HAL
open science

Classes de cycles motiviques étales

Bruno Kahn

To cite this version:

Bruno Kahn. Classes de cycles motiviques étales. Algebra & Number Theory, 2012, 6-7, pp.1369-1407. 10.2140/ant.2012.6.1369 . hal-00561808v3

HAL Id: hal-00561808

https://hal.science/hal-00561808v3

Submitted on 25 Jul 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CLASSES DE CYCLES MOTIVIQUES ÉTALES

par

Bruno Kahn

Abstract. — Let X be a smooth variety over a field k, and l be a prime number. We construct an exact sequence

$$0 \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) \to C_{\mathrm{tors}} \to 0$$

where $\mathcal{H}^i_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ and $\mathcal{H}^i_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))$ are the Zariski sheaves associated to étale and continuous étale cohomology and C is the cokernel of Jannsen's l-adic cycle class on $CH^2(X) \otimes \mathbf{Z}_l$ if $l \neq \mathrm{char}\, k$ or a variant of it if $l = \mathrm{char}\, k$. If $k = \mathbf{C}$, this gives another proof of a theorem of Colliot-Thélène–Voisin, avoiding a recourse to the Bloch-Kato conjecture in degree 3. If k is separably closed and $l \neq \mathrm{char}\, k$, still in the spirit of Colliot-Thélène and Voisin we get an exact sequence

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l)_{\mathrm{tors}} &\to H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ &\to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to \mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0 \end{aligned}$$

where $H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Z}_l(2))$ is the quotient of l-adic cohomology by the first step of the coniveau filtration and $\mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l)$ is an l-adic Griffiths group.

If k is the algebraic closure of a finite field k_0 and X is "of abelian type" and verifies the Tate conjecture, $\mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l)$ is torsion and $H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))$ is finite provided $H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Q}_l(2)) = 0$. On the other hand, a theorem of Schoen gives an example where $H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))$ is finite but $H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Q}_l(2)) \neq 0$.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14C25, 14E22, 14F20, 14F42, 14Gxx.

Mots clefs. — Cycle class map, unramified cohomology, continuous étale cohomology, motivic cohomology.

Table des matières

1. Introduction 2
2. Groupes de Chow supérieurs 5
3. Cohomologie l-adique et p-adique 12
4. Cas d'un corps de base séparablement clos 20
5. Cas d'un corps de base fini et de sa clôture algébrique 31
Appendice A. Cohomologie de Hodge-Witt logarithmique sur des corps imparfaits 36
Références 40

1. Introduction

Soient k un corps, X une k-variété lisse et l un nombre premier différent de $\operatorname{car} k$. Uwe Jannsen a défini une classe de cycle l-adique

$$CH^2(X) \otimes \mathbf{Z}_l \xrightarrow{\mathrm{cl}^2} H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \tag{1.1}$$

à valeurs dans sa cohomologie étale continue [**24**, Lemma 6.14]. En imitant sa construction à partir d'un théorème de Geisser et Levine [**17**], on obtient une variante p-adique de (1.1) si k est de caractéristique $p > 0$, où le second membre est une version continue de la cohomologie de Hodge-Witt logarithmique. Notons $\mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))$ (resp. $\mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))))$ le faisceau Zariski associé au préfaisceau $U \mapsto H^3_{\text{ét}}(U, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ (resp. $U \mapsto H^3_{\mathrm{cont}}(U, \mathbf{Z}_l(2)))$. Le but de cet article est de démontrer l'analogue l-adique d'un théorème de Jean-Louis Colliot-Thélène et Claire Voisin [**12**, th. 3.6] :

Théorème 1.1. — *Soit l un nombre premier quelconque et soit C le conoyau de* (1.1)*. On a une suite exacte*

$$0 \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{f} H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) \xrightarrow{g} C_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

Noter que C_{tors} est fini si $H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_l(2))$ est un $\mathbf{Z}_l$-module de type fini : ceci se produit pour $l \neq p$ si k est fini, ou plus généralement si les groupes de cohomologie galoisienne de k à coefficients finis sont finis, par exemple (comme me l'a fait remarquer J.-L. Colliot-Thélène) si k est un corps local [supérieur] ou un corps séparablement clos. Dans ces cas, le théorème 1.1 implique donc que $H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))$ est extension d'un groupe fini par un groupe divisible. (Pour $l = p$, C_{tors} est fini si k est fini et X projective d'après [**21**, p. 589, prop. 4.18].)

Lorsque $k = \mathbf{C}$, ceci donne une autre démonstration du théorème de Colliot-Thélène–Voisin en utilisant l'isomorphisme de comparaison entre cohomologies de Betti et l-adique et sa compatibilité aux classes de cycles respectives.

La démonstration de [**12**, th. 3.6] donnée par Colliot-Thélène et Voisin utilise l'exactitude du complexe de faisceaux Zariski de cohomologie de Betti

$$0 \to \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}(2)) \to \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}(2)) \to \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to 0.$$

Son exactitude à gauche découle du théorème de Merkurjev-Suslin, c'est-à-dire la conjecture de Bloch-Kato en degré 2 ; celle à droite découle de la conjecture de Bloch-Kato en degré 3, dont la démonstration a été conclue récemment par Voevodsky et un certain nombre d'auteurs.

La démonstration donnée ici évite le recours à cette dernière conjecture : elle ne repose que sur le théorème de Merkurjev-Suslin plus un formalisme triangulé un peu sophistiqué, mais dont, je pense, la sophistication est bien inférieure aux ingrédients de la preuve du théorème de Voevodsky et al.

Son principe est le suivant. La classe de cycle (1.1) se prolonge en une classe "étale"

$$H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(2)) \otimes \mathbf{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \tag{1.2}$$

où le terme de gauche est un groupe de cohomologie motivique étale de X. Le théorème de comparaison de la cohomologie motivique étale à coefficients finis avec la cohomologie étale des racines de l'unité tordues ou de Hodge-Witt logarithmique (théorème 2.6 a) et b)) implique que (1.2) est de noyau divisible et de conoyau sans torsion. On en déduit une surjection g de noyau divisible dans le théorème 1.1 à l'aide de la suite exacte

$$0 \to CH^2(X) \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(2)) \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \to 0.$$

qui est rappelée/établie dans la proposition 2.9. Ceci est fait au §3.2. La détermination du noyau est plus technique et je renvoie au §3.6 pour les détails.

Pour justifier la structure du noyau et du conoyau de (1.2), il faut considérer le "cône" de l'application classe de cycle : ceci est expliqué au §3.1.

On obtient de plus des renseignements supplémentaires sur le groupe $H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$:

1. Si k est fini et X projective lisse, dans la classe $B_{\mathrm{Tate}}(k)$ de [**30**, Déf. 1 b)] ce groupe est nul (§5.1).
2. Si k est séparablement clos et $l \neq \operatorname{car} k$, toujours dans l'esprit de [**12**] on a une suite exacte (cf. corollaire 4.7) :
$$0 \to H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \to \mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \to 0$$
où $\mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l)$ est le groupe des cycles de codimension 2 à coefficients l-adiques, modulo l'équivalence algébrique, dont la classe de cohomologie l-adique est nulle, et $H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Z}_l(2))$ est le quotient de $H^3_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2))$ par le premier cran de la filtration par le coniveau.

   Comme le groupe $H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2)))$ est sans torsion (lemme 3.12), on en déduit une suite exacte (proposition 4.12) :
$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l)_{\mathrm{tors}} &\to H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ &\to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to \mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0. \end{aligned}$$
3. Si k est la clôture algébrique d'un corps fini k_0 et que X provient de la classe $B_{\mathrm{Tate}}(k_0)$ de [**30**], le groupe $\mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l)$ est de torsion et la suite exacte ci-dessus se simplifie en :
$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \to H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0 \end{aligned}$$
(théorème 5.2). En particulier, $H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est fini dès que $H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Q}_l(2)) = 0$ (ceci est conjecturalement vrai sur tout corps séparablement clos, cf. remarque 4.13), mais un exemple de Schoen montre que cette condition n'est pas nécessaire (Proposition 5.5 et théorème 5.6).

Remerciements. — Cet article est l'élaboration d'un texte rédigé en janvier 2010, lui-même directement inspiré de plusieurs discussions avec Jean-Louis Colliot-Thélène autour de son travail avec Claire Voisin [**12**], alors en cours d'achèvement. Il a ensuite bénéficié de la lecture de [**12**], ainsi que de discussions avec Colliot-Thélène autour d'un article commun en projet [**10**] : je le remercie de sa lecture critique de versions préliminaires de ce texte, et notamment de m'avoir fait remarquer qu'il n'est pas nécessaire de supposer k de type fini sur son sous-corps premier dans le théorème 1.1. Je remercie l'IMPA de Rio de Janeiro pour son hospitalité pendant la fin de sa rédaction, ainsi que la coopération franco-brésilienne pour son soutien. Pour finir, je remercie Luc Illusie de

m'avoir indiqué une démonstration (triviale !) du lemme A.1, lemme qui à ma connaissance ne figure nulle part dans la littérature.

2. Groupes de Chow supérieurs

Cette section comporte presque exclusivement des rappels sur les groupes de Chow supérieurs : le lecteur au courant peut la parcourir rapidement. Elle a pour but principal de fournir une preuve complète de la proposition 2.9, évitant le complexe $\Gamma(2)$ de Lichtenbaum.

2.1. Groupes de Chow supérieurs. — Soit k un corps. Dans [**2**], Bloch associe à tout k-schéma algébrique X des complexes de groupes abéliens $z^n(X,\bullet)$ ($n \geq 0$), concentrés en degrés (homologiques) ≥ 0 : rappelons qu'on pose $\Delta^p = \operatorname{Spec} k[t_0,\ldots,t_p]/(\sum t_i - 1)$, que $z^n(X,p)$ est le groupe abélien libre sur les fermés intègres de codimension n de $X \times_k \Delta^p$ qui rencontrent les faces proprement, et que la différentielle d_p est obtenue comme somme alternée des intersections avec les faces de dimension $p-1$. Les groupes d'homologie $CH^n(X,p)$ de $z^n(X,\bullet)$ sont les *groupes de Chow supérieurs* de X : on a $CH^n(X,0) = CH^n(X)$ par construction.

Les $z^n(X,\bullet)$ sont contravariants pour les morphismes plats, en particulier étales ; ils définissent en fait des complexes de faisceaux sur le petit site étale d'un schéma lisse X donné. Ils sont aussi covariants pour les morphismes propres, en particulier pour les immersions fermées.

Si Y est un fermé de X, on notera ici

$$z^n_Y(X,\bullet) = \operatorname{Fib}\Big(z^n(X,\bullet) \xrightarrow{j^*} z^n(X-Y,\bullet)\Big)$$
$$CH^n_Y(X,p) = H_p(z^n_Y(X,\bullet))$$

où $j : X-Y \to X$ est l'immersion ouverte complémentaire et Fib désigne la fibre homotopique (décalé du *mapping cone*). Si on tensorise par un groupe abélien A, on écrit $CH^n_Y(X,p,A)$.

On a le théorème fondamental suivant, qui est une vaste généralisation du lemme de déplacement de Chow (Bloch, [**2**, Th. 3.1 et 4.1], preuves corrigées dans [**3**]) :

Théorème 2.1. — *a) Les groupes de Chow supérieurs sont contravariants pour les morphismes quelconques de but lisse entre variétés quasi-projectives. Ils commutent aux limites projectives filtrantes à morphismes de transition affines.*

b) Soient X un k-schéma quasi-projectif équidimensionnel, $i : Y \to X$ un fermé équidimensionnel et $j : U \to X$ l'ouvert complémentaire. Soit d la codimension de Z dans X. Alors le morphisme naturel

$$z^{n-d}(Y, \bullet) \xrightarrow{i_*} z^n_Y(X, \bullet)$$

est un quasi-isomorphisme.
c) On dispose de produits d'intersection

$$CH^m(X, p) \times CH^n(X, q) \to CH^{m+n}(X, p+q) \tag{2.1}$$

pour X quasi-projectif lisse.

De la partie b) de ce théorème, on déduit que pour tout groupe abélien A, la théorie cohomologique à supports $(X, Z) \mapsto CH^n_Z(X, \bullet, A)$ définie sur la catégorie des k-schémas quasi-projectifs lisses [**9**, def. 5.1.1 a)] vérifie l'axiome **COH1** de loc. cit., p. 53. D'après loc. cit., th. 7.5.2, on a donc des isomorphismes pour tout (n, p)

$$CH^n(X, p, A) \xrightarrow{\sim} H^{-p}_{\mathrm{Zar}}(X, z^n(-, \bullet) \otimes A) \xrightarrow{\sim} H^{-p}_{\mathrm{Nis}}(X, z^n(-, \bullet) \otimes A)$$

pour X quasi-projectif lisse.

Si X est seulement lisse, le second isomorphisme persiste.

Définition 2.2. — Soit X un k-schéma lisse (essentiellement de type fini), et soit τ une topologie de Grothendieck moins fine que la topologie étale sur la catégorie des k-schémas lisses de type fini : en pratique $\tau \in \{\mathrm{Zar}, \mathrm{Nis}, \text{ét}\}$. On note $A_X(n)_\tau$ le complexe de faisceaux $z^n(-, \bullet) \otimes A[-2n]$ sur X_τ et $H^*_\tau(X, A(n))$ l'hypercohomologie de X à coefficients dans le complexe $A_X(n)$ (pour la topologie τ). C'est la *cohomologie motivique de poids n à coefficients dans A* pour la topologie concernée.
Pour simplifier, on supprime τ de la notation si $\tau = \mathrm{Zar}$ ou Nis (voir ci-dessus).

