



**HAL**  
open science

# Un modèle de programmation stochastique pour l'allocation stratégique d'actifs d'un régime de retraite partiellement provisionné

Alaeddine Faleh

► **To cite this version:**

Alaeddine Faleh. Un modèle de programmation stochastique pour l'allocation stratégique d'actifs d'un régime de retraite partiellement provisionné. 2011. hal-00561965

**HAL Id: hal-00561965**

**<https://hal.science/hal-00561965>**

Preprint submitted on 2 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **Un modèle de programmation stochastique pour l'allocation stratégique d'actifs d'un régime de retraite partiellement provisionné <sup>1</sup>**

**Alaeddine FALEH<sup>2</sup>**

**ISFA- Université Lyon I<sup>3</sup>  
Caisse des Dépôts et Consignations<sup>4</sup>**

## **RÉSUMÉ**

Dans cet article, nous présentons des techniques novatrices d'ALM basées sur la programmation stochastique. Leur application a été développée pour le choix de l'allocation stratégique d'actifs des régimes de retraite par répartition partiellement provisionnés. Une nouvelle méthodologie pour la génération de l'arbre des scénarios a été également adoptée. Une étude comparative du modèle d'ALM développé avec celui basé sur la stratégie *Fixed-Mix* a été effectuée. Différents tests de sensibilité ont été par ailleurs mis en place pour mesurer l'impact du changement de certaines variables clés d'entrée sur les résultats produits par notre modèle d'ALM.

**MOTS-CLEFS :** gestion actif-passif, allocation stratégique d'actifs, génération de scénarios économiques, programmation stochastique

---

<sup>1</sup> Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Association Nationale de la Recherche et de la Technologie (ANRT) portant la référence 177/2008 et de l'aide de l'Agence Nationale de la Recherche (référence ANR-08-BLAN-0314-01).

<sup>2</sup> Doctorant dans le cadre d'une convention CIFRE entre la Caisse des Dépôts et Consignations et le laboratoire de Sciences Actuarielles et Financières (ISFA, Université Lyon I).

Contact : alaeddine.faleh@caissedesdepots.fr ; alaeddinefaleh@yahoo.fr

<sup>3</sup> Institut de Sciences Financières et d'Assurances (ISFA) - 50, avenue Tony Garnier 69366 Lyon cedex 7.

<sup>4</sup> Caisse des Dépôts et Consignations (CDC), 56, rue de Lille, 75007, Paris 07.

## ABSTRACT

In this paper, we present new ALM techniques based on stochastic programming. An application to the strategic asset allocation of a retirement schemes, especially those with partial provision, is developed. A specific methodology for the scenario tree generation is proposed at this level. Finally, a comparative study between proposed ALM model and Fixed-Mix strategy based model was achieved. We also make a variety of a sensitivity tests to detect the impact of the inputs values changes on the outputs results, provided by our ALM model.

**KEYWORDS :** Asset-Liability Management, Strategic Asset Allocation, Economic Scenario Generator, Stochastic Programming

## 1. Introduction

Récemment, la gestion actif-passif (*Asset-Liability Management* ou ALM) a vu son rôle devenir de plus en plus incontournable pour garantir la solvabilité d'une compagnie, notamment suite à la dernière crise financière de 2008. L'ALM consiste dans une méthode globale et coordonnée permettant à une société de gérer la composition et l'adéquation de l'ensemble de ses actifs et passifs. Dans le cas spécifique des régimes de retraite, les techniques utilisées pour sa mise en place diffèrent particulièrement en fonction de la nature des engagements du régime.

Trois situations au moins peuvent être recensées en France pour un régime de retraite donné : régime provisionné (cas où le régime est tenu à la couverture totale des engagements souscrits par ses cotisants et retraités actuels), régime partiellement provisionné (couverture d'une partie seulement des engagements souscrits par ses cotisants et retraités actuels) et enfin régime non provisionné.

Le fonctionnement financier du régime objet de notre étude est celui des régimes de retraite en France gérés par répartition et partiellement provisionnés. Les flux de cotisations permettent, dans ce cas, de régler les flux de prestations. Le surplus, le cas échéant, permet d'alimenter une réserve destinée à régler une partie des prestations futures. Cette même réserve peut se voir prélever, le cas échéant, le solde technique débiteur (cotisations insuffisantes pour régler les prestations). Entre temps, la réserve est placée sur le marché financier et répartie entre différentes classes d'actifs.

La notion de provision partielle peut se manifester en pratique via une contrainte réglementaire : par exemple contraignant le régime à respecter, à une date future, un certain niveau de rapport entre sa réserve financière et les prestations à payer à cette même date. Etant donné ce mode de fonctionnement, on supposera dans la suite que la gestion actif-passif de ce type de régime est basée sur l'optimisation de la valeur de la réserve compte tenu des contraintes réglementaires qu'il doit respecter.

L'allocation stratégique<sup>5</sup> d'actifs d'un régime de retraite est souvent définie comme une étape d'un processus plus général de gestion actif-passif, en particulier comme l'étape en aval de l'appréhension des risques et en amont de l'allocation tactique d'actifs. Compte tenu de ce positionnement, l'allocation stratégique d'actifs vise soit à confirmer l'optimalité de la structure de l'actif existant de la réserve, soit à proposer une structure optimale d'actifs de cette réserve qui permette au régime d'atteindre un certain objectif de performance financière tout en respectant ses engagements avec un niveau de confiance donné.

La gestion actif-passif d'un régime par répartition partiellement provisionné peut être basée sur l'optimisation de la valeur de la réserve, compte tenu des contraintes liées au passif qu'il doit respecter. C'est dans ce cadre que le choix d'une « bonne »

---

<sup>5</sup> La caractérisation de « stratégique », à l'opposée de « tactique », vient d'une part de l'horizon temporel auquel s'appliquent les études d'allocation stratégique, d'autre part du nombre limité de classes d'actifs considérées dans ces études, généralement limité entre trois et dix actifs au maximum (cf. Campbell et al.[2001]).

allocation stratégique joue un rôle essentiel dans le pilotage actif-passif d'un régime de retraite, étant donné que les réserves contribuent à part entière à la solidité du régime. Cependant une difficulté consiste à définir la « meilleure » stratégie de placement de ces réserves sur les marchés financiers, notamment dans un contexte de fortes incertitudes économiques, comme c'est actuellement le cas du fait de la récente crise financière.

De leur côté, les techniques de programmation stochastique (PS) ont prouvé récemment leur efficacité dans la résolution de problèmes financiers divers (cf. Zenios [2007]). Ces techniques sont initialement dédiées aux problématiques de planification de la production dans le domaine de l'ingénierie (cf. Birge et Louveaux [1997], Dantzig et al. [1990], Escudero et al. [1993]). La performance obtenue avec les techniques de programmation stochastique dans le domaine de la finance est principalement due à leur capacité à prendre en compte les aspects dynamiques et complexes des contraintes souvent rencontrées dans ce domaine.

Selon Kaut et Wallace [2003], la programmation stochastique a eu une popularité croissante dans la communauté des mathématiciens programmeurs. La puissance actuelle des outils informatiques permet aux utilisateurs d'ajouter les aspects stochastiques aux modèles déterministes difficiles à résoudre il y a quelques années. Dans ce cadre, la programmation stochastique peut être vue comme un modèle de programmation déterministe avec incertitude au niveau de certains paramètres. Au lieu d'avoir des valeurs uniques, ces paramètres sont décrits par des distributions (dans le cas d'une seule période), ou par des processus stochastiques (dans le cas multi-périodique).

En principe, la programmation stochastique peut être appliquée sans réelle difficulté quelque soit la forme de la fonction objectif ou le modèle des variables stochastiques, tant que la distribution de ces variables est indépendante des variables de décision dans le modèle générale d'optimisation (cf. Birge et Louveaux [1997]). L'objectif de ce travail sera ainsi la description d'une nouvelle approche pour l'exploitation et la mise en œuvre de ces techniques dans le cadre de l'allocation stratégique d'actifs d'un régime de retraite partiellement provisionné.

L'approche de programmation stochastique développée dans ce travail est claire, théoriquement efficace et relativement facile à mettre en œuvre (côté implémentation). L'application de cette approche peut améliorer les techniques actuelles utilisées par les fonds de retraite en France en matière d'allocation stratégique d'actifs, souvent basées sur la simple simulation et/ou sur l'expérience.

Le modèle d'ALM développé (en se basant sur les techniques de programmation stochastique) pourra également servir comme une approche de référence, dont les résultats sont à comparer avec ceux de la stratégie dite « à poids constants » ou *Fixed-Mix* : à chaque fin de période de simulation on recompose le fonds de façon à respecter les proportions initiales proposées dans l'allocation stratégique optimale (cf. Zenios [2007]).

Le plan de cet article sera comme suit : on commence par une revue de l'état de l'art en matière d'ALM et d'utilisation des techniques de programmation stochastique. On présente ensuite les modèles de dynamique des variables financières considérés dans ce travail tout en développant une approche novatrice pour la génération de

l'arbre des scénarios. La troisième section est consacrée à la description d'un modèle mathématique générale et typique d'allocation stratégique d'actifs pour un régime de retraite partiellement provisionné. Enfin, La quatrième section est consacrée à la discussion des résultats issus de la résolution de ce modèle via les techniques de programmation stochastique. A ce stade, différents tests de sensibilité sont également effectués.

## 2. Littérature sur la programmation stochastique et sur l'ALM

Dans la littérature, les modèles d'ALM sont généralement classés en trois groupes présentés chronologiquement comme suit. Le premier groupe contient les modèles d'adossement (ou *matching*) et d'immunisation par la durée (cf. Macaulay [1938], Redington [1952]). Ces modèles se basent sur le fait que les investissements sont essentiellement effectués dans des obligations. Ceci nous permet d'obtenir, soit un adossement des flux de trésorerie des actifs financiers à ceux du passif (*matching*), soit un adossement de la durée de l'actif à celle du passif (immunisation par la durée).

Ces techniques étaient utilisées jusqu'au milieu des années 80 et avaient comme inconvénients principaux la considération du risque de taux comme seule source de risque pour le fonds, ainsi que la nécessité d'un rebalancement périodique du portefeuille en ré-estimant à chaque fois la durée du passif, qui change continûment du fait du changement des taux d'intérêts et de l'écoulement du temps.

Le deuxième groupe contient les modèles basés sur la simulation de scénarios déterministes et sur la notion de surplus (Kim et Santomero [1988], Sharpe et Tint [1990], Leibowitz et al. [1992]). Les modèles de surplus ont pour objet la minimisation du risque de perte du surplus (mesuré par la variance de la rentabilité du surplus) sous contraintes de rentabilité et de poids des actifs. Ils sont des modèles mono-périodiques, ce qui limite leur utilité en pratique pour des problèmes d'allocation sur le long terme.

Le troisième groupe de modèles utilise les techniques de simulation stochastique (*Monte Carlo*) pour modéliser l'évolution des différents éléments, que ce soit au niveau des actifs financiers et des engagements, ou au niveau des variables de marché et des variables démographiques (cf. Frauendorfer [2007] et Martellini [2006]). Ainsi les lois de probabilité associées aux résultats du fonds de retraite sur le long terme peuvent être estimées.

A ce niveau, nous nous proposons de distinguer deux sous-groupes de modèles d'ALM basés sur les techniques stochastiques. L'élément clé de distinction sera si oui ou non les poids des différents actifs reviennent périodiquement à ceux de l'allocation stratégique définie initialement (si oui, les modèles seront appelés modèles à poids constants ou stratégie *Fixed-Mix*).

Pour le premier sous-groupe de modèles à poids constants (*Fixed-Mix*) et malgré les avancées réalisées avec ces techniques (surtout au niveau de l'implémentation informatique), l'aspect dynamique de l'allocation stratégique reste encore marginalisé. En fait, ces modèles permettent de comparer des allocations constantes dans le temps (statiques) indépendamment des opportunités liées aux évolutions

inter-temporelles des marchés (cf. Merton [1990], Kouwenberg [2001] et Zenios [2007]).

Le deuxième sous-groupe de modèles, et le plus récent, est principalement inspiré de la théorie du choix de la consommation et de portefeuille développée par Merton [1971]. Il s'agit des modèles d'allocation « dynamique ». Par exemple, à partir de la définition de la fonction objectif pour l'investisseur, ces modèles permettent la détermination d'une trajectoire des poids des différents actifs jusqu'à la date d'échéance (l'ajustement des poids est fonction des évolutions projetées du marché et de la règle de gestion prédéfinie). L'allocation stratégique retenue sera l'allocation optimale d'actifs à la date initiale  $t_0$ .

Le cadre d'utilisation de ces modèles récents se heurte au problème d'implémentation vu la complexité des outils mathématiques employés (cf. Hainaut et al. [2005]). L'approche dynamique présente l'avantage théorique de la robustesse face aux changements de régime des marchés. L'autorisation du changement des poids des différentes classes d'actifs, sur la base d'une règle de gestion bien définie, constitue *a priori* un élément intéressant. Cela en effet permet l'ajustement des expositions aux différentes classes d'actifs suite à l'évolution des conditions de marché.

Cette réflexion sur la construction de modèles d'allocation dynamique d'actifs applicables dans une optique prévisionnelle à long-terme nous a donc conduits à étudier une approche innovante fondée sur les techniques de « programmation stochastique » (cf. Birge et Louveaux [1997]). Il s'agit d'une version adaptée d'une technique déjà utilisée dans le domaine de l'ingénierie pour la planification de la production (cf. Dantzig et al. [1990], Escudero et al. [1993]).

Les concepts basiques des modèles d'ALM sous l'incertitude et avec programmation stochastique ont été développés par Kallberg et al. [1982] ainsi que Kusy et Ziemba [1986]. Plusieurs développements ont été ensuite présentés. Parmi les modèles les plus adoptés en pratique, nous trouvons le modèle de Russel-Yasuda Kasai développé par Cariño et al. [1994].

