



HAL
open science

Résolution du problème des arcs de Nash pour une famille d'hypersurfaces quasi-rationnelles

Maximiliano Alexis Leyton-Alvarez

► **To cite this version:**

Maximiliano Alexis Leyton-Alvarez. Résolution du problème des arcs de Nash pour une famille d'hypersurfaces quasi-rationnelles. 2011. hal-00560293v2

HAL Id: hal-00560293

<https://hal.science/hal-00560293v2>

Preprint submitted on 28 Jan 2011 (v2), last revised 13 Jul 2011 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DES ARCS DE NASH POUR UNE FAMILLE D'HYPERSURFACES QUASI-RATIONNELLES

MAXIMILIANO LEYTON-ALVAREZ

RÉSUMÉ. Le problème des arcs de Nash pour les singularités normales de surfaces affirme qu'il y aurait autant de familles d'arcs sur un germe de surface singulier (S, O) que de diviseurs essentiels sur (S, O) . Il est connu que ce problème se réduit à étudier les singularités quasi-rationnelles. L'objet de cet article est de répondre positivement au problème de Nash pour une famille d'hypersurfaces quasi-rationnelles non rationnelles. On applique la même méthode pour répondre positivement à ce problème dans les cas de singularités de type \mathbb{E}_6 et \mathbb{E}_7 et pour fournir une nouvelle preuve dans le cas de singularités de type \mathbb{D}_n , $n \geq 4$.

ABSTRACT. **A solution to the Nash problem on arcs for a family of quasi-rational hypersurfaces.** The Nash problem on arcs for normal surface singularities states that there are as many arc families on a germ (S, O) of a singular surface as there are essential divisors over (S, O) . It is known that this problem can be reduced to the study of quasi-rational singularities. In this paper we give a positive answer to the Nash problem for a family of non-rational quasi-rational hypersurfaces. The same method is applied to answer positively to this problem in the case of \mathbb{E}_6 and \mathbb{E}_7 type singularities, and to provide new proof in the case of \mathbb{D}_n , $n \geq 4$, type singularities.

1. INTRODUCTION

Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, V une variété algébrique normale sur \mathbf{k} et $\pi : X \rightarrow V$ une désingularisation divisorielle de V , c'est-à-dire π est une désingularisation (π est un morphisme propre et birationnel tel que le morphisme $\pi : X \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } V) \rightarrow V \setminus \text{Sing } V$ est un isomorphisme, où $\text{Sing } V$ est le lieu singulier de V) telle que les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(\text{Sing } V)$ sont de codimension 1 dans X . On sait, d'après le théorème de résolution des singularités d'Hironaka, que cette désingularisation existe.

Si $\pi' : X' \rightarrow V$ est une autre désingularisation de V , alors $(\pi')^{-1} \circ \pi : X \dashrightarrow X'$ est une application birationnelle. Soit E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π . Comme E est un diviseur et X est une variété algébrique normale (X est une variété lisse), il existe un ouvert E^0 de E sur lequel l'application birationnelle $(\pi')^{-1} \circ \pi$ est bien définie. Le diviseur E est appelé *diviseur essentiel sur V* si pour toute désingularisation $\pi' : X' \rightarrow V$ de V l'adhérence de $(\pi')^{-1} \circ \pi(E^0)$ dans X' est une composante irréductible de la fibre exceptionnelle du morphisme π' . On note $\text{Ess}(V)$ l'ensemble de diviseurs essentiels sur V .

On remarque que, si V est une surface algébrique normale sur \mathbf{k} , les diviseurs essentiels sur V sont les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle de la résolution minimale de V (désingularisation minimale de V).

Soit K un corps d'extension de \mathbf{k} . Un morphisme $\text{Spec } K[t]/(t^{m+1}) \rightarrow V$ (resp. $\text{Spec } K[[t]] \rightarrow V$) est appelé (K, m) -jet (resp. K -arc).

Soit \mathcal{Sch}/\mathbf{k} la catégorie des schémas sur \mathbf{k} et $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles. On considère le foncteur contravariant suivant :

$$F_m, : \mathcal{Sch}/\mathbf{k} \longrightarrow \mathcal{E}ns, Y \mapsto \text{Hom}(Y \times_{\mathbf{k}} \text{Spec } \mathbf{k}[t]/(t^{m+1}), V).$$

Date: 28 janvier 2011.

Ce foncteur est représentable de forme canonique par un schéma V_m de type fini sur \mathbf{k} , c'est-à-dire on a :

$$\mathrm{Hom}(Y \times_{\mathbf{k}} \mathrm{Spec} \mathbf{k}[t]/(t^{m+1}), V) \cong \mathrm{Hom}(Y, V_m),$$

où Y est un schéma quelconque sur \mathbf{k} . Le schéma V_m est appelé *l'espace de m -jet sur V* .

L'homomorphisme surjectif canonique $\mathbf{k}[t]/(t^{m+1}) \rightarrow \mathbf{k}[t]/(t^m)$ induit un morphisme affine $p_m : V_m \rightarrow V_{m-1}$. Les morphismes $p_{n,m} : V_m \rightarrow V_n$, où $n < m$ et $p_{n,m} := p_{n+1} \circ \cdots \circ p_m$, forment un système projectif. Comme les morphismes $p_m : V_m \rightarrow V_{m-1}$ sont affines (voir [Ish07] ou [EM09]), la limite projective existe. On note V_∞ cette limite projective, c'est-à-dire $V_\infty := \varprojlim_m V_m$. La limite projective V_∞ est un schéma qui n'est pas en général de type fini sur \mathbf{k} . Le schéma V_∞ est appelé *l'espace d'arcs sur V* .

L'espace d'arcs V_∞ a la *propriété fonctorielle* suivante (voir [IK03]) : Le foncteur $Y \rightarrow \mathrm{Hom}(Y \widehat{\times}_{\mathbf{k}} \mathrm{Spec} \mathbf{k}[[t]], V)$, où Y est un schéma quelconque sur \mathbf{k} et $Y \widehat{\times}_{\mathbf{k}} \mathrm{Spec} \mathbf{k}[[t]]$ est le complété formel du schéma $Y \times_{\mathbf{k}} \mathrm{Spec} \mathbf{k}[[t]]$ le long du sous-schéma $Y \times_{\mathbf{k}} \mathrm{Spec} \mathbf{k}$, est représentable par le schéma V_∞ .

D'après la propriété fonctorielle de l'espace d'arcs V_∞ , les K -points de V_∞ sont en correspondance bijective avec les K -arcs sur V . Par abus de notation, pour $\alpha \in V_\infty$ on note α son \mathbf{k}_α -arc correspondant, où \mathbf{k}_α est le corps résiduel du point α .

Soit $p_\infty : V_\infty \rightarrow V$ la projection canonique $\alpha \mapsto \alpha(0)$, où 0 est le point fermé de $\mathrm{Spec} \mathbf{k}_\alpha[[t]]$. On note $V_\infty^s := p_\infty^{-1}(\mathrm{Sing} V)$, où $\mathrm{Sing} V$ est le lieu singulier de V , et $\mathcal{CN}(V)$ l'ensemble de composantes irréductibles de V_∞^s .

Nash a démontré que l'application suivante est bien définie et injective (voir [Nas95]) :

$$\mathcal{N}_V : \mathcal{CN}(V) \rightarrow \mathrm{Ess}(V), C \mapsto \overline{\{\alpha(0)\}},$$

où le \mathbf{k}_α -arc α est le point générique de $C \in \mathcal{CN}(V)$, le \mathbf{k}_α -arc $\widehat{\alpha}$ est le relèvement à X du \mathbf{k}_α -arc α , c'est-à-dire $\widehat{\alpha}$ est l'unique morphisme tel que $\pi \circ \widehat{\alpha} = \alpha$, et $\overline{\{\widehat{\alpha}(0)\}}$ l'adhérence du point $\widehat{\alpha}(0)$. Cette application est appelée *l'application de Nash associée à V* .

Le problème de Nash consiste à étudier la surjectivité de l'application de Nash \mathcal{N}_V .

Dans plusieurs cas la surjectivité de cette application a été prouvée. Par exemple pour les singularités \mathbb{A}_n ([Nas95]), les singularités \mathbb{D}_n ([Plé08]), les surfaces sandwichs ([LJRL99]), les variétés toriques ([IK03]), les hypersurfaces quasi-ordinaires ([GP07]), les variétés toriques stables ([Pet09]), et d'autres cas qu'on peut trouver dans les articles suivants ([Ish05], [Ish06], [GP07], [GSLJ97], [LJ80],[Mor08], [PPP06], [PPP08]).

Dans l'article [IK03] Ishii et Kollar montrent que l'application de Nash associée à l'hyper-surface de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^5$ donnée par l'équation $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^6 = 0$ n'est pas surjective. Or, en dimension deux ou trois il n'y a pas d'exemple publié où l'application de Nash n'est pas surjective.

Soit E un diviseur essentiel sur V ($E \in \mathrm{Ess}(V)$). On note N_E l'adhérence dans V_∞ de l'ensemble suivant :

$$\{\alpha \in V_\infty \setminus (\mathrm{Sing} V)_\infty; \widehat{\alpha}(0) \in E\},$$

où $(\mathrm{Sing} V)_\infty$ est le sous-ensemble fermé de V_∞ des arcs qui sont concentrés en $\mathrm{Sing} V$. L'ensemble N_E est irréductible et on a :

$$V_\infty^s = \bigcup_E N_E,$$

voir [Reg06]. On note α_E le point générique de N_E .

Un morphisme $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow V$ est appelé *K-wedge sur V*. D'après la propriété fonctorielle de l'espace d'arcs V_∞ , les *K-wedges* sont en correspondance bijective avec les $K[[s]]$ -points de V_∞ . L'image du point fermé (resp. du point générique) de $\text{Spec } K[[s]]$ dans V_∞ est appelé le centre (resp. l'arc générique) du *K-wedge* ω .

Un *K-wedge* ω est appelé *K-wedge admissible centré en N_E* si le centre (resp. l'arc générique) de ω est le point générique de N_E (resp. appartient à V_∞^s). Dans ce cas, par définition, le corps K est forcément un corps d'extension du corps résiduel \mathbf{k}_{α_E} du point α_E . Le *K-wedge* ω peut être interprété comme une déformation à un paramètre des coefficients du comorphisme α_E^* de l'arc α_E .

Dans [Reg06] l'auteur montre que E appartient à l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_V si et seulement si tout *K-wedge* admissible ω centré en N_E se relève à X , où K est un corps d'extension quelconque du corps K_{α_E} , c'est-à-dire s'il existe un *K-wedge* $\widehat{\omega}$ sur X tel que $\pi \circ \widehat{\omega} = \omega$.

On considère l'hypersurface $S(p, h_q)$ de \mathbb{A}_k^3 donnée par l'équation $z^p + h_q(x, y) = 0$, où h_q est un polynôme homogène de degré q sans facteurs multiples, $p \geq 2$, $q \geq 2$ deux entiers premiers entre eux. Par exemple si $h_q(x, y) = x^q + y^q$, $S(p, h_q)$ est une surface de *Pham-Brieskorn*. Les surfaces $S(p, h_q)$ sont toutes quasi-rationnelles (voir [FZ03]) et rationnelles si et seulement si $q = 2$ ou $(p, q) = (2, 3)$. On remarque que $S(p, h_2)$ est une singularité du type \mathbb{A}_{p-1} . Le résultat principal de cet article est le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Pour tous les entiers $p \geq 2$, $q \geq 2$ premiers entre eux, l'application de Nash $\mathcal{N}_{S(p, h_q)}$ associée à $S(p, h_q)$ est bijective.*

Une note sur la preuve de ce résultat va paraître dans les *Comptes rendus de l'Académie de sciences*, Paris [LA11].

On remarque que les critères de [Mor08] et [PPP06] ne s'appliquent pas en général aux familles $S(p, h_q)$.

En utilisant la même méthode que dans la preuve du Théorème 1.1 on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.2. *Si S est une singularité du type \mathbb{E}_6 ou \mathbb{E}_7 , l'application de Nash \mathcal{N}_S associée à S est bijective.*

On obtient aussi une preuve simple de la bijectivité de l'application de Nash pour plusieurs cas connus, par exemple \mathbb{D}_n , où n est un entier, $n \geq 4$ (voir [Plé08]).

Récemment sur ArXiv une preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités de type \mathbb{E}_6 (resp. pour les surfaces quotients) a été publiée, voir [PS10] (resp. voir [PP10]). Mais les méthodes de démonstration sont différentes de celle que nous utilisons.

Cet article est organisé de la façon suivante : dans première section on introduit quelques notations et on démontre le Théorème 1.1 ; le Théorème 1.2 est le sujet de la deuxième section, on donne la preuve du cas \mathbb{E}_6 en détails et un résumé pour le cas \mathbb{E}_7 ; dans la dernière section on donne une preuve simple de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités du type \mathbb{D}_n , $n \geq 4$ différente de celle de l'article [Plé08].