On a donc un isomorphisme, pour X quasi-projectif lisse :

$$CH^n(X, 2n - i) \xrightarrow{\sim} H^i(X, A(n)). \tag{2.2}$$

On a

$$\mathbf{Z}_X(0) = \mathbf{Z} \tag{2.3}$$

$$\mathbf{Z}_X(1) \simeq \mathcal{O}^*_X[-1]. \tag{2.4}$$

([**2**, Cor. 6.4] pour le second quasi-isomorphisme).

L'isomorphisme (2.4) se généralise ainsi :

***Théorème 2.3* (Nesterenko-Suslin, Totaro).** — *Supposons que* $X = \operatorname{Spec} K$*, où* K *est un corps. L'isomorphisme* (2.4) *et les produits* (2.1) *induisent des isomorphismes*

$$K_n^M(K) \xrightarrow{\sim} H^n(K, \mathbf{Z}(n))$$
$$K_n^M(K)/m \xrightarrow{\sim} H^n(K, \mathbf{Z}/m(n))$$

pour $m > 0$*, où* K_n^M *désigne la* K*-théorie de Milnor..*

Démonstration. — Voir [**39**] ou [**48**] pour le premier énoncé ; le second s'en déduit puisque $H^{n+1}(K, \mathbf{Z}(n)) = 0$. □

Remarque 2.4. — L'isomorphisme (2.2) vaut pour $i \geq 2n$, même si X n'est pas quasi-projectif. En effet, le terme de droite est l'aboutissement d'une suite spectrale de coniveau [**9**, Rk. 5.1.3 (3)] qui, grâce au théorème 2.1, prend la forme suivante :

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H^{q-p}(k(x), A(n-p)) \Rightarrow H^{p+q}(X, A(n)).$$

On a $H^i(F, A(r)) = 0$ pour $i > r$ et tout corps F, car $A_F(r)$ est un complexe concentré en degrés $\leq r$. On en déduit déjà que $H^i(X, A(n)) = 0$ pour $i > 2n$, et on a évidemment $CH^n(X, p, A) = 0$ pour $p < 0$. Quant à $H^{2n}(X, A(n))$, il s'insère dans une suite exacte

$$E_1^{n-1,n} \xrightarrow{d_1} E_1^{n,n} \to H^{2n}(X, A(n)) \to 0$$

qui s'identifie à la suite exacte

$$\bigoplus_{x \in X_{(1)}} k(x)^* \otimes A \xrightarrow{\mathrm{Div}} \bigoplus_{x \in X_{(0)}} A \to CH^n(X) \otimes A \to 0$$

via (2.3) et (2.4) (l'identification de la différentielle d_1 à l'application diviseurs est facile à partir du théorème 2.1 appliqué pour $n = 1$). D'autre part, on calcule aisément que $CH^n(X, 0, A) = CH^n(X) \otimes A$ sans supposer X quasi-projectif.

Le lemme suivant raffine une partie de la remarque 2.4 : sa démonstration est moins élémentaire.

Lemme 2.5. — *Le complexe* $\mathbf{Z}_X(n)$ *est concentré en degrés* $\leq n$ *: autrement dit,* $\mathcal{H}^i(\mathbf{Z}_X(n)) = 0$ *pour* $i > n$*.* □

Démonstration. — La théorie cohomologique à supports

$$(X, Y) \mapsto H^*_Y(X, \mathbf{Z}(n))$$

vérifie les axiomes **COH1** et **COH3** de [**9**] : le premier, "excision étale", résulte facilement du théorème 2.1 b) et le second, invariance par homotopie, est démontré dans [**2**, th. 2.1]. Il résulte alors de [**9**, cor. 5.1.11] qu'elle vérifie la conjecture de Gersten (c'est déjà démontré dans [**2**, th. 10.1]). En particulier, les faisceaux $\mathcal{H}^i(\mathbf{Z}(n))$ s'injectent dans leur fibre générique, et on est réduit au cas évident d'un corps de base. □

2.2. Comparaisons. — À partir de maintenant, X désigne un k-schéma lisse.

Théorème 2.6. — *a) Si m est inversible dans k, il existe un quasi-isomorphisme canonique*

$$(\mathbf{Z}/m)_X(n)_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} \mu_m^{\otimes n}.$$

b) Si k est de caractéristique $p > 0$ et $r \geq 1$, il existe un quasi-isomorphisme canonique

$$(\mathbf{Z}/p^r)_X(n)_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} \nu_r(n)[-n]$$

où $\nu_r(n)$ est le n-ème faisceau de Hodge-Witt logarithmique.
c) Soit α la projection de $X_{\text{ét}}$ sur X_{Zar}. Alors la flèche d'adjonction

$$\mathbf{Q}_X(n) \to R\alpha_* \mathbf{Q}_X(n)_{\text{ét}}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — a) et b) sont dus à Geisser-Levine : a) est [**18**, th. 1.5] et b) est [**17**, th. 8.5] (si k est parfait : voir le corollaire A.7 en général) [1]. c) est un fait général pour un complexe de faisceaux Zariski C de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels sur un schéma normal S : on se ramène au cas où S est local et où $C = A[0]$ est un faisceau concentré en degré 0. Alors A est un faisceau constant de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels et cela résulte de [**14**, th. 2.1]. □

Définition 2.7. — Soit $n \geq 0$. Pour l premier différent de $\operatorname{car} k$, on note

$$\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(n) = \varinjlim_r \mu_{l^r}^{\otimes n}.$$

1. Cette dernière référence indique que l'hypothèse "X lisse sur k" devrait être remplacée par "X régulier de type fini sur k" dans une grande partie de ce texte.

Pour $l = \operatorname{car} k$, on note

$$\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(n) = \varinjlim_r \nu_r(n)[-n].$$

Enfin, on note

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n) = \bigoplus_l \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(n).$$

C'est un objet de la catégorie dérivée des groupes abéliens sur le gros site étale de $\operatorname{Spec} k$.

Le théorème 2.6 montre qu'on a un isomorphisme, pour tout X lisse sur k :

$$(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_X(n)_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})(n)_{|X}. \tag{2.5}$$

Nous utiliserons cette identification dans la suite sans mention ultérieure.

On a alors :

Corollaire 2.8. — *Pour tout $i > n+1$, l'homomorphisme de faisceaux Zariski*

$$\mathcal{H}^{i-1}(R\alpha_*\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)) \to \mathcal{H}^i(R\alpha_*\mathbf{Z}_X(n)_{\text{ét}})$$

émanant du théorème 2.6 a) et b) est un isomorphisme.

Démonstration. — Dans la suite exacte de faisceaux Zariski

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{i-1}(R\alpha_*\mathbf{Q}_X(n)_{\text{ét}}) \to \mathcal{H}^{i-1}(R\alpha_*\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n))\\ \to \mathcal{H}^i(R\alpha_*\mathbf{Z}_X(n)_{\text{ét}}) \to \mathcal{H}^i(R\alpha_*\mathbf{Q}_X(n)_{\text{ét}})\end{aligned}$$

les deux termes extrêmes sont nuls d'après le théorème 2.6 c) et le lemme 2.5. □

2.3. Cohomologie étale de complexes non bornés. — Si X est un schéma de dimension cohomologique étale *a priori* non finie et si C est un complexe de faisceaux étales sur X, non borné inférieurement, la considération de l'hypercohomologie $H^*_{\text{ét}}(X, C)$ soulève au moins trois difficultés :

1. une définition en forme ;
2. la commutation aux limites ;
3. la convergence de la suite spectrale d'hypercohomologie.

Le premier problème est maintenant bien compris : il faut prendre une résolution K-injective, ou fibrante, de C, cf. par exemple Spaltenstein [**45**, Th. 4.5 et Rem. 4.6].

Le second et le troisième problèmes sont plus délicats. Dans le cas de $\mathbf{Z}(n)$, le second et implicitement le troisième est résolu dans [**32**, §B.3 p. 1114] (pour la cohomologie motivique de Suslin-Voevodsky). Rappelons l'argument : en utilisant le théorème 2.6, on peut insérer $R\alpha_*\mathbf{Z}_X(n)_{\text{ét}}$ dans un triangle exact

$$R\alpha_*\mathbf{Z}_X(n)_{\text{ét}} \to \mathbf{Q}_X(n) \to R\alpha_*(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_X(n)_{\text{ét}} \xrightarrow{+1} .$$

Si X est de dimension de Krull finie, l'hypercohomologie Zariski du second terme se comporte bien, et celle du troisième terme aussi puisque c'est l'hypercohomologie étale d'un complexe borné.

2.4. Conjecture de Beilinson-Lichtenbaum. — Cette conjecture concerne la comparaison entre $H^*(X, A(n))$ et $H^*_{\text{ét}}(X, A(n))$, pour $A = \mathbf{Z}/m$, cf. [**18**, th. 1.6]. Si m est une puissance d'un nombre premier $l \neq \operatorname{car} k$, elle est équivalente d'après Geisser-Levine [**18**] à la conjecture de Bloch-Kato en poids n (pour le nombre premier l) ; donc en poids 2, au théorème de Merkurjev-Suslin. Sur un corps de caractéristique zéro, ceci avait été antérieurement démontré par Suslin-Voevodsky [**47**].

De plus, pour $l = \operatorname{car} k$, une version de cette conjecture est démontrée par Geisser et Levine dans [**17**], cf. théorème A.5. En ajoutant à tout ceci le théorème 2.6 c), la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum en poids n se retraduit en un triangle exact [**49**, Th. 6.6]

$$\mathbf{Z}_X(n) \to R\alpha_*\mathbf{Z}_X(n)_{\text{ét}} \to \tau_{\geq n+2}R\alpha_*\mathbf{Z}_X(n)_{\text{ét}} \to \mathbf{Z}_X(n)[1]. \tag{2.6}$$

Ce triangle exact contient l'énoncé ("Hilbert 90 en poids n") :

$$\mathcal{H}^{n+1}(R\alpha_*\mathbf{Z}_X(n)_{\text{ét}}) = 0.$$

2.5. Une suite exacte. —

Proposition 2.9. — *Notons $\mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ le faisceau Zariski associé au préfaisceau $U \mapsto H^3_{\text{ét}}(U, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)$. Pour toute k-variété lisse X, on a une suite exacte courte :*

$$0 \to CH^2(X) \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(2)) \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \to 0. \tag{2.7}$$

Démonstration. — En prenant l'hypercohomologie de Zariski de X à valeurs dans le triangle (2.6) pour $n = 2$, on trouve une suite exacte

$$0 \to H^4(X, \mathbf{Z}(2)) \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(2)) \\ \to H^0(X, R^4\alpha_*\mathbf{Z}(2)_{\text{ét}}) \to H^5(X, \mathbf{Z}(2)).$$

D'après la remarque 2.4, on a $H^4(X, \mathbf{Z}(2)) = CH^2(X)$ et $H^5(X, \mathbf{Z}(2)) = 0$. D'autre part, le triangle exact

$$\mathbf{Z}_X(2)_{\text{ét}} \to \mathbf{Q}_X(2)_{\text{ét}} \to (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_X(2)_{\text{ét}}$$

provenant du théorème 2.6 donne une longue suite exacte de faisceaux

$$R^3\alpha_*\mathbf{Q}_X(2)_{\text{ét}} \to R^3\alpha_*(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_X(2)_{\text{ét}} \to R^4\alpha_*\mathbf{Z}_X(2)_{\text{ét}} \to R^4\alpha_*\mathbf{Q}_X(2)_{\text{ét}}.$$

On a $R^3\alpha_*\mathbf{Q}_X(2)_{\text{ét}} = R^4\alpha_*\mathbf{Q}_X(2)_{\text{ét}} = 0$ puisque $\mathbf{Z}_X(2)$ est concentré en degrés ≤ 2, cf. théorème 2.6 c). Ce qui conclut, via l'isomorphisme (2.5). □

Remarques 2.10. — 1) La suite exacte (2.7) apparaît dans [**28**, Th. 1.1, éq. (9)], avec $\mathbf{Z}(2)$ remplacé par le complexe de Lichtenbaum $\Gamma(2)$; à la 2-torsion près, elle est déjà chez Lichtenbaum [**38**, Th. 2.13 et rem. 2.14]. Il est probable qu'on a un isomorphisme

$$\Gamma(2, X) \simeq \tau_{\geq 1}\left(z^2(X, \bullet)[-4]\right) \tag{2.8}$$

dans $D(X_{\text{Zar}})$ pour tout k-schéma lisse X.[2] Une fonctorialité suffisante de cet isomorphisme impliquerait qu'il peut s'étalifier. Dans [**5**, Th. 7.2], un isomorphisme (2.8) est construit pour $X = \operatorname{Spec} k$. Mais (2.8) ne semble pas apparaître dans la littérature en général.

2) En se reposant sur la conjecture de Bloch-Kato en poids 3, on obtient de la même manière une suite exacte

$$0 \to H^2(X, \mathcal{K}_3) \to H^5_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(3)) \to H^0(X, \mathcal{H}^4_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3)) \\ \to CH^3(X) \to H^6_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(3)).$$

Cette suite apparaît dans [**30**, Rem. 4.10], sauf que le premier terme est $H^5(X, \mathbf{Z}(3))$; son identification avec $H^2(X, \mathcal{K}_3)$ se fait à l'aide de la suite spectrale de coniveau de la remarque 2.4.

2. Par ailleurs, la conjecture de Beilinson-Soulé prédit que $\mathbf{Z}(2) \to \tau_{\geq 1}\mathbf{Z}(2)$ est un quasi-isomorphisme, mais elle n'a pas d'importance pour ce travail.