Il s'agit d'un modèle d'ALM pour une compagnie d'assurance japonaise Yasuda basé sur la programmation stochastique multi-périodique (*multistage stochastic programming*). Selon ces auteurs, le modèle permet à Yasuda de combiner à la fois les outils sophistiqués utilisés en matière de prise de décision et les outils de gestion des risques. Ceci permettra d'avoir une analyse plus fiable et plus performante du positionnement de la société vis-à-vis des différents risques auxquels elle est exposée.

Un autre modèle d'ALM dynamique basé sur la programmation stochastique appelé « Gestion actif-passif assistée par ordinateur » (en anglais « *Computer-aided asset/liability management* ou CALM ») est présenté par Consigli & Dempster [1998] : ces derniers montrent que le modèle CALM est construit en tenant compte de l'incertitude affectant à la fois les actifs (composant le portefeuille ou existant sur le marché) et les engagements (sous forme de scénarios dépendant de flux de décaissement et de coûts des opérations d'emprunt).

Le modèle d'ALM dynamique présenté par Dert [1995] reste également un modèle de référence en matière d'exploitation des techniques de PS pour le pilotage technique d'un fonds de pension. Il est appliqué dans le cas des fonds de pension à prestation définie. Dert présente un modèle d'optimisation qui étudie conjointement la politique d'investissement et la politique de financement d'un fonds de pension à prestations définies en tenant compte de l'incertitude économique affectant ses engagements futurs vis-à-vis de ses adhérents.

Ce modèle permet aussi de déterminer les stratégies d'ALM à adopter, que ce soit au niveau des décisions d'investissement ou au niveau des taux de cotisation dans un contexte d'incertitude. Dert constate que les décisions sont différentes que nous utilisons les stratégies d'ALM dynamiques ou des stratégies d'ALM statiques. De même, en utilisant un modèle dynamique d'ALM, il a constaté que les stratégies proposées sont à moindre coût de financement et que les probabilités de sous financement sont significativement plus faibles.

Plusieurs autres modèles ont récemment confirmé le succès des techniques de programmation stochastique dans le contexte de la gestion actif-passif. Dans le cas spécifique des fonds de pension de type anglo-saxon (qui sont principalement basés sur la capitalisation et souvent intégralement provisionnés), on peut citer certains travaux tels que : Geyer et al. [2008] pour les fonds de pension autrichiens, Hilli et al. [2007] pour les fonds de pension finlandais, Haneveld et al. [2005] pour les fonds de pension allemands, Boender et al. [2007] pour les fonds de pension néerlandais.

Les modèles de programmation stochastique les plus appliqués sont les modèles de PS avec recours (*with recourse*, cf. Birge et Louveaux [1997]). Dans le cas monopériodique par exemple, la démarche générale de ce type de modèle suppose la prise de deux décisions : la première au début de la période compte tenu de l'information disponible à cette date et avant la réalisation d'un événement aléatoire et la deuxième à la fin de la période et après la réalisation de l'évènement aléatoire.

La deuxième décision est appelée décision de recours. Elle est prise afin de compenser les éventuelles conséquences négatives dues à une mauvaise décision initiale. La politique optimale dans ce type de modèle permet de définir les décisions à l'étape initiale ainsi que les différents recours ultérieurs correspondant à chaque réalisation possible des éléments aléatoires. Ces résultats peuvent ensuite être étendus pour le cas de la programmation stochastique multi-périodique. Une formulation mathématique de ces aspects a été présentée dans l'annexe 1.

Nous nous baserons aussi sur ce principe de recours lors de la résolution du problème d'allocation stratégique d'actifs d'un régime de retraite partiellement provisionné. Pour cela, nous exposons dans un premier temps les hypothèses retenues pour la génération de scénarios économiques et financiers avant de passer à la description du modèle typique d'optimisation.

### **3. La génération de scénarios économiques et financiers**

Nous décrivons dans ce qui suit les hypothèses générales du générateur de scénarios économique (GSE) notamment les modèles stochastiques retenus pour chacune des variables modélisées. Ensuite, un rappel des différentes structures

schématiques de projection est effectué. Par ailleurs, nous présentons à la fin de cette partie une nouvelle méthodologie de génération de scénarios économiques que nous appelons méthodologie « des quantiles de référence ». Cette dernière sera utilisée lors de l'application des techniques de programmation stochastique (cf. section 5).

### **3.1 Structure schématique pour la génération de scénarios**

La projection sur le long terme des valeurs de marché des actifs financiers et des variables macro-économiques, souvent appelée « génération de scénarios économiques », constitue une phase cruciale dans la gestion actif-passif d'une compagnie d'assurance ou d'un fonds de retraite. Elle est un élément central de l'évaluation des provisions pour les garanties financières sur des contrats d'épargne dans le cadre de Solvabilité 2 (cf. Planchet [2009]).

Dans le cas particulier de l'allocation stratégique d'actifs, la détermination de l'allocation optimale vient dans un deuxième temps, ultérieurement à la projection des scénarios, afin de refléter l'attitude face au risque de l'investisseur de long terme. Un modèle d'ALM est supposé tenir compte du schéma d'évolution des différentes variables économiques et financières (taux, inflation, rendement des actions, etc.), impactant aussi bien l'actif que le passif du régime de retraite, en tenant compte de la cohérence économique des relations entre ces variables.

La méthodologie de mise en place des modèles d'actifs sera donc exposée dans cette partie. L'objectif de ces modèles est de projeter les valeurs des rendements des différents actifs financiers (actions, obligations, etc.) ainsi que les différents taux d'intérêt et variables économiques. Cela permet d'évaluer ensuite l'optimalité de la politique d'investissement financier du fonds et de préserver l'équilibre actuariel recherché.

Comme l'horizon de l'allocation stratégique est le long terme, le nombre de classes d'actifs considérés est souvent limité à trois, à savoir : le monétaire, les obligations et les actions (cf. Campbell et al. [2001]). Dans notre cas, la méthodologie de projection des variables financières et économiques sera basée sur des modèles stochastiques. En pratique, une attention particulière doit être portée à l'inflation, qui est utilisée pour revaloriser les cotisations et les prestations des régimes étudiés.

Le choix d'un modèle de structure par terme des taux doit tenir compte de l'objectif de planification stratégique de long terme qui diffère d'un objectif d'application de court terme basé sur la précision et la comparaison des résultats avec les prix des produits dérivés tels que ceux observés sur le marché (cf. Faleh et al. [2010]).

Dans le modèle retenu, la structure par terme des taux nominaux est déduite à partir de la structure par terme des taux réels et de la structure par terme des taux d'inflation anticipés. Nous avons choisi de modéliser ces deux dernières par le modèle de Hull et White [1994] à 2 facteurs (taux court et taux long) appliqué dans un cadre d'équilibre général, avec un principe de retour à la moyenne des taux d'intérêt et avec une tendance (ou *drift*) dépendante du temps.

Les équations régissant ce processus sont les suivantes :

$$dr_t = k_r (l_t - r_t)dt + \sigma_r dB_{r,t}$$

$$dl_t = k_l (\mu_l - l_t)dt + \sigma_l dB_{l,t}$$

Avec :

$r_t$  = le taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à court terme à la date  $t$ .

$l_t$  = le taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à long terme à la date  $t$ .

$\mu_l$  = le taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à long terme moyen.

$k_l$  = la vitesse de retour à la moyenne pour les taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à long terme.

$k_r$  = la vitesse de retour à la moyenne pour les taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à court terme.

$\sigma_l$  = la volatilité des taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à long terme.

$\sigma_r$  = la volatilité des taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à court terme.

$dB_{l,t}$  = le choc brownien appliqué aux taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à long terme à la date  $t$ .

$dB_{r,t}$  = le choc brownien appliqué aux taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à court terme à la date  $t$ .

Ce modèle a le mérite d'être utilisé pour des fins de projection de long terme et dans un cadre d'analyse d'un « monde réel » (Ahlgren et al. [2005]). Il fournit aussi des formules explicites pour les prix des obligations zéro-coupon ce qui permet à son utilisateur d'obtenir les taux de rendements de différentes maturités, à n'importe quelle date durant la période de simulation (courbe des taux).

Le choix d'un modèle multi-factoriel garantit une flexibilité au niveau de la forme de la courbe des taux. Il est montré d'un autre côté que le pouvoir explicatif d'un modèle à deux paramètres est suffisant pour la prévision des changements de taux d'intérêt (Date et al. [2009]). Nos deux facteurs utilisés seront le taux long (ou de long terme) et le taux court (ou de court terme) comme mentionné ci-dessus.

Nous pourrions obtenir ainsi différentes formes de la courbe des taux en fonction de l'évolution de sa partie de long terme par rapport à sa position initiale. De même, en considérant deux facteurs, nous évitons la limite du modèle à un seul facteur qui est celle d'une corrélation parfaite, égale à 1, entre les taux de rendement exigés sur différentes maturités. Le taux d'intérêt nominal  $i$  est déduit de l'approximation suivante de la relation de Fisher [1931] (avec  $q$  et  $r$  représentant le taux d'inflation et le taux d'intérêt réel respectivement) :

$$i = [(1+q) \times (1+r)] - 1$$

Les rendements des différentes classes d'actifs obligataires peuvent ensuite être déduits à partir de ces projections de taux d'intérêt : nominaux, réels et d'inflation (voir Annexe 2).

Les rendements totaux (avec dividendes réinvestis) des actions sont simulés selon un modèle de changement de régime tel que proposé par Hardy [2001]. Cela permet de tenir compte du phénomène des queues épaisses observé sur le long terme dans

le cas des séries des rendements annuels des actions. Ce modèle suppose donc que les rendements des actions évoluent sous l'un de deux régimes suivants : un premier régime avec une tendance relativement élevée et une volatilité faible des rendements et un deuxième régime avec une tendance relativement faible et une volatilité élevée des rendements.

En supposant  $\rho_t$  le régime dans lequel se trouve le processus dans l'intervalle de temps  $[t, t+1]$  et  $S_t$  la valeur de l'indice de rendement total des actions à l'instant  $t$ , le modèle de changement de régime peut être formulé ainsi :

$$\log(S_{t+1} / S_t) | \rho_t \sim N(\mu_{\rho_t}, \sigma_{\rho_t}^2) \quad \rho_t = 1,2$$

Avec  $\mu_{\rho_t}$  et  $\sigma_{\rho_t}^2$  correspondant au rendement moyen et à la volatilité des rendements des actions sous le régime  $\rho_t$ .

Par ailleurs, une matrice de transition  $P$  dénote les probabilités de passage entre les deux régimes :

$$p_{ij} = Pr[\rho_{t+1} = j / \rho_t = i] \quad i = 1,2, j = 1,2$$

Les rendements du monétaire sont supposés suivre chacun un modèle lognormal de Black et Scholes [1973] :

$$dM_t = \mu_M \times dt + \sigma_M \times dZ_M$$

Avec :

$M_t$  = Le taux de rendement du monétaire à l'instant  $t$ .

$\mu_M$  = Le rendement annuel moyen du monétaire.

$\sigma_M$  = La volatilité du rendement du monétaire.

$dZ_M$  = Un mouvement brownien corrélé avec les autres variables du modèle.

Concernant la corrélation entre les actifs, elle sera supposée être linéaire : les corrélations entre les différents variables peuvent être dans ce cas illustrées à travers la matrice ci-dessous (où  $\rho_{ij}$  est la corrélation entre l'actif de la ligne  $i$  et l'actif de la ligne  $j$  de la matrice) :

	$dz_t^{OBLIGATION}$	$dz_t^{ACTION}$	$dz_t^{MONETAIRE}$
$dz_t^{OBLIGATION}$	$dt$	$\rho_{12} dt$	$\rho_{13} dt$
$dz_t^{ACTION}$	$\rho_{12} dt$	$dt$	$\rho_{23} dt$
$dz_t^{MONETAIRE}$	$\rho_{13} dt$	$\rho_{23} dt$	$dt$

Tab. 1 : Illustration de la matrice de corrélation entre les différents actifs du portefeuille

Afin de simuler les browniens des modèles retenus (taux courts, taux longs, etc.) tout en prenant en compte une structure de corrélation prédéfinie, nous utilisons la décomposition de Choleski de leur matrice de variance covariance (cf. Campbell et al. [2001]).

La calibration de ces processus stochastiques ne constituant pas le cœur du problème, des méthodes classiques basées sur les données historiques ont été retenues pour l'estimation de leurs paramètres. Cependant, il paraît nécessaire de signaler que l'approche basée sur les données historiques possède ses propres limites en matière de projection sur le long terme soit à cause de la non disponibilité de la profondeur nécessaire de certaines variables ou à cause du fait que certaines de ces variables ne sont pas directement observables.

Après avoir décrit les différents modèles du GSE à construire, notamment ceux liés aux variables modélisées, nous présentons dans ce qui suit les deux structures schématiques de projection souvent rencontrées dans la littérature.

### **3.2 Structure schématique pour la génération de scénarios**

Le choix de la structure de projection, appelée aussi structure schématique de projection, pour chacune des variables du GSE peut être considéré comme une problématique à part (cf. Faleh et al. [2010]). Elle concerne la définition du schéma graphique de transition entre deux valeurs successives, observées à la date  $t$  et  $t + 1$ , de la même variable.

Ainsi à chaque variable du GSE peut correspondre une structure de projection particulière. Afin de simplifier l'analyse, on suppose dans la suite que la structure de projection choisie est la même pour toutes les variables. De même, on définit un nœud comme la réalisation possible de la variable modélisée à une date donnée. Une trajectoire correspond ainsi à l'ensemble des nœuds successifs qui forment un scénario futur possible d'évolution de la variable financière ou macro-économique.