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Gérard Gonzalez-Sprinberg pour les nombreuses discussions et son constant encouragement. Je remercie également Marcel Morales pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

2. LE PROBLÈME NASH POUR LES HYPERSURFACES QUASI-RATIONELLES $S(p, h_q)$

On rappelle que $S(p, h_q)$ est l'hypersurface de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ donnée par l'équation $z^p + h_q(x, y) = 0$, où h_q est un polynôme homogène de degré q sans facteurs multiples et $p \geq 2$, $q \geq 2$ sont deux entiers premiers entre eux.

Dans cette section, on introduit quelques notations et on démontre le Théorème 1.1, sur la bijectivité de l'application de Nash pour les hypersurfaces $S(p, h_q)$.

Nash a démontré que l'application $\mathcal{N}_{\mathbb{A}_m}$ associée à la surface de type \mathbb{A}_m , $m \geq 2$, est bijective (voir [Nas95]). On suppose donc que $q \geq 3$, car l'hypersurface $S(p, h_2)$ est une singularité du type \mathbb{A}_{p-1} .

2.1. Désingularisation des hypersurfaces $S(p, h_q)$. Un système de coordonnées affines $\{x, y, z\}$ de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ étant fixé, notons O l'origine de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$. On décrit la désingularisation de $S(p, h_q)$ en utilisant les constellations toriques de points infiniment voisins de O (voir [CGSLJ96]), les éventails de Newton (voir [GSLJ91]) et les G -désingularisations (voir [BGS95]).

Soient $N = \mathbb{Z}^3$ muni de sa base standard $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ le dual de N . On note $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la base duale de $\{e_1, e_2, e_3\}$, c'est-à-dire l'unique base de M telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. On identifie la \mathbf{k} -algèbre $\mathbf{k}[M]$ avec la \mathbf{k} -algèbre $\mathbf{k}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}]$ par l'isomorphisme qui envoie le caractère $\chi^{e_i^*}$ (resp. $\chi^{e_2^*}$, $\chi^{e_3^*}$) sur x (resp. y , z).

Soit Σ un éventail en $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On note $X(\Sigma)$ la variété torique associée à l'éventail Σ et munie de l'action du tore algébrique $(\mathbf{k}^*)^3 = \text{Spec } \mathbf{k}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}]$.

Soit $X_0 = \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$. Une constellation torique de points infiniment voisins de O est un ensemble fini de points $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_m\}$, où chaque Q_i , $1 \leq i \leq m$, est une orbite de dimension 0 de la variété torique X_i obtenue par l'éclatement $\varsigma_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ de centre Q_{i-1} . On note $X(\mathcal{C}) = X_{m+1}$.

On dit que Q_j se projette sur Q_i , noté $Q_j \geq Q_i$, si le point $Q_j \in X_j$ est obtenu à partir de X_i par une suite d'éclatements de points. La relation \geq est une relation d'ordre partiel sur les points de \mathcal{C} . Si \geq est un ordre total, on dit que \mathcal{C} est une constellation en chaîne.

Supposons que \mathcal{C} est une constellation torique en chaîne de points infiniment voisins de O . Soient $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, e_3\}$ la base ordonnée de N et $\Delta := \langle \mathcal{B} \rangle$ le cône régulier engendré par \mathcal{B} . Notons Σ_i l'éventail associé à la variété torique X_i . L'éventail Σ_1 est obtenu par la subdivision élémentaire de Δ centrée en $u = e_1 + e_2 + e_3$. Pour chaque entier j , $1 \leq j \leq 3$, soit \mathcal{B}_j la base ordonnée de N obtenue en remplaçant e_j par u en la base \mathcal{B} . Soit $\Delta_j := \langle \mathcal{B}_j \rangle$ le cône régulier engendré par \mathcal{B}_j , pour $1 \leq j \leq 3$. Le choix du point $Q_1 > Q_0$ équivaut à choisir un entier a_1 , $1 \leq a_1 \leq 3$, qui détermine un cône Δ_{a_1} de l'éventail Σ_1 . La subdivision Σ_2 de Σ_1 est obtenue en remplaçant Δ_{a_1} en Σ_1 par les cônes $\Delta_{a_1 j} := \langle \mathcal{B}_{a_1 j} \rangle$, où $\mathcal{B}_{a_1 j}$ est la base ordonnée de N obtenue en remplaçant le j -ième vecteur de \mathcal{B}_{a_1} par $\sum_{u \in \mathcal{B}_{a_1}} u$. Le choix du point $Q_2 > Q_1$ équivaut à choisir un entier a_2 , $1 \leq a_2 \leq 3$, qui détermine un cône $\Delta_{a_1 a_2}$ de l'éventail Σ_2 . Par récurrence, on obtient une codification de la constellation en chaîne \mathcal{C} . Cette codification est notée $Q_j = Q_0(a_1 a_2 \cdots a_j)$ pour $1 \leq j \leq m$.

Soit b_1, b_2, \dots, b_k une suite d'entiers, où $1 \leq b_i \leq 3$, $1 \leq i \leq k \leq m$, et telle que le cône $\Delta_{b_1 b_2 \dots b_k}$ appartient à l'éventail Σ_{m+1} . Notons $U_{b_1 b_2 \dots b_k}$ l'ouvert torique affine qui est en correspondance avec le cône $\Delta_{b_1 b_2 \dots b_k}$.

Soit $\mathcal{C}_n = \{Q_0 = O, Q_1, \dots, Q_{n-1}\}$, $n \geq 1$, une chaîne torique de points infiniment voisins de O donnée par la codification $Q_j = Q_0(3^j)$ (j fois l'entier 3) pour $1 \leq j \leq n-1$. On note $\sigma_n : X(\mathcal{C}_n) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ le morphisme torique induit par \mathcal{C}_n et $S_{\mathcal{C}}$ le transformé strict de $S(p, h_q)$.

Proposition 2.1. *Soient $p > q$ et $p = nq + r$ la division entière, $1 \leq r < q$. Si $r = 1$, alors $S_{\mathcal{C}}$ est la résolution minimale de $S(p, h_q)$ et la fibre exceptionnelle $\sigma_n^{-1}(O) \cap S_{\mathcal{C}}$ est la réunion de nq courbes rationnelles. Si $r > 1$, alors $S_{\mathcal{C}}$ a un unique point singulier s , et de plus, $(S_{\mathcal{C}}, s)$ est isomorphe au germe $(S(r, h_q), O)$.*

Démonstration. La proposition se démontre par récurrence sur l'entier $n \geq 1$. Mais d'abord démontrons le lemme suivant.

On considère l'éclatement de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ de centre O , $\varsigma_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$. On note x_i, y_i, z_i les coordonnées canoniques de l'ouvert torique affine U_i , pour l'entier $1 \leq i \leq 3$.

Soit S le transformé strict de $S(p, h_q)$ induit par le morphisme $\varsigma_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$.

Lemme 2.2. *Les ouverts de S , $U_1 \cap S$ et $U_2 \cap S$ sont lisses et $U_3 \cap S = \{(x_3, y_3, z_3) \in U_3 \mid z_3^{p-q} + h_q(x_3, y_3) = 0\}$.*

La fibre exceptionnelle du morphisme $\varsigma_1 : S \rightarrow S(p, h_q)$ est la réunion de q courbes rationnelles. Les courbes ne s'intersectent qu'en le point fermé de U_3 fixé par l'action du tore algébrique $(\mathbf{k}^)^3$.*

Si $p - q = 1$, alors S est la résolution minimale de $S(p, h_q)$.

Démonstration. Les restrictions du morphisme $\varsigma_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ aux ouverts U_i sont données de la façon suivante :

$$\begin{aligned} U_1 &\rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3, (x_1, y_1, z_1) \mapsto (x_1, x_1 y_1, x_1 z_1); \\ U_2 &\rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3, (x_2, y_2, z_2) \mapsto (y_2 x_2, y_2, y_2 z_2); \\ U_3 &\rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3, (x_2, y_2, z_2) \mapsto (z_3 x_3, z_3 y_3, z_3). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} U_1 \cap S &= \{(x_1, y_1, z_1) \in U_1 \mid z_1^p x_1^{p-q} + h_q(1, y_1) = 0\}; \\ U_2 \cap S &= \{(x_2, y_2, z_2) \in U_2 \mid z_2^p y_2^{p-q} + h_q(x_2, 1) = 0\}; \\ U_3 \cap S &= \{(x_3, y_3, z_3) \in U_3 \mid z_3^{p-q} + h_q(x_3, y_3) = 0\}. \end{aligned}$$

Par un calcul direct, on montre que $U_1 \cap S$ et $U_2 \cap S$ sont lisses. Ceci achève la preuve de la première partie du lemme.

Soit F la fibre exceptionnelle du morphisme $\varsigma_1 : S \rightarrow S(p, h_q)$. Alors on a

$$U_3 \cap F = \{(x_3, y_3, z_3) \in U_3 \mid z_3 = 0, h_q(x_3, y_3) = 0\}.$$

Comme h_q est un polynôme homogène de degré q sans facteurs multiples, l'ensemble $U_3 \cap F$ est la réunion de q courbes rationnelles qui s'intersectent en l'origine de U_3 .

On remarque que les deux ensembles suivants sont de cardinalité q .

$$\begin{aligned} (X_1 \setminus U_3) \cap F \cap U_1 &= \{(x_1, y_1, z_1) \in U_1 \mid z_1 = 0, x_1 = 0, h_q(1, y_1) = 0\}; \\ (X_1 \setminus U_3) \cap F \cap U_2 &= \{(x_2, y_2, z_2) \in U_2 \mid z_2 = 0, y_2 = 0, h_q(x_2, 1) = 0\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la fibre exceptionnelle est la réunion d'exactly q courbes rationnelles qui s'intersectent en l'origine de U_3 . Ceci achève la preuve de la deuxième partie du lemme.

Si $p - q = 1$, S est une surface lisse. On considère la fonction régulière de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$, $g(x, y, z) = x$. Alors $g^* = g \circ \varsigma_1$ est une fonction régulière de X_1 .

Soit C le diviseur principal de $S(p, h_q)$ associé à la restriction de g à $S(p, h_q)$, c'est-à-dire $C := \text{Div}(g|_{S(p, h_q)})$. On remarque que C est une courbe (l'intersection schématique de $\text{Div}(g)$ et $S(p, h_q)$ est irréductible et réduit). Notons C' le transformé strict de C par le morphisme $\varsigma_1 : S \rightarrow S(p, h_q)$. Par un calcul direct, on peut montrer que C' intersecte F en l'origine de U_3 .

On considère la restriction de g^* à l'ouvert U_3 . Alors, on a

$$g^* = z_3 x_3.$$

Par conséquent, le diviseur principal de S associé à la restriction de g^* à S est le suivant :

$$\text{Div}(g^*|_S) = C' + \sum_{i=1}^q F_i,$$

où les F_i sont les composantes irréductibles de F . Comme $\text{Div}(g^*|_S) \cdot F_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, on obtient :

$$F_i \cdot F_i = -C' \cdot F_i - \sum_{j \neq i} F_j \cdot F_i = -q \leq -3.$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

Raisonnons par récurrence sur l'entier n .

Si $n = 1$, on a $p = q + r$ et $\mathcal{C}_1 = \{Q_0 = 0\}$. La preuve de ce cas résulte du Lemme 2.2.

Maintenant, on suppose que $p = nq + r$.

D'après le Lemme 2.2, on a $U_3 \cap S = S((n-1)q + r, h_q)$ et la fibre exceptionnelle de $\varsigma_1 : S \rightarrow S(p, h_q)$ est la réunion de q courbes rationnelles. En appliquant l'hypothèse de récurrence sur $U_3 \cap S$, on montre :

- la fibre exceptionnelle de $\sigma_n : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S(p, h_q)$ est la réunion de nq courbes rationnelles ;
- si $r > 1$, alors $S_{\mathcal{C}}$ a un unique point singulier de type $S(r, h_q)$;
- si $r = 1$, alors $S_{\mathcal{C}}$ est lisse.

Pour achever la preuve de la proposition, il faut montrer que si $r = 1$, alors le morphisme $\sigma_n : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S(p, h_q)$ est la résolution minimale de $S(p, h_q)$.

Soient F la fibre exceptionnelle du morphisme $\varsigma_1 : S \rightarrow S(p, h_q)$ et F_i une composante irréductible de F , $1 \leq i \leq q$. On note F'_i le transformé strict de F_i dans $S_{\mathcal{C}}$ (on rappelle que le morphisme ς_1 factorise σ_n). En utilisant l'hypothèse de récurrence, pour montrer que $S_{\mathcal{C}}$ est la résolution minimale de $S(p, h_q)$, il suffit de montrer que $F'_i \cdot F'_i \leq -2$ pour tout $1 \leq i \leq q$.

Pour chaque $Q_i \in \mathcal{C}_n$, on note B_i le diviseur exceptionnel $\varsigma_i^{-1}(Q_i)$ en X_{i+1} et D_i (resp. D_i^*) le transformé strict (resp. total) de B_i dans $X(\mathcal{C}_n)$.