2.6. D'autres suites exactes. —

Proposition 2.11. — *On a des suites exactes*

$$0 \to H^3(X, \mathbf{Z}/m(2)) \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/m(2)) \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Z}/m(2))) \\ \to CH^2(X) \otimes \mathbf{Z}/m \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/m(2))$$

($m > 0$),

$$0 \to H^3(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \\ \to CH^2(X) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

Démonstration. — Elle s'obtiennent comme dans la preuve de la proposition 2.9 en prenant la cohomologie des triangles exacts

$$\mathbf{Z}/m(2) \to R\alpha_*(\mathbf{Z}/m)_{\text{ét}}(2) \to \tau_{\geq 3} R\alpha_*(\mathbf{Z}/m)_{\text{ét}}(2) \xrightarrow{+1}$$

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2) \to R\alpha_*(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{\text{ét}}(2) \to \tau_{\geq 3} R\alpha_*(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{\text{ét}}(2) \xrightarrow{+1}$$

obtenus en tensorisant (2.6) par $\mathbf{Z}/m$ ou $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ au sens dérivé. □

On reconnaît donc dans $H^3(X, \mathbf{Z}/m(2))$ le groupe $NH^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/m(2))$ de Suslin [**46**, §4]. On peut sans doute montrer que la seconde suite exacte coïncide avec celle de [**11**, p. 790, rem. 2].

3. Cohomologie l-adique et p-adique

Dans cette section, k est un corps quelconque, de caractéristique $p \geq 0$.

3.1. Classe de cycle l-adique et p-adique. — Soit l un nombre premier quelconque. Pour toute k-variété lisse X, on a des applications "classe de cycle l-adique"

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Z}_l \to H^i_{\text{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(n)). \tag{3.1}$$

Ces homomorphismes proviennent d'un morphisme de complexes (dans la catégorie dérivée de la catégorie des complexes de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$)

$$\mathbf{Z}_X(n)_{\text{ét}} \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}_l \to \mathbf{Z}_l(n)^c_X \tag{3.2}$$

où

$$\mathbf{Z}_l(n)^c_X = \begin{cases} R\varprojlim \mu_{l^r}^{\otimes n} & \text{si } l \neq p \\ R\varprojlim \nu_r(n)[-n] & \text{si } l = p. \end{cases}$$

Cette construction est décrite dans [**29**, §1.4, en part. (1.8)] pour $l \neq p$ et dans [**30**, §3.5] pour $l = p$. Elle repose sur celles de Geisser-Levine aux crans finis dans [**18**] pour $l \neq p$ et dans [**17**, dém. du th. 8.3] pour $l = p$.

Remarque 3.1. — Pour $l \neq p$ et $i = 2n$, la composée de (3.1) avec l'homomorphisme $CH^n(X) \otimes \mathbf{Z}_l \to H^{2n}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Z}_l$ (2.7) n'est autre que la classe de cycle de Jannsen [**24**, Lemma 6.14] : cela résulte de la construction même dans [**18**] de l'isomorphisme du théorème 2.6 a). Pour $l = p$, il est moins clair que (3.1) soit compatible avec la classe de cycle de Gros [**19**, p. 50, déf. 4.1.7 et p. 55, prop. 4.2.33]. Cela doit pouvoir se vérifier directement ; comme je n'en aurai pas besoin, je laisse cet "exercice" aux lecteurs intéressés.

Notons les isomorphismes évidents :

$$\mathbf{Z}_l(n)^c_X \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}/l^r \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \mu_{l^r}^{\otimes n} & \text{si } l \neq p \\ \nu_r(n)[-n] & \text{si } l = p. \end{cases} \tag{3.3}$$

Définition 3.2. — On note respectivement $K_X(n)_{\text{ét}}$ et $K_X(n)$ le choix d'un cône du morphisme (3.2) et du morphisme composé

$$\mathbf{Z}_X(n) \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}_l \to R\alpha_* \mathbf{Z}_X(n)_{\text{ét}} \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}_l \to R\alpha_* \mathbf{Z}_l(n)^c_X$$

de sorte qu'on a un morphisme

$$K_X(n) \to R\alpha_* K_X(n)_{\text{ét}}$$

compatible avec le morphisme $\mathbf{Z}_X(n) \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}_l \to R\alpha_* \mathbf{Z}_X(n)_{\text{ét}} \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}_l$.

Remarque 3.3. — Rappelons que $K_X(n)$ et $K_X(n)_{\text{ét}}$ ne sont uniques qu'à isomorphisme non unique près ; le morphisme $K_X(n) \to R\alpha_* K_X(n)_{\text{ét}}$ n'a pas non plus d'unicité particulière. En particulier, ces choix ne sont fonctoriels en X que pour les immersions ouvertes : cela suffira pour nos besoins ici. Toutefois, on pourrait faire des choix plus rigides (fonctoriels pour les morphismes quelconques entre schémas lisses), quitte à travailler dans des catégories de modèles convenables.

En vertu du théorème 2.6, (3.3) implique immédiatement :

Proposition 3.4. — *Le morphisme* (3.2)$\otimes \mathbf{Z}/l^r$ *est un isomorphisme pour tout entier* $r \geq 1$. *Autrement dit, les faisceaux de cohomologie de* $K_X(n)_{\text{ét}}$ *sont uniquement* l*-divisibles.* □

Corollaire 3.5. — *Pour tout* (X, i, n)*, le noyau de* (3.1) *est* l*-divisible et son conoyau est sans* l*-torsion.*

Démonstration. — On a une suite exacte

$$H^{i-1}_{\text{ét}}(X, K(n)) \to H^i_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Z}_l \to H^i_{\text{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(n)) \to H^i_{\text{ét}}(X, K(n))$$

(où $H^*_{\text{ét}}(X, K(n)) := \mathbb{H}^*_{\text{ét}}(X, K_X(n)_{\text{ét}})$), dont les termes extrêmes sont uniquement divisibles. □

3.2. Démonstration du théorème 1.1 : première partie. — On va démontrer :

Proposition 3.6. — *Soit* C *le conoyau de* (1.1)*. On a une surjection*

$$H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) \twoheadrightarrow C_{\text{tors}} \tag{3.4}$$

de noyau divisible.

Démonstration. — Utilisons la suite exacte (2.7) : en chassant dans le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to K & \longrightarrow & CH^2(X) \otimes \mathbf{Z}_l & \longrightarrow & H^4_{\text{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) & \longrightarrow & C \to 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{=} & & \downarrow \\
0 \to K_{\text{ét}} & \longrightarrow & H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(2)) \otimes \mathbf{Z}_l & \longrightarrow & H^4_{\text{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) & \longrightarrow & C_{\text{ét}} \to 0
\end{array}$$

(définissant $K, K_{\text{ét}}$, C et $C_{\text{ét}}$), on en déduit une suite exacte

$$0 \to K \to K_{\text{ét}} \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) \to C \to C_{\text{ét}} \to 0. \tag{3.5}$$

On conclut en utilisant le corollaire 3.5. □

3.3. Suites spectrales de coniveau. — Soit C un complexe de faisceaux Zariski sur X. Par une technique bien connue remontant à Grothendieck et Hartshorne (cf. [**9**, 1.1]) on obtient une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H^{p+q}_x(X, C) \Rightarrow H^{p+q}(X, C).$$

Cette suite spectrale est clairement naturelle en $C \in D(X_{\text{Zar}})$. On notera de manière suggestive :

$$E_2^{p,q} = A^p(X, H^q(C))$$

de sorte qu'on a des morphismes "edge"

$$H^n(X, C) \to A^0(X, H^n(C)). \tag{3.6}$$

Lorsque C vérifie la conjecture de Gersten, on a des isomorphismes canoniques

$$A^p(X, H^q(C)) \simeq H^p(X, \mathcal{H}^q(C)).$$

D'après [**9**, cor. 5.1.11] c'est le cas pour $C = R\alpha_*\mathbf{Z}_l(n)^c_X$. En effet, pour $l \neq p$, la théorie cohomologique à supports correspondante vérifie les axiomes **COH1** (excision étale, on dit maintenant Nisnevich) et **COH3** (invariance par homotopie) de [**9**] ; pour $l = p$, elle vérifie **COH1** et **COH5**. Ce dernier axiome est la "formule du fibré projectif" : il résulte de [**19**]. Si k est un corps fini, il faut adjoindre à ces axiomes l'axiome **COH6** de [**9**, p. 64] (existence de transferts pour les extensions finies) : il est standard.

C'est également le cas pour $C = \mathbf{Z}_X(n)$, cf. preuve du lemme 2.5. Par contre ce n'est pas clair pour $C = K_X(n)$: en effet, la règle $(X, Y) \mapsto H^*_Y(X, K(n))$ ne définit pas une théorie cohomologique à supports sans un choix cohérent des cônes $K_X(n)$. Plus précisément, cette règle n'est pas a priori fonctorielle en (X, Y) pour les morphismes quelconques de paires. On ne peut donc pas lui appliquer la théorie de Bloch-Ogus–Gabber développée dans [**9**]. La considération des suites spectrales de coniveau va nous permettre de contourner ce problème.

3.4. Un encadrement de la cohomologie non ramifiée. — L'identification du noyau de (3.4) est plus délicate. À titre préparatoire, on va pousser l'analyse du numéro 3.1 un peu plus loin en faisant intervenir la conjecture de Bloch-Kato en degré n.

Par l'axiome de l'octaèdre (et la conjecture de Bloch-Kato, cf. (2.6)), on a un diagramme commutatif de triangles distingués dans $D(X_{\mathrm{Zar}})$, où $K_X(n)$ et $K_X(n)_{\text{ét}}$ ont été introduits dans la définition 3.2

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{Z}_X(n) \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}_l & \longrightarrow & R\alpha_*\mathbf{Z}_l(n)^c_X & \longrightarrow & K_X(n) \\
\downarrow & & \| \downarrow & & f \downarrow \\
R\alpha_*\mathbf{Z}_X(n)_{\text{ét}} \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}_l & \longrightarrow & R\alpha_*\mathbf{Z}_l(n)^c_X & \longrightarrow & R\alpha_*K_X(n)_{\text{ét}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\tau_{\geq n+2}R\alpha_*\mathbf{Z}_X(n)_{\text{ét}} \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}_l & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C
\end{array}$$

et où C est par définition "le" cône de f. On a donc un zig-zag d'isomorphismes

$$C \xrightarrow{\sim} \tau_{\geq n+2} R\alpha_* \mathbf{Z}_X(n)_{\text{ét}} \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}_l[1] \xleftarrow{\sim} \tau_{\geq n+1} R\alpha_*(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)(n)_{\text{ét}}$$

où l'isomorphisme de gauche provient du diagramme ci-dessus, et celui de droite provient du corollaire 2.8. D'où un triangle exact

$$K_X(n) \to R\alpha_* K_X(n)_{\text{ét}} \to \tau_{\geq n+1} R\alpha_*(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)(n)_{\text{ét}} \xrightarrow{+1} .$$

Comme le deuxième terme est uniquement divisible (proposition 3.4) et que le troisième est de torsion, cela montre que

$$K_X(n) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} R\alpha_* K_X(n)_{\text{ét}}.$$

On en déduit :

Lemme 3.7. — *Soit $l \neq p$. Sous la conjecture de Bloch-Kato en degré n, le groupe $H^i(X, K(n))$ est uniquement divisible pour $i \leq n$ et on a une suite exacte courte*

$$\begin{aligned}(3.7)\quad 0 \to H^{n+1}(X, K(n)) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to H^0(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(n))) \\ \to H^{n+2}(X, K(n))_{\text{tors}} \to 0.\end{aligned}$$

Le même énoncé vaut pour $l = p$, en utilisant le théorème A.5. □

Le point est maintenant d'identifier les termes extrêmes de (3.7) à des groupes plus concrets : nous n'y parvenons que pour $n = 2$ au §3.6. Mais pour n quelconque, notons la suite exacte

$$\begin{aligned}(3.8)\quad 0 \to \operatorname{Coker}\big(H^{n+2}(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Z}_l \to H^{n+2}_{\text{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(n))\big) \\ \to H^{n+2}(X, K(n)) \to H^{n+3}(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Z}_l\end{aligned}$$

et les homomorphismes évidents :

$$(3.9)\quad H^{n+1}(X, K(n)) \xrightarrow{\alpha} A^0(X, H^{n+1}(K(n))) \xleftarrow{\beta} A^0(X, H^{n+1}_{\text{cont}}(\mathbf{Z}_l(n)))$$

où α est l'homomorphisme (3.6). La suite exacte (3.8) en induit une sur les sous-groupes de torsion. Pour $n = 2$, le dernier terme est nul : on retrouve ainsi la proposition 3.6. Pour $n > 2$, la première flèche de (3.8) n'a plus de raison d'être surjective sur la torsion. Notons tout de même que pour $n = 3$, le dernier terme de (3.8) n'est autre que $CH^3(X) \otimes \mathbf{Z}_l$ (comparer à la remarque 2.10).