On présente ici les caractéristiques des structures de projection les plus utilisées en pratique. En particulier, deux principales structures peuvent être avancées à ce stade : la structure de projection linéaire d'une part (cf. Ahlgrim [2005]) et la structure d'arborescence d'autre part (cf. Kouwenberg [2001]).

La différence principale entre ces deux structures de projection se situe au niveau de la nature de la dépendance entre les différentes trajectoires simulées. Alors que pour les structures de projection linéaire, une seule trajectoire est dérivée à partir de chaque nœud, les structures par arborescence supposent quant à elles que chaque nœud possède différents nœud-enfants et ainsi différentes trajectoires possibles sont déduites à partir de chaque nœud (cf. graph 1).

Par exemple, on se positionne dans le cas où la projection des rendements des actions se déroule sur deux périodes seulement et que pour les deux structures on obtient  $n_1$  nœuds (ou rendements) à la fin de la première période. Si on opte pour une structure linéaire de projection, on ne peut obtenir que  $n_1$  nœuds (ou rendements) à la fin de la deuxième période, chacun d'entre eux forme avec le nœud précédent une trajectoire distincte. Si par contre on opte pour une structure d'arbre, le nombre de scénarios à la fin de la deuxième période est  $m_1$ , avec  $m_1$  supérieur à  $n_1$  comme on projette différents rendements à partir de chacun des  $n_1$  nœuds simulés fin de la première période (cf. graph 1).

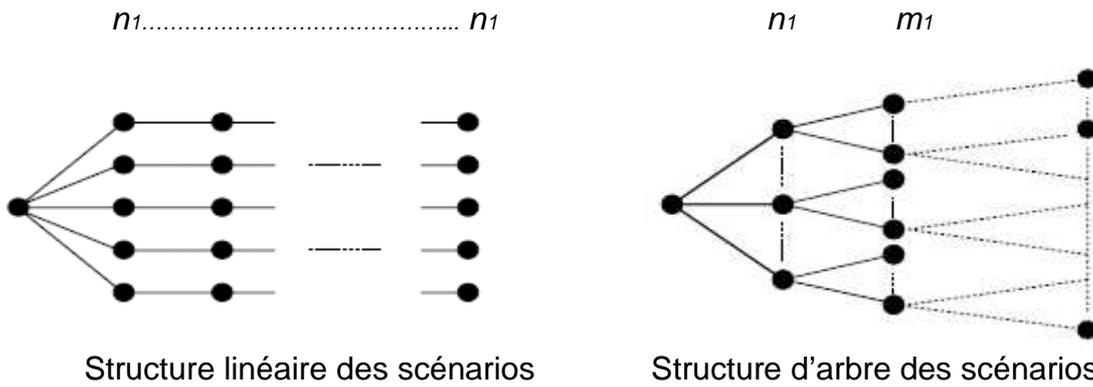


Fig. 1 : Présentation de deux structures schématiques de projection pour un GSE

La structure d'arbre des scénarios est la forme la plus récente et la plus complexe à utiliser. On focalisera notre intérêt dans la suite sur ce type de structure : il s'agit d'une structure plus adaptée que la structure linéaire pour l'application des techniques d'optimisation dynamique, en particulier dans le cas de la détermination de l'allocation stratégique d'actifs optimale (cf. Kouwenberg [2001]). En effet, chaque niveau dans l'arbre représente une date future (ou un moment de prise de décision) et les différents nœuds à chaque niveau représentent les réalisations possibles de la variable modélisée à cette date. Le graphique 2 représente un exemple plus détaillé de cette structure.

Comme il est montré dans ce graphique, le nombre des nœuds-enfants à chaque niveau n'est pas nécessairement égal à celui du niveau suivant. Par exemple, le nœud 0 dans le graphique a deux nœuds-enfants alors que les nœuds 1 et 2 ont trois nœuds-enfants. Deux niveaux de l'arbre peuvent ne pas présenter la même période de temps. Par exemple, dans le graphique ci-dessus, le niveau 0 peut représenter le début de l'année 0, le niveau 1 la fin de la deuxième année et le niveau 2 la fin de la dixième année. De même, dans certains arbres de scénarios complexes, tel que présenté ci-dessous, il pourrait avoir différents nombres de nœuds-enfants pour les nœuds d'un même niveau.

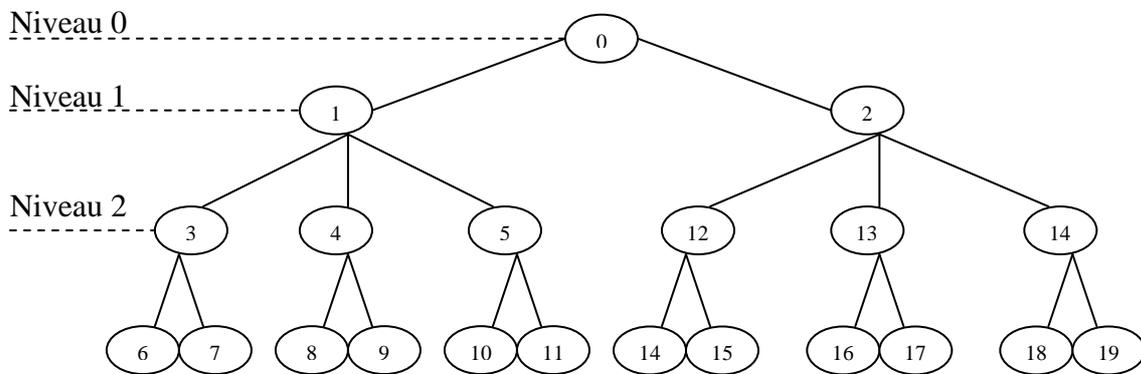


Fig. 2 : Exemple 1 de présentation de l'arbre des scénarios projetés

Un deuxième exemple de cette structure est présenté dans le graphique 3. Dans ce graphique, la structure de l'arbre comporte 64 scénarios. Nous retenons 8 réalisations possibles durant la première période. A partir de chacune de ces réalisations, nous déterminons 4 réalisations durant la deuxième période. Chacune d'entre elle est ainsi appelée « réalisation conditionnelle » car elle est fonction de la valeur dans le nœud antécédent. La troisième période est caractérisée par la génération de 2 réalisations à partir de celles obtenues à la fin de la deuxième période. Ceci donne un total de  $8 \times 4 \times 2 = 64$  scénarios (ou trajectoires).

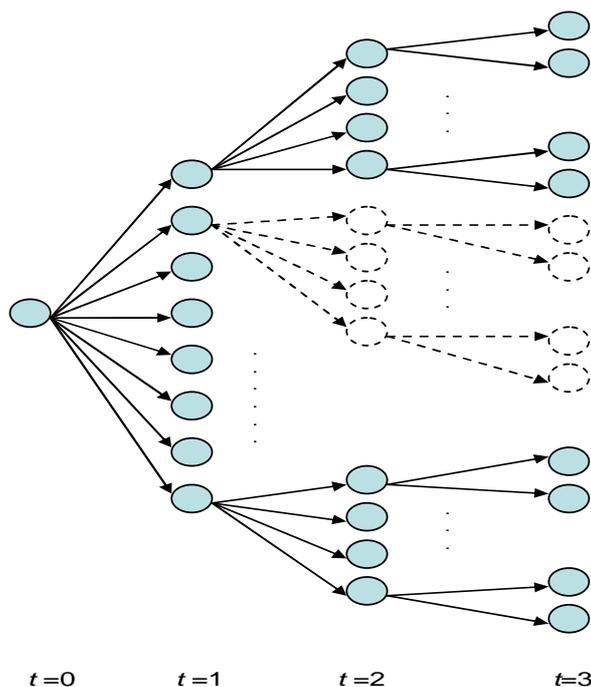


Fig. 3 : Exemple 2 de présentation de l'arbre des scénarios projetés

Les techniques de programmation stochastique s'appliquent en considérant les arbres de scénarios comme variable « donnée » (ou *input*). L'optimisation réalisée via ces techniques suppose donc comme données exogènes les valeurs de chacun des nœuds associés aux arbres. Pour cela, nous proposons dans ce qui suit une nouvelle méthodologie de génération des scénarios économiques tout en essayant de faire le lien entre structure linéaire et structure par arborescence.

### 3.3 Méthodologie retenue pour la génération des scénarios

La méthodologie présentée à ce niveau servira pour la génération des arbres de scénario<sup>6</sup> qui seront utilisés lors de l'application des techniques de la programmation stochastique (cf. section 5). Elle sera appelée méthodologie « des quantiles de référence ».

<sup>6</sup> un arbre pour chaque variable et/ou facteur modélisé.

Le principe de cette méthodologie repose sur deux éléments clés : le choix d'une variable, parmi celles modélisées, comme variable de référence (ex. les rendements des actions) et le passage de la structure linéaire de projection à une structure arborescente (pour chacune des variables modélisées) en se basant sur un certain nombre de quantiles de la variable de référence. La méthodologie « des quantiles de référence » passe par les étapes suivantes :

- Dans un premier temps, nous générons un nombre élevé de scénarios pour chacune des variables modélisées selon le principe de la structure linéaire et compte tenu de la période de projection (ex. 1000 trajectoires possibles sur les 20 prochaines années avec un pas annuel).
- ensuite, nous sélectionnons une classe d'actifs ou une variable donnée (ex. les rendements des actions) qui sera appelée « variable de référence ».
- puis, à chaque niveau de l'arbre (date  $t=1$  par exemple) associée à la variable de référence (rendement des actions), nous retiendrons un nombre prédéfini de quantiles « quantiles de référence » en fonction de la structure de l'arbre, en particulier en fonction du nombre des nœuds prévu à cette date (ex. les trois quantiles 99,5 %, 50 % et 0,5 % des rendements des actions à la date  $t=1$  si le nombre de nœud à cette date est prévu être égal à 3).

Par ailleurs, nous notons que si le nombre d'années considérées entre deux niveaux de l'arbre est supérieur à 1, le générateur de l'arbre déduit le rendement simulé sur la période considérée (ex. 5 ans) à partir du générateur linéaire mentionné ci-dessus selon la formule suivante :

$$R_{\text{arbre}} = \prod_{i=1}^H (1 + R_i)$$

où :

$H$  est la période considérée dans l'arbre (ex. 5 ans)

$R_{\text{arbre}}$  est le rendement sur la période  $H$

$R_i$  est le rendement annuel simulé dans la structure linéaire

- Les projections sous forme d'arbres des autres variables (en dehors de la variable de référence) sont ensuite déterminées : en chaque nœud de ces arbres, nous donnons à ces variables la valeur qui correspond à la variable de référence, sur la base des scénarios simulés en amont avec la structure linéaire de projection. Cette démarche a le mérite de conserver la structure de dépendance des scénarios générés. Nous obtenons ainsi, pour chacune des variables modélisées (les rendements des obligations, l'inflation, etc.) son propre arbre de scénarios.
- Les flux de passif de départ, dans le cas où ils sont exprimés en euros désinflatés, seront également inflatés, compte tenu de l'arbre obtenu pour l'inflation : ainsi ces flux inflatés seront également représentés sous forme d'arbre.

La question du lien entre le choix d'une part de  $n$  quantiles ( $q_i$ ) dans l'arbre des scénarios (ce qui revient au choix des niveaux de probabilité cumulée  $\alpha_i$  qui leur sont associés) et d'autre part le choix des poids ( $p_i$ ) correspondant dans l'arbre des scénarios se pose au niveau de l'étape 3 du schéma présenté ci-dessus. Le poids ( $p_i$ ) de chaque quantile reflète la probabilité de son observation par rapport à celles du reste des quantiles observés à la même date. Nous nous référons au principe d'intégrale de Riemann afin de pouvoir mettre en évidence ce lien.

Considérons le cas d'une variable aléatoire  $X$  avec une fonction de répartition  $F$ . Nous supposons aussi que la fonction inverse  $F^{-1}$  existe et est continue. L'objectif est de construire la variable discrète  $\hat{X}_n$  à travers le choix de  $n$  quantiles ( $q_1, q_2, \dots, q_n$ ) tel que  $q_i = F^{-1}(\alpha_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $\alpha_i$  représentant le niveau de probabilité cumulée associé au quantile  $q_i$ . Cette variable  $\hat{X}_n$  doit également refléter la distribution initiale de  $X$  dans le sens qu'au moins les espérances des deux variables doivent converger :  $E(\hat{X}_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} E(X)$ .

Il s'agit d'une hypothèse simpliste de correspondance entre les deux distributions (celle de  $X$  et celle de  $\hat{X}_n$ ) mais qui permet à ce niveau de formuler une première étude sur le lien entre d'une part le poids  $p_i$ , associé à chaque quantile, et d'autre part le niveau de probabilité  $\alpha_i$ . Nous cherchons donc les quantiles ( $q_i$ ) et les poids ( $p_i$ ) associés à ces quantiles de sorte que la somme pondérée des  $n$  quantiles convergent vers  $E(X)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Pour cela, nous supposons que  $U$  représente la loi uniforme sur l'intervalle  $[0,1]$ , nous pouvons écrire donc :  $E(X) = \int_0^1 F^{-1}(u) du$ . D'un autre côté, l'espérance de la variable  $\hat{X}_n$  se présente comme :  $E(\hat{X}_n) = \sum_{i=1}^n p_i q_i = \sum_{i=1}^n p_i F^{-1}(\alpha_i)$ . Le calcul de cette dernière revient donc à un calcul de l'intégrale de Riemann pour la fonction  $F^{-1}$ . Autrement dit, la valeur de  $E(\hat{X}_n)$  peut être obtenue à travers la somme des rectangles de base égale à la longueur du segment dont le milieu est  $\alpha_i$  (segment que nous pouvons appelé  $I_i$ ) et de hauteur  $F^{-1}(\alpha_i)$ . Le graphique 4 illustre cette approche. Le poids  $p_i$  peut être estimé à travers la longueur de la base du rectangle contenant  $\alpha_i$  (ou la longueur de  $I_i$ ).