On rappelle que la constellation \mathcal{C}_n est donnée par la codification $Q_j = Q_0(3^j)$ pour $1 \leq j \leq n-1$. En vertu du lemme 1.3 de [CGSLJ96], on a

$$D_i = D_i^* - D_{i+1}^*,$$

d'où $D_i^* = \sum_{j=i}^{n-1} D_j$. Soit $\mathcal{P}_{Q_{n-1}}$ le *spécial \star -idéal* associé à Q_{n-1} et D' le diviseur de $X(\mathcal{C}_n)$ tel que

$$\mathcal{P}_{Q_{n-1}} \mathcal{O}_{X(\mathcal{C}_n)} = \mathcal{O}_{X(\mathcal{C}_n)}(-D').$$

D'après le Lemme 2.16 de [CGSLJ96] on a

$$D' = \sum_{i=0}^{n-1} D_i^*.$$

Par conséquent, on a

$$D' = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) D_i.$$

Soit g un élément général de l'idéal $\mathcal{P}_{Q_{n-1}}$. Alors $g^* = g \circ \sigma_n$ est une fonction régulière de $X(\mathcal{C}_n)$. On note C le diviseur associé à g et C' le transformé strict de C dans $X(\mathcal{C}_n)$.

Alors, on a

$$\text{Div}(g^*) = C' + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) D_i.$$

Pour un diviseur Z de $X(\mathcal{C}_n)$, tel que son support ne contienne pas S_C , notons $Z \cdot S_C$ le diviseur de S_C obtenu par la somme formelle des composantes irréductibles de $Z \cap S_C$ pondérées par leurs multiplicités en S_C . Comme g est un élément général de $\mathcal{P}_{Q_{n-1}}$ on peut supposer que le support de C' ne contient pas S_C . Ainsi, on obtient que

$$\text{Div}(g^* |_{S_C}) = C' \cdot S_C + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) D_i \cdot S_C.$$

On remarque que $D_0 \cdot S_C = \sum_{i=1}^q F'_i$. En effet, il suffit de considérer l'ouvert affine U_1 . On a donc $U_1 \cap S_C = \{(x_1, y_1, z_1) \in U_1 \mid z_1^p x_1^{p-q} + h_q(1, y_1) = 0\}$ et $D_0 \cap U_1 = \{(x_1, y_1, z_1) \in U_1 \mid x_1 = 0\}$. Par conséquent, $(D_0 \cdot S_C) \cap U_1 = \sum_{i=1}^q (F'_i \cap U_1)$, d'où $D_0 \cdot S_C = \sum_{i=1}^q F'_i$.

On a donc

$$\text{Div}(g^* |_{S_C}) = C' \cdot S_C + \sum_{i=1}^{n-1} (i+1) D_i \cdot S_C + \sum_{i=1}^q F'_i.$$

On remarque que l'intersection $\text{Div}(g^* |_{S_C}) \cdot F'_i$ est nulle pour tout $1 \leq i \leq q$, car $\text{Div}(g^* |_{S_C})$ est un diviseur principal. On remarque aussi que $(\sum_{i=1}^{n-1} (i+1) D_i \cdot S_C) \cdot F'_i \geq 2$, car il existe au moins un $1 \leq i \leq n-1$ tel que $((i+1) D_i \cdot S_C) \cdot F'_i \geq (i+1) \geq 2$. Par conséquent, on obtient que $F'_i \cdot F'_i \leq -2$ pour tout $1 \leq i \leq q$, d'où la proposition. \square

Pour un polynôme $g = \sum c_e x^{e_1} y^{e_2} z^{e_3}$ dans $\mathbf{k}[x, y, z]$, où $e = (e_1, e_2, e_3)$ et $c_e \in \mathbf{k}$, on note $\mathcal{E}(g)$ l'ensemble des exposants $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ dont le coefficient c_e est non nul, c'est-à-dire $\mathcal{E}(g) := \{e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \mid c_e \neq 0\}$.

Soient $\Gamma_+(g)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{e + \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \mid e \in \mathcal{E}(g)\}$ et $\Gamma(g)$ la réunion des faces compactes de $\Gamma_+(g)$. On note $I(g)$ l'idéal monomial de $\mathbf{k}[x, y, z]$ engendré par les monômes $x^{e_1} y^{e_2} z^{e_3}$ tels que $(e_1, e_2, e_3) \in \Gamma(g)$, c'est-à-dire $I(g) := (\{x^{e_1} y^{e_2} z^{e_3} \mid (e_1, e_2, e_3) \in \Gamma(g)\})$. L'éventail de Newton $\Gamma^*(g)$ associé à g est la subdivision de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ correspondant à l'éclatement normalisé de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ de centre l'idéal $I(g)$. Pour plus de détails voir [GSLJ91] ou [KKMS73].

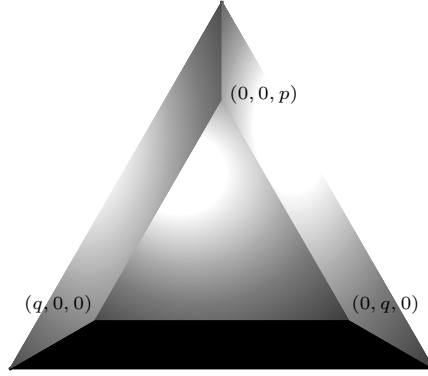
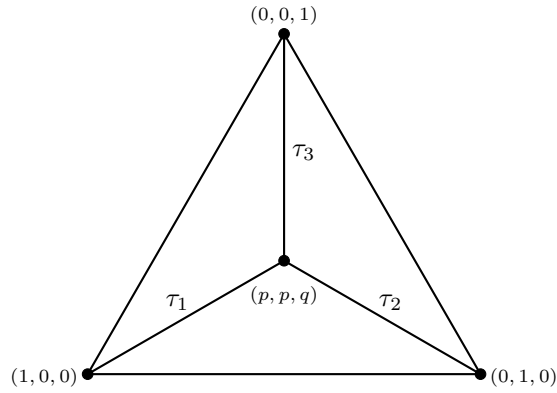
À un automorphisme dans $\text{GL}_3(\mathbf{k})$ près, on suppose que x et y ne divisent pas $h_q(x, y)$. La Figure 1 représente le polyèdre de Newton $\Gamma(f)$ associée à $f := z^p + h_q(x, y)$.

Soit H un plan de \mathbb{R}^3 qui ne contient pas l'origine de \mathbb{R}^3 et tel que l'intersection de H et $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ soit un ensemble compact. La Figure 2 représente l'intersection de H avec la subdivision $\Gamma^*(f)$ de \mathbb{R}^3 . Chaque sommet du diagramme est identifié avec le *vecteur extrémal* (autrement dit, vecteur primitif d'un cône de dimension 1 de l'éventail $\Gamma^*(f)$) correspondant. On note τ_1 (resp. τ_2, τ_3) le cône engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ (resp. $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$) et (p, p, q) .

La proposition suivante résulte d'un calcul direct.

Proposition 2.3. *Le cônes τ_1 et τ_2 sont réguliers.*

Soit Σ_G une G -subdivision régulière de $\Gamma^*(f)$, c'est-à-dire une subdivision régulière de chaque cône $\tau \in \Gamma^*(f)$ n'ayant comme arêtes que celles qui portent les vecteurs du système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$. D'après [BGS95] cette subdivision existe.

FIGURE 1. Polyèdre de Newton $\Gamma(f)$ FIGURE 2. Éventail de Newton $\Gamma^*(f)$

On note $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^*(f)) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ (resp. $\pi_{\mathcal{G}} : X(\Sigma_{\mathcal{G}}) \rightarrow X(\Gamma^*(f))$) le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ (resp. $\Sigma_{\mathcal{G}}$ de $\Gamma^*(f)$) et $S_{\mathcal{G}}$ le transformé strict de $S(p, h_q)$ associé au morphisme $\pi := \pi_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{N}}$.

Soit k , un entier $k \geq 1$. Pour un ensemble d'entiers $m_i \geq 2$, $1 \leq i \leq k$, on note $[m_1; m_2; \dots; m_k]$ la fraction continue définie de la façon suivante :

$$[m_k] := m_k, [m_{k-1}; m_k] := m_{k-1} - \frac{1}{m_k} \text{ et } [m_1; m_2; \dots; m_k] := m_1 - \frac{1}{[m_2; \dots; m_k]}.$$

La proposition suivante est une application directe du Théorème 6.1 de [Oka87].

Proposition 2.4. $S_{\mathcal{G}}$ est une bonne résolution de $S(p, h_q)$ et son graphe dual pondéré est une étoile à q branches identiques. Le diagramme de chaque branche est le suivant :

$$E_0^2 \text{ --- } -m_k \text{ --- } \dots \text{ --- } -m_2 \text{ --- } -m_1,$$

où E_0 le diviseur associé au sommet central du graphe et les entiers $m_i \geq 2$ (resp. l'entier k) sont définis (resp. est défini) de la façon suivante :

si $q > p$ et $q = np + r$ la division entière, $1 \leq r < p$, alors on a

$$\frac{p}{p-r} = [m_1; m_2; \dots; m_k];$$

si $p > q$ et $p = nq + r$, la division entière $1 \leq r < q$ (resp. $n \geq 1$), alors on a

$$\frac{p}{p-q} = [m_1; m_2; \dots; m_k].$$

De plus, cette résolution est minimale si et seulement si $p \not\equiv 1 \pmod{q}$.

Corollaire 2.5. *Si $p \equiv 1 \pmod{q}$, seul le diviseur E_0 n'est pas un diviseur essentiel sur $S(p, h_q)$.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$ tel que $p = nq + 1$. En vertu de la Proposition 2.4 on a

$$\frac{p}{p-q} = \frac{nq+1}{(n-1)q+1} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\ddots}}}$$

En particulier l'entier k est égal à n , d'où le graphe dual de la résolution $\pi : S_G \rightarrow S(p, h_q)$ a $nq + 1$ sommets. D'après la Proposition 2.1 il n'y a que un diviseur de la fibre exceptionnelle de π qui n'est pas un diviseur essentiel. D'après *le critère de contraction de Castelnuovo* ce diviseur a une auto-intersection égale à -1 .

Comme les branches du graphe dual de la résolution $\pi : S_G \rightarrow S(p, h_q)$ sont identiques, forcément le diviseur E_0 a une auto-intersection égal à -1 , d'où le corollaire. \square

La proposition suivante résulte du Théorème principal et de la Remarque a) de la Section 4 de [GSLJ91].

Proposition 2.6. *Le diviseur $\pi^{-1}(S(p, h_q))$ est à croisements normaux.*

La Proposition 2.6 montre que $\pi : X(\Sigma_G) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}$ est une résolution plongée de $S(p, h_q)$ (c'est-à-dire $\pi : X(\Sigma_G) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}$ est un morphisme propre et birationnel, $\pi : X(\Sigma_G) \setminus \pi^{-1}(O) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}} \setminus \{O\}$ est un isomorphisme et $\pi^{-1}(S(p, h_q))$ est un diviseur à croisements normaux).

La proposition suivante établit une relation entre le morphisme $\pi : S_G \rightarrow S(p, h_q)$ et le morphisme $\sigma_n : S_C \rightarrow S(p, h_q)$.

Proposition 2.7. *Si $p > q$, le morphisme $\sigma_n : S_C \rightarrow S(p, h_q)$ factorise le morphisme $\pi : S_G \rightarrow S(p, h_q)$, c'est-à-dire il existe un morphisme $\pi' : S_C \rightarrow S_C$ tel que $\pi = \sigma_n \circ \pi'$.*

Démonstration. Dans la preuve de cette proposition, on peut appliquer le Lemme 2.2 car ses hypothèses sont vérifiées.

On remarque que

$$(1, 1, 1) = \frac{(p, p, q) + (p - q)(0, 0, 1)}{p}$$

et que le cône engendré par les vecteurs $(0, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$ est régulier. Par conséquent, le vecteur $(1, 1, 1)$ appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau_3 \cap \mathbb{Z}^3$, où τ_3 est le cône engendré par les vecteurs $(0, 0, 1)$ et (p, p, q) (voir la Figure 2).

On remarque aussi que l'éventail obtenu par l'éclatement de Newton de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ associé à $f = z^p + h_q(x, y)$ suivi de la subdivision élémentaire centrée en $(1, 1, 1)$, coïncide avec celui obtenu par l'éclatement de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ de centre le point O suivi de l'éclatement de Newton de U_3 associé à $z_3^{p-q} + h_q(x_3, y_3)$ (voir le Lemme 2.2).

Soit $p = nq + r$ la division entière, $1 \leq r < q$. En utilisant la remarque ci-dessus et le Lemme 2.2, la proposition résulte d'une récurrence sur l'entier $n \geq 1$. \square

Pour ρ un *vecteur extrémal* de Σ_G (c'est-à-dire ρ est un vecteur primitif d'un cône de dimension 1 qui appartient à l'éventail Σ_G), on note D_ρ l'orbite fermée associée à ρ . Notons $E\Sigma_G$ l'ensemble des vecteurs extrémaux de Σ_G , et $S^2\Gamma^*(f)$ le 2-squelette de $\Gamma^*(f)$ (c'est-à-dire $S^2\Gamma^*(f)$ est la réunion des cônes de dimension 2 qui appartiennent à l'éventail $S^2\Gamma^*(f)$).

La proposition suivante donne des équations locales pour les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle de la désingularisation $\pi : S_G \rightarrow S(p, h_q)$. On rappelle que E_0 est le diviseur associé au sommet central du graphe induit par π .