D'autre part :

Lemme 3.8. — *L'homomorphisme β de* (3.9) *est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$.*

Démonstration. — Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{x\in X^{(0)}} H_x^{n+1}(X,\mathbf{Z}_l(n)) & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X^{(1)}} H_x^{n+2}(X,\mathbf{Z}_l(n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{x\in X^{(0)}} H_x^{n+1}(X,K(n)) & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X^{(1)}} H_x^{n+2}(X,K(n)) \end{array}$$

les deux flèches verticales sont des isomorphismes. En effet, elle s'insèrent dans des suites exactes du type

$$H_x^{n+1}(X,\mathbf{Z}(n))\otimes\mathbf{Z}_l\to H_x^{n+1}(X,\mathbf{Z}_l(n))\to H_x^{n+1}(X,K(n))\to H_x^{n+2}(X,\mathbf{Z}(n))\otimes\mathbf{Z}_l$$

$$H_x^{n+2}(X,\mathbf{Z}(n))\otimes\mathbf{Z}_l\to H_x^{n+2}(X,\mathbf{Z}_l(n))\to H_x^{n+2}(X,K(n))\to H_x^{n+3}(X,\mathbf{Z}(n))\otimes\mathbf{Z}_l$$

où dans la première suite, x est de codimension 0 et dans la seconde suite, x est de codimension 1. Sans perte de généralité, on peut supposer X connexe et alors, pour son point générique η (cf. théorème 2.1 a)) :

$$H_\eta^i(X,\mathbf{Z}(n)) := \varinjlim_U H^i(U,\mathbf{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} H^i(k(X),\mathbf{Z}(n)) = 0 \text{ pour } i > n.$$

Pour x de codimension 1, on a

$$H_x^i(X,\mathbf{Z}(n)) := \varinjlim_{U\ni x} H_{Z_U}^i(U,\mathbf{Z}(n))$$

où $Z_U = \overline{\{x\}}\cap U$. Grâce au théorème 2.1 b) et a), cette limite devient

$$\varinjlim_{U\ni x} H^{i-2}(Z_U,\mathbf{Z}(n-1)) = H^{i-2}(k(x),\mathbf{Z}(n-1)) = 0 \text{ pour } i-2 > n-1.$$

Le lemme en découle. □

3.5. Cohomologie à supports de $K(n)$. — On aura aussi besoin des deux lemmes suivants au prochain numéro :

Lemme 3.9. — *Soit $l \neq \operatorname{car} k$.*
Soit $Y \subset X$ un couple lisse de codimension d. Alors il existe des isomorphismes

$$H_{\mathrm{Zar}}^{i-2d}(Y,K(n-d)) \xrightarrow{\sim} H_Y^i(X,K(n)) \quad (n\geq 0, i\in\mathbf{Z})$$

contravariants pour les immersions ouvertes $U \hookrightarrow X$.

Attention : ce lemme affirme l'existence d'isomorphismes de pureté, mais ne dit rien sur leur caractère canonique ou fonctoriel au-delà de la contravariance énoncée. (On peut faire en sorte qu'ils soient contravariants pour les morphismes quelconques entre variétés lisses, mais c'est plus technique et inutile ici.)

Démonstration. — Notons i l'immersion fermée $Y \to X$. On remarque que le diagramme de $D(Y_{\mathrm{Zar}})$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}(n-d)_Y \otimes \mathbf{Z}_l[-2d] & \xrightarrow{\mathrm{cl}_Y^{n-d}} & R\alpha_*\mathbf{Z}_l(n-d)_Y^c[-2d] \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow \\ Ri^!_{\mathrm{Zar}}\mathbf{Z}(n)_X \otimes \mathbf{Z}_l & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^n} & R\alpha_* Ri^!_{\text{ét}}\mathbf{Z}_l(n)_X^c \end{array}$$

où f est induit par le théorème 2.1 b) et g est donné par le théorème de pureté en cohomologie étale, est commutatif : cela résulte tautologiquement de la construction des classes de cycles motiviques dans [**18**]. Par conséquent, ce diagramme s'étend en un diagramme commutatif de triangles exacts

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Z}(n-d)_Y \otimes \mathbf{Z}_l[-2d] & \xrightarrow{\mathrm{cl}_Y^{n-d}} & R\alpha_*\mathbf{Z}_l(n-d)_Y^c[-2d] & \to & K(n-d)_Y[-2d] & \xrightarrow{+1} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & \\ Ri^!_{\mathrm{Zar}}\mathbf{Z}(n)_X \otimes \mathbf{Z}_l & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^n} & R\alpha_* Ri^!_{\text{ét}}\mathbf{Z}_l(n)_X^c & \to & Ri^!_{\mathrm{Zar}}K(n)_X & \xrightarrow{+1} \end{array}$$

(Rien n'est dit sur un choix privilégié de h.) Comme f et g sont des quasi-isomorphismes, h en est un aussi, d'où l'énoncé.

Comme h est un morphisme dans la catégorie dérivée des faisceaux Zariski sur Y, la contravariance annoncée est tautologique pour $U \hookrightarrow X$ tel que $U \cap Y \neq \emptyset$, et elle est sans contenu lorsque $U \cap Y = \emptyset$. □

Lemme 3.10. — *Soit $l = p = \operatorname{car} k$.*
Soit $Y \subset X$ un couple lisse de codimension d. Alors il existe des homomorphismes

$$H^{i-2d}(Y, K(n-d)) \xrightarrow{h^i} H^i_Y(X, K(n)) \quad (n \geq 0, i \in \mathbf{Z})$$

contravariants pour les immersions ouvertes $U \hookrightarrow X$. Ce sont des isomorphismes pour $i \leq n+d$.

Démonstration. — On raisonne comme dans la démonstration du lemme 3.9, en utilisant cette fois le théorème 2.6 b) et les résultats de Gros [**19**]. D'après [**19**, (3.5.3) et th. 3.5.8], on a

$$R^q i^! \nu_r(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq d, d+1 \\ \nu_r(n-d) & \text{si } q = d. \end{cases} \tag{3.10}$$

La formule (3.10) et sa compatibilité aux classes de cycles motiviques (elle est à la base de leur construction) fournit un diagramme commutatif dans $D(Y_{\mathrm{Zar}})$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}(n-d)_Y \otimes \mathbf{Z}_p & \longrightarrow & R\alpha_* \mathbf{Z}_p(n-d)^c[-2d] \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle g}\big\downarrow \\ Ri^!_{\mathrm{Zar}} \mathbf{Z}(n)_X \otimes \mathbf{Z}_p & \longrightarrow & R\alpha_* Ri^!_{\text{ét}} \mathbf{Z}_p(n)^c. \end{array} \tag{3.11}$$

Il en résulte un morphisme

$$K(n-d)_Y \xrightarrow{h} Ri^!_{\mathrm{Zar}} K(n)_X$$

complétant le carré ci-dessus en un diagramme commutatif de triangles exacts. Ceci fournit les homomorphismes h^i du lemme.

Dans le diagramme (3.11), f est un isomorphisme (théorème 2.1 b)). Par (3.10), le cône de g est acyclique en degrés $\leq n+d$. Par conséquent, le cône de h est acyclique en degrés $\leq n+d$, ce qui donne la bijectivité de h^i pour $i \leq n+d$. □

3.6. Fin de la démonstration du théorème 1.1. — On prend maintenant $n = 2$. Le résultat principal est :

Proposition 3.11. — *Pour $n = 2$, l'homomorphisme α de* (3.9) *est surjectif de noyau $A^1(X, H^2(K(2)))$, uniquement divisible.*

Démonstration. — Notons $E_2^{a,b} = A^a(X, H^b(K(n))$: c'est la cohomologie d'un certain complexe de Cousin.

En utilisant les lemmes 3.9 et 3.10, on trouve que $E_1^{a,b} = 0$ pour

$l \neq p$ **:** $a > 2$ et $a + b < 2a$; $a = 2$ et $a + b \leq 4$.

$l = p$ **:** $a > 2$ et $a + b < 2 + a$; $a = 2$ et $a + b \leq 4$.

(En particulier, $E_2^{2,2} = 0$ puisque $K(0) = 0$!) On en déduit une suite exacte

$$0 \to A^1(X, H^2(K(2))) \to H^3(X, K(2)) \to A^0(X, H^3(K(2))) \to 0. \tag{3.12}$$

Mais $A^1(X, H^2(K(2)))$ est l'homologie du complexe

$$E_1^{0,2} \to E_1^{1,2} \to E_1^{2,2}$$

dont tous les termes sont encore dans le domaine d'application des lemmes 3.9 et 3.10 (isomorphismes de pureté). D'après le lemme 3.7, ils sont uniquement divisibles, ainsi donc que $E_2^{1,2}$. □

Le théorème 1.1 résulte maintenant de la proposition 3.6, du lemme 3.7, du lemme 3.8 et de la proposition 3.11. □

3.7. Un complément. — Notons pour conclure :

Lemme 3.12. — *Le $\mathbf{Z}_l$-module $H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2)))$ est sans torsion.*

Démonstration. — On fait comme dans [**12**, th. 3.1] (cet argument remonte à Bloch-Srinivas [**7**] pour la cohomologie de Betti) : le théorème de Merkurjev-Suslin implique que le faisceau $\mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))$ est sans torsion. (Pour $l = p$, utiliser [**17**].) □

4. Cas d'un corps de base séparablement clos

Soient k un corps séparablement clos et X une k-variété lisse. On veut préciser le théorème 1.1 dans ce cas, toujours dans l'esprit de Colliot-Thélène–Voisin [**12**].

4.1. Lien avec les cycles de Tate. — Le lemme suivant est démontré dans [**10**]. Il montre que les cycles de Tate entiers fournissent un bon analogue des cycles de Hodge entiers considérés dans [**12**] :

Lemme 4.1. — *Soient G un groupe profini et M un $\mathbf{Z}_l$-module de type fini muni d'une action continue de G. Soit*

$$M^{(1)} = \bigcup_U M^U$$

où U décrit les sous-groupes ouverts de G. Alors $M/M^{(1)}$ est sans torsion.

On en déduit :

Lemme 4.2. — *Supposons que k soit la clôture séparable d'un corps de type fini et que $l \neq \operatorname{car} k$. Alors le groupe fini C_{tors} du théorème 1.1 est aussi le sous-groupe de torsion de*

$$\operatorname{Coker}\left(CH^2(X) \otimes \mathbf{Z}_l \to H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2))^{(1)}\right).$$

Sous la conjecture de Tate, ce conoyau est entièrement de torsion (pour X non nécessairement propre, cf. Jannsen [**25**, p. 114, th. 7.10 a)]*).* □

On peut d'ailleurs supprimer l'hypothèse que k soit la clôture séparable d'un corps de type fini. En général, écrivons $k = \bigcup_\alpha k_\alpha$, où k_α décrit l'ensemble (ordonné filtrant) des clôtures séparables des sous-corps de type fini de k sur lesquels X est définie. Pour tout α, notons X_α le k_α-modèle de X correspondant. Si $k_\alpha \subset k_\beta$, on a des isomorphismes

$$H^4_{\mathrm{cont}}(X_\alpha, \mathbf{Z}_l(2)) \xrightarrow{\sim} H^4_{\mathrm{cont}}(X_\beta, \mathbf{Z}_l(2)) \xrightarrow{\sim} H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2))$$

et on peut définir

$$H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2))^{(1)} := \varinjlim_\alpha H^4_{\mathrm{cont}}(X_\alpha, \mathbf{Z}_l(2))^{(1)}.$$

Il s'agit en fait d'une limite inductive d'isomorphismes puisque, si X est définie sur $k^0_\alpha \subset k_\alpha$ de type fini et de clôture séparable k_α et que $k_\beta \supset k_\alpha$, l'homomorphisme $Gal(k_\beta/k_\beta k^0_\alpha) \to Gal(k_\alpha/k^0_\alpha)$ est surjectif.

4.2. Lien avec le groupe de Griffiths. — Si $k = \mathbf{C}$ et X est projective, Colliot-Thélène et Voisin ont établi un lien entre $H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$ et le groupe de Griffiths dans [**12**, §4.2]. Reprenons cette idée en l'amplifiant un peu.

Voici d'abord une définition de groupes de Griffiths et de groupes d'équivalence homologique dans le contexte l-adique. Supposons k séparablement clos si $l \neq \operatorname{car} k$, et k algébriquement clos si $l = \operatorname{car} k$. Par un argument bien connu de Bloch ([**6**, lemma 7.10], [**1**, Lect. 1, lemma 1.3]), pour toute k-variété lisse X, le sous-groupe de $CH^n(X)$ formé des cycles algébriquement équivalents à zéro est l-divisible ; les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} CH^n(X) \otimes \mathbf{Z}_l & \xrightarrow{\mathrm{cl}^n} & H^{2n}_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH^n(X) \otimes \mathbf{Z}/l^s & \xrightarrow{\mathrm{cl}^n_s} & H^{2n}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l^s(n)) \end{array}$$

et l'isomorphisme

$$H^{2n}_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(n)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_s H^{2n}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l^s(n)) \tag{4.1}$$

montrent donc que cl^n_s et cl^n se factorisent à travers l'équivalence algébrique.

(Précisons. L'isomorphisme (4.1) est valable pourvu que le système projectif $(H^{2n-1}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l^s(n)))_{s\geq 1}$ soit de Mittag-Leffler. Pour $l \neq \operatorname{car} k$ c'est vrai parce que les termes sont finis ; pour $l = \operatorname{car} k$ et X projective c'est expliqué dans [**11**, p. 783], donc il faut a priori supposer X projective dans ce cas.)

Ceci donne un sens à :

Définition 4.3. — Soit X une k-variété lisse où k est séparablement clos si $l \neq \operatorname{car} k$ et algébriquement clos si $l = \operatorname{car} k$; dans ce dernier cas, on suppose aussi X projective. Soit $A \in \{\mathbf{Z}_l, \mathbf{Q}_l, \mathbf{Z}/l^n, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l\}$. On note

$$\operatorname{Griff}^n(X, A) = \operatorname{Ker}\left(A^n_{\text{alg}}(X) \otimes A \xrightarrow{\text{cl}^n} H^{2n}_{\text{cont}}(X, A(n))\right)$$
$$A^n_{\text{hom}}(X, A) = \operatorname{Im}\left(A^n_{\text{alg}}(X) \otimes A \xrightarrow{\text{cl}^n} H^{2n}_{\text{cont}}(X, A(n))\right).$$

Remarque 4.4. — Si $k = \mathbf{C}$, on a $\operatorname{Griff}^n(X, \mathbf{Z}_l) = \operatorname{Griff}^n(X) \otimes \mathbf{Z}_l$ par l'isomorphisme de comparaison entre cohomologies de Betti et l-adique, où $\operatorname{Griff}^n(X)$ est défini à l'aide de la cohomologie de Betti.