Dans un premier temps, nous pouvons remarquer à travers le graphique 4 que  $p_i$  est fonction de la position et donc du niveau des  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Ainsi, le fait de supposer un  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) régulier, c'est à dire avec une distance identique entre les différentes valeurs de  $\alpha_i$ , permet d'obtenir *in fine* un poids  $p_i = 1/n$  (cf. graphique 5). En conséquence, avec une valeur élevée de  $n$ , l'hypothèse de régularité de  $\alpha_i$  garantit la convergence des deux espérances :

$E(\hat{X}_n) = \sum_{i=1}^n p_i q_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} q_i \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} E(X)$ . Le choix de  $n$  valeurs de  $\alpha_i$  équidistants nous

autorise à estimer l'espérance par une somme pondérée où chaque  $p_i$  est égale à  $1/n$ . Autrement dit, pour une date donnée, si nous optons pour des quantiles équidistants, le choix de poids identiques pour chaque quantile permet de refléter la distribution initiale de  $X$ .

Considérons maintenant le cas de plusieurs variables que l'on veut représenter sous forme d'arbre de scénarios tout en conservant les liens entre elles : retenons en particulier l'exemple de trois variables  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  avec  $X$  comme variable de référence. L'objectif est de déterminer le triplet d'observations  $(x_i, y_i, z_i)$  à un instant donné et à un nœud précis de l'arbre des scénarios à partir des projections effectuées selon la structure linéaire. Une approche possible serait de commencer par la discrétisation de la variable de référence  $X$  comme indiqué ci-dessus pour ensuite retenir les observations simultanément simulées de  $Y$  et  $Z$  (sur la base d'un modèle de corrélation prédéfini dans la structure linéaire de projection). Cela se rapproche du schéma décrit dans la méthodologie des quantiles de référence : après avoir déterminé le rang de  $x_i$  (ex. 50<sup>ème</sup> simulation dans la structure linéaire), nous retenons les valeurs de  $y_i$  et de  $z_i$  correspondant à la même simulation  $i$ .

Outre la prise en compte de la structure de dépendance entre les variables, la méthodologie « des quantiles de référence » permet de lier les atouts d'une structure linéaire de projection à ceux de l'utilisation d'une structure arborescente. La méthodologie proposée réduit également la dimension du problème initial : le nombre de scénarios dans l'arbre obtenu avec cette méthodologie peut être beaucoup moins élevé que celui dans le cas de la structure linéaire (situé, souvent, au-delà de 1 000 scénarios pour avoir une bonne estimation de la distribution des variables considérées, cf. Faleh et al. [2010]).

Une autre alternative est également envisageable : il s'agit de raisonner en termes d'espérance d'un intervalle  $J_i$  des points limités par deux quantiles successifs (cf. graphique 4) au lieu de raisonner en termes de quantiles. Dans ce cadre, nous aurons :

$$\begin{aligned} \hat{Y}_n &= \hat{Y}(\alpha_n) = E[Y / X \in J_n] & (i = 1, \dots, n) \\ \hat{Z}_n &= \hat{Z}(\alpha_n) = E[Z / X \in J_n] & (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

Cela permet d'avoir *in fine* une estimation, basée sur d'avantages d'observations, du quantile représentant la distribution initiale.

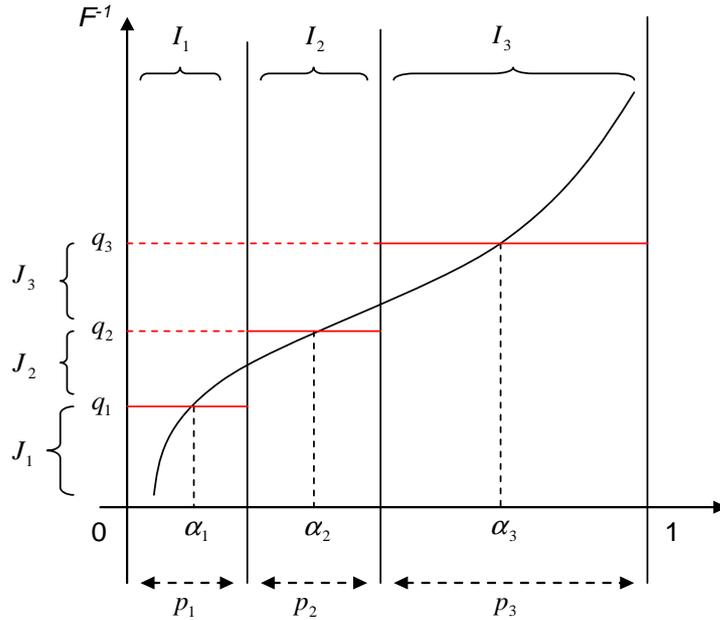


Fig.4 : Illustration du lien entre le niveau de probabilité cumulée  $\alpha_i$  d'un quantile  $q_i$  et le poids associé à ce dernier dans l'arbre des scénarios (cas où  $n=3$ )

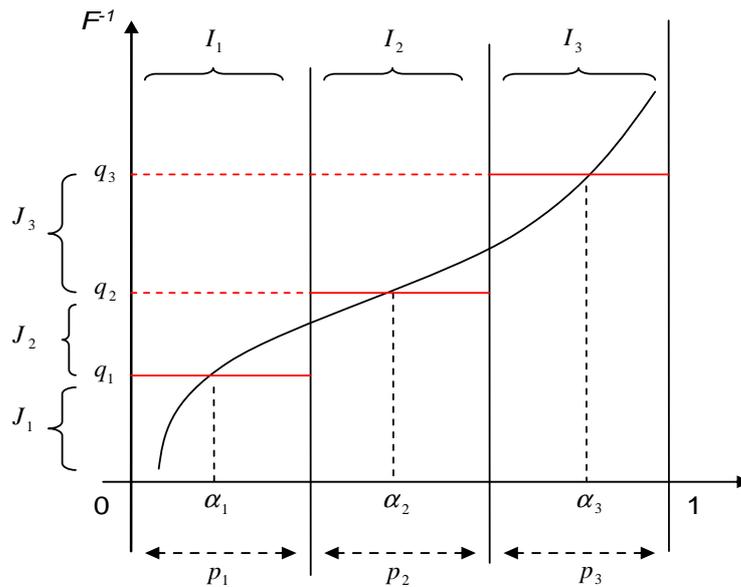


Fig.5 : Illustration du lien entre le niveau de probabilité cumulée  $\alpha_i$  d'un quantile  $q_i$  et le poids associé à ce dernier dans l'arbre des scénarios (cas où  $n=3$  et  $\alpha_i$  est régulier) :  $p_1 = p_2 = p_3$

Les éléments développés ci-dessus s'insèrent dans le cadre de la recherche d'une vision à la fois simplifiée, réelle et dynamique des stratégies possibles pour l'allocation stratégique d'actifs, en présence de contraintes d'ALM. De même, cette méthodologie tient compte des hypothèses de distribution des différentes variables projetées : elle garde la structure de risque initiale en retenant les quantiles « approximatifs » de cette distribution. Il s'agit d'une stratégie à la fois facile à expliquer et cohérente. Sa mise en œuvre n'est pas compliquée et elle peut être facilement adoptée par les praticiens.

## 4. Le modèle d'optimisation

Il s'agit ici de proposer notre conception pour l'adaptation des techniques de programmation stochastique, en particulière celles avec recours, dans un contexte d'allocation stratégique d'actifs et d'ALM d'un régime de retraite partiellement provisionné. La programmation stochastique est caractérisée par l'utilisation d'une fonction objectif qui devra être optimisée et d'un ensemble de contraintes exprimées sous forme d'équations linéaires ou non linéaires et qui doivent être respectées.

La fonction objectif est introduite afin qu'elle illustre la fonction d'utilité du décideur. La satisfaction des contraintes pourrait être obtenue par une multitude de solutions. La PS cherche à déterminer la meilleure solution parmi celles qui satisfont les contraintes. C'est le cas d'une analyse type ALM où la satisfaction de l'adossement des flux de passifs par les flux d'actifs peut être faite avec différentes allocations de portefeuille. La formulation de ce problème à travers la PS, permet d'aboutir aux décisions d'allocations d'actifs optimales dans le cadre de l'ALM.

C'est le cas par exemple de la programmation stochastique avec recours qui est la technique la plus utilisée en pratique parmi les autres techniques de PS (cf. Zenios [2007]). Rappelons que le principe de la programmation stochastique avec recours dans le cas d'une seule période passe par deux étapes. Dans la première étape, qui correspond au début de la période, il y aura une prise de décision sur un élément incertain. Dans la deuxième étape, qui correspond à la fin de la période, et après la réalisation de la variable aléatoire, des décisions supplémentaires peuvent être prises afin d'éviter que les contraintes soient non respectées.

En se basant sur ce principe, nous pouvons considérer l'action de recours dans un modèle d'ALM d'un régime de retraite provisionné comme la possibilité de liquider une partie du portefeuille de marché. L'action de recours tiendra compte bien entendu de la réalisation de l'évènement aléatoire qui affectera, dans le contexte d'ALM, aussi bien l'actif que le passif du régime (ex. performance des actions côté actif et inflation des salaires côté passif). La décision de début de période concerne dans notre cas la répartition des poids des différents actifs du portefeuille de marché. Elle va être ajustée à la fin de la même période en fonction des réalisations de l'évènement aléatoire considéré (ex. performance observée des actions et inflation constatée des salaires sur la première année).

Pour le modèle d'optimisation, nous présentons dans un premier temps un cadre général et typique du problème d'optimisation que différents types de régimes de retraite peuvent rencontrer, notamment ceux partiellement provisionnés. Ce modèle sera par la suite simplifié au niveau de l'implémentation. Le but est ici de proposer une approche générale permettant la mise en place d'un modèle d'ALM dynamique basé sur la programmation stochastique multi-périodiques.

A ce titre, nous considérons le cas d'un fonds de retraite qui possède à la date initiale  $t_0$  une réserve  $W_0$  et qui devra faire face à une série de flux  $F_t$  ( $t=1, \dots, T$ ) sur les  $T$  prochaines années.  $F_t$  est positive dans le cas où les cotisations sont supérieures aux prestations et elle est négative dans le cas contraire. Nous

supposerons que le dernier flux  $F_T$  est négatif et qu'il représente l'engagement final du fonds vis-à-vis de ses adhérents.

Nous nous intéressons à la stratégie d'investissement qui permet de parvenir au moins à payer ces différents flux, en particulier le dernier  $F_T$  (ou  $L$ ). Cela est souvent le cas d'un régime de retraite partiellement provisionné et où cette contrainte de paiement peut, par exemple, être imposée par le cadre réglementaire en place. L'idéal serait, bien sûr, d'avoir un montant de réserve finale supérieur à  $F_T$ . Ceci étant dit, la prise en compte de l'aversion au risque est elle aussi nécessaire puisque nous pouvons se retrouver avec une réserve finale  $W_T$  inférieure à  $F_T$ .

La fonction objectif retenue, à titre illustratif, se base sur le principe suivant : le fonds de retraite attribue un malus  $q$  pour chaque unité de déficit (écart négatif entre le montant de la réserve finale  $W_T^s$  et l'engagement final  $F_T^s$  pour le scénario  $s$ ) et un bonus  $r$  pour chaque unité de surplus. Pour un scénario  $s$  avec un écart positif entre  $W_T^s$  et  $F_T^s$ , l'utilité totale du fonds de retraite sera augmentée de  $r.(W_T^s - F_T^s).p^s$  (avec  $p^s$  la probabilité associée au scénario  $s$ ). Pour un scénario  $s$  avec un écart négatif entre  $W_T^s$  et  $F_T^s$ , l'utilité totale du fonds de retraite sera diminuée de  $q.(W_T^s - F_T^s).p^s$ . L'utilité totale du fonds sera supposée être égale à la somme de ces quantités calculées pour tous les scénarios projetés.

Côté contraintes, différents aspects peuvent être considérés. La contrainte principale sera appelée la contrainte de probabilité de ruine : il s'agit d'assurer que la stratégie optimale d'allocation d'actifs permet d'avoir un  $W_T^s$  supérieur à  $F_T^s$  dans  $(1 - p_{crit})$  fois du nombre total de scénarios. Plusieurs autres contraintes peuvent être considérées (cf. formulation ci-après).

Dans ce qui suit, nous présentons les notations relatives à l'ensemble des paramètres et variables considérées :

#### Paramètres Déterministes :

$h_j^0$  : Montant initial investi dans l'actif  $j$

$W_0$  : Réserve initiale totale

$c_j^p$  : Coût de transaction pour l'achat de l'actif  $j$

$c_j^s$  : Coût de transaction pour la vente de l'actif  $j$

$l_j$  : Poids inférieur du montant investi dans l'actif  $j$  (exprimée en pourcentage de la réserve totale).

$u_j$  : Poids supérieur du montant investi dans l'actif  $j$  (exprimée en pourcentage de la réserve totale).

$b_j^p$  : Poids maximal du montant d'achat périodique de l'actif  $j$  (exprimée en pourcentage de la réserve totale).

$b_j^s$  : Poids maximal du montant de vente périodique de l'actif  $j$  (exprimée en pourcentage de la réserve totale).