Proposition 2.8. *Soit ρ un vecteur extrémal de Σ_G ($\rho \in E \Sigma_G$). Alors, on a :*

- i) l'intersection $D_\rho \cap S_G$ n'est pas vide si et seulement si ρ appartient au 2-squelette de l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$, c'est-à-dire $\rho \in S^2 \Gamma^*(f) \cap E \Sigma_G$;*
- ii) les composantes irréductibles de $D_\rho \cap S_G$ sont diviseurs exceptionnels du morphisme $\pi : S_G \rightarrow S(p, h_q)$ si et seulement si de plus $\rho \in \mathbb{Z}_{>0}^3$;*
- iii) une composante irréductible E de la fibre exceptionnelle de π étant donnée, il existe un unique $\rho \in E \Sigma_G$ tel que $E \subset D_\rho$ et de plus $E_0 = D_{(p,p,q)} \cap S_G$;*
- iv) l'ensemble formé par le vecteur $(0, 0, 1)$ et les vecteurs $\rho \in E \Sigma_G$ tels que les composantes irréductibles de $D_\rho \cap S_G$ sont diviseurs exceptionnels de π est le système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$, où τ est le cône engendré par les vecteurs $(0, 0, 1)$ et (p, p, q) .*

Démonstration. Les points *i), ii)* et *iii)* de la proposition résultent de la Remarque 4.3 et des Lemmes 4.7 et 4.8 de [Oka87]. Le point *iv)* résulte des points *i), ii)* et de la Proposition 2.3. \square

2.2. Preuve du Théorème 1.1. Dans cette section, on montre la bijectivité de l'application de Nash pour les hypersurfaces quasi-rationnelles $S(p, h_q)$, ce qui équivaut à montrer que tous les wedges admissibles se relèvent à la résolution minimale de $S(p, h_q)$ (voir [Reg06]). Notre but, dans toute la suite de cette section, est de montrer que pour chaque diviseur essentiel E ($E \in \text{Ess}(S(p, h_q))$) tous les K -wedges admissibles centrés en N_E se relèvent à la résolution minimale de $S(p, h_q)$. Avec le théorème suivant on réduit le nombre de cas à étudier.

Théorème 2.9. *Soient S une surface algébrique normale sur \mathbf{k} et $\pi : X \rightarrow S$ la résolution minimale de S . Supposons qu'il existe un morphisme propre et birationnel $\pi' : S' \rightarrow S$, où S' est une surface algébrique normale sur \mathbf{k} , tel que π' factorise π . Alors, si l'application de Nash \mathcal{N}_S associée à S est bijective, l'application de Nash $\mathcal{N}_{S'}$ associée à S' l'est aussi.*

Démonstration. On remarque que X est la résolution minimale de S' . Si ω est un K -wedge sur S' , alors $\pi' \circ \omega$ est un K -wedge admissible sur S . Par conséquent, $\pi' \circ \omega$ se relève à X , d'où le Théorème. \square

En vertu des résultats 2.1, 2.7 et 2.9, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.10. *Si l'application de Nash $\mathcal{N}_{S(p, h_q)}$ associée à l'hypersurface $S(p, h_q)$ est bijective pour tous les entiers $p > q \geq 3$, premiers entre eux, alors l'application de Nash $\mathcal{N}_{S(p, h_q)}$ est bijective pour tous les entiers $p \geq 2$ $q \geq 2$, premiers entre eux.*

Dans la suite, on suppose que $p > q \geq 3$. Soient $E \in \text{Ess}(S(p, h_q))$ et α_E le point générique de N_E . On note

$$(\mu_x, \mu_y, \mu_z) := (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x), \text{Ord}_t \alpha_E^*(y), \text{Ord}_t \alpha_E^*(z)).$$

Proposition 2.11. *Le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$, où τ est le cône engendré par les vecteurs $(0, 0, 1)$ et (p, p, q) . En particulier $\mu_x = \mu_y$ et $p\mu_z - q\mu_x \geq 0$*

Démonstration. Dans la démonstration on utilise les notations usuelles de variétés toriques (voir [KKMS73]).

Soit $E \in \text{Ess}(S(p, h_q))$. En vertu de la Proposition 2.8 il existe un unique vecteur extrémal ρ_1 appartenant au système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$ tel que $E \subset D_{\rho_1}$. Soient ρ_2 et ρ_3 deux vecteurs extrémaux de Σ_G adjacents à ρ_1 , c'est-à-dire il existe un cône $\sigma \in \Sigma_G$

de dimension 3 tel que les vecteurs ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 sont vecteurs extrémaux de σ . On remarque que le point générique de E n'est pas contenu dans D_{ρ_2} ou D_{ρ_3} .

Pour un vecteur $m = (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, on note $\chi^m(t_1, t_2, t_3) = t_1^a t_2^b t_3^c$ le caractère associé à m . Soient U_σ l'ouvert torique de $X(\Sigma_G)$ associé à σ et χ^{m_i} le caractère qui définit une équation de $D_{\rho_i} \cap U_\sigma$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Alors, on a $m_i \cdot \rho_j = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Quitte à remplacer les vecteurs ρ_2, ρ_3 , on peut supposer que $U_\sigma \cap E \neq \emptyset$.

On considère l'unique relèvement $\widehat{\alpha}_E$ à S_G du point générique α_E de N_E . On remarque que $\widehat{\alpha}_E(0)$ est le point générique de E et que le \mathbf{k}_α -arc $\widehat{\alpha}_E$ est transverse à E , c'est-à-dire $\text{Ord}_t f \circ \widehat{\alpha}_E = 1$, où f est une équation locale de E .

On rappelle que le diviseur $\pi^{-1}(S(\mathfrak{p}, \mathfrak{h}_q))$ est à croisements normaux. En particulier S_G est transverse au diviseur D_{ρ_1} . Comme le \mathbf{k}_α -arc $\widehat{\alpha}_E$ est transverse à E , le \mathbf{k}_α -arc $\widehat{\alpha}_E$ est transverse à D_{ρ_1} . Par conséquent, on obtient que $m_i \cdot (\mu_x, \mu_y, \mu_z) = \delta_{i1}$, car $\widehat{\alpha}_E(0)$ n'est pas contenu dans D_{ρ_2} ou D_{ρ_3} . Ceci implique que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = \rho_1$, d'où la proposition. \square

On considère un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow S(\mathfrak{p}, \mathfrak{h}_q)$ admissible centré en N_E . On note

$$(\eta_x, \eta_y, \eta_z) := (\text{Ord}_t \omega^*(x), \text{Ord}_t \omega^*(y), \text{Ord}_t \omega^*(z)).$$

On peut écrire le comorphisme de ω de la façon suivante :

$$\omega^*(x) = t^{\eta_x} \chi; \omega^*(y) = t^{\eta_y} \varphi; \omega^*(z) = t^{\eta_z} \psi,$$

où χ, φ et ψ sont des séries formelles dans $K[[s, t]]$ qui ne sont pas divisibles par t .

Maintenant, on donne la proposition clé pour la preuve du théorème 1.1.

Proposition 2.12. *Si les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles, alors le K -wedge admissible ω centré en N_E se relève à la résolution minimale de $S(\mathfrak{p}, \mathfrak{h}_q)$.*

Démonstration. La résolution $\pi : S_G \rightarrow S(\mathfrak{p}, \mathfrak{h}_q)$ est induite par le morphisme torique $\pi : X(\Sigma_G) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$. L'éventail Σ_G est une G -subdivision régulière de l'éventail $\Gamma^*(\mathfrak{f})$ (voir la Figure 2), donc l'éventail Σ_G est une partie d'un éventail complet. En vertu de la *version torique du Lemme de Chow* il existe une subdivision Σ d'éventail Σ_G tel que le morphisme $\pi' : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ est un morphisme projectif, la variété $X(\Sigma)$ est quasi-projective et π factorise π' . Par conséquent, il existe un idéal monomial $\mathcal{I} \subset \mathbf{k}[x, y, z]$ tel que $X(\Sigma)$ est l'éclatement de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ de centre l'idéal \mathcal{I} .

Comme les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles et l'idéal \mathcal{I} est monomial, l'idéal $\omega^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathbf{k}[s, t]$ est inversible. En vertu de la *propriété universelle de l'éclatement* le morphisme ω se relève à $X(\Sigma)$. Ceci implique que le K -wedge ω se relève à résolution minimale de $S(\mathfrak{p}, \mathfrak{h}_q)$. \square

Maintenant, on donne quelques notions et résultats techniques qui nous permettent de montrer que les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles.

Pour une série non nulle $\phi := \sum c_{(e_1, e_2)} s^{e_1} t^{e_2}$, où $c_{(e_1, e_2)} \in K$, on définit les applications suivantes :

$$\nu : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, v \mapsto \nu_v \phi := \min\{v \cdot e \mid e \in \mathcal{E}(\phi)\}, \text{ où } \mathcal{E}(\phi) = \{(e_1, e_2) \mid c_{(e_1, e_2)} \neq 0\};$$

$$\text{PPr} : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow K[s, t], v \mapsto \phi_v := \sum_{e \cdot v = \nu_v \phi} c_{(e_1, e_2)} s^{e_1} t^{e_2};$$

$\text{FI} : K[[s, t]] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, où $\text{FI}(\phi)$ est le nombre de facteurs irréductibles de ϕ comptés avec multiplicité.

Un vecteur $v \in \mathbb{R}_{>0}^2$ définit une graduation positive sur l'anneau $K[[s, t]]$. Cette graduation est appelée v -*graduation*. Pour une série formelle ϕ , le polynôme ϕ_v est la partie principale de ϕ pour la v -graduation. Le polynôme ϕ_v est appelé la v -*partie principale* de ϕ .

Proposition 2.13. *Il existe un vecteur $v \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que :*

$$\text{FI}(\chi) \leq \text{Deg}_t \chi_v = \nu_v \chi = \mu_x - \eta_x \leq p - 1 ;$$

$$\text{FI}(\varphi) \leq \text{Deg}_t \varphi_v = \nu_v \varphi = \mu_y - \eta_y \leq p - 1 ;$$

$$\text{FI}(\psi) \leq \text{Deg}_t \psi_v = \nu_v \psi = \mu_z - \eta_z \leq q - 1.$$

De plus, χ (resp. φ , ψ) est inversible si et seulement si $\mu_x - \eta_x = 0$ (resp. $\mu_y - \eta_y = 0$, $\mu_z - \eta_z = 0$).

Démonstration. On remarque qu'on peut écrire le comorphisme du K -wedge ω de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \omega^*(x) &= \sum_{\eta_x \leq i < \mu_x} a_i s^{l_i} t^i + \sum_{\mu_x \leq i} a_i t^i ; \\ \omega^*(y) &= \sum_{\eta_y \leq j < \mu_y} b_j s^{m_j} t^j + \sum_{\mu_y \leq j} b_j t^j ; \\ \omega^*(z) &= \sum_{\eta_z \leq k < \mu_z} c_k s^{n_k} t^k + \sum_{\mu_x \leq k} c_k t^k, \end{aligned}$$

où les exposants l_i (resp. m_j, n_k) sont strictement positifs et les séries formelles $a_i, b_j, c_k \in K[[s]]$ sont inversibles pour $(i, j, k) = (\eta_x, \eta_y, \eta_z)$ et inversibles ou nulles pour $i < \mu_x, j < \mu_y, k < \mu_z$.

Soit $v = (u, 1) \in \mathbb{Q}_{>0}^2$. Si u est "assez grand", alors $\chi_v = at^{\mu_x - \eta_x}$, $\varphi_v = bt^{\mu_y - \eta_y}$ et $\psi_v = ct^{\mu_z - \eta_z}$, où a , (resp. b, c) est le terme constant de la série formelle a_{μ_x} (resp. b_{μ_y}, c_{μ_z}). La proposition résulte de la propriété multiplicative de la v -graduation, c'est-à-dire pour ϕ_1 et ϕ_2 deux séries formelles on a $(\phi_1 \phi_2)_v = (\phi_1)_v (\phi_2)_v$. \square

Proposition 2.14. *Le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient au semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$, où τ est le cône engendré par les vecteurs $(0, 0, 1)$ et (p, p, q) . En particulier $\eta_x = \eta_y$ et $p\eta_z - q\eta_x \geq 0$. De plus si les séries formelles χ, φ et ψ ne sont pas simultanément inversibles, alors on a $p\eta_z - q\eta_x > 0$.*

Démonstration. Pour un réel $u \in \mathbb{R}$, on définit le vecteur suivant :

$$\nu_{(u,1)}\omega = (\nu_{(u,1)}\omega^*(x), \nu_{(u,1)}\omega^*(y), \nu_{(u,1)}\omega^*(z)) \in \mathbb{R}_{>0}^3$$

Ce vecteur définit une graduation sur l'anneau $\mathbf{k}[x, y, z]$. Soit $f_u \in \mathbf{k}[x, y, z]$ la partie principale de $f = z^p + h_q(x, y)$, par rapport à cette graduation.

Le K -wedge ω doit satisfaire l'équation $z^p + h_q(x, y) = 0$, c'est-à-dire on a

$$f(\omega^*(x), \omega^*(y), \omega^*(z)) = 0,$$

ce qui implique que

$$f_u((\omega^*(x))_{(u,1)}, (\omega^*(y))_{(u,1)}, (\omega^*(z))_{(u,1)}) = 0.$$

Par conséquent, f_u n'est pas un monôme. Ceci implique que le vecteur $\nu_{(u,1)}\omega$ appartient au 2-squelette $S^2 \Gamma^*(f)$.