On a la version l-adique de [**6**, th. 7.3] :

Proposition 4.5. — *Supposons $l \neq \operatorname{car} k$. Notons $A^n_{\text{alg}}(X)$ le groupe des cycles de codimension n sur X modulo l'équivalence algébrique. Dans la suite spectrale de coniveau*

$$E^{p,q}_r \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbf{Z}_l(n))$$

pour la cohomologie l-adique de X, on a un isomorphisme

$$A^n_{\text{alg}}(X) \otimes \mathbf{Z}_l \xrightarrow{\sim} E^{n,n}_2$$

induit par l'isomorphisme

$$Z^n(X) \otimes \mathbf{Z}_l \xrightarrow{\sim} E^{n,n}_1$$

donné par les isomorphismes de pureté.

Démonstration. — C'est la même que celle de [**6**, preuve du th. 7.3], *mutatis mutandis*. Plus précisément, la première étape est identique. Dans la deuxième étape, on remplace la désingularisation à la Hironaka des cycles de codimension n de X par une désingularisation à la de Jong [**15**, th. 4.1] ; pour obtenir des résultats entiers, on utilise le théorème de Gabber [**16**] disant qu'on peut trouver une telle désingularisation de degré premier à l. Enfin, l'argument transcendant de [**6**] pour prouver que équivalences algébrique et homologique coïncident pour les diviseurs

sur une variété lisse Y est remplacé par le suivant : par [**6**, lemme 7.10], le noyau de $CH^n(Y) \to A^n_{\mathrm{alg}}(Y)$ est l-divisible, donc les suites exactes de Kummer

$$\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{l^n} \mathrm{Pic}(X) \to H^2(X, \mathbf{Z}/l^n(1))$$

définissent des injections

$$0 \to A^1_{\mathrm{alg}}(X)/l^n \to H^2(X, \mathbf{Z}/l^n(1))$$

d'où à la limite

$$0 \to A^1_{\mathrm{alg}}(X) \otimes \mathbf{Z}_l \to H^2_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(1))$$

puisque $A^1_{\mathrm{alg}}(X)$ est un $\mathbf{Z}$-module de type fini. □

Notons que ces arguments ne nécessitent pas que X soit projective (pour le dernier, cf. [**33**, th. 3]). Si le théorème de Gabber n'évitait pas $l = p$, la démonstration s'étendrait à ce nombre premier.

Convention 4.6. — *À partir de maintenant, l est supposé différent de* $\operatorname{car} k$ *sauf mention expresse du contraire.* La raison essentielle pour cela est que cette restriction apparaît dans la proposition 4.5 (cf. le commentaire ci-dessus).

***Corollaire 4.7* (cf. [12**, th. 2.7]). — *On a une suite exacte*

$$H^3_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \xrightarrow{\alpha} H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \to \mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \to 0.$$

Démonstration. — Cela résulte de la suite exacte

$$H^3_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \to E_2^{0,3} \to E_2^{2,2} \xrightarrow{c} H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2))$$

provenant de la suite spectrale de Bloch-Ogus en poids 2, de l'identification de $E_2^{0,3}$ à $H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2)))$, de celle de $E_2^{2,2}$ à $A^2_{\mathrm{alg}}(X) \otimes \mathbf{Z}_l$ (proposition 4.5) et de celle de c à l'application classe de cycle. □

L'analogue complexe du corollaire suivant devrait figurer dans [**12**] :

Corollaire 4.8. — *a) On a une suite exacte, modulo des groupes finis :*

$$H^3_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \\ \to \mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$$

(cf. définition 4.3).
b) Le groupe $H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est dénombrable.
c) Si $\operatorname{car} k = 0$, il existe X/k projective lisse telle que son corang soit infini pour l convenable.

(Précisons : “modulo des groupes finis” signifie “dans la localisation de la catégorie des groupes abéliens relative à la sous-catégorie épaisse des groupes abéliens finis”.)

Démonstration. — a) résulte du théorème 1.1 et du corollaire 4.7. Pour b), le terme de gauche dans la suite de a) est de cotype fini, donc dénombrable, et le terme de droite l'est aussi (propriété classique des cycles modulo l'équivalence algébrique). Enfin, d'après Schoen [**42**], on a des exemples de X et de nombres premiers l (même sur $\bar{\mathbf{Q}}$) où $\mathrm{Griff}^2(X)/l$ est infini ; en utilisant [**12**, prop. 4.1] (voir aussi corollaire 4.15 du présent article), on en déduit que $\mathrm{Griff}^2(X) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ est de corang infini. □

4.3. Quelques calculs de groupes de torsion. — On veut maintenant préciser le corollaire 4.8 a) en décrivant explicitement le noyau de l'application $H^3_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Définition 4.9. — Soit A un $\mathbf{Z}_l$-module de la forme $\mathbf{Z}_l, \mathbf{Q}_l, \mathbf{Z}/l^n, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$. On note $NH^3_{\mathrm{cont}}(X, A)$ le premier cran de la filtration par le coniveau sur $H^3_{\mathrm{cont}}(X, A)$ et

$$H^3_{\mathrm{tr}}(X, A) = \frac{H^3_{\mathrm{cont}}(X, A)}{NH^3_{\mathrm{cont}}(X, A)}.$$

Si on a un twist à la Tate, on note $NH^3_{\mathrm{cont}}(X, A(n)) := NH^3_{\mathrm{cont}}(X, A)(n)$.

Notons que $NH^3_{\mathrm{cont}}(X, A(2)) = H^3(X, A(2))$ (cohomologie motivique de Nisnevich) pour $A = \mathbf{Z}/l^n$ ou $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$, d'après la proposition 2.11.

Remarque 4.10. — Si X est propre, les $\mathbf{Z}_l$-modules $H^3_{\mathrm{tr}}(X, A)$ sont des invariants birationnels de X, avec l'action de $Gal(k/k_0)$ si X est défini sur un sous-corps k_0 de clôture séparable k. C'est dû à Grothendieck [**22**, 9.4].

Le lemme 3.12 implique :

Lemme 4.11. — *Le $\mathbf{Z}_l$-module de type fini $H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Z}_l(2))$ est sans torsion.* □

Par définition de $NH^3_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2))$, la suite exacte du corollaire 4.7 se raffine en une suite exacte :

$$0 \to H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \to \mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \to 0$$

qui montre incidemment que $\mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l)$ est un invariant birationnel pour X propre et lisse (cf. remarque 4.10). En réutilisant le lemme 3.12, on en déduit :

Proposition 4.12. — *On a une suite exacte*

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l)_{\mathrm{tors}} \to H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ &\to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to \mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0. \quad \square \end{aligned}$$

Remarque 4.13. — Dans cette remarque, nous adoptons la convention contravariante pour les motifs purs sur un corps. Supposons que X, de dimension d, vérifie la conjecture standard C et la conjecture de nilpotence suivante : l'idéal $\mathrm{Ker}(CH^d(X \times X) \otimes \mathbf{Q} \to A^d_{\mathrm{num}}(X \times X) \otimes \mathbf{Q})$ de l'anneau des correspondances de Chow est nilpotent. Ces propriétés sont vérifiées par exemple si X est une variété abélienne : Lieberman-Kleiman [**37**] pour la première et Kimura [**36**] pour la seconde. Alors le motif numérique de X admet une décomposition de Künneth, qui se relève en une décomposition de Chow-Künneth de son motif de Chow :

$$h(X) = \bigoplus_{i=0}^{2d} h^i(X).$$

Mais le théorème de semi-simplicité de Jannsen [**26**] implique que chaque facteur numérique $h^i_{\mathrm{num}}(X)$ admet une décomposition plus fine, provenant de sa décomposition isotypique :

$$h^i_{\mathrm{num}}(X) = \bigoplus_{j=0}^{i/2} h^{i,j}_{\mathrm{num}}(X)(-j)$$

où $h^{i,j}_{\mathrm{num}}(X)$ est effectif mais aucun facteur simple de $h^{i,j}_{\mathrm{num}}(X)(1)$ n'est effectif. Cette décomposition se relève de nouveau pour donner une décomposition de Chow-Künneth raffinée (cf. [**34**, th. 7.7.3]) :

$$h(X) = \bigoplus_{i=0}^{2d} \bigoplus_{j=0}^{i/2} h^{i,j}(X)(-j).$$

Notons Ab la catégorie des groupes abéliens, $\mathcal{A}$ le quotient de Ab par la sous-catégorie épaisse des groupes abéliens d'exposant fini et, pour tout anneau commutatif R, $\mathrm{Chow}(k, R)$ la catégorie des motifs de Chow à coefficients dans R. On observe que le foncteur

$$\mathrm{Hom}(-,-) : \mathrm{Chow}(k, \mathbf{Z})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Chow}(k, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Ab}$$

s'étend en un foncteur

$$\mathrm{Hom}(-,-) : \mathrm{Chow}(k,\mathbf{Q})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Chow}(k,\mathbf{Q}) \to \mathcal{A}.$$

Par construction, $H^3_{\mathrm{tr}}(X,\mathbf{Q}_l) = H^*_{\mathrm{cont}}(h^{3,0}(X),\mathbf{Q}_l)$. Au moins si $d=3$, on peut montrer que, d'autre part,

$$\mathrm{Griff}^2(X,\mathbf{Z}_l) \simeq \mathrm{Hom}(h^{3,0}(X),\mathbb{L}) \otimes \mathbf{Z}_l$$

où $\mathbb{L}$ est le motif de Lefschetz et l'isomorphisme est dans $\mathcal{A}$. Ainsi, la proposition 4.12 et le théorème 1.1 montrent que (si $d=3$) *la nullité de* $h^{3,0}(X)$ *entraîne la finitude de* $H^0(X,\mathcal{H}^3(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))$.

D'autre part, la conjecture de Bloch-Beilinson–Murre [**27**] implique que la nullité de $h^{3,0}(X)$ découle de celle de $H^3_{\mathrm{tr}}(X,\mathbf{Q}_l)$: conjecturalement, celle-ci est donc suffisante pour impliquer la finitude du groupe $H^0(X,\mathcal{H}^3(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))$ (au moins si $\dim X = 3$).

Ceci est une variante de la conjecture 4.5 de Colliot-Thélène–Voisin [**12**]. On verra au théorème 5.2 c) qu'elle est vraie si k est la clôture algébrique d'un corps fini k_0 et que X provient de la classe $B_{\mathrm{Tate}}(k_0)$ de [**30**].

On peut se demander si la réciproque est vraie. Elle est fausse, cf. théorème 5.6.

Le lemme 4.11 et la proposition 2.11 donnent un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & NH^3_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(2))\otimes\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & H^3_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(2))\otimes\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d] & H^3_{\mathrm{tr}}(X,\mathbf{Z}_l(2))\otimes\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^3_{\mathrm{Nis}}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \arrow[r] & H^3_{\text{ét}}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \arrow[r] & H^3_{\mathrm{tr}}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

dans lequel la flèche verticale centrale est injective de conoyau fini, isomorphe à $H^4_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(2))_{\mathrm{tors}}$. Par le lemme du serpent, on en déduit :

Proposition 4.14. — *Avec les notations de* (4.2)*, a est injective et on a une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Ker}\, b \to \mathrm{Coker}\, a \to H^4_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(2))_{\mathrm{tors}} \to \mathrm{Coker}\, b \to 0.$$

Voici une application de la proposition 4.14.

Corollaire 4.15. — *Soit* $H^3(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))^0$ *le noyau de la composition*

$$H^3(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \to H^3_{\text{ét}}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \to H^4_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(2))_{\mathrm{tors}}.$$

Alors $\operatorname{Im} a \subset H^3(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))^0$ *(notations de* (4.2)*) et on a un isomorphisme*

$$\operatorname{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l)_{\mathrm{tors}} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker} b \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker} a^0$$

où $a^0 : NH^3_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{a} H^3(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))^0$ *est l'application induite par* a.

Démonstration. — La première assertion est évidente. Notons a^0 l'application induite : la suite exacte de la proposition 4.14 induit donc un isomorphisme

$$\operatorname{Ker} b \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker} a^0.$$

D'autre part, la suite exacte de la proposition 4.12 s'insère dans un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to \operatorname{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l)_{\mathrm{tors}} & \to & H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \to & H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\
 & & H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) & \to & H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))
\end{array}$$

Comme le faisceau $\mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))$ est sans torsion, la suite

$$0 \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_l(2))) \\ \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))$$

est exacte, ce qui signifie que c est injective dans le diagramme ci-dessus. On en déduit un isomorphisme

$$\operatorname{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l)_{\mathrm{tors}} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker} b$$

d'où le corollaire. □

4.4. Les homomorphismes $A^2_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{Z}_l) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \to A^2_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)$ **et** $\operatorname{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \to \operatorname{Griff}^2(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)$**.** — On garde les notations de la définition 4.3.