$\tau_t$  : Durée de la période  $[t-1, t]$  en nombre d'années  
 $card(S)$ : Nombre total de scénarios (nombre de branches à la date finale  $T$ )  
 $p^s$  : Égale à  $1/card(S)$  (hypothèse approximative de la probabilité de chaque scénario)  
 $q$  : Bonus de chaque unité de surplus (rémunération)  
 $r$  : Malus de chaque unité de déficit (pénalité)

Paramètres Stochastiques :

$R_{t,j}$  : Rendement de l'actif  $j$  sur la période  $[t-1, t]$ ,  
 $F_t$  : Flux de trésorerie de la période  $[t-1, t]$   
 $L_s$  : Engagement final cible (à la date  $T$ ) dans le cas du scénario  $s$

Variables de décision :

$h_{t,j}$  : Montant investi dans l'actif  $j$  entre la date  $t$  et  $t+1$   
 $p_{t,j}$  : Montant d'achat de l'actif  $j$  à la date  $t$   
 $s_{t,j}$  : Montant de vente de l'actif  $j$  à la date  $t$   
 $W_t$  : Réserve totale à la date  $t$   
 $w_+^s$  : Surplus (écart positif entre la réserve finale et l'engagement final  $L_s$  pour le scénario  $s$ )  
 $w_-^s$  : Déficit (écart négatif entre la réserve finale et l'engagement final  $L_s$  pour le scénario  $s$ )  
 $card(W_-)$  : Nombre total des scénarios où l'écart entre la réserve finale et l'engagement final est négatif (nombre de scénario où  $w_-^s > 0$ )  
 $p_{crit}$  : Probabilité maximale acceptée d'avoir des scénarios où la réserve finale est inférieure à l'engagement final ( $w_-^s > 0$ ). Autrement dit, le rapport  $card(W_-)/card(S)$  doit être inférieur à  $p_{crit}$ .

En se référant aux différentes notations ci-dessus, nous proposons de formuler le modèle général pour l'optimisation de l'allocation stratégique d'actifs d'un régime de retraite, partiellement provisionné, comme suit :

**Objectif :**

$$\text{Maximiser } \sum_{s \in S} p^s (q w_+^s - r w_-^s)$$

**Contraintes :**

- Contraintes budgétaire : le montant investi à chaque instant  $t$  dans l'actif  $j$  doit être égal au montant investi dans le même actif à  $t-1$  et capitalisé entre ces deux dates augmenté (diminué) du montant des achats (ventes) dudit actif effectués à la date  $t$ .

$$\sum_{j \in J} h_{0,j} = W_0$$

$$h_{0,j} = h_j^0 + p_{0,j} - s_{0,j}$$

$$h_{t,j} = R_{t,j} h_{t-1,j} + p_{t,j} - s_{t,j}$$

- **Contraintes de rebalancement :** les flux encaissés à la date  $t$  en provenance de la vente de l'actif  $j$  ou d'un solde technique positif (cotisations > prestations) constituent l'unique source de financement pour l'achat dudit actif à la même date  $t$  (y compris les différents frais de transaction).

$$\sum_{j \in J} (1 + c_j^p) p_{0,j} = \sum_{j \in J} (1 - c_j^s) s_{0,j}$$

$$\sum_{j \in J} (1 + c_j^p) p_{t,j} = \sum_{j \in J} (1 - c_j^s) s_{t,j} + F_t$$

- **Contraintes de portefeuille :** le montant investi dans l'actif  $j$  est borné à chaque instant  $t$  entre deux montants proportionnels à la valeur de la réserve observée à la même date.

$$l_j W_t \leq h_{t,j} \leq u_j W_t \quad (\text{Avec : } \sum_j h_{t,j} = W_t)$$

- **Contraintes de transaction :** les montants des achats et des ventes de l'actif  $j$  sont plafonnés à chaque instant  $t$  en fonction de la valeur de la réserve observée à la même date.

$$p_{t,j} \leq \tau_t b_j^p W_t$$

$$s_{t,j} \leq \tau_t b_j^s W_t$$

- **Contraintes d'équilibre final**

$$W_T^s = \sum_{j \in J} R_{T,j} h_{T-1,j} = L_s + w_+^s - w_-^s$$

- **Contraintes de probabilité de ruine :** d'assurer que la stratégie optimale d'allocation d'actifs permet d'avoir un  $W_T^s$  supérieur à  $F_T^s$  dans  $(1 - p_{crt})$  fois du nombre total de scénarios :

$$\text{card}(W_-) / \text{card}(S) \leq p_{crt}$$

$$\forall t = 1, \dots, T-1, j \in J$$

Concernant les modèles d'allocation d'actifs, notre étude est axée sur la comparaison des modèles disponibles selon les hypothèses sous-jacentes de « rebalancement » des portefeuilles : nous faisons la distinction entre une gestion statique (pour laquelle les poids reviennent périodiquement à ceux de l'allocation stratégique de long-terme - cas par exemple des modèles à poids constants *Fixed-Mix*) et une gestion dynamique, pour laquelle les poids peuvent s'écarter

définitivement de l'allocation stratégique initiale selon des règles de gestion prédéfinies.

Concernant la stratégie *Fixed-Mix*, il pourrait être considéré qu'à chaque fin de période de simulation on recompose le fonds de façon à respecter les proportions initiales proposées dans l'allocation stratégique optimale. Autrement, il s'agit d'une stratégie d'investissement dont le principe consiste dans un rebalancement périodique des poids vers des niveaux cibles, correspondants à ceux de l'allocation stratégique optimale.

## 5. Application numérique

Tout au long de l'application numérique développée ci-après, nous comparons des résultats relatifs aux deux stratégies d'allocation d'actifs : celle basée sur la stratégie *Fixed-Mix* et celle basée sur les techniques de programmation stochastique. Cette dernière tient compte de la méthodologie des quantiles de référence développée dans la section 3. Nous testons également la sensibilité de cette nouvelle approche d'ALM par rapport au changement de certains de ses paramètres, toutes choses étant égales par ailleurs.

### 5.1 Implémentation

Pour le modèle d'optimisation, objet de l'implémentation, certains paramètres seront considérés comme nuls afin de simplifier la mise en place, en particulier les paramètres relatifs aux contraintes de transaction, de rebalancement et de portefeuille. Autrement dit, nous supposons l'absence de frais de transaction, des contraintes de rebalancement et de portefeuille (définies dans la section précédente).

Concernant la mise en place de la méthodologie des « quantiles de référence », nous avons supposé que le nombre minimum de quantiles par niveau (ou date) sera de deux : 97,5 % et 2,5 %. L'ensemble des quantiles supplémentaires sera choisi de façon à ce que les distances, en termes de niveaux de probabilité cumulée, entre les différents quantiles successifs soient les mêmes. Autrement dit, si  $n_q=5$  désigne le nombre de quantiles (y compris celui du 97,5 % et celui du 2,5 %) alors cette distance est égale à :

$$\frac{97,5 - 2,5}{n_q - 1} = \frac{97,5 - 2,5}{5 - 1} = 23,75$$

ce qui revient à considérer successivement les quantiles avec les niveaux de confiance suivants : 2,5 %, 26,25 % (= 2,5 % + 23,75 %), 50 % (= 26,25 % + 23,75 %), 73,75 % (= 50 % + 23,75 %), 97,5 %.

Nous considérons aussi qu'à chaque date, les différents quantiles de l'arbre auront la même probabilité d'occurrence et ainsi un identique  $p^s$  pour tous les scénarios :  $p^s = 1 / \text{card}(S)$ . Cela garantit la convergence vers la distribution réelle de la variable modélisée du moment où les niveaux de probabilité cumulée des quantiles sont équidistants (comme montré dans la sous-section précédente).

La génération des différents arbres sera effectuée via le logiciel MATLAB et compte tenu d'un même GSE à structure linéaire identique, en termes de modèles et de

paramètres, à celui retenu dans la section 3. L'horizon des projections (et donc des différents flux de passif) est de 20 ans.

Dans notre application, les flux de paiement net seront des données exogènes (illustratives) et supposés être projetés sur une période de 20 ans (par exemple entre le 01/01/2011 et le 31/12/2030). Ces flux seront exprimés en termes réels, c'est-à-dire sans tenir compte de l'inflation des prix à la consommation hors tabac sur la période de projection. Le graphique ci-dessous représente la série des flux de passif considérée :

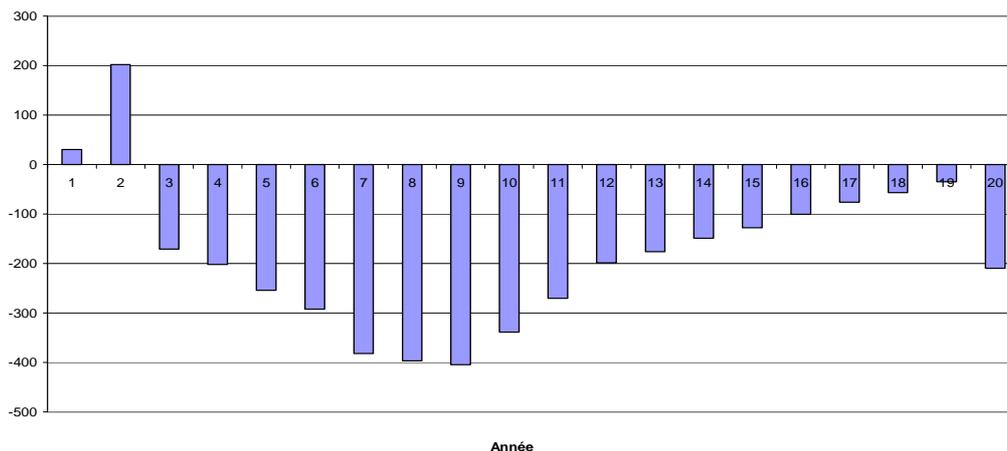


Fig. 6 : Flux de passif (déinflatés) sur 20 ans

Parmi les *inputs* supplémentaires de MATLAB nous supposons les paramètres standards suivants :

Structure des nœuds de l'arbre	[1 5 4 4]
Structure des périodes de l'arbre	{1 4 15}
$\rho_{ctrl}$	20 %
$q$	2
$r$	1
$W_0$	10 000
Variable de référence	Rdt des actions

Tab.2 : Paramètres standards dans le modèle d'optimisation stochastique multi-périodique

Nous rappelons que la structure des nœuds de l'arbre correspond au vecteur du nombre de nœuds-enfants à chacune des quatre niveaux considérés dans l'exemple ( $[n_{t_0} n_{t_1} n_{t_2} n_{t_3}]$ ). La structure des périodes de l'arbre correspond au vecteur des horizons de projection supposés entre deux niveaux ( $\{H_1 H_2 H_3\}$ ).

L'implémentation du modèle d'optimisation stochastique multi-périodique est quant à elle effectuée via le langage de modélisation AMPL (cf. Fourer et al. [2002]). Ce dernier est adapté pour le type de problématique basé sur la programmation stochastique avec recours : après lui avoir précisé les différents paramètres (les

paramètres déterministes, les paramètres stochastiques, les variables de décisions, l'arbre des scénarios, etc.), l'optimisation est effectuée avec un solveur généralement dédié à la PS avec recours (cf. Hilli et al. [2007]).

Parallèlement, le problème d'optimisation sera mis en place dans le cadre de la stratégie *Fixed-Mix* en gardant le même GSE et les mêmes paramètres que ceux utilisés pour la stratégie avec programmation stochastique (cf. graphique 7). Le même flux de passif sera également considéré dans les deux stratégies. Le nombre de scénarios projetés dans le cas de la stratégie *Fixed-Mix* est 1000 scénarios.

La résolution du problème de détermination de l'allocation stratégique d'actifs pour le régime de retraite étudié dans un cadre de stratégie *Fixed-Mix* passe en pratique par trois principales étapes. Après avoir déterminé l'ensemble des allocations d'actifs possibles (allocations à tester), la première étape consiste à générer des trajectoires pour chaque classe d'actifs (actions, obligations, immobilier, etc.). La deuxième étape consiste à projeter chaque allocation possible en fonction de la règle de gestion du dispositif. La troisième étape vise à déterminer la valeur de la fonction objectif pour chacune de ces allocations. Seront susceptibles d'être retenues alors celles qui maximisent la fonction objectif et respectent les contraintes définies ci-dessus.