On remarque que $\lim_{u \rightarrow 0} \nu_{(u,1)}\omega = (\eta_x, \eta_y, \eta_z)$. Soit $n \gg 0$ un entier "assez grand" tel que $\eta_x < n$, $\eta_y < n$, $\eta_z < n$. Il existe alors un réel $u_0 > 0$ tel que

$$\nu_{(u,1)}\omega \in K_n := S_2 \Sigma_{\mathcal{N}} \cap \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \mid \lambda_j \leq n \text{ pour } j \in \{1, 2, 3\}\},$$

pour tout $u \leq u_0$. Comme K_n est compact, on a $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in S_2 \Gamma^*(f)$.

On rappelle que les cônes τ_1 et τ_2 sont réguliers (voir la Proposition 2.3). Comme $\eta_x \leq \mu_x$, $\eta_y \leq \mu_y$ et $\eta_z \leq \mu_z$ et les cônes τ_1, τ_2 sont réguliers, on obtient que le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient au cône τ .

Si les séries formelles χ, φ et ψ ne sont pas simultanément inversibles, alors $p\eta_z - q\eta_x \neq 0$, car si $p\eta_z - q\eta_x = 0$, alors $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) = (\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (p, p, q)$, d'où les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles (voir la Proposition 2.13). \square

Soit $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$ l'enveloppe convexe de $\tau' \cap \mathbb{Z}_{>0}^2$, où τ' est le cône engendré par $(0, 1)$ et (μ_x, μ_z) . La figure suivante donne une idée intuitive de la forme du polyèdre $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$.

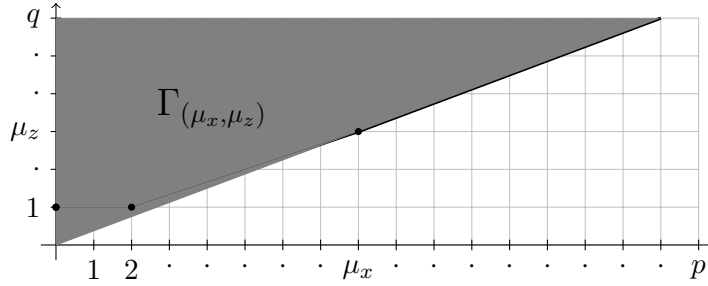


FIGURE 3. Polyèdre $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$

Proposition 2.15. Soient (a_1, b_1) et (a_2, b_2) , $a_1 \leq a_2$, les coordonnées des sommets d'une face compacte du polyèdre $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$ et L la droite qui joint les points (a_1, b_1) et (a_2, b_2) . Alors la pente de la droite L est positive et strictement plus petite que $\frac{q}{p}$. De plus $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)} = \tau' \cap \Gamma_{(p, q)}$, où τ' est le cône engendré par les vecteurs $(0, 1)$ et (μ_x, μ_z) .

Démonstration. D'abord on suppose que $(\mu_x, \mu_z) = (p, q)$. On note $\Gamma = \Gamma_{(p, q)}$. Comme on a $p > q$, le vecteur $(1, 1)$ appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau'' \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$, où τ'' est le cône engendré par $(0, 1)$ et (p, q) (voir la Figure 3). En particulier le vecteur $(1, 1)$ appartient à une face compacte du polyèdre Γ . Comme la pente de la droite qui joint les points $(0, 1)$ et $(1, 1)$ est nulle et $1 < q$, on obtient que la pente de la droite L est un nombre réel positif, car Γ est convexe.

En raisonnant par l'absurde, on suppose que

$$\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \geq \frac{q}{p},$$

d'où $p(b_2 - b_1) - q(a_2 - a_1) \geq 0$. Ceci implique que le vecteur $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$ appartient au cône τ'' . Or $(a_2, b_2) = (a_2 - a_1, b_2 - b_1) + (a_1, b_1)$, d'où une contradiction, car le vecteur (a_2, b_2) appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau'' \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$.

On a $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)} = \tau' \cap \Gamma_{(p, q)}$, car la pente de la droite qui joint les points $(0, 0)$ et (μ_x, μ_z) est plus grande que $\frac{q}{p}$ et les pentes des droites qui définissent les faces compactes de $\Gamma_{(p, q)}$ sont strictement plus petites que $\frac{q}{p}$. \square

On définit l'application suivante :

$$m : \Gamma_{(\mu_x, \mu_z)} \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto pv - qu.$$

Proposition 2.16. Il existe un vecteur $(u_0, v_0) \in \Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$ tel que

$$m(u_0, v_0) = \inf\{m(u, v) \mid (u, v) \in \Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}\}.$$

De plus on a :

- i) si $(\mu_x, \mu_z) = (p, q)$, alors (u_0, v_0) appartient au rayon engendré par le vecteur (p, q) ;
- ii) si $(\mu_x, \mu_z) \neq (p, q)$, alors $(u_0, v_0) = (\mu_x, \mu_z)$.

Démonstration. Le vecteur (μ_x, μ_z) étant fixé, on note $\Gamma = \Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$.

Géométriquement, lorsque c croit depuis $-\infty$, les droites $L_c := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (-q, p) \cdot (u, v) = c\}$ finissent par toucher le bord du polyèdre Γ en un point (u_0, v_0) . On remarque que $m(u_0, v_0) = \inf\{m(u, v) \mid (u, v) \in \Gamma\}$.

On rappelle que pour tout vecteur $(u, v) \in \Gamma$ on a $pv - qu \geq 0$. Si $(\mu_x, \mu_z) = (p, q)$, alors $L_0 \cap \Gamma$ est la face non compacte engendrée par le vecteur (p, q) , d'où le point i) de la proposition. Maintenant, on suppose que $(\mu_x, \mu_z) \neq (p, q)$. La pente de la droite L' qui joint les points $(0, 0)$ et (μ_x, μ_z) est strictement plus grande que $\frac{q}{p}$, donc toute droite L_c pour $c \in \mathbb{R}$ intersecte en exactement un point la droite L' . Par conséquent, (u_0, v_0) appartient à une face compacte de Γ .

Soient (a_1, b_1) et (a_2, b_2) les coordonnées des sommets d'une face compacte du polyèdre Γ . On peut supposer que $a_1 < a_2$ car la pente de la droite L qui joint les points (a_1, b_1) et (a_2, b_2) est finie (Proposition 2.15).

Soit c_i le réel tel que la droite L_{c_i} intersecte la droite L en le point (a_i, b_i) , pour $i \in \{1, 2\}$. En vertu de la Proposition 2.15 on a $c_2 < c_1$ (la pente de la droite L est positive et strictement plus petite que $\frac{q}{p}$). La proposition est obtenue par récurrence sur le nombre de faces de Γ . \square

Proposition 2.17. *Le vecteur (η_x, η_z) appartient au polyèdre $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$.*

Démonstration. En vertu de la Proposition 2.14 le vecteur (η_x, η_z) appartient au cône τ'' engendré par les vecteurs $(0, 1)$ et (p, q) . Par conséquent, le vecteur (η_x, η_z) appartient au polyèdre $\Gamma_{(p, q)}$.

En raisonnant par l'absurde si le vecteur (η_x, η_z) n'appartient pas au polyèdre $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$, alors ce vecteur appartient à l'intersection Ω du cône τ'' et l'intérieur du triangle défini par les vecteurs $(0, 0)$, (μ_x, μ_z) et $(\mu_x, 0)$ car $\eta_x \leq \mu_x$, $\eta_z \leq \mu_z$ et $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$ est l'enveloppe convexe de $\tau' \cap \mathbb{Z}_{>0}^2$, où τ' est le cône engendré par les vecteurs $(0, 1)$ et (μ_x, μ_z) . Mais d'après la Proposition 2.15 l'intersection du polyèdre $\Gamma_{(p, q)}$ et l'ensemble Ω est vide, d'où une contradiction. \square

On rappelle qu'on veut montrer que les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles (Proposition 2.12). Le résultat suivant est une réduction du problème.

Proposition 2.18. *Si χ ou φ est une série formelle inversible, alors les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles*

Démonstration. D'après les Propositions 2.11, 2.13 et 2.14, on obtient que la série χ est inversible si et seulement si φ est inversible. Par conséquent, $\mu_x = \eta_x$ (Proposition 2.13). Comme on a $\eta_z \leq \mu_z$ et $\eta_x = \mu_x$, on a $p\eta_z - q\eta_x \leq p\mu_z - q\mu_x$. En vertu des Propositions 2.16 et 2.17, on obtient que $\mu_z = \eta_z$. La proposition résulte de la Proposition 2.13. \square

Soit $h_q(x, y) = \prod_{i=1}^q (a_i x + b_i y)$ la décomposition en facteurs irréductibles de h_q . Le K -vecteur ω doit satisfaire l'équation $z^p = -h_q(x, y)$ donc :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x} \psi^p = -h_q(\chi, \varphi) = -\prod_{i=1}^q \gamma_i, \text{ où } \gamma_i := a_i \chi + b_i \varphi.$$

Dans la suite, v est comme dans la Proposition 2.13. Les combinaisons linéaires de χ et φ données par les γ_i plus l'hypothèse sur les facteurs irréductibles de h_q permettent de montrer le lemme suivant.

Lemme 2.19. *Soit $\lambda := \text{p.g.c.d}(\gamma_1, \gamma_2)$. Alors $\text{p.g.c.d}(\gamma_i, \gamma_j) = \lambda I_{ij}$, où I_{ij} est inversible pour tous les entiers $1 \leq i < j \leq q$. De plus, si λ est inversible, alors χ , φ et ψ sont inversibles.*

Démonstration. Soit $\lambda_0 := \text{p.g.c.d}(\gamma_{i_0}, \gamma_{j_0})$, où i_0 et j_0 sont deux entiers tels que $1 \leq i_0 < j_0 \leq q$. Si λ_0 n'est pas inversible, alors λ_0 divise χ et φ . Par conséquent, λ_0 divise $\text{p.g.c.d}(\gamma_i, \gamma_j)$ pour tous les entiers i, j tels que $1 \leq i < j \leq q$. Ce qui achève la première partie de la proposition.

Pour la deuxième partie de la proposition on suppose que la série formelle λ est inversible.

Raisonnons par l'absurde. En vertu de la Proposition 2.18, les séries χ et φ ne sont pas inversibles. On rappelle que les séries formelles χ , φ et ψ satisfont la relation suivante :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x} \psi^p = -h_q(\chi, \varphi) = -\prod_{i=1}^q \gamma_i, \text{ où } \gamma_i := a_i \chi + b_i \varphi.$$

Comme χ et φ ne sont pas divisibles par t , t divise γ_i si et seulement si t ne divise pas γ_j pour tout $j \neq i$. Quitte à re-numéroter les γ_i , on peut supposer que $t^{p\eta_z - q\eta_x}$ divise γ_1 . Soit $\gamma_1 = -t^{p\eta_z - q\eta_x} \gamma'_1$.

Comme $\text{p.g.c.d}(\gamma_i, \gamma_j)$ est inversible pour tout $2 \leq i < j \leq q$, la série formelle $\gamma'_1 \prod_{i=2}^q \gamma_i$ a au moins $q-1$ facteurs irréductibles non associés. Comme on a $\psi^p = \gamma'_1 \prod_{i=2}^q \gamma_i$, on a $\text{FI}(\prod_{i=2}^q \gamma_i) = q-1$, car $\text{FI}(\psi) \leq q-1$ (Proposition 2.13), et on obtient que γ'_1 est inversible et que $\psi = \prod_{i=1}^{q-1} \psi_i$, où les séries formelles ψ_i sont irréductibles non associées. Par conséquent, on peut supposer que $\gamma_{i+1} = \psi_i^p I_i$ pour $1 \leq i \leq q-1$, où les séries formelles I_i sont inversibles. Comme on a $q \geq 3$, il existe deux constantes $a, b \in K$ telles que

$$t^{p\eta_z - q\eta_x} \gamma'_1 = a I_1 \psi_1^p + b I_2 \psi_2^p.$$

On rappelle qu'une série formelle dans $K[[s, t]]$ est inversible si et seulement si elle l'est dans $\overline{K}[[s, t]]$, où \overline{K} est la clôture algébrique de K . Soient J_1 et J_2 deux séries formelles inversibles dans $\overline{K}[[s, t]]$ telles que $J_1^p = a I_1$ et $J_2^p = b I_2$. Ainsi, on obtient que :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x} \gamma'_1 = \prod_{i=1}^p (J_1 \psi_1 + w_i J_2 \psi_2),$$

où les w_i sont les racines p -ièmes de l'unité. Mais γ'_1 est inversible et $p\eta_z - q\eta_x > 0$ (Proposition 2.14), donc ψ_1 et ψ_2 sont inversibles ou divisibles par t , ce qui est absurde. \square

La proposition suivante achève la preuve du Théorème 1.1 (voir la Proposition 2.12).