Proposition 4.16. — *On a des suites exactes*

$$A^2_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{Z}_l)_{\mathrm{tors}} \to \operatorname{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \to \operatorname{Griff}^2(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \\ \to A^2_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{Z}_l) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \to A^2_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \to 0$$

$$C_{\mathrm{tors}} \to A^2_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{Z}_l) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \to A^2_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)$$

où C *est comme dans* (1.1) *(cf. théorème 1.1). En particulier, l'application* $\operatorname{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \to \operatorname{Griff}^2(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)$ *est de noyau et de conoyau finis.*

Démonstration. — On a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & A^2_{\mathrm{hom}}(X,\mathbf{Z}_l)_{\mathrm{tors}} & \to & \mathrm{Griff}^2(X,\mathbf{Z}_l)\otimes\mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \to & A^2_{\mathrm{alg}}(X,\mathbf{Z}_l)\otimes\mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \to & A^2_{\mathrm{hom}}(X,\mathbf{Z}_l)\otimes\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0 \\
 & & & & \downarrow & & \wr\downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & & & \mathrm{Griff}^2(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) & \to & A^2_{\mathrm{alg}}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) & \to & A^2_{\mathrm{hom}}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \to 0
\end{array}$$

qui donne la première suite de la proposition, par application du lemme du serpent. Pour la seconde, on utilise le diagramme commitatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc}
\left(\frac{H^4_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(2))}{N^2H^4_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(2))}\right)_{\mathrm{tors}} & \to & A^2_{\mathrm{hom}}(X,\mathbf{Z}_l)\otimes\mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \to & H^4_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l)\otimes\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & A^2_{\mathrm{hom}}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) & \to & H^4_{\text{ét}}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))
\end{array}$$

en remarquant que la flèche verticale de droite est injective. □

4.5. Le sous-groupe de torsion de $CH^2(X,\mathbf{Z}_l)_{\mathrm{alg}}$. — Terminons cette analyse de la torsion en déterminant celle de $CH^2(X,\mathbf{Z}_l)_{\mathrm{alg}}$, sous-groupe de $CH^2(X)\otimes\mathbf{Z}_l$ formé des classes de cycles algébriquement équivalentes à zéro, lorsque X est propre : voir corollaire 4.21. Pour cela nous avons besoin de la proposition suivante :

Proposition 4.17. — *Supposons k séparablement clos, X/k propre et lisse et $i<2n$. Soit l un nombre premier ; si $l=\operatorname{car}k$, on suppose k algébriquement clos. Alors l'image de l'application cycle* (3.1) *est égale à $H^i_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(n))_{\mathrm{tors}}$. En particulier, $H^i_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}(n))$ est extension d'un groupe de torsion (fini pour $l\neq p$) par un groupe divisible, et*

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}(n))\otimes\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l=0.$$

Démonstration. — Étant donné le corollaire 3.5, il suffit de montrer que (3.1) a une image de torsion. On reprend les arguments de Colliot-Thélène et Raskind [**8**] : d'après le théorème 2.1 a) et le §2.3, on a

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}(n))=\varinjlim_{\alpha}H^i_{\text{ét}}(X_\alpha,\mathbf{Z}(n))$$

où X_α parcourt un ensemble ordonné filtrant de modèles de X sur des sous-corps F_α de type fini sur le corps premier. Il suffit donc de savoir que $H^i(X,\mathbf{Z}_l(n))^G$ est de torsion, où G est le groupe de Galois absolu de $F_\alpha^{p^{-\infty}}$. On le voit en se ramenant au cas d'un corps de base fini par changement de base propre et lisse (SGA4 pour $l\neq p$, Gros-Suwa pour

$l = p$, [**21**, p. 590, th. 2.1]), où cela résulte de la démonstration par Deligne de la conjecture de Weil [**13**] pour $l \neq p$ et du complément de Katz et Messing [**35**] pour $l = p$. □

Remarque 4.18. — Supposons $n = 2$. En utilisant la suite spectrale de coniveau de la remarque 2.4, on obtient un isomorphisme $H^i(X, \mathbf{Z}(2)) \simeq H^{i-2}(X, \mathcal{K}_2)$: alors l'énoncé n'est autre que celui de Colliot-Thélène–Raskind [**8**, th. 1.8 et 2.2] pour $l \neq p$, et de Gros-Suwa [**21**, p. 604, cor. 2.2 et p. 605, th. 3.1] pour $l = p$.

Corollaire 4.19. — *Sous ces hypothèses, les homomorphismes*

$$H^3(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \to CH^2(X)\{l\}$$
$$H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(2))\{l\}$$

sont bijectifs.

Démonstration. — Pour le second, cela résulte de la suite exacte des coefficients universels et de la proposition 4.17 appliquée pour $(i, n) = (3, 2)$. Pour le premier, même raisonnement en utilisant le fait que l'homomorphisme

$$H^i(X, \mathbf{Z}(2)) \to H^i_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(2))$$

est bijectif pour $i \leq 3$ par (2.6) (qui résulte en poids 2 du théorème de Merkurjev-Suslin). □

En particulier, on obtient une injection

$$H^3_{\text{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \hookrightarrow H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(2)). \tag{4.3}$$

Corollaire 4.20. — *Sous les mêmes hypothèses, soit N le noyau de l'homomorphisme $H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(2)) \otimes \mathbf{Z}_l \to H^4_{\text{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2))$. Alors* (4.3) *induit un isomorphisme*

$$H^3_{\text{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \xrightarrow{\sim} N_{\text{tors}}.$$

Corollaire 4.21. — *Sous les mêmes hypothèses, on a un isomorphisme canonique :*

$$CH^2(X, \mathbf{Z}_l)_{\text{alg}}\{l\} \xrightarrow{\sim} NH^3_{\text{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

Démonstration. — On va réutiliser le complexe $K(2)$ de la définition 3.2. Considérons le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & \\
 & H^3_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(2))_{\mathrm{tors}} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & NH^3_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(2)) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"'] & H^3_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(2)) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X,\mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Griff}^2(X,\mathbf{Z}_l) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{H}^2(K(2))) \arrow[r] & H^3(X,K(2)) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X,\mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(K(2)) \arrow[r] & 0 & \\
 & & CH^2(X,\mathbf{Z}_l)_{\mathrm{hom}} \arrow[d] & & & \\
 & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

où $CH^2(X,\mathbf{Z}_l)_{\mathrm{hom}}$ est le noyau de la classe de cycle sur $CH^2(X)\otimes\mathbf{Z}_l$. L'exactitude à gauche de la suite verticale découle de la proposition 4.17, celle de la première suite horizontale du corollaire 4.7, la seconde suite horizontale est (3.12), enfin l'isomorphisme vertical est le lemme 3.8. La flèche θ est induite par le diagramme.

Tout d'abord, le lemme 3.12 implique via ce diagamme que

$$NH^3_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(2))_{\mathrm{tors}} \xrightarrow{\sim} H^3_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(2))_{\mathrm{tors}}.$$

Appliquons maintenant le lemme du serpent aux deux suites exactes horizontales : on obtient un isomorphisme

$$\operatorname{Ker}\theta \xrightarrow{\sim} H^3_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(2))_{\mathrm{tors}}$$

et une suite exacte

$$0\to\operatorname{Coker}\theta\to CH^2(X,\mathbf{Z}_l)_{\mathrm{hom}}\xrightarrow{\phi}\mathrm{Griff}^2(X,\mathbf{Z}_l)\to 0$$

et on calcule que ϕ est la projection naturelle. Finalement on obtient une suite exacte

$$0\to NH^3_{\mathrm{cont}}(X,\mathbf{Z}_l(2))/\mathrm{tors}\to H^1(X,\mathcal{H}^2(K(2)))\to CH^2(X,\mathbf{Z}_l)_{\mathrm{alg}}\to 0.$$

et l'isomorphisme du corollaire découle maintenant de la proposition 3.11 et de la suite exacte des Tor à coefficients $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. $\square$

Remarque 4.22. — Si k est la clôture algébrique d'un corps fini, le groupe $CH^n(X, \mathbf{Z}_l)_{\mathrm{alg}}$ est de torsion pour toute k-variété projective lisse X et tout $n \geq 0$ (réduction au cas d'une courbe par l'argument de correspondances de Bloch, cf. [**41**, preuve de la prop. 2.7]). En particulier, le corollaire 4.21 décrit le groupe $CH^2(X, \mathbf{Z}_l)_{\mathrm{alg}}$ tout entier. (Voir aussi §5.3.)

5. Cas d'un corps de base fini et de sa clôture algébrique

5.1. Cas d'un corps fini. — Soit k un corps fini. Rappelons d'abord la classe $B_{\mathrm{Tate}}(k)$ de [**30**, déf. 1 b)]

Définition 5.1. — Une k-variété projective lisse X est dans $B_{\mathrm{Tate}}(k)$ si

(i) Il existe une k-variété abélienne A et une extension finie k'/k telles que le motif de Chow de $X_{k'}$ à coefficients rationnels soit facteur direct de celui de $A_{k'}$.

(ii) X vérifie la conjecture de Tate (sur l'ordre des pôles de $\zeta(X, s)$ aux entiers ≥ 0).

On sait montrer qu'étant donné (i), (ii) est conséquence de (donc équivalent à) la conjecture de Tate cohomologique pour la cohomologie l-adique, pour un nombre premier l donné pouvant être égal à la caractéristique de k (cela résulte de [**30**, lemme 1.9], cf. [**10**, rem. 3.10]).

Considérons les notations de la preuve de la proposition 3.6. Si k est fini et si $X \in B_{\mathrm{Tate}}(k)$, $K_{\text{ét}}$ et $C_{\text{ét}}$ sont finis (ibid., th. 3.6 et lemme 3.7), donc $K = K_{\text{ét}} = C_{\text{ét}} = 0$ et (3.5) devient un isomorphisme

$$H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) \xrightarrow{\sim} C. \tag{5.1}$$

En particulier, $H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))$ est fini et $H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} = 0$ (théorème 1.1). En réalité, même le groupe $H^0(X, \mathcal{H}^3_{\text{ét}}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$ est fini : cela résulte de la proposition 2.9 et de la génération finie de $H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(2))$ [**30**, cor. 3.8 c) et e)].

Conjecturalement, toute variété projective lisse est dans $B_{\mathrm{Tate}}(k)$.

5.2. Cas de la clôture algébrique d'un corps fini. — Le but de ce numéro est de démontrer :

Théorème 5.2. — *Soient k la clôture algébrique d'un corps fini k_0, $X_0 \in B_{\mathrm{Tate}}(k_0)$, $X = X_0 \otimes_{k_0} k$ et $l \neq \operatorname{car} k$. Alors*
a) $\mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l)$ *est de torsion.*
b) On a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \to H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ \to H^0(X, \mathcal{H}^3_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_l(2))) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0.$$

c) Si $H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Q}_l(2)) = 0$, le groupe $H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))$ est fini ; dans ce cas, il est isomorphe à C_{tors}.

Remarque 5.3. — Le corollaire 4.15 donne une autre description de $\mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l)$.

Démonstration. — a) $\Rightarrow$ b) par la proposition 4.12 et b) $\Rightarrow$ c) par le théorème 1.1. Montrons a). Soit k_1 une extension finie de k_0, et $X_1 = X_0 \otimes_{k_0} k_1$. D'après [**30**, th. 3.6 et cor. 3.8 e)], l'homomorphisme

$$H^4_{\text{ét}}(X_1, \mathbf{Z}(2)) \otimes \mathbf{Z}_l \to H^4_{\mathrm{cont}}(X_1, \mathbf{Z}_l(2))$$

est bijectif. D'après (2.7), l'homomorphisme

$$CH^2(X_1) \otimes \mathbf{Z}_l \to H^4_{\mathrm{cont}}(X_1, \mathbf{Z}_l(2))$$

est donc injectif. Or dans la suite exacte

$$0 \to H^1(G_1, H^3_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2))) \to H^4_{\mathrm{cont}}(X_1, \mathbf{Z}_l(2)) \\ \to H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2))^{G_1} \to 0 \tag{5.2}$$

(où $G_1 = Gal(k/k_1)$), le groupe de gauche est fini d'après Weil I [**13**]. Il en résulte que le noyau de

$$CH^2(X_1) \otimes \mathbf{Z}_l \to H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2))$$

est fini pour tout k_1, d'où la conclusion en passant à la limite. □

5.3. Un exemple de Schoen. — J'avais initialement pensé que la réciproque du théorème 5.2 c) est vraie. En réalité elle est fausse : cela résulte d'un calcul de C. Schoen [**41**]. Dans cet article, Schoen considère $X = E^3$ sur $k = \bar{\mathbb{F}}_p$, où E est la courbe elliptique d'équation $x^3+y^3+z^3 = 0$, et montre que, si $p \equiv 1 \pmod 3$:

$$\mathrm{Griff}^2(X)\{l\} \simeq (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^2$$

pour $l \equiv -1 \pmod 3$ [**41**, th. 0.1]. Le groupe $\mathrm{Griff}^2(X)$ est défini comme le quotient du groupe des cycles à coefficients entiers qui sont homologiquement équivalents à zéro par le sous-groupe de ceux qui sont algébriquement équivalents à zéro. Commençons par clarifier le lien entre ce groupe et $\mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l)$:

Proposition 5.4. — *Soient k_0 un corps fini de clôture algébrique k, $X_0 \in B_{\mathrm{Tate}}(k_0)$ et $X = X_0 \otimes_{k_0} k$. Alors, pour tout $n \geq 0$, l'homomorphisme évident*

$$\mathrm{Griff}^n(X) \otimes \mathbf{Z}_l \to \mathrm{Griff}^n(X, \mathbf{Z}_l)$$

est bijectif.

Démonstration. — Soit A un groupe abélien quelconque. Pour une variété lisse X sur un corps quelconque, on peut définir les cycles à coefficients dans A modulo l'équivalence rationnelle, ou algébrique. Notons ces groupes $CH^*(X, A)$ et $A^*_{\mathrm{alg}}(X, A)$. Je dis que les homomorphismes

$$CH^*(X) \otimes A \to CH^*(X, A)$$
$$A^*_{\mathrm{alg}}(X) \otimes A \to A^*_{\mathrm{alg}}(X, A)$$

sont bijectifs : par exemple on peut décrire $A^n_{\mathrm{alg}}(X, A)$ comme le conoyau d'un homomorphisme

$$\bigoplus_{(V,v_0,v_1)} \bigoplus_{x \in ((X \times V)^{(n)})'} A \xrightarrow{s_0^* - s_1^*} \bigoplus_{x \in X^{(n)}} A$$

où (V, v_0, v_1) décrit l'ensemble des classes d'isomorphismes de k-variétés lisses V munies de deux points rationnels v_0 et v_1.