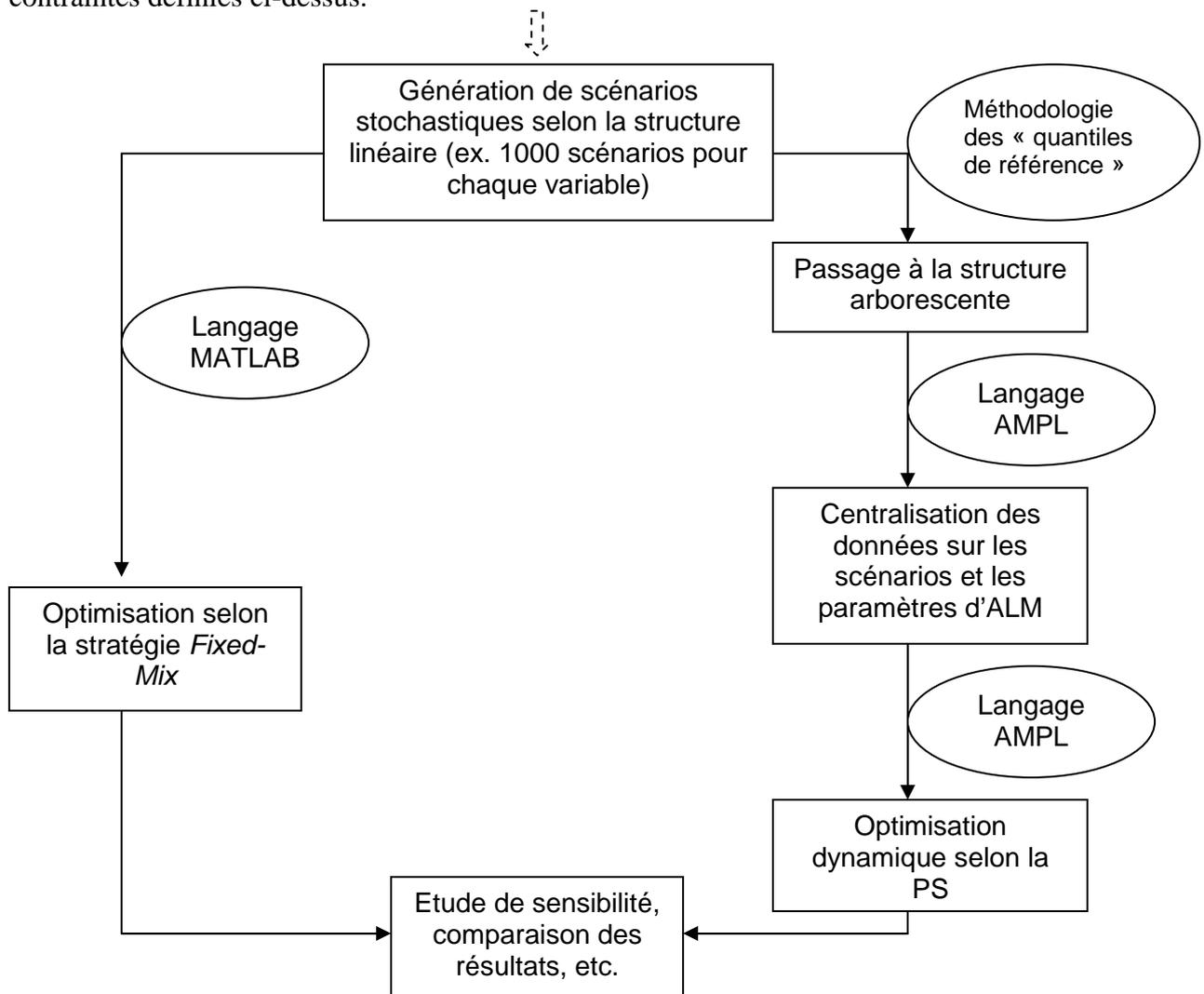


Fig. 7 : Logigramme des traitements effectués dans le cadre de l'étude du modèle d'ALM développé

Le graphique 7 synthétise la démarche générale adoptée lors de l'application numérique. Dans ce graphique, le cercle représente la méthodologie ou le logiciel utilisé. Le rectangle représente, quant à lui, une étape dans l'étude du modèle d'ALM développé.

## 5.2 Discussion des résultats

Nous étudierons ici l'effet du changement des « quantiles de référence » sur l'allocation finale, toutes choses étant égales par ailleurs. De même, la structure des nœuds de cet arbre sera considérée variable : différents tests seront effectués pour mettre en évidence l'impact du changement de cette structure sur les résultats finaux de l'allocation. Un test supplémentaire par rapport au nombre d'années entre deux niveaux de l'arbre est mis en évidence : il s'agit du test de changement de la structure des périodes de l'arbre, toutes choses étant égales par ailleurs.

Le tableau de la structure des nœuds de l'arbre (cf. tableau 3) indique les poids optimaux du portefeuille au niveau  $t = 0$  pour différentes structures de nœuds possibles ([1 5 3 3], [1 7 3 3], [1 9 3 3], [1 3 4 4], [1 4 4 4] et [1 5 4 4]<sup>7</sup>), toutes choses étant égales par ailleurs.

Il s'agit de l'allocation initiale recommandée, début 2010, pour chacune de ces structures. Il est supposé que les poids vont être ajustés aux différents niveaux ultérieurs de l'arbre compte tenu des évolutions possibles des variables modélisées. Cela donne lieu en fait non pas à une unique allocation stratégique vers laquelle nous convergions de façon périodique et systématique via un processus de rebalancement (cas de la stratégie *Fixed-Mix*) mais plutôt à un « chemin » optimal d'allocations avec comme point de départ les allocations du tableau 2. Un exemple du « chemin » optimal d'allocations obtenu sur toute la période de projection (tout au long de l'arbre) est donné dans les graphiques 8 et 9 respectivement pour les deux structures [1 5 3 3] et [1 5 4 4].

Le tableau 3 présente également la valeur de la fonction objectif et la probabilité de ruine estimées pour chacune de ces solutions. Quant à la « réserve initiale minimale », elle correspond à  $W_0$  minimale à partir de laquelle il est possible d'avoir au moins un « chemin » d'allocation résolvant le problème d'optimisation. Nous notons que plus la réserve initiale est élevée, plus la probabilité de ne pas couvrir l'engagement final cible  $L_s$  est faible et implicitement l'effet de la pénalité devient négligeable. Le même tableau présente les valeurs de ces différents indicateurs obtenus dans le cas de la stratégie *Fixed-mix*. Il est intéressant d'étudier la convergence entre les deux stratégies lorsque nous augmentons sensiblement le nombre de scénarios mis en jeu dans l'arbre.

Nous constatons que, même si l'allocation initiale recommandée est la même pour les différentes structures (à savoir 100 % actions), les valeurs estimées de la fonction objectif et de la probabilité de ruine diffèrent nettement selon la structure des

---

<sup>7</sup> Rappel : Nous adoptons la convention d'écriture suivante : [1 5 3 3] signifie par exemple que le nœud parent initial a 5 nœuds enfants, lesquels ont chacun 3 nœuds enfants, puis chacun d'entre eux encore 3 nœuds enfants.

nœuds, en particulier pour le cas des structures qui supposent principalement un découpage en trois quantiles (à savoir [1 5 3 3], [1 7 3 3], [1 9 3 3]) ainsi que pour celles basées essentiellement sur une projection en quatre quantiles (à savoir [1 3 4 4], [1 4 4 4], [1 5 4 4]). Le premier groupe permet d'avoir des valeurs de la fonction objectif relativement plus élevées avec des niveaux de probabilité de ruine également plus élevés. Autrement dit, pour pouvoir obtenir un meilleur rendement l'investisseur doit aussi assumer plus de risque : nous retrouvons ainsi le cadre de la théorie d'efficience de Markowitz [1952].

Incidemment, nous remarquons que l'effet de la structure des nœuds sur la valeur du couple d'indicateurs (objectif / probabilité de ruine) est très significatif, voire même plus important que l'effet du nombre de scénarios ou du nombre total de nœuds dans l'arbre. En fait, l'augmentation du nombre de scénarios (en passant par exemple de 45 scénarios avec la structure [1 5 3 3] à 80 scénarios avec la structure [1 5 4 4]) ne donne pas forcément lieu à une convergence de la valeur de la fonction objectif vers celle de la stratégie *Fixed-Mix* (31 817 euros), mais au contraire nous constatons la baisse de la valeur de la fonction objectif passant de 28 327 à 24 103, le tout accompagné d'un profil de risque de moins au moins élevé (en particulier, le passage de la structure [1 7 3 3] à la structure [1 5 4 4] induit la baisse du niveau de risque de 19 % à 11 %).

Par ailleurs, plus le nombre de scénarios augmente dans l'arbre, plus le besoin initial en réserve diminue et converge vers celui exprimé dans le modèle *Fixed-Mix*. Par exemple, dans le cas de la structure [1 5 3 3], qui correspond au nombre de scénarios le moins élevé, l'exigence en capital initial est également la plus élevée (8 000). A l'inverse, la structure [1 5 4 4] qui comporte pratiquement le plus grand nombre de scénarios possède, quant à elle, la valeur de la réserve initiale minimale la plus faible. On le voit, le rôle du nombre de scénarios intervient plus au niveau de la réserve initiale minimale exigée qu'au niveau de la convergence vers la solution optimale absolue.

	Structure des nœuds de l'arbre						Fixed Mix
	[1 5 3 3]	[1 7 3 3]	[1 9 3 3]	[1 3 4 4]	[1 4 4 4]	[1 5 4 4]	
Monétaire	0%	0	0%	0%	0%	0%	0%
Obligation	0%	0	0%	0%	0%	0%	0%
Action	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Fonction objectif	28 327	27 953	28 173	24 093	23 283	24 103	31 817
Probabilité de ruine	13,30%	19,00%	18,50%	12,50%	11,00%	11,25%	13,70%
Réserve initiale minimale	8000	8000	6000	6000	4000	4000	4000
Nombre de scénarios	45	63	81	49	64	80	1000
Nombre total de nœuds	65	91	117	63	84	105	-

Tab. 3 : Allocations optimales et leurs caractéristiques en fonction des structures de l'arbre retenues et des stratégies retenues (avec la structure des périodes {1 4 15} et les actions comme variable de référence)

Le tableau 4, relatif à la structure des périodes de l'arbre, montre que les résultats obtenus via la programmation stochastique sont très sensibles au choix de la structure retenue pour les durées des périodes (ou précisément les sous-périodes sur la durée totale de 20 ans), cela en supposant un même flux de passif de départ. Plus précisément, nous procédons en agrégeant sur 20 ans un même flux de passif

via différentes structures de période, à savoir les suivantes : {1 4 15}, {1 1 18}, {1 9 10}, {6 7 7}, {10 9 1}, {15 4 1} et {18 1 1}<sup>8</sup>.

Nous constatons à ce niveau que les valeurs pour la fonction objectif et pour la probabilité de ruine diffèrent sensiblement selon que l'agrégation est essentiellement effectuée sur les 15 dernières années (par exemple {1 4 15} et {1 1 18}) ou sur les 15 premières années (par exemple {15 4 1} et {18 1 1}). L'exposition au risque action peut également fluctuer de 0 % à 100 % sur l'allocation initiale recommandée. Bien entendu, l'ampleur et le sens de cet impact sur les différents indicateurs (valeur de la fonction objectif, poids optimaux, etc.) ne peut pas être généralisé puisque cela dépend de la série de flux de passif considérée. La réserve initiale minimale nécessaire pour avoir une solution au problème reste, quant à elle, quasi constante, quelle que soit la structure des périodes retenue.

Le tableau 5 étudie la sensibilité de l'allocation optimale par rapport au choix effectué pour la variable de référence (ex. rendement des actions) dans le cadre de la méthodologie proposée (méthodologie « des quantiles de référence »), toutes choses étant égales par ailleurs. L'effet de ce choix sur les valeurs de la fonction objectif, la probabilité de ruine ainsi que la réserve initiale minimale est étudié.

Nous notons que le changement de la variable de référence a un effet moindre sur l'allocation optimale initiale à  $t_0$  que le changement de la structure des périodes de l'arbre (cf. tableau 4). De même, nous remarquons une baisse significative de la valeur de la fonction objectif, accompagnée par une aversion au risque plus importante lorsque l'on passe des actions comme variable de référence au monétaire : la valeur de la fonction objectif pour la solution optimale passe ainsi de 24 103 dans le cas des actions à 16 587 dans le cas du monétaire tandis que la probabilité de ruine estimée passe respectivement de 11 % à 0 %, indiquant un degré élevé de prudence dans le chemin d'allocations recommandé dans le cas du monétaire.

Cela montre l'importance significative du choix de la variable de référence à ce niveau. La réserve initiale minimale nécessaire pour avoir une solution au problème reste, quant à elle, quasi constante quel que soit le quantile de référence retenu.

	Structure des périodes de l'arbre						
	{1 4 15}	{1 1 18}	{1 9 10}	{6 7 7}	{10 9 1}	{15 4 1}	{18 1 1}
Monétaire	0%	0%	83,50%	0,00%	86%	0	0%
Obligation	0%	0%	0%	6,50%	14%	17,5%	15%
Action	100%	100%	16,50%	93,50%	0%	82,50%	85%
Fonction objectif	24 103	24 646	23 459	24 035	18 004	24 476	23 436
Probabilité de ruine	11,25%	15,00%	17,50%	12,50%	5,00%	5,00%	11,00%
Réserve initiale minimale	4000	4000	4000	4000	4000	3000	4000

Tab. 4 : Allocations optimales et leurs caractéristiques en fonction des horizons retenus (avec la structure des nœuds [1 5 4 4] et les actions comme variable de référence)

<sup>8</sup> Rappel : Nous adoptons la convention d'écriture suivante : {1 4 15} signifie par exemple les 3 sous-périodes consécutives 1 ans, 4 ans et 15 ans.

	Variables de référence			
	Action	Monétaire	Obligation	Inflation
Monétaire	0%	32,20%	0%	0%
Obligation	0%	0%	0%	0%
Action	100%	67,80%	100%	100%
Fonction objectif	24 103	16 587	19 467	16 370
Probabilité de ruine	11%	0%	0%	0%
Réserve initiale minimale	4000	3000	4000	4000

Tab. 5 : Allocations optimales et leurs caractéristiques en fonction des quantiles de référence retenus (avec la structure des nœuds [1 5 4 4] et la structure des périodes {1 4 15})

Le tableau suivant résume nos différentes constatations sur l'effet du changement de certains facteurs d'entrée (*input*) sur les états de sortie (*output*) du modèle d'ALM développé.

Facteur \ Output	Fonction objectif / probabilité de ruine	Réserve initiale minimale	Allocation initiale optimale
Structure des nœuds	(+)*	(+)	(-)
Structure des périodes	(+)	(-)	(+)
Variable de référence	(+)	(-)	(+)
Nombre de scénarios	(-)	(+)	(-)

- : (+) si le facteur a un impact significatif sur la valeur de l'indicateur de sortie (*output*)  
(-) si le facteur n'a pas d'impact significatif sur la valeur de l'indicateur de sortie (*output*)

Tab. 6 : Synthèse de l'impact constaté de certains facteurs sur les résultats obtenus par le modèle d'ALM proposé

Concernant les deux graphiques 8 et 9, et pour mieux les comprendre, nous décrivons dans un premier temps le graphique 8 (ayant la structure des nœuds [1 5 4 4] et la structure des périodes {1 4 15}). Chaque rectangle dans ce graphique représente l'allocation optimale, selon le modèle proposé d'ALM, à l'instant indiqué et dans le cas du scénario de marché correspondant : c'est pour cette raison que l'arbre des allocations est identique, dans son schéma de présentation, à l'arbre des scénarios. La différence est que l'arbre des allocations indique, à chaque nœud, l'allocation prévue être optimale plutôt que la performance anticipée (ou projetée) du marché.