Proposition 2.20. *Les séries formelles χ , φ , ψ sont inversibles.*

Démonstration. On rappelle que $\eta_y = \eta_x \leq \mu_x = \mu_y \leq p$, $\eta_z \leq \mu_z \leq q$, $p\eta_z - q\eta_x \geq 0$ et que (μ_x, μ_y, μ_z) appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$ (voir les Propositions 2.11 et 2.14).

En raisonnant par l'absurde, on suppose les séries formelles χ , φ et ψ non toutes inversibles. Par conséquent, $p\eta_z - q\eta_x > 0$.

On rappelle que les séries formelles χ , φ et ψ satisfont la relation suivante :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x} \psi^p = -h_q(\chi, \varphi) = -\prod_{i=1}^q \gamma_i, \text{ où } \gamma_i := a_i \chi + b_i \varphi.$$

Comme χ et φ ne sont pas divisibles par t , t divise γ_i si et seulement si t ne divise pas γ_j pour tout $j \neq i$. Quitte à re-numéroter les γ_i , on peut supposer que $t^{p\eta_z - q\eta_x}$ divise γ_1 .

D'après le Lemme 2.19 il existe des séries formelles γ'_i telles que :

$$\gamma_1 = -t^{p\eta_z - q\eta_x} \gamma'_1 \lambda \text{ et } \gamma_i = \gamma'_i \lambda \text{ pour } 2 \leq i \leq q,$$

où λ n'est pas inversible et p. g. c. d(γ'_i, γ'_j) est inversible pour $1 \leq i < j \leq q$.

Le lemme suivant est le résultat clé pour la preuve de la Proposition 2.20.

Lemme 2.21. $1 \leq i \leq q$ Le v -ordre de λ est $\mu_x - \eta_x$, c'est-à-dire $\nu_v \lambda = \mu_x - \eta_x$.

D'abord finissons la preuve de la Proposition 2.20. On rappelle que $\eta_y = \eta_x \leq \mu_x = \mu_y$, $\eta_z \leq \mu_z$, que (μ_x, μ_y, μ_z) appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$ (Proposition 2.11) et que (η_x, η_z) appartient au polyèdre de Newton $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$ (Proposition 2.17) engendré par l'ensemble $\tau' \cap \mathbb{Z}_{>0}^2$, où τ' est le cône engendré par $(0, 1)$ et (μ_x, μ_z) . Soit $\gamma' = \prod_{i=1}^q \gamma'_i$, d'où $\psi^p = \gamma' \lambda^q$. D'après le Lemme 2.21 on a $\nu_v \gamma' = p\mu_z - q\mu_x - (p\eta_z - q\eta_x)$. Par définition $\nu_v \gamma' \geq 0$. Or $\nu_v \gamma' \geq 0$ si et seulement si $(\eta_x, \eta_z) = (\mu_x, \mu_z)$ (Proposition 2.16), d'où une contradiction. En effet, si $(\eta_x, \eta_z) = (\mu_x, \mu_z)$, alors les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles (voir les Propositions 2.13 et 2.18).

Démonstration du Lemme 2.21 On rappelle que $\gamma_i = a_i \chi + b_i \varphi$ pour $1 \leq i \leq q$. Alors, il existe au plus un $1 \leq i_0 \leq q$ tel que les v -parties principales χ_v, φ_v satisfont la relation $a_{i_0} \chi_v + b_{i_0} \varphi_v = 0$. En particulier on a $\nu_v \gamma_i = \mu_x - \eta_x$ pour tout $1 \leq i \leq q$ tel que $i \neq i_0$. Par conséquent, $\nu_v \lambda \leq \mu_x - \eta_x$.

Si $\nu_v \lambda < \mu_x - \eta_x$, alors $\nu_v \gamma'_i > 0$, pour tout $2 \leq i \leq q$. Ceci implique que les γ'_i , pour $2 \leq i \leq q$, ne sont pas inversibles.

Comme p. g. c. d(γ'_i, γ'_j) est inversible pour tous les entiers i, j tels que $2 \leq i < j \leq q$, la série formelle $\gamma' = \prod_{i=1}^q \gamma'_i$ a au moins $q - 1$ facteurs irréductibles non associés. Comme on a $\psi^p = \gamma' \lambda^q$, on a $\text{FI}(\gamma') = q - 1$, car $\text{FI}(\psi) \leq q - 1$ (Proposition 2.13) et on obtient que γ'_1 est inversible, que $\psi = \prod_{i=1}^{q-1} \psi_i$, où les ψ_i sont irréductibles non associées, et que $\mu_z - \eta_z = q - 1$. De plus on a $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (p, p, q)$. Ceci implique que $p - q > 1$ car si $p - q = 1$ le diviseur $E_0 = D_{(p,p,q)} \cap S\mathcal{G}$ n'est pas un diviseur essentiel (voir la Proposition 2.8 et le Corollaire 2.5).

On rappelle qu'une série formelle dans $K[[s, t]]$ est inversible si et seulement si elle est inversible dans $\overline{K}[[s, t]]$, où \overline{K} est la clôture algébrique de K . Dans la suite on suppose que le corps K est algébriquement clos.

On peut donc supposer que $\psi_i^p = \gamma'_{i+1} \lambda_i^q$, où $\xi \lambda = \prod_{i=1}^{q-1} \lambda_i$, $\xi^q = \gamma'_1$ et p. g. c. d(λ_i, λ_j) est inversible pour tous les entiers i, j tels que $1 \leq i < j \leq q - 1$. Comme $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (p, p, q)$, on a $t^{p\eta_z - q\eta_x} \psi_v = -h_q(\chi_v, \varphi_v)$ (Proposition 2.13), d'où $\nu_v \gamma_i = \mu_x - \eta_x$ pour tout $1 \leq i \leq q$. Ceci implique que $\nu_v \gamma'_{i+1} = \nu \gamma'_2$ pour tout $1 \leq i \leq q - 1$. Comme $\nu_v \gamma'_{i+1} = \nu \gamma'_2$ et $\nu_v \psi_i = 1$ pour tout $1 \leq i \leq q - 1$, on a $\nu_v \lambda_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq q - 1$, d'où les λ_i ne sont pas inversibles. Ainsi, on obtient que $\gamma_{i+1} = I_i \psi_i^{p-q} \lambda$, pour $1 \leq i \leq q - 1$, où les I_i sont inversibles. Comme $q \geq 3$ et $\gamma_i := a_i \chi + b_i \varphi$, il existe deux constantes $a, b \in K$ telles que

$$t^{p\eta_z - q\eta_x} \gamma'_1 = a I_1 \psi_1^{p-q} + b I_2 \psi_2^{p-q}.$$

Soient J_1 et J_2 deux séries formelles inversibles telles que $J_1^{p-q} = a I_1$ et $J_2^{p-q} = b I_2$. Ainsi, on obtient que :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x} \gamma'_1 = \prod_{i=1}^{p-q} (J_1 \psi_1 + w_i J_2 \psi_2),$$

où les w_i sont les racines $(p - q)$ -ièmes de l'unité. Mais γ'_1 est inversible, $p\eta_z - q\eta_x > 0$ et $p - q > 1$, donc ψ_1 et ψ_2 sont inversibles ou divisibles par t , ce qui est absurde. \square

3. PREUVE DE LA BIJECTIVITÉ DE L'APPLICATION DE NASH POUR LES SINGULARITÉS DE TYPE \mathbb{E}_6 ET \mathbb{E}_7

3.1. La singularité de type \mathbb{E}_6 . Dans cette section on démontre la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités de type \mathbb{E}_6 , ce qui équivaut à montrer que tous les wedges admissibles se relèvent à la résolution minimale de \mathbb{E}_6 (voir [Reg06]).

Soit S l'hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ donnée par l'équation $x^2 + y^3 + z^4 = 0$. L'hypersurface S a un unique point singulier de type \mathbb{E}_6 à l'origine de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$.

Dans la suite, on énonce quelques propositions qui se démontrent de façon analogue à certaines propositions utilisées pour prouver le Théorème 1.1. Pour chaque résultat énoncé on précisera la proposition correspondante dans la preuve du théorème 1.1.

Notons $f = x^2 + y^3 + z^4$; on considère l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ associé à f . Soit H un plan de \mathbb{R}^3 qui ne contient pas l'origine de \mathbb{R}^3 et tel que l'intersection de H et $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ soit un ensemble compact. Le diagramme suivant représente l'intersection de H avec la subdivision $\Gamma^*(f)$ de \mathbb{R}^3 . Chaque sommet du diagramme est identifié avec le *vecteur extrémal* correspondant. On note τ_1 (resp. τ_2, τ_3) le cône engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ (resp. $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$) et $(6, 4, 3)$.

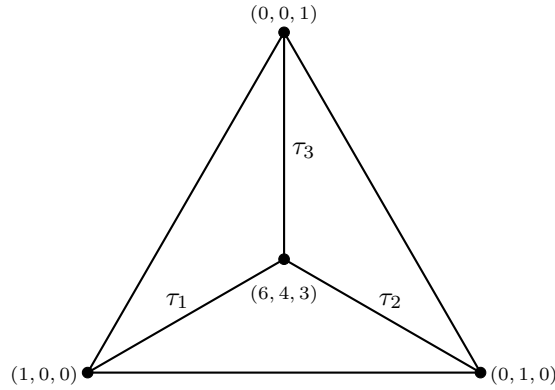


FIGURE 4. Éventail de Newton $\Gamma^*(f)$

Soit $\Sigma_{\mathcal{G}}$ une G -subdivision régulière de $\Gamma^*(f)$. On note $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^*(f)) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ (resp. $\pi_{\mathcal{G}} : X(\Sigma_{\mathcal{G}}) \rightarrow X(\Gamma^*(f))$) le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ (resp. $\Sigma_{\mathcal{G}}$ de $\Gamma^*(f)$) et $S_{\mathcal{G}}$ le transformé strict de S associé au morphisme $\pi := \pi_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{N}}$.

La proposition suivante est un analogue de la Proposition 2.4.

Proposition 3.1. $S_{\mathcal{G}}$ est la résolution minimale de S .

Soient E un diviseur essentiel sur S ($E \in \text{Ess}(S)$) et α_E le point générique de N_E . On note

$$(\mu_x, \mu_y, \mu_z) := (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x), \text{Ord}_t \alpha_E^*(y), \text{Ord}_t \alpha_E^*(z)),$$

où α_E^* est le comorphisme de α_E .

Pour un cône τ dans $\Gamma^*(f)$ on note $G\tau$ le système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$.

La proposition suivante est un analogue de la Proposition 2.11.

Proposition 3.2. *Le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'union de $G\tau_2$ et $G\tau_3$, où τ_2 (resp. τ_3) est le cône engendré par les vecteurs $(0, 1, 0)$ (resp. $(0, 0, 1)$) et $(6, 4, 3)$ (voir la figure 4). Autrement dit, $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(2, 2, 1), (3, 2, 2), (4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$.*

Dans la suite, on montre que pour chaque diviseur essentiel E tous les K -wedges admissibles centrés en N_E se relèvent à la résolution minimale de S .

Soit $E \in \text{Ess}(S)$ et on considère un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow S$ admissible centré en N_E . On pose :

$$(\eta_x, \eta_y, \eta_z) := (\text{Ord}_t \omega^*(x), \text{Ord}_t \omega^*(y), \text{Ord}_t \omega^*(z)).$$

On peut écrire le comorphisme de ω de la façon suivante :

$$\omega^*(x) = t^{\eta_x} \chi, \quad \omega^*(y) = t^{\eta_y} \varphi, \quad \omega^*(z) = t^{\eta_z} \psi,$$

où les séries formelles χ, φ, ψ ne sont pas divisibles par t .

La proposition suivante est un analogue de la Proposition 2.12.

Proposition 3.3. *Si les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles, alors le K -wedge admissible ω centré en N_E se relève à la résolution minimale de S .*

On rappelle les définitions suivantes :

Pour une série non nulle $\phi := \sum c_{(e_1, e_2)} s^{e_1} t^{e_2}$, où $c_{(e_1, e_2)} \in K$, on définit les applications suivantes :

$$\nu : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, v \mapsto \nu_v \phi := \min\{v \cdot e \mid e \in \mathcal{E}(\phi)\}, \text{ où } \mathcal{E}(\phi) = \{(e_1, e_2) \mid c_{(e_1, e_2)} \neq 0\};$$

$$\text{PPr} : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow K[[s, t]], v \mapsto \phi_v := \sum_{e \cdot v = \nu_v \phi} c_{(e_1, e_2)} s^{e_1} t^{e_2};$$

$\text{FI} : K[[s, t]] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, où $\text{FI}(\phi)$ est le nombre de facteurs irréductibles de ϕ comptés avec multiplicité.

Le réel $\nu_v \phi$ est appelé le v -ordre de ϕ et le polynôme ϕ_v est appelé la v -partie principale de ϕ .

La proposition suivante est un analogue de la Proposition 2.13.

Proposition 3.4. *Il existe un vecteur $v \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que :*

$$\text{FI}(\chi) \leq \text{Deg}_t \chi_v = \nu_v \chi = \mu_x - \eta_x \leq 4;$$

$$\text{FI}(\varphi) \leq \text{Deg}_t \varphi_v = \nu_v \varphi = \mu_y - \eta_y \leq 2;$$

$$\text{FI}(\psi) \leq \text{Deg}_t \psi_v = \nu_v \psi = \mu_z - \eta_z \leq 2.$$

De plus, la série χ (resp. φ, ψ) est inversible si et seulement si $\mu_x - \eta_x = 0$ (resp. $\mu_y - \eta_y = 0, \mu_z - \eta_z = 0$).