Plaçons-nous maintenant dans la situation de la proposition. Notons $CH^n(X)_{\mathrm{hom}}$ le noyau de $\mathrm{cl}^n : CH^n(X) \to H^{2n}_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(n))$. Je dis que l'isomorphisme

$$CH^n(X) \otimes \mathbf{Z}_l \xrightarrow{\sim} CH^n(X, \mathbf{Z}_l)$$

envoie $CH^n(X)_{\mathrm{hom}} \otimes \mathbf{Z}_l$ sur $CH^n(X, \mathbf{Z}_l)_{\mathrm{hom}}$. En effet, soit $x \in CH^n(X, \mathbf{Z}_l)_{\mathrm{hom}}$. Écrivant $x = \sum \alpha_i x_i$ avec $\alpha_i \in \mathbf{Z}_l$, $x_i \in CH^n(X)$, on peut (quitte à augmenter k_0) supposer que x provient de $x_0 \in CH^n(X_0, \mathbf{Z}_l)$. On a évidemment $x_0 \in CH^n(X_0, \mathbf{Z}_l)_{\mathrm{hom}}$; le même raisonnement que dans la preuve du théorème 5.2 (utilisant le fait que $X_0 \in B_{\mathrm{Tate}}(k_0)$) montre alors que x_0 est de torsion. Mais, pour tout groupe abélien M, on a des isomorphismes

$$M\{l\} \xrightarrow{\sim} M\{l\} \otimes \mathbf{Z}_l \xrightarrow{\sim} (M \otimes \mathbf{Z}_l)\{l\}$$

puisque $(M/M\{l\}) \otimes \mathbf{Z}_l$ est sans l-torsion. Donc $x_0 \in CH^n(X_0)_{\mathrm{hom}}$ et $x \in CH^n(X)_{\mathrm{hom}}$.

Il résulte de ceci que l'homomorphisme induit

$$\mathrm{Griff}^n(X) \otimes \mathbf{Z}_l = A^n_{\mathrm{alg}}(X)_{\mathrm{hom}} \otimes \mathbf{Z}_l \to A^n_{\mathrm{alg}}(X, \mathbf{Z}_l)_{\mathrm{hom}} = \mathrm{Griff}^n(X, \mathbf{Z}_l)$$

est surjectif, donc bijectif, d'où l'énoncé. □

Proposition 5.5. — *Sous les hypothèses de la proposition 5.4, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))$ *est fini.*

(ii) *Le monomorphisme* $\mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \to H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ *du théorème 5.2 b) est surjectif.*

(iii) $\operatorname{corang} \mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \geq \dim H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Q}_l(2))$.

(iv) *L'application b de* (4.2) *est nulle.*

(v) $H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ *est fini, quotient de* $H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l)_{\mathrm{tors}}$.

Si X est une variété abélienne (il suffit que $H^3(X, \mathbf{Z}_l)$ et $H^4(X, \mathbf{Z}_l)$ soient sans torsion), ces conditions sont encore équivalentes à :

(vi) *Pour tout $n \geq 1$, l'homomorphisme* $H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l^n) \to H^3_{\text{ét}}(k(X), \mathbf{Z}/l^n)$ *est* nul.

Démonstration. — Les équivalences (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) résultent du théorème 5.2 b) et du théorème 1.1. Les équivalences (ii) $\iff$ (iv) $\iff$ (v) résultent du théorème 5.2 a), du corollaire 4.15 et de la proposition 4.14 (ou plus directement du diagramme (4.2)).

Si (vi) est vrai, il est vrai stablement (c'est-à-dire à coefficients $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$), ce qui est équivalent à la nullité de $H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)$, d'où (iv). Réciproquement, montrons que (v) $\Longrightarrow$ (vi) si $H^3_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l)$ et $H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l)$ sont sans torsion. De (v) on déduit que $H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) = 0$, ce qui donne (vi) stablement. Pour l'obtenir à coefficients finis, considérons le diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & H^2_{\mathrm{Nis}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))/l^n & \to & H^3_{\mathrm{Nis}}(X, \mathbf{Z}/l^n(2)) & \to_{l^n} & H^3_{\mathrm{Nis}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \wr\downarrow & \\
0 \to & H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))/l^n & \to & H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l^n(2)) & \to_{l^n} & H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) & \to 0.
\end{array}$$

Comme $H^3_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l)$ est sans torsion, $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est divisible et le terme en bas à gauche est nul. La flèche verticale centrale est donc surjective, ce qui donne l'énoncé pour $H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l^n(2))$. □

Théorème 5.6. — *Soient p un nombre premier $\equiv 1 \pmod 3$, $k = \bar{\mathbb{F}}_p$, et E la courbe elliptique sur k d'équation $x^3+y^3+z^3 = 0$. Posons $X = E^3$. Si $l \equiv -1 \pmod 3$, les conditions de la proposition 5.5 sont vérifiées.*

Démonstration. — Pour commencer, observons que $X \in B_{\mathrm{Tate}}(\mathbb{F}_p)$. Cela résulte du théorème de Spiess [**44**], ou simplement de Soulé [**43**, th. 3] puisque $\dim X = 3$.

Montrons (iii). D'après Schoen [**41**, th. 0.1] et la proposition 5.4, on a $\mathrm{Griff}^2(X, \mathbf{Z}_l) \simeq (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^2$; il faut donc montrer que $H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Z}_l)$ est de rang ≤ 2. Comme X est une variété abélienne, on a un isomorphisme

$$\Lambda^3 H^1_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Q}_l) \xrightarrow{\sim} H^3_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Q}_l).$$

L'hypothèse sur p assure que E est ordinaire (cf. [**41**, p. 46]). Soient α, β les nombres de Weil de E sur $\mathbb{F}_p$: on a $\alpha\beta = p$, et $K := \mathbf{Q}(\alpha) = \mathbf{Q}(\mu_3)$ (ibid.).

L'espace vectoriel $H^1_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Q}_l)$ est somme de trois exemplaires de $H^1_{\mathrm{cont}}(E, \mathbf{Q}_l)$: il est donc de rang 6. Soit $(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3)$ une base du $\mathbf{Q}_l \otimes K$-module libre $H^1_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Q}_l) \otimes K$ formée de vecteurs propres pour l'action du Frobenius ϕ, avec $\phi v_i = \alpha v_i$, $\phi w_i = \beta w_i$. Le $\mathbf{Q}_l \otimes K$-module $H^3_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Q}_l) \otimes K$ est libre de rang 20, de base les tenseurs purs de degré 3 construits sur les v_i, w_j. Par construction, cette base B est formée de vecteurs propres pour l'action de Frobenius.

Soit $b \in B$. Si $b \notin \{v_1 \wedge v_2 \wedge v_3, w_1 \wedge w_2 \wedge w_3\}$, b est divisible par $c = v_i \wedge w_j$ pour un couple (i, j). La valeur propre de $c \in H^2_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Q}_l) \otimes K$ est égale à p ; en particulier, $c \in H^2_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Q}_l)$. Par le théorème de Tate (dû dans ce cas particulier à Deuring), $c \otimes \mathbf{Q}_l(1) \in H^2_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Q}_l(1))$ est de la forme $\mathrm{cl}(\gamma)$ pour un diviseur $\gamma \in \mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbf{Z}_l$: il en résulte que $b \in NH^3_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Q}_l)$.

Ceci montre que $H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Q}_l) \otimes K$ est engendré par $b = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ et $b' = w_1 \wedge w_2 \wedge w_3$, et donc que $\dim H^3_{\mathrm{tr}}(X, \mathbf{Q}_l) \leq 2$. □

Remarque 5.7. — Comme $H^*_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l) \to H^*_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l^n)$ est surjectif, le calcul fait dans la preuve du théorème 5.6 montre a priori que l'image de $H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l^n)$ dans $H^3(F, \mathbf{Z}/l^n)$ est de rang ≤ 2, où $F = k(X)$. On aimerait bien démontrer sa nullité (l'énoncé (vi) de la proposition 5.5) directement : il s'agit de voir que, si $x_1, x_2, x_2 \in H^1_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l^n)$, le cup-produit $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ est nul dans $H^3_{\text{ét}}(F, \mathbf{Z}/l^n)$.

On peut se limiter aux triplets (x_1, x_2, x_3) tels que

$$x_i \in \mathrm{Im}\left(H^1_{\text{ét}}(E, \mathbf{Z}/l^n) \xrightarrow{\pi_i^*} H^1_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l^n)\right)$$

pour une valeur de i, où π_i est la i-ème projection, et sans perte de généralité, supposer $i = 1$. Alors x_1 définit une isogénie $f : E' \to E$ de degré l^n. Soit $F' = k(X')$, où $X' = E' \times E \times E$: d'après Merkurjev-Suslin, la nullité de $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ dans $H^3_{\text{ét}}(F, \mathbf{Z}/l^n)$ équivaut au fait que $x_2 \cdot x_3 \in H^2(F, \mathbf{Z}/l^n) \simeq {}_{l^n}Br(F)$ est une norme dans l'extension F'/F. Peut-on montrer ceci directement ?

5.4. Autres corps. — Si $cd(k) \leq 1$, la suite exacte (5.2) persiste [**24**, th. 3.3]. Malheureusement, elle ne semble pas apporter d'informations supplémentaires très utiles, sauf peut-être dans le cas d'un corps quasi-fini que je n'ai pas exploré.

Considérons les notations de la preuve de la proposition 3.6. Si k est de type fini mais n'est pas fini, je ne sais pas s'il faut espérer que K est de torsion, même sous toutes les conjectures habituelles (Jannsen le suggère dans [**27**, lemma 2.7]). On peut remplacer $H^4_{\text{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2))$ par le groupe plus fin

$$\tilde{H}^4_{\text{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2)) = \varinjlim H^4_{\text{cont}}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_l(2))$$

où $\mathcal{X}$ décrit les modèles réguliers de X, de type fini sur $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ (cf. [**25**, (11.6.1)]). En caractéristique p, par passage à la limite, la conjecture de Tate-Beilinson implique alors que $K_{\text{ét}}$ est de torsion [**31**, th. 60, (iii)]. De plus, cette conjecture implique que $CH^2(X)$ est de type fini (comme quotient de $CH^2(\mathcal{X})$ pour un modèle $\mathcal{X}$ lisse de type fini), donc que K est fini. Par contre, elle n'implique pas a priori que $H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(2))$ est de type fini (dans les suites exactes de Gysin pour un diviseur, le terme suivant est de la forme $H^3_{\text{ét}}(Z, \mathbf{Z}(1)) = Br(Z)\ldots$) donc il se pourrait fort bien que $K_{\text{ét}}$ ait une partie divisible non triviale.

Le bon objet avec lequel travailler pour des variétés ouvertes sur un corps fini est $H^4_W(\mathcal{X}, \mathbf{Z}(2))$ (cohomologie Weil-étale) : c'est celui qui permet d'attraper tout $\tilde{H}^4_{\text{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(2))$ pour $l \neq p$ [**31**, th. 64]. Mais cela a l'air compliqué, cf. [**30**, (3.2)] ou [**31**, th. 62 (ii)].

Appendice A
Cohomologie de Hodge-Witt logarithmique sur des corps imparfaits

Dans [**17**], Geisser et Levine comparent la cohomologie motivique modulo p d'un corps de caractéristique p quelconque avec sa cohomologie de

Hodge(-Witt) logarithmique, mais n'en déduisent une comparaison globale que pour des variétés lisses sur un corps parfait. Le but de ce numéro est de rappeler les bases de cette comparaison et de se débarrasser de manière "triviale" de l'hypothèse de perfection, à l'aide d'une observation classique de Quillen [**40**, p. 133, dém. du th. 5.11].

A.1. Cohomologie de Hodge-Witt logarithmique. — Soit X un schéma de caractéristique p. On lui associe son pro-complexe de de Rham-Witt [**23**, p. 548, 1.12]

$$(W_r\Omega^{\cdot}_X)_{r\geq 1}$$

qui est un système projectif de faisceaux d'algèbres différentielles graduées sur $X_{\text{ét}}$, prolongeant (pour $\cdot = 0$) le profaisceau des vecteurs de Witt et (pour $r = 1$) le complexe des différentielles de Kähler. Il est muni d'un opérateur $F : W_r\Omega^n_X \to W_{r-1}\Omega^n_X$ [**23**, p. 562, th. 2.17].

Si X est défini sur un corps parfait k, on a évidemment

$$W_r\Omega^{\cdot}_X = W_r\Omega^{\cdot}_{X/k}.$$

On a des applications "de Teichmüller" (multiplicatives)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X &\to W_r\mathcal{O}_X \\ x &\mapsto \underline{x} = (x, 0, \dots, 0, \dots) \end{aligned}$$

[**23**, p. 505, (1.1.7)], qu'on utilise pour définir les homomorphismes

$$\begin{aligned} d\log : \mathcal{O}^*_X / (\mathcal{O}^*_X)^{p^r} &\to W_r\Omega^1_X \\ x &\mapsto d\underline{x}/\underline{x} \end{aligned} \tag{A.1}$$

[**23**, p. 580, (3.23.1)]. On définit alors $W_r\Omega^n_{X,\log}$ comme le sous-faisceau de $W_r\Omega^n_X$ engendré localement pour la topologie étale par les sections de la forme $d\log x_1 \wedge \cdots \wedge d\log x_n$ [**23**, p. 596, (5.7.1)] ; comme dans [**17**], nous noterons simplement ce faisceau $\nu_r(n)_X$.