Par exemple, l'allocation optimale à l'instant  $t_0$  est indiquée par le vecteur (0 %, 0 %, 100 %) dont les éléments sont les poids respectifs du monétaire, des obligations et des actions.  $n_{t_0}$  correspond au nombre de nœuds dans l'arbre à l'instant  $t_0$ . En passant à l'instant  $t_1$ , autrement dit après une année selon la structure des périodes considérée, nous avons cinq scénarios possibles de marché ( $n_{t_1}=5$ ). Le modèle d'ALM basé sur la PS indique, pour chacun de ces scénarios, l'allocation optimale correspondante, par exemple (0 %, 100 %, 0 %) pour le scénario de marché le plus défavorable représenté par le rectangle tout à fait en bas dans le graphique. La

même lecture peut être appliquée aux instants ultérieurs de prise de décision (notamment  $t_2$ ) ainsi qu'au graphique 9.

Les graphiques 8 et 9 illustrent deux « chemins » optimaux d'allocations proposées pour une même structure de période (celle du {1 4 15}) et pour deux structures de nœuds différentes (respectivement [1 5 4 4] et [1 5 3 3]). Nous constatons une nette différence entre les deux chemins surtout au niveau des 15 dernières années, ce qui est dû au fait que la structure des nœuds diverge sur cette période. La dynamique des poids est mise en évidence via ces deux graphiques : le processus suppose une adaptation « optimale » de la composition du portefeuille compte tenu des scénarios économiques projetés. Les nœuds représentant les « pires » scénarios (ceux qui se situent en bas) tendent souvent à préconiser plus d'obligations que les autres, compte tenu de l'hypothèse que les obligations représentent moins de risque que les actions.

Selon le modèle d'allocation stratégique d'actifs développé ici (en se basant sur les techniques de programmation stochastique), la règle générale constatée de cheminement des allocations optimales est la suivante :

- soit la réalisation de la période précédente est favorable (le rendement du portefeuille a augmenté) le portefeuille s'autorise à rajouter de l'actif risqué (notamment les actions),
- sinon le portefeuille tend à se couvrir de plus en plus en actif moins risqué.

A titre d'exemple, dans le graphique 8, le scénario le plus défavorable entre  $t_0$  et  $t_1$  conduit à une allocation « 100 % obligations » (comme le montre le nœud le plus bas à la date  $t_1$ ) : il s'agit d'une réponse à cette évolution défavorable du rendement du portefeuille avec sa composition précédente (à la date  $t_0$ ). Les nœuds enfants à  $t_2$  dudit nœud ne préconisent pas la même allocation. En particulier, nous constatons un retour à l'allocation « 100 % actions » pour le nœud enfant qui suit le scénario le plus favorable entre  $t_1$  et  $t_2$ . De même, l'allocation reste fortement chargée en obligation suite au scénario le plus défavorable entre ces deux dates (65,6 % obligation contre 34,4 % actions).

De façon plus générale et synthétique, selon ce modèle d'ALM basé sur la programmation stochastique, au fur et à mesure que nous rencontrons des scénarios favorables, l'allocation préconisée commence à retenir de plus en plus d'actions, dans le cas inverse le portefeuille se charge en actifs non risqués. La non utilisation de bornes supérieures pour les poids de différentes classes d'actifs a permis, à notre avis, de mieux mettre en évidence ce constat. En pratique, le recours à l'utilisation de telles bornes est souvent le cas en pratique.

Cela nous emmène à avancer deux dernières remarques. Dans la première, nous tenons à rappeler le rôle des valeurs retenues pour les variables d'entrée du modèle : leur modification conduit sûrement à des valeurs de sortie différentes (en particulier pour l'allocation initiale optimale). L'objet de cette étude étant, rappelons le, d'illustrer et de mettre en évidence le cadre d'utilisation des techniques de PS pour l'allocation stratégique d'un régime de retraite partiellement provisionné. La deuxième remarque a trait à l'élargissement du champ des tests de sensibilités,

notamment le test d'impact de structure de nœud plus grande. Cela n'a pas été effectué à ce stade mais pourra faire l'objet de prochaines études spécifiques.

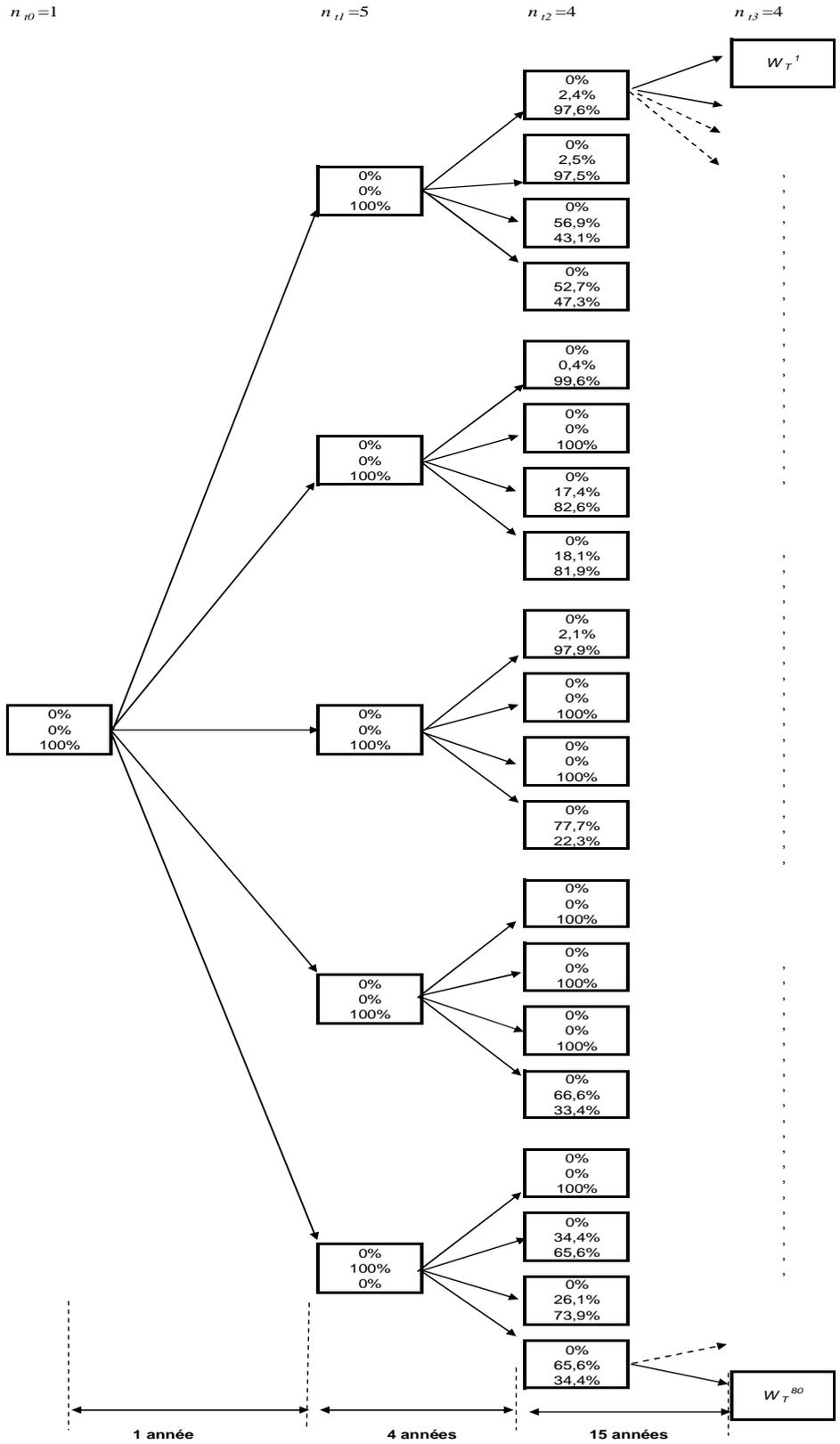


Fig. 8 : Présentation de l'arbre des allocations (« chemin ») obtenu par le modèle d'optimisation avec PS (cas des paramètres standards, en particulier la structure des nœuds [1 5 4 4] et la structure des périodes {1 4 15})

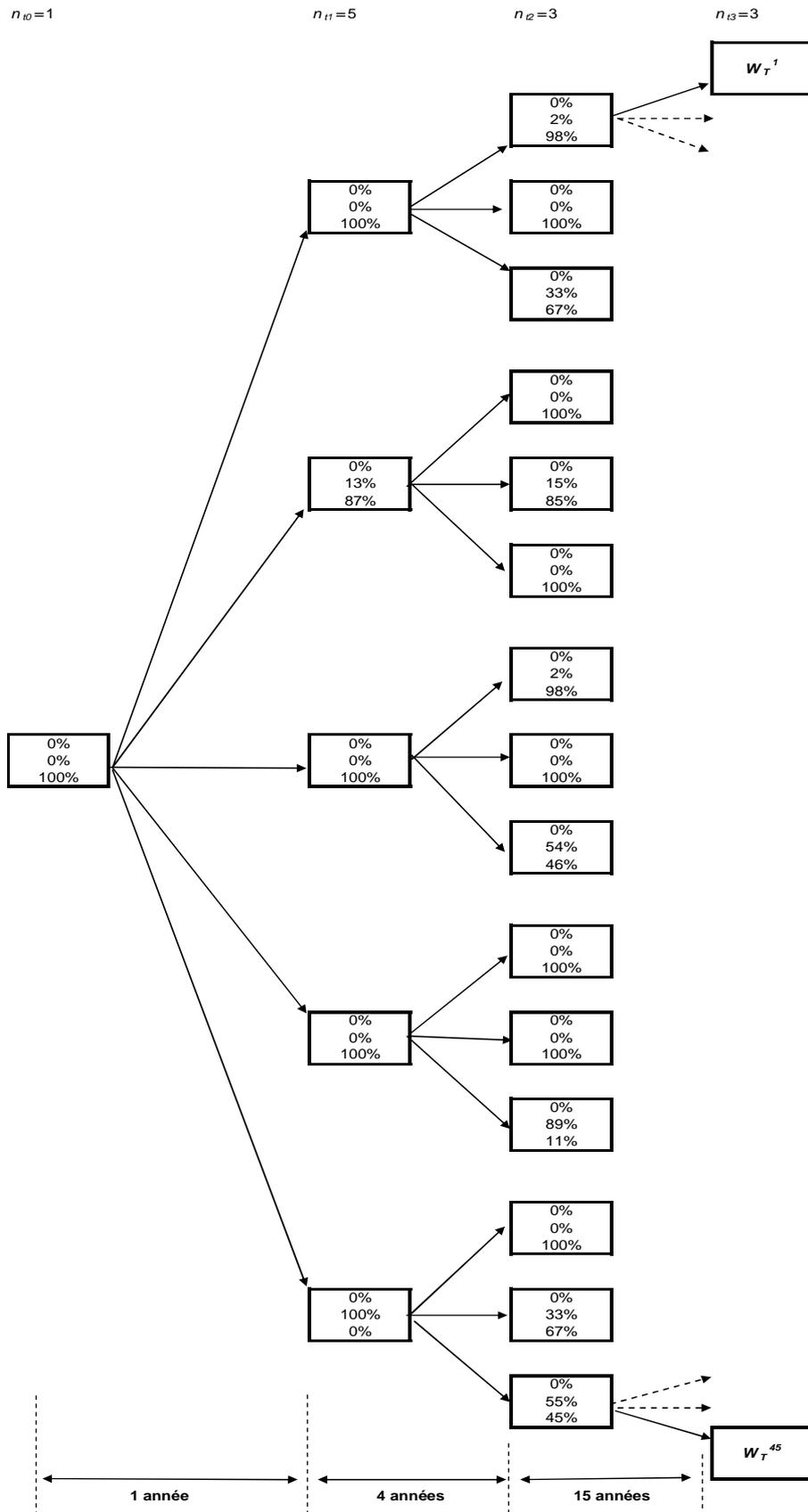


Fig. 9 : Présentation de l'arbre des allocations (« chemin ») obtenu par le modèle d'optimisation avec PS (cas de paramètres alternatifs, en particulier une structure des nœuds alternative [1 5 3 3] et la structure des périodes {1 4 15})

## 6. Conclusion

La programmation stochastique traite en général des problématiques de planification en présence d'incertitude. Ce type de problème se rencontre le plus souvent dans les modèles qui à la fois s'échelonnent dans le temps et où les décisions prises à une période donnée ont des implications sur celles prises à la période suivante (et évidemment où l'aléa continue à exister au niveau des paramètres des périodes subséquentes).

Cet article a présenté un modèle de programmation stochastique développé dans le cadre de l'allocation stratégique d'actifs d'un régime de retraite partiellement provisionné. Le modèle il peut être adapté par différents régimes de retraite en France, souvent partiellement provisionnés. La modélisation a été effectuée en deux temps : le choix des modèles de dynamiques et de la structure de projection des variables financières puis ensuite la modélisation du problème d'optimisation pour le régime de retraite considéré (avec la spécification des variables de décision, des variables stochastiques, la fonction objectif et les contraintes).