En vertu de la Proposition 3.3, pour montrer que le K -wedge admissible ω se relève à la résolution minimale de S , il suffit de montrer que les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles. En raisonnant par l'absurde, si au moins l'une d'elles n'est pas inversible on obtient deux cas pour le vecteur (η_x, η_y, η_z) (voir la Proposition 3.5), ensuite on considère chaque cas séparément pour obtenir des contradictions (voir les Propositions 3.9 et 3.12), d'où le Théorème 1.2.

On remarque qu'une série formelle $\phi \in K[[s, t]]$ est inversible dans $K[[s, t]]$ si et seulement si elle est inversible dans $\overline{K}[[s, t]]$, où \overline{K} est la clôture algébrique de K . Dans toute la suite on suppose que le corps K est algébriquement clos.

Maintenant, on énonce la première des trois propositions qu'on vient d'anticiper ci-dessus. Cette proposition est un analogue de la Proposition 2.14.

Proposition 3.5. *S'il existe au moins une série formelle parmi les séries χ , φ , ψ qui n'est pas inversible, alors le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait une des relations suivantes :*

- i) $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$;
- ii) $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$.

Sauf mention du contraire, dans toute la suite le vecteur $v = (u, 1) \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ est comme dans la Proposition 3.4.

Maintenant, on démontre quelques résultats techniques.

Le K -wedge ω doit satisfaire l'équation $x^2 + y^3 + z^4 = 0$, d'où la relation suivante :

$$(1) \quad t^{2\eta_x} \chi^2 + t^{3\eta_y} \varphi^3 + t^{4\eta_z} \psi^4 = 0.$$

Cette relation est utilisée dans plusieurs endroits de la démonstration du Théorème 1.2.

Lemme 3.6. *Si le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) est égal au vecteur $(6, 4, 3)$, alors les v -ordres des séries formelles $t^{\eta_x} \chi + it^{2\eta_z} \psi^2$ et $t^{\eta_x} \chi - it^{2\eta_z} \psi^2$ sont égaux à 6, c'est-à-dire on a :*

$$\nu_v(t^{\eta_x} \chi + it^{2\eta_z} \psi^2) = \nu_v(t^{\eta_x} \chi - it^{2\eta_z} \psi^2) = 6.$$

Démonstration. Dans ce cas, on a $\nu_v(t^{2\eta_x} \chi^2) = \nu_v(t^{3\eta_y} \varphi^3) = \nu_v(t^{4\eta_z} \psi^4) = 12$, donc les v -parties principales χ_v , φ_v et ψ_v satisfont la relation suivante (voir la relation 1) :

$$t^{3\eta_y} \varphi_v^3 + (t^{\eta_x} \chi_v + it^{2\eta_z} \psi_v^2)(t^{\eta_x} \chi_v - it^{2\eta_z} \psi_v^2) = 0.$$

La relation ci-dessus implique que $(t^{\eta_x} \chi_v + it^{2\eta_z} \psi_v^2)(t^{\eta_x} \chi_v - it^{2\eta_z} \psi_v^2) \neq 0$ et par conséquent, on obtient que les v -ordres des séries formelles $t^{\eta_x} \chi + it^{2\eta_z} \psi^2$ et $t^{\eta_x} \chi - it^{2\eta_z} \psi^2$ sont égaux à 6, car les v -parties principales $t^{\eta_x} \chi_v + it^{2\eta_z} \psi_v^2$ et $t^{\eta_x} \chi_v - it^{2\eta_z} \psi_v^2$ sont différentes de zéro et les v -ordres des séries formelles $t^{\eta_x} \chi$ et $t^{2\eta_z} \psi^2$ sont égaux à 6. \square

Lemme 3.7. *S'il existe une série formelle irréductible λ qui divise χ, φ , et ψ , alors λ^2 divise φ .*

Démonstration. On suppose que λ divise χ , φ , et ψ . Soient $\chi = \lambda\chi_1$, $\varphi = \lambda\varphi_1$ et $\psi = \lambda\psi_1$. Alors au moyen de la relation 1 on obtient la relation suivante :

$$t^{2\eta_x} \chi_1^2 + t^{3\eta_y} \lambda\varphi_1^3 + t^{4\eta_z} \lambda^2\psi_1^4 = 0,$$

ce qui implique que λ divise χ_1 . En particulier λ divise φ_1 . \square

Lemme 3.8. *Si la série formelle φ est inversible, alors les séries formelles χ et ψ sont inversibles.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. On suppose que φ est inversible et que χ ou ψ n'est pas inversible.

D'après la Proposition 3.5 on a deux possibilités pour le vecteur (η_x, η_y, η_z) :

- 1) $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$;
- 2) $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$.

Cas 1). On suppose que : $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$.

D'après la Relation 1 on a :

$$t^{3\eta_y - 2\eta_x} \varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

On remarque que t divise $\chi + i\psi^2$ si et seulement si t ne divise pas $\chi - i\psi^2$ car t ne divise pas χ et φ . On peut donc sans perte de généralité supposer que $t^{3\eta_y - 2\eta_x}$ divise $\chi + i\psi^2$.

Si la série formelle φ est inversible, alors la relation $t^{3\eta_y - 2\eta_x} \varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0$ équivaut au système de relations suivant :

$$t^{3\eta_y - 2\eta_x} I_1 = \chi + i\psi^2, \quad I_2 = -\chi + i\psi^2,$$

où I_1 , et I_2 sont deux séries formelles inversibles de $K[[s, t]]$ telles que $I_1 I_2 = \varphi^3$. Alors, les séries formelles χ et ψ sont inversibles, d'où la contradiction.

Cas 2). On suppose que : $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$.

Comme on a $\eta_x \leq 6$, $\eta_y \leq 4$ et $\eta_z \leq 3$, on a $(\eta_x, \eta_y) = (3, 2)$ et $2 \leq \eta_z \leq 3$.

On rappelle que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(2, 2, 1), (3, 2, 2), (4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$. Comme la série formelle χ ou la série formelle ψ n'est pas inversible, le v -ordre $\nu_v \chi$ ou le v -ordre $\nu_v \psi$ n'est pas nul (voir Proposition 3.4). Alors, on a $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$, d'où $1 \leq \mu_y - \eta_y \leq 2$. Par conséquent, la série formelle φ n'est pas inversible, ce qui est une contradiction. \square

Maintenant, on considère le cas i) de la Proposition 3.5.

Proposition 3.9. *On suppose que $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$. Alors, les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. En vertu du Lemme 3.8 on suppose que φ n'est pas inversible.

Comme on a $\eta_x \leq 6$, $\eta_y \leq 4$ et $\eta_z \leq 3$, on a $(\eta_x, \eta_y) = (3, 2)$ et $2 \leq \eta_z \leq 3$. On rappelle que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(2, 2, 1), (3, 2, 2), (4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$. Alors, on a $\mu_y - \eta_y \leq 2$. D'après la Proposition 3.4 le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité de φ est inférieur ou égal à 2.

Au moyen de la Relation 1 on obtient la relation suivante :

$$\varphi^3 + (\chi + it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2)(\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2) = 0.$$

On remarque que la série formelle $\chi + it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2$ est inversible si et seulement si la série formelle $\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2$ l'est. Par conséquent, si $\chi + it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2$ est inversible, alors φ l'est. En vertu du Lemme 3.8, on peut supposer que les séries formelles $\chi + it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2$ et $\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2$ ne sont pas inversibles.

La série formelle φ n'est pas irréductible car si φ est irréductible, alors φ divise χ et ψ , ce qui rentre en contradiction avec le Lemme 3.7. Par conséquent, on a $\mu_y - \eta_y = 2$, ce qui implique que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (6, 4, 3)$. En particulier, la série formelle ψ est irréductible ou inversible parce que $\mu_z - \eta_z \leq 1$ (voir la Proposition 3.4).

Comme φ n'est pas irréductible, le nombre de facteurs irréductibles de φ est égal à 2. On a donc deux cas :

Cas 1). La série formelle φ est le produit de deux séries formelles irréductibles associées.

Cas 2). La série formelle φ est le produit de deux séries formelles irréductibles non associées.

Maintenant, on va montrer que dans ces deux cas on arrive à des contradictions, ce qui démontre que les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles.

Cas 1). On suppose que $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont deux séries formelles irréductibles associées.

Comme le corps K est algébriquement clos, on peut supposer que $\varphi_1 = \varphi_2$.

D'après la Relation 1 on a :

$$\varphi_1^6 + (\chi + it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2)(\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2) = 0,$$

ce qui équivaut au système de relations suivant :

$$\varphi_1^3 I = -\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2, \quad \varphi_1^3 I^{-1} = \chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2,$$

où I est une série formelle inversible de $K[[s, t]]$. En effet, le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) est égal à $(6, 4, 3)$, donc le v -ordre $\nu_v(\chi + it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2)$ est égal au v -ordre $\nu_v(\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2)$ (voir le Lemme 3.6), ce qui implique le système de relations ci-dessus. Par conséquent, on a la relation suivante :

$$2it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2 = -(I + I^{-1})\varphi_1^3.$$

On rappelle que la série formelle ψ est irréductible ou inversible parce que $\mu_z - \eta_z \leq 1$. Alors, la série formelle irréductible φ_1 divise $t^{2\eta_y - \eta_z}$, d'où une contradiction.

Cas 2). On suppose que $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ où φ_1 et φ_2 sont séries formelles irréductibles non associées.

D'après la Relation 1 on a :

$$\varphi_1^3 \varphi_2^3 + (\chi + it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2)(\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2) = 0.$$

Au moyen des Lemmes 3.6 et 3.7 on obtient que cette relation équivaut au système de relations suivant :

$$\varphi_1^3 I_1 = -\chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2, \quad \varphi_2^3 I_2 = \chi - it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2,$$

où I_1, I_2 sont deux séries formelles inversibles de $K[[s, t]]$ telles que $I_1 I_2 = 1$, d'où

$$-2it^{2\eta_z - \eta_x} \psi^2 = \varphi_1^3 I_1 + \varphi_2^3 I_2 = \prod_{i=1}^3 (\varphi_1 J_1 + w_i \varphi_2 J_2),$$

où les w_i sont les racines i -ièmes de l'unité et J_1, J_2 sont deux séries formelles inversibles telles que $J_1^3 = I_1$ et $J_2^3 = I_2$.

On rappelle que la série formelle ψ est irréductible ou inversible. Si ψ est inversible, alors les séries formelles φ_1 et φ_2 sont inversibles ou divisibles par t . On a donc une contradiction dans les deux cas. Ainsi, on obtient que la série formelle ψ est irréductible.

Comme t ne divise pas φ_1 et φ_2 , la série formelle ψ divise φ_1 et φ_2 . Par conséquent, la série ψ divise t , d'où une contradiction. Ceci achève la démonstration de la proposition. \square

Les deux lemmes suivants sont très importants dans la démonstration.

Lemme 3.10. *On suppose que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (4, 3, 2)$. Alors, les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. En vertu du Lemme 3.8 on suppose que φ n'est pas inversible.

En vertu de la Proposition 3.5 le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait une des relations suivantes :

$$\eta_x = 2\eta_z \text{ et } 2\eta_x < 3\eta_y; \quad 2\eta_x = 3\eta_y \text{ et } \eta_x < 2\eta_z.$$

D'après la proposition 3.9 si on a $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$, alors les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles. Par conséquent, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait la relation $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$. Ainsi, on obtient que $\eta_x \in \{2, 4\}$ et que $\eta_y \geq 2$.

Par hypothèse, la série formelle φ n'est pas inversible, et par conséquent, $\mu_y - \eta_y \geq 1$ (voir la Proposition 3.4). Comme on a $\eta_y \geq 2$ et $\mu_y = 3$, on obtient que $\eta_y = 2$. On a donc $\eta_x < 3$, d'où $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) = (2, 2, 1)$. Par conséquent, on a les v -ordres suivants :

$$\nu_v \chi = 2, \quad \nu_v \varphi = 1, \quad \text{et } \nu_v \psi = 1.$$

Comme les v -ordres $\nu_v \chi$, $\nu_v \varphi$ et $\nu_v \psi$ sont strictement positifs, les séries formelles χ , φ et ψ ne sont pas inversibles. De plus, les séries formelles φ et ψ sont irréductibles (voir la Proposition 3.4).

D'après la Relation 1 on a :

$$t^2 \varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

On remarque que t divise $\chi + i\psi^2$ si et seulement si t ne divise pas $\chi - i\psi^2$, car t ne divise pas χ et φ . On peut donc supposer, sans perte de généralité, que t^2 divise $\chi + i\psi^2$.

Si la série formelle φ divise $\chi + i\psi^2$ et $\chi - i\psi^2$, alors φ divise χ et ψ , ce qui rentre en contradiction avec le Lemme 3.7.