Lemme A.1. — *Pour tout $x \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et pour tout $r \geq 1$, on a*

$$\underline{x} \wedge \underline{1-x} = 0 \in \Gamma(X, W_r\Omega^2_X).$$

Démonstration. — (Illusie) Le morphisme $X \to \mathbf{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ défini par x nous ramène au cas universel $X = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[t]$, $x = t$. Mais alors $W_r\Omega^2_X = 0$ puisque $\dim X = 1$. □

A.2. Le symbole logarithmique. — Supposons $X = \operatorname{Spec} k$, où k est un corps. Le lemme A.1 implique que l'homomorphisme $d\log$ de (A.1) induit un *symbole logarithmique*

$$\begin{aligned} d\log : K_n^M(k)/p^r &\to \nu_r(n)_k \\ \{x_1, \dots, x_n\} &\mapsto d\log(x_1) \wedge \dots \wedge d\log(x_n). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Soit K le corps des fonctions d'un k-schéma lisse X, où k est parfait de caractéristique p. Un point x de codimension 1 de X définit une valuation discrète v sur K, de corps résiduel $E = k(x)$. Le théorème de pureté de Gros [**19**, p. 46, th. 3.5.8] et la longue suite exacte de cohomologie à supports définissent des homomorphismes résidus

$$\nu_r(n)_K \xrightarrow{\partial_v} \nu_r(n-1)_E. \tag{A.3}$$

Lemme A.2. — *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} K_n^M(K)/p^r & \xrightarrow{\partial_v} & K_{n-1}^M(E)/p^r \\ {\scriptstyle d\log}\downarrow & & {\scriptstyle d\log}\downarrow \\ \nu_r(n)_K & \xrightarrow{\partial_v} & \nu_r(n-1)_E \end{array}$$

où la flèche horizontale du haut est le résidu en K-théorie de Milnor, est commutatif au signe près.

Démonstration. — Pour $n = 1, 2$ c'est fait dans Gros-Suwa [**20**, p. 625, lemme 4.11]. La démonstration ne se propage pas tout à fait à $n > 2$ car elle utilise la formule explicite donnant $\partial(\{x, y\})$ pour $x, y \in K^*$. Pour la propager, il suffit toutefois de remarquer que $K_n^M(K)$ est engendré par les symboles de la forme $\{u_1, \dots, u_{n-1}, x\}$ avec $u_i \in O_v^*$ et $x \in K^*$. □

A.3. Le morphisme de comparaison. — Supposons X lisse sur un corps parfait k. D'après [**23**, p. 597, th. 5.7.2], on a une suite exacte de pro-faisceaux étales

$$0 \to \nu_\cdot(n)_X \to W_\cdot\Omega_X^n \xrightarrow{1-F} W_\cdot\Omega_X^n \to 0$$

qui en fait n'interviendra pas ici. De plus, on a le théorème suivant, dû à Gros et Suwa :

Théorème A.3. — *On a une suite exacte de faisceaux zariskiens*

$$0 \to \alpha_*\nu_r(n)_X \to \bigoplus_{x \in X^{(0)}} \big(\nu_r(n)_{k(x)}\big)_{\overline{\{x\}}} \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \big(\nu_r(n-1)_{k(x)}\big)_{\overline{\{x\}}} \xrightarrow{\partial} \dots$$

où α désigne la projection $X_{\text{ét}} \to X_{\text{Zar}}$ et les différentielles ∂ sont construites à partir des résidus (A.3).

Démonstration. — Voir [**20**, cor. 1.6] ou [**9**, p. 70, Ex. 7.4 (3)]. □

Supposons maintenant X régulier de type fini sur un corps k (de caractéristique p). Supposons d'abord k de type fini sur $\mathbb{F}_p$: alors X admet un modèle $\mathcal{X}$ régulier, donc lisse, de type fini sur $\mathbb{F}_p$. Soit $j : X \to \mathcal{X}$ la pro-immersion ouverte correspondante : on a évidemment

$$\nu_r(n)_X = j^*\nu_r(n)_{\mathcal{X}}$$

puisque les anneaux semi-locaux de X sont certains anneaux semi-locaux de $\mathcal{X}$.

Interprétons maintenant $K_n^M(K)/p^n$ comme $H^n(K, \mathbf{Z}/p(n))$, cf. théorème 2.3. Vu la remarque 2.4 et le théorème A.3, les homomorphismes (A.2) et le lemme A.2 induisent des homomorphismes de faisceaux

$$\mathcal{H}^n(\mathbf{Z}/p^r(n)_{\mathcal{X}}) \to \alpha_*\nu_r(n)_{\mathcal{X}}$$

et donc des morphismes dans $D^-(\mathcal{X}_{\text{Zar}})$

$$\mathbf{Z}/p^r(n)_{\mathcal{X}} \to \alpha_*\nu_r(n)_{\mathcal{X}}[-n]$$

puisque $\mathcal{H}^i(\mathbf{Z}/p^r(n)_{\mathcal{X}}) = 0$ pour $i > n$ (lemme 2.5).

D'où, en appliquant j^*, des morphismes dans $D^-(X_{\text{Zar}})$

$$\mathbf{Z}/p^r(n)_X \to \alpha_*\nu_r(n)_X[-n]. \tag{A.4}$$

Si k est quelconque, écrivons

$$k = \varinjlim_{\alpha} k_\alpha$$
$$X = \varprojlim_{\alpha} X_\alpha$$

où les k_α sont de type fini sur $\mathbb{F}_p$ et X_α est un k_α-schéma régulier de type fini, de sorte que $k_\alpha \subset k_\beta$ induise un isomorphisme $X_\beta \xrightarrow{\sim} X_\alpha \otimes_{k_\alpha} k_\beta$. On a évidemment :

$$\nu_r(n)_X = \varinjlim_{\alpha} \pi_\alpha^*\nu_r(n)_{X_\alpha}$$
$$\mathcal{H}^n(\mathbf{Z}/p^r(n)_X) = \varinjlim_{\alpha} \pi_\alpha^*\mathcal{H}^n(\mathbf{Z}/p^r(n)_{X_\alpha})$$

où $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ est le morphisme canonique. Ceci étend la définition de (A.4) au cas où le corps de base est quelconque. On voit de même :

Proposition A.4 **(cf. Quillen** [**40**, p. 133, dém. du th. 5.11]**)**
La suite exacte du théorème A.3 s'étend à tout X régulier de type fini sur un corps. □

A.4. Le théorème de Geisser-Levine. —

Théorème A.5. — *Soit X un schéma régulier de type fini sur un corps k de caractéristique p. Alors le morphisme* (A.4) *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il s'agit de voir que

$$\mathcal{H}^i(\mathbf{Z}/p^r(n)_X) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ \alpha_*\nu_r(n)_X & \text{si } i = n \end{cases}$$

le dernier isomorphisme étant induit par (A.4). L'énoncé est clair pour $i > n$, cf. lemme 2.5.

1) $X = \operatorname{Spec} k$: c'est le théorème de Bloch-Gabber-Kato pour $i = n$ [**4**, p. 117, cor. 2.8] et celui de Geisser-Levine [**17**, th. 1.1] pour $i < n$.

2) X lisse sur k parfait : on se réduit à 1) en utilisant le théorème A.3, le lemme A.2 et la conjecture de Gersten pour la cohomologie motivique, cf. preuve du lemme 2.5.

3) k de type fini sur $\mathbb{F}_p$: on se ramène à 2) par la technique du numéro précédent.

4) k quelconque : on se ramène à 3) par passage à la limite. □

Remarque A.6. — On pourrait court-circuiter les étapes 2) et 3), dans l'esprit de la proposition A.4.

Corollaire A.7. — *Soit X un schéma régulier de type fini sur un corps k de caractéristique p. Alors le morphisme α^**(A.4) *est un isomorphisme, où α est la projection $X_{\text{ét}} \to X_{\text{Zar}}$.* □

Références

[1] S. Bloch Lectures on algebraic cycles, Duke Univ. Math. Ser. IV, 1980 ; 2de édition : 2010.

[2] S. Bloch *Algebraic cycles and higher K-theory*, Adv. in Math. **61** (1986), 267–304.

[3] S. Bloch *The moving lemma for higher Chow groups*, J. Alg. Geom. **3** (1994), 537–568.

[4] S. Bloch, K. Kato *p-adic étale cohomology*, Publ. Math. IHÉS **63** (1986), 107–152.

[5] S. Bloch, S. Lichtenbaum *A spectral sequence for motivic cohomology*, prépublication, 1995, K-theory preprint archives, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0062/`.

[6] S. Bloch, A. Ogus *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. Éc. norm. sup. **7** (1974), 181–201.

[7] S. Bloch, V. Srinivas *Remarks on correspondences and algebraic cycles*, Amer. J. Math. **105** (1983), 1235–1253.

[8] J.-L. Colliot-Thélène, W. Raskind *$\mathcal{K}_2$-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), 165–199.

[9] J.-L. Colliot-Thélène, R. T. Hoobler, B. Kahn *The Bloch-Ogus–Gabber Theorem*, *in* Algebraic K-theory (V. Snaith, ed.), Fields Inst. Comm. **16**, AMS, 1997, 31–94.

[10] J.-L. Colliot-Thélène, B. Kahn *Groupe de Chow de codimension* 2 *et* H^3 *non ramifié pour les variétés sur les corps finis*, prépublication, 2011.

[11] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, C. Soulé *Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux*, Duke Math. J. **50** (1983), 763–801.

[12] J.-L. Colliot-Thélène, C. Voisin *Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière*, `arXiv:1005.2778v1`.

[13] P. Deligne *La conjecture de Weil, I*, Publ. Math. IHES **43** (1974), 5–77.

[14] C. Deninger *A proper base change theorem for non-torsion sheaves in étale cohomology*, J. Pure Appl. Algebra **50**, 231–235.

[15] A. J. de Jong *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHÉS **83** (1996), 51–93.

[16] O. Gabber, en préparation.

[17] T. Geisser, M. Levine *The K-theory of fields in characteristic p*, Invent. Math. **139** (2000), 459–493.

[18] T. Geisser, M. Levine *The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky*, J. reine angew. Math. **530** (2001), 55–103.

[19] M. Gros Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique, Mém. SMF **21** (1985), 1–87.

[20] M. Gros, N. Suwa *La conjecture de Gersten pour les faisceaux de Hodge-Witt logarithmiques*, Duke Math. J. **57** (1988), 615–628.

[21] M. Gros, N. Suwa *Application d'Abel-Jacobi p-adique et cycles algébriques*, Duke Math. J. **57** (1988), 579–613.

[22] A. Grothendieck *le groupe de Brauer, III : exemples et compléments*, *in* Dix exposés sur la cohomologie des schémas (J. Giraud et al), Masson–North Holland, 1970, 88–188.

[23] L. Illusie *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **12** (1979), 501–661.

[24] U. Jannsen *Continuous étale cohomology*, Math. Ann. **280** (1988), 207–245.

[25] U. Jannsen Mixed motives and algebraic K-theory, Lect. Notes in Math. **1400**, Springer, 1990.

[26] U. Jannsen *Motives, numerical equivalence and semi-simplicity*, Invent. Math. **107** (1992), 447–452.

[27] U. Jannsen *Motivic sheaves and filtrations on Chow groups*, *in* Motives (Seattle, 1991), Proc. Symp. pure Math. **55** (I), AMS, 1994, 245–302.

[28] B. Kahn *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. Math. **1** (1996), 395–416.

[29] B. Kahn *The Geisser-Levine method revisited and algebraic cycles over a finite field*, Math. Ann. **324** (2002), 581–617.

[30] B. Kahn *Équivalences rationnelle et numérique sur certaines variétés de type abélien sur un corps fini*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **36** (2003), 977–1002.

[31] B. Kahn *Algebraic K-theory, algebraic cycles and arithmetic geometry*, *in* Handbook of K-theory, Vol. 1, Springer, 2004, 351–428.

[32] B. Kahn *La conjecture de Milnor (d'après V. Voevodsky)*, exposé Bourbaki no **834**, juin 1996, réédité avec corrections *in* Handbook of K-theory, Vol. 1, Springer, 2004, 1105–1149.

[33] B. Kahn *Sur le groupe des classes d'un schéma arithmétique*, Bull. SMF **134** (2006), 395–415.

[34] B. Kahn, J.P. Murre, C. Pedrini *On the transcendental part of the motive of a surface*, *in* Algebraic cycles and motives (colloque en l'honneur des 75 ans de J.P. Murre), LMS Series **344** (2), Cambridge University Press, 2007, 143–202.

[35] N. Katz, W. Messing *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Invent. Math. **23** (1974), 73–77.

[36] S.-I. Kimura *Chow motives are finite-dimensional, in some sense*, Math. Ann. **331** (2005), 173–201.

[37] S. Kleiman *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, *in* Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam ; Masson, Paris, 1968, 359–386.

[38] S. Lichtenbaum *New results on weight-two motivic cohomology*, *in* The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Progress in Math. **88**, 35–55, Birkhäuser, 1990.

[39] Yu. Nesterenko, A. Suslin *Homology of the general linear group over a local ring, and Milnor's K-theory* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR **53** (1989), 121–146 ; traduction anglaise : Math. USSR-Izv. **34** (1990), 121–145.

[40] D. Quillen *Higher algebraic K-theory, I*, *in* Lect. Notes in Math. **341**, Springer, 1973, 85–147.

[41] C. Schoen *On the computation of the cycle class map for nullhomologous cycles over the algebraic closure of a finite field*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **28** (1995), 1-50.

[42] C. Schoen *Complex varieties for which the Chow group mod n is not finite*, J. Alg. Geom. **11** (2002), 41–100.

[43] C. Soulé *Groupes de Chow et K-théorie des variétés sur les corps finis*, Math. Ann. **268** (1984), 317–345.

[44] M. Spiess *Proof of the Tate conjecture for products of elliptic curves over finite fields*, Math. Ann. **314** (1999), 285–290.

[45] N. Spaltenstein *Resolutions of unbounded complexes*, Compositio Math. **65** (1988), 121–154.

[46] A. Suslin *Torsion in K_2 of fields*, K-theory **1** (1987), 5–29.

[47] A. Suslin, V. Voevodsky *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, prépublication, 1995 ; version finale *in* The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., **548**, Kluwer, 2000, 117-189.

[48] B. Totaro *Milnor K-theory is the simplest part of algebraic K-theory*, K-Theory **6** (1992), 177–189.

[49] V. Voevodsky *Motivic cohomology with $\mathbf{Z}/2$ coefficients*, Publ. Math. IHÉS **98** (2003), 59–104.

---

11 juin 2011

Bruno Kahn, Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 7586, Case 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France • *E-mail :* `kahn@math.jussieu.fr`