L'approche ainsi proposée constitue une alternative et/ou un complément à celles qui sont souvent utilisées en pratique (stratégie *Fixed-Mix*, etc.). Sa mise en œuvre est relativement simple et permet d'intégrer une vision dynamique de l'allocation stratégique d'actifs. Les résultats obtenus par le modèle d'ALM développé indiquent une sensibilité significative dans le cas des structures d'arbre relativement petites. La robustesse et la stabilité des résultats du modèle dans le cas de structures d'arbre plus grandes constituent l'un des sujets de nos prochaines études.

## Annexes

### **Annexe 1 : principes de la formulation mathématique de la PS avec recours (cf. Birge et Louveaux [1997] et Castro [2009])**

La formulation d'un programme stochastique linéaire avec recours (à deux étapes) peut être présentée comme suit (en supposant  $x$  un vecteur de décision ( $n \times 1$ ) et  $c$ ,  $A$  et  $b$  sont des données connues de taille ( $n \times 1$ ), ( $m \times n$ ) et ( $m \times 1$ ) :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c'x + E_\omega(Q(x, \omega)) \\ \text{s.c.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} Q(x, \omega) = \min_y \quad & (q(\omega))' y \\ \text{s.c.} \quad & T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega) \\ & y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2} \end{aligned}$$

La fonction de recours  $E_\omega(Q(x, \omega))$  est fournie par les quatre éléments suivants :

- un ensemble  $Y$  qui décrit l'ensemble réalisable des actions de recours, par exemple  $Y = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} / y \geq 0\}$  ;
- $q$  : un vecteur de coûts de recours ( $n_2 \times 1$ );
- $W$  : une matrice  $s \times n_2$ , elle est appelée la matrice de recours.
- $T$  : une matrice  $n_2 \times n$  reliant  $x$  à  $y$ , elle est appelée la matrice de technologie (nous rappelons que  $x$  est un vecteur de décision de taille  $n \times 1$ ).

La formulation présentée ci-dessus est composée de deux programmes. Le premier programme minimise les coûts directs de la première étape,  $c'x$ , plus l'espérance du coût du recours appelée également fonction de recours,  $E_\omega(Q(x,\omega))$ . Cela tient compte évidemment de toutes les réalisations possibles de l'évènement aléatoire  $\omega$  et du respect de la contrainte  $Ax = b$ . Le coût de recours  $Q(x,\omega)$  dépend à la fois de la valeur  $x$  (la décision de la première étape) et de l'élément aléatoire  $\omega$ . Le deuxième programme décrit comment choisir les décisions qui forment  $y(\omega)$ . L'objectif à ce stade est de minimiser le coût de recours  $q(\omega)'y$  compte tenu d'une contrainte liée aux actions de recours elles-mêmes :  $T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega)$ .

Nous pouvons réécrire la formulation ci-dessus sous un seul et unique programme, appelé la forme étendue (*extensive form*) :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c'x + E_\omega(Q(x,\omega)) \\ \text{s.c.} \quad & Ax = b \\ & T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega) \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

En supposant que pour chaque scénario il existe une action de recours correspondante ( $y_i, i=1, \dots, s$ ), le problème de programmation stochastique linéaire avec recours (à deux étapes) se présentera comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{x, y_i} \quad & c'x + \sum_{i=1}^s p_i q'(\omega_i) y_i \\ \text{s.c.} \quad & Ax = b \\ & \left. \begin{aligned} T(\omega_i)x + W(\omega_i)y_i &= h(\omega_i) \\ y_i &\geq 0 \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, s \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Les éléments développés jusque là restent valables dans le cas d'un programme stochastique non-linéaire (à deux étapes). Le problème peut être présenté sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \min_{x, y_i} c(x) + \sum_{i=1}^s p_i q(y_i; \omega_i) \\ \text{s.c.} \\ \left. \begin{aligned} T(\omega_i)x + W(\omega_i)y_i &= h(\omega_i) \\ y_i &\in Y \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, s \\ x \in X \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

où  $c(x)$  : correspond au coût engendré par les décisions de la première étape.  
 $X$  : reflète l'ensemble des contraintes à respecter par  $x$  (dans le cas linéaire étudié précédemment,  $X$  a été définie comme suit :  $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ )

Finalement, nous pouvons aller plus loin pour généraliser cette présentation au cas multi-périodique (ou multi-étapes). Dans ce cas, nous nous trouvons face à une séquence temporelle du couple observation/décision. Pour  $k$  étapes, il est possible de formuler le problème ainsi :

$$\begin{aligned} \min_{x_i} c_1(x_1) + E_{\omega^2} [ \min_{x_2} c_2(x_2(\omega^2); \omega^2) ] + \dots + E_{\omega^s} [ \min_{x_k} c_k(x_k(\omega^k); \omega^k) ] \\ \text{s.c.} \quad W_1 x_1 = h_1 \\ W_2 x_2(\omega^2) + T_1(\omega^2) x_1 = h_2(\omega^2) \\ W_i x_i(\omega^i) + T_{i-1}(\omega^i) x_{i-1}(\omega^{i-1}) = h_i(\omega^i) \quad i = 3, \dots, k \\ x_1 \geq 0, x_i(\omega^i) \geq 0 \quad i = 2, \dots, k \end{aligned}$$

Avec :

$W_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) : représentent des matrices connues de taille  $m_i \times n_i$ .

$h_1$  : représente un vecteur connu dans  $\mathbb{R}^{m_1}$ .

$h_i$  ( $i = 2, \dots, k$ ) : représentent des vecteurs aléatoires dans  $\mathbb{R}^{m_i}$ .

$T_i$  ( $i = 1, \dots, k-1$ ) : représentent les matrices aléatoires de taille  $m_i \times (n_i - 1)$ .

$x_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) : représente le vecteur des décisions à l'étape  $i$  avec  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  (pour  $i > 1$ ,  $x_i$  dépend des événements aléatoires antérieures).

$\omega^i$  : représente l'historique des événements aléatoires jusqu'à l'étape  $i$ .

La formulation ci-dessus suppose implicitement que les décisions prises dépendent exclusivement des données du passé : ces décisions sont les mêmes à l'étape  $i$  pour les scénarios qui ont un historique commun jusqu'à l'étape  $i-1$ .

## **Annexe 2 : passage des valeurs des taux aux prix des produits de taux (cf. Hibbert et al. [2001])**

Le prix, à l'instant  $t$ , d'une obligation zéro-coupon qui paie une unité monétaire à l'instant  $T$  est donné par les équations suivantes :

$$P(t, T) = \exp[A(T-t) - B_2(T-t)r_t - B_1(T-t)l_t]$$

Avec :

$$B_1(s) = \frac{k_r}{k_r - k_l} \left[ \frac{1 - e^{-k_l s}}{k_l} - \frac{1 - e^{-k_r s}}{k_r} \right]$$

$$B_2(s) = \frac{1 - e^{-k_r s}}{k_r}$$

$$A(s) = (B_2(s) - s) \left( \mu_l - \frac{\sigma_r^2}{2k_r} \right) + B_1(s) \mu_l - \frac{\sigma_r^2 B_2(s)^2}{4k_r} + \frac{\sigma_l^2}{2} \left[ \frac{s}{k_l^2} - 2 \frac{(B_1(s) + B_2(s))}{k_l^2} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{(k_r - k_l)^2} \frac{(1 - e^{-2k_r s})}{2k_r} - \frac{2k_r}{k_l(k_r - k_l)} \frac{(1 - e^{-(k_l + k_r)s})}{(k_l + k_r)} + \frac{k_r^2}{k_l^2(k_r - k_l)^2} \frac{(1 - e^{-2k_l s})}{2k_l} \right]$$

## Remerciements :

Je tiens à remercier Prof. Frédéric Planchet (ISFA Lyon), Dr. Didier Rullière (ISFA Lyon) et Dr. Guillaume Lezan (Caisse des Dépôts et Consignation) pour leur soigneuse relecture de ce travail et pour la pertinence de leurs suggestions.

## Bibliographie

Ahlgrim K.C., D'Arcy S.P., Gorvett R.W. [2005] « Modeling Financial Scenarios: A Framework for the Actuarial Profession », *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 177-238. <http://www.casact.org/pubs/proceed/proceed05/05187.pdf>

Birge J.R., Louveaux F. [1997] *Introduction to Stochastic Programming*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering Heidelberg, 1997.

Black F., Scholes M. [1973] « The pricing of options and corporate liabilities », *Journal of Political Economy*, 1973, pp. 637-654.

Boender C.G.E., Hoek H., Dert C.L., Heemskerk F. [2007], *A Scenario approach of ALM*, Zenios and Ziemba eds Handbook of Asset Liability Management. North Holland.

Campbell J.Y., Viceira L.M. [2001] *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors*, Oxford University Press.

Cariño D.R., Kent T., Myers D.H., Stacy C., Sylvanus M., Turner A., Watanabe K., Ziemba W. T. [1994] « The Russell-Yasuda Kasai Model : An Asset Liability Model for a Japanese Insurance Company using Multi-stage Stochastic Programming », *Interfaces*, 24, Jan-Feb 1994, 29-49.

Castro J. [2009], « A stochastic programming approach to cash management in banking », *European Journal of Operational Research*, 2009, vol. 192, issue 3, pages 963-974.

Consigli G., Dempster M.A.H. [1998] *The CALM stochastic programming model for dynamic asset-liability management*, dans *Worldwide Asset and Liability Modelling*, Ziemba & Mulvey, Cambridge University Press, Cambridge , UK, pp 464-500.

Dantzig G.B., Glynn P.W. [1990] « Parallel processors for planning under uncertainty », *Annals of Operations Research*, 22, 1-22.

Date P., Wang C. [2009] « Linear Gaussian Affine Term Structure Models with Unobservable Factors: Calibration and Yield Forecasting », *European Journal of Operations Research*, 195 : 156-166 BURA.

Dert C. [1995] *A dynamic model for asset/ liability management for defined benefit pension funds*, dans *Worldwide Asset and Liability Modelling*, Ziemba & Mulvey, Cambridge University Press, Cambridge , UK, pp 501-536.

Escudero L.F., Kamesam P.V., King A., Wets R.J.B. [1993] « Production planning via scenario modeling », *Annals of Operations Research*, 43, 311-335.

Faleh A., Planchet F., Rullière D. [2010] « Les générateurs de scénarios économiques : de la conception à la mesure de la qualité », *Assurances et gestion des risques*, n°double avril/juillet, Vol. 78 (1/2) .

Fisher I. [1930] *The Theory of Interest*, New York: Macmillan.

Fourer R., Gay D.M., Kernighan B.W. [2002] *AMPL : A Modelling Language for Mathematical Programming*, 2<sup>nd</sup> edition, Duxbury Press.

Frauendorfer K., Jacoby U., Schwendener A. [2007] « Regime switching based portfolio selection for pension funds », *Journal of Banking & Finance* 31 (2007) 2265–2280.

Hainaut D., Devolder P. [2005] « Management of a pension fund under a VaR constraint », *working paper*.

Haneveld W.K.K., Streutker M.H., Vvan der Vlerk M.H. [2005] *An ALM model for pension funds using integrated chance constraints*, rapport de recherche, 05A03, SOM, université de Groningen.

Hardy M.R., [2001] « A Regime Switching Model of Long-Term Stock Returns », *North American Actuarial Journal*, 5 (2), 41-53.

Hilli P., Koivu M., Pennanen T., Ranne A. [2007] « A stochastic programming model for asset and liability management of a Finnish pension company », *Annals of Operations Research*, 152(2007), pp. 115-139

Hull J.C., White A. [1994] « Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models », *Journal of Derivatives* (Winter), 37-48.

Geyer A., Ziemba W.T.Z. [2008] « The Innovest Austrian Pension Fund Financial Planning Model InnoALM », *Operations Research*, 56, 797-810.

Kallberg J.G., White R.W., Ziemba W.T. [1982] « Short Term Financial Planning under Uncertainty », *Management Science*, Vol. 28, No. 6, June 1982, pp. 670-682.

Kaut M., Wallace S.W., [2003] « Evaluation of scenario-generation methods for stochastic programming », SPEPS, *Working Paper*, 14 (<http://edoc.hu-berlin.de/series/speps/2003-14/PDF/14.pdf>), 2003.

Kim D., Santomero A. [1988] « Risk in banking and capital regulation », *Journal of Finance*, Vol. 43 (5), p.1219-1233.

Kouwenberg R. [2001] « Scenario Generation and Stochastic Programming Models for Asset Liability Management », *European Journal of Operational Research*, vol. 134, 51-64.

Kusy M.I., Ziemba W.T. [1986] « A Bank Asset and Liability Management Model », *Operations research*, Vol. 34, No. 3, May-June 1986, pp. 356-376.

Leibowitz M.L., Kogelman S., Bader L.N. [1992] « Asset Performance and Surplus Control: A Dual-Shortfall Approach », *The Journal of Portfolio Management*, WINTER.

Macaulay F.R. [1938] « The Movements of Interest Rates. Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856 », New York: *National Bureau of Economic Research*.

Markowitz H. M. [1952] « Portfolio Selection », *The Journal of Finance*, Vol. 7, No.1, March.

Martellini L. [2006] *Managing Pension Assets: from Surplus Optimization to Liability-Driven Investment*, EDHEC Risk and Asset Management Research Centre.

Merton R. [1971] « Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model », *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413.

Merton R. [1990] *Continuous-Time Finance*, Oxford, UK.

Planchet F., Thérond P.E., Kamega A. [2009] *Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation*, Paris : Economica.

Redington F.M. [1952] « Review of the principles of life office valuations », *Journal of the Institute of Actuaries*, 78: 1-40.

Sharpe W.F., Tint L.G. [1990] « Liabilities - A new approach », *Journal of Portfolio Management*, Winter, 1990, 5-10.

Zenios S.A. [2007] *Practical Financial Optimization : Decision Making For Financial Engineers*, Blackwell Publishers, Oxford, 2007.