
signal processing " , Prentice - Hall, Inc.
- <18> : Oppenheim Alan V. , Schafer Ronald W. : 1975 , " Digital signal processing "  
 , Prentice - Hall, Inc.
- <19> : Bendat Julius S. , Piersol Allan G. : 1971 , " Random data : Analysis and  
measurement procedures." , Wiley Interscience.
- <20> : Isaacson E. , Bishop Keller H. : 1966 , " Analysis of numerical méthodes." ,  
John Wiley and Sons, Inc.

- <21> : Blanc R. , Bouc R. , res. scie. Nayroles B. : Août 1978 , " Application de la radiométrie infrarouge à l'étude des structures mécaniques." , Rapport n° 76.7.1853 , L.M.A - Marseille.
- <22> : Gatti M. : 1977 , " Traitement numérique du signal vidéo." , Rapport d'activité 1976- 1977, L.M.A - Marseille.
- <23> : Gelb A. , Kasper J. , Nash R. , Price C. , Sutherland A. : 1974 , " Applied Optimal Estimation " , written by the Technical Staff the Analytic Sci. Corp. , edited by Gelb A. , M.I.T. Press.
- <24> : Goodwin Graham C. , Payne Robert L. : 1977 , " Dynamic System Identification : Experiment Design and Data Analysis " , Mathematics in sci. and engin. , Academic Press, Inc.
- <25> : Widder D. V. : 1975 , " The Heat Equation " , Academic Press, Inc.
- <26> : Coordonnateur Laurent M. : octo. 1981 , " Etude comparative et critique de quelques méthodes de détermination des caractéristiques thermophysiques des solides conducteurs de la chaleur." , Etude organisée par le G.U.T. , Rev. Gén. Therm. n 238 , Paris.
- <27> : Raviart P. A. , Thomas J. M. : 1983 , " Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles." , Masson , Paris.
- <28> : Chen W. H. , Seinfeld J. H. : Avril 1971 , " Estimation of spatially varying parameters in partial differential equations." , Int. J. Control, 1972 , Vol. 15 , n 3, 487-495.
- <29> : Woods John W. , Ingle Vinay K. : Avril 1981 , " Kalman Filtering in Two Dimensions: Further Results " , IEEE Transactions on Acous. and Sig. Proc. , Vol. ASSP-29, n 2 .
- <30> : Nayroles B. , Nov 1984 , " Développement des techniques de thermographie I.R.: Mesure de diffusivité et constante de temps " , Rapport G.R.E.C.O.: G.D.E.

LABORATOIRE DE MECANIQUE ET D'ACOUSTIQUE  
31.Ch.Joseph-Aiguier (9e arr.) B.P.71 - 13277 Marseille Cedex 9  
TEL 91224000. TELEX CNRSMAR 430225F