Comme les séries formelles χ et ψ ne sont pas inversibles et par hypothèse t^2 divise $\chi + i\psi^2$, la relation $t^2 \varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0$ équivaut au système de relations suivant :

$$t^2 I = \chi + i\psi^2, \quad \varphi^3 I^{-1} = -\chi + i\psi^2,$$

où $I \in K[[s, t]]$ est un série formelle inversible. Ainsi, on obtient la relation suivante :

$$2i\psi^2 = t^2 I + \varphi^3 I^{-1}.$$

Le corps K est algébriquement clos, donc il existe $I_1 \in K[[s, t]]^*$ tel que $I_1^2 = I$. On a donc :

$$(\kappa\psi - tI_1 t)(\kappa\psi + tI_1) = \varphi^3 I^{-1},$$

où $\kappa^2 = 2i$. Comme les séries formelles $\kappa\psi - tI_1$ et $\kappa\psi + tI_1$ ne sont pas inversibles et la série formelle φ est irréductible, φ divise $\kappa\psi - tI_1$ et $\kappa\psi + tI_1$ ce qui implique que φ divise la série formelle tI_1 , d'où une contradiction car φ n'est pas divisible par t . \square

Lemme 3.11. *On suppose que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (6, 4, 3)$, alors les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. En vertu du Lemme 3.8 on suppose que φ n'est pas inversible.

En vertu de la Proposition 3.5 le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait une des relations suivantes :

$$\eta_x = 2\eta_z \text{ et } 2\eta_x < 3\eta_y; \quad 2\eta_x = 3\eta_y \text{ et } \eta_x < 2\eta_z.$$

D'après la Proposition 3.9 si on a $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$, alors les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles. Par conséquent, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait la relation $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$.

On rappelle que $1 \leq \eta_x \leq 6$, $1 \leq \eta_y \leq 4$ et $1 \leq \eta_z \leq 3$. Comme on a $\eta_z \geq 1$, on obtient que $4 \leq 3\eta_y$. Ceci implique que $2 \leq \eta_y$. Comme la série formelle φ n'est pas inversible, on a $2 \leq \eta_y \leq 3$.

Si on a $\eta_y = 3$, alors on a $\mu_y - \eta_y = 1$. Par conséquent, la série formelle φ est irréductible (voir la Proposition 3.4).

D'après la Relation 1 on a :

$$t^{9-2\eta_x} \varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

On remarque que t divise $\chi + i\psi^2$ si et seulement si t ne divise pas $\chi - i\psi^2$, car t ne divise pas χ et ψ . On peut donc supposer, sans perte de généralité, que $t^{9-2\eta_x}$ divise $\chi + i\psi^2$. On a donc le système de relations suivant :

$$t^{9-2\eta_x} \varphi^j I = \chi + i\psi^2, \quad \varphi^{3-j} I^{-1} = \chi - i\psi^2,$$

où $0 \leq j \leq 3$ et I est un élément inversible de $K[[s, t]]$.

Si on a $j = 3$, alors la série formelle $\chi - i\psi^2$ est inversible, d'où on a $\nu_v(\chi - i\psi^2) = 0$. Le Lemme 3.6 et la propriété multiplicative du v -ordre montrent que le v -ordre $\nu_v(\chi + i\psi^2)$ est égal à zéro, ce qui implique que le v -ordre de $t^{9-2\eta_x} \varphi^3$ est égal à zéro, d'où une contradiction.

Si on a $1 \leq j \leq 2$, alors φ divise les séries formelles χ et ψ ce qui rentre en contradiction avec le Lemme 3.7. On a donc le système de relations suivant :

$$t^{9-2\eta_x} I = \chi + i\psi^2, \quad \varphi^3 I^{-1} = \chi - i\psi^2.$$

Par conséquent, le v -ordre $\nu_v(\chi + i\psi^2)$ (resp. le v -ordre $\nu_v(\chi - i\psi^2)$) est égal à $9 - 2\eta_x$ (resp. est égal à 3). Le Lemme 3.6 et la propriété multiplicative du v -ordre montrent qu'on a $\nu_v(\chi + i\psi^2) = \nu_v(\chi - i\psi^2)$, ce qui implique que $\eta_x = 3$, d'où la contradiction car $\eta_x = 2\eta_z$. Forcément, on a donc $\eta_y = 2$.

Comme on a $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$ et $\eta_y = 2$, on obtient que $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) = (2, 2, 1)$, d'où

$$t^2 \varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

Comme on a $\nu_v \varphi = \mu_y - \eta_y = 2$, la série formelle φ est au plus le produit de deux séries formelles irréductibles comptés avec multiplicité, voir la Proposition 3.4.

Alors, pour la série formelle φ on obtient les trois cas suivants :

- Cas 1). la série formelle φ est irréductible ;
- Cas 2). la série formelle φ est le produit de deux séries formelles non associées ;
- Cas 3). la série formelle φ est le produit de deux séries formelles associées.

Maintenant, on va montrer que dans chaque cas ci-dessus on obtient une contradiction, ce qui implique que φ est inversible, d'où le lemme.

On rappelle que dans les trois cas on a la relation suivante :

$$t^2\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

On remarque que t divise $\chi + i\psi^2$ si et seulement si t ne divise pas $\chi - i\psi^2$ car t ne divise pas χ et φ . On peut donc supposer, sans perte de généralité, que t^2 divise $\chi + i\psi^2$.

Cas 1). On suppose que φ est une série formelle irréductible.

Si la série formelle φ est irréductible, alors la relation $t^2\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0$ équivaut au système de relations suivant :

$$-t^2\varphi^j I = \chi + i\psi^2, \quad \varphi^{3-j} I^{-1} = \chi - i\psi^2,$$

où $0 \leq j \leq 3$ et I est une série formelle inversible de $K[[s, t]]$. Dans ce cas, le v -ordre $\nu_v \varphi$ est égal à 2.

Le Lemme 3.6 et la propriété multiplicative du v -ordre montrent qu'on a $\nu_v(\chi + i\psi^2) = \nu_v(\chi - i\psi^2)$, ce qui implique que $2(1+j) = 2(3-j)$, d'où $j = 1$. Alors, la série formelle φ divise les séries formelles χ et ψ , ce qui rentre en contradiction avec le Lemme 3.7.

Cas 2). On suppose que $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$ où φ_1 et φ_2 sont deux séries formelles irréductibles non associées.

Dans ce cas, les v -ordres $\nu_v \varphi_1$ et $\nu_v \varphi_2$ sont égaux à 1.

De la même façon que dans le cas précédent, on a le système de relations suivant :

$$t^2\varphi_1^j \varphi_2^k I = -(\chi + i\psi^2), \quad \varphi_1^{3-j} \varphi_2^{3-k} I^{-1} = (\chi - i\psi^2),$$

où $0 \leq j \leq 3$, $0 \leq k \leq 3$ et I est un élément inversible de $K[[s, t]]$.

Le Lemme 3.6 et la propriété multiplicative du v -ordre montrent qu'on a $\nu_v(\chi + i\psi^2) = \nu_v(\chi - i\psi^2)$, ce qui implique que $2+j+k = 6-j-k$, d'où $j+k = 2$. Pour tous les j et k tels que $j+k = 2$, on rentre en contradiction avec le Lemme 3.7.

Cas 3). On suppose que $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont des séries formelles irréductibles associées.

Comme le corps K est algébriquement clos, on peut supposer que $\varphi_1 = \varphi_2$. Dans ce cas, le v -ordre $\nu_v \varphi_1$ est égal à 1.

La relation $t^2\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0$ équivaut à la relation :

$$t^2\varphi_1^6 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0,$$

et par conséquent, on obtient le système de relations suivant :

$$-t^2\varphi_1^j I = \chi + i\psi^2, \quad \varphi_1^{6-j} I^{-1} = \chi - i\psi^2,$$

où $0 \leq j \leq 6$ et I est un élément inversible de $K[[s, t]]$. Le Lemme 3.6 et la propriété multiplicative du v -ordre montrent qu'on a $\nu_v(\chi + i\psi^2) = \nu_v(\chi - i\psi^2)$, ce qui implique que $2 + j = 6 - j$, d'où $j = 2$. On a donc :

$$2i\psi^2 = -(t^2I + \varphi_1^2I^{-1})\varphi_1^2.$$

Comme K est algébriquement clos, il existe une série formelle inversible I_1 appartenant à $K[[s, t]]$ telle que $I_1^2 = I$. Alors, on a :

$$2i\psi^2 = -(tI_1 + i\varphi_1I_1^{-1})(tI_1 - i\varphi_1I_1^{-1})\varphi_1^2.$$

Soient $r := (tI_1 + i\varphi_1I_1^{-1})$ et $q := (tI_1 - i\varphi_1I_1^{-1})$. Les séries formelles r et q ne sont pas inversibles car les séries formelles tI_1 et φ_1 ne le sont pas.

Comme on a $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) = (2, 2, 1)$ et $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (6, 4, 3)$, le v -ordre $\nu_v\psi$ est égal à 2 (on remarque que $\mu_z - \eta_z = 2$), ce qui implique que ψ est au plus le produit de deux séries formelles irréductibles comptées avec multiplicité (voir la Proposition 3.4). Par conséquent, la série formelle ψ^2 est au plus le produit de quatre séries formelles irréductibles comptées avec multiplicité, ce qui implique que les séries formelles r et q sont irréductibles.

Les séries formelles r et q ne sont pas associées à la série formelle φ_1 parce que t ne divise pas φ_1 .

On obtient donc :

$$(tI_1 + i\varphi_1I_1^{-1}) = J(tI_1 - i\varphi_1I_1^{-1}),$$

où J est une série formelle inversible. En effet, la série formelle r divise ψ^2 , alors r divise ψ , d'où r^2 divise ψ^2 . Comme r ne divise pas φ_1 , r divise q . Par conséquent r et q sont deux séries irréductibles associées.

Ainsi, on obtient la relation suivante :

$$t(J - 1)I_1 = i\varphi_1(J + 1)I_1^{-1}.$$

On remarque que $J - 1$ ou $J + 1$ est inversible. Si $J - 1$ est inversible, alors la série φ_1 est inversible ou t divise φ_1 ; ce qui est absurde. Si $J + 1$ est inversible, alors t divise φ_1 , ce qui est aussi une contradiction. Ceci achève la démonstration du lemme. \square

Maintenant, on considère le cas 2) de la proposition 3.5.

Proposition 3.12. *On suppose que $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$. Alors, les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. En vertu du Lemme 3.8, on suppose que φ n'est pas inversible.

On rappelle que $1 \leq \eta_x \leq 6$, $1 \leq \eta_y \leq 4$ et $1 \leq \eta_z \leq 3$. Comme on a $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$, on obtient que $(\eta_x, \eta_z) \in \{(2, 1), (4, 2)\}$ et que $2 \leq \eta_y \leq 4$.

On rappelle que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(2, 2, 1), (3, 2, 2), (4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$. Comme φ n'est pas inversible et $2 \leq \eta_y \leq 4$, le vecteur $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$. En vertu des Lemmes 3.10 et 3.11, si le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'ensemble $\{(4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$, alors les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles, d'où une contradiction. \square

La démonstration de la bijectivité de l'application de Nash pour la singularité de type \mathbb{E}_6 résulte des propositions 3.3, 3.5, 3.9 et 3.12.

3.2. La singularité de Type \mathbb{E}_7 . La preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour le cas de la singularité de type \mathbb{E}_7 (Théorème 1.2) repose sur la construction d'une G -désingularisation de l'éventail de Newton et sur des propriétés, pour \mathbb{E}_7 , des séries formelles χ , φ et ψ analogues aux séries définies pour $S(p, h_q)$ ou \mathbb{E}_6 . Dans la suite, on donne un résumé de la preuve.

Soit S l'hypersurface normale de \mathbb{A}_k^3 donnée par l'équation $x^2 + y(y^2 + z^3) = 0$. L'hypersurface S a un unique point singulier de type \mathbb{E}_7 à l'origine de \mathbb{A}^3 .

On considère l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ associé à $f := x^2 + y(y^2 + z^3)$ et on note τ_1 (resp. τ_2 , τ_3) le cône engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ (resp. $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$) et $(9, 6, 4)$ (voir la Figure 5).

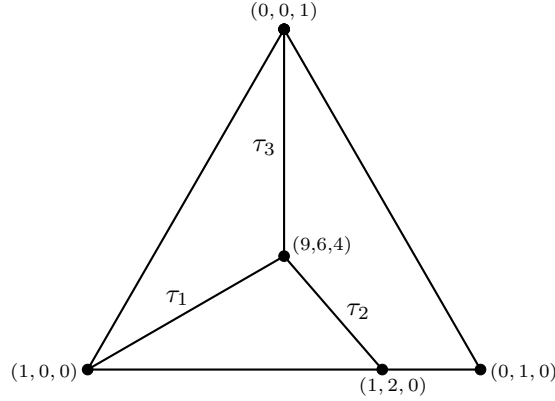


FIGURE 5. Éventail de Newton $\Gamma^*(f)$

Soit $\Sigma_{\mathcal{G}}$ une G -subdivision régulière de $\Gamma^*(f)$. On note $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^*(f)) \rightarrow \mathbb{A}_k^3$ (resp. $\pi_{\mathcal{G}} : X(\Sigma_{\mathcal{G}}) \rightarrow X(\Gamma^*(f))$) le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ (resp. $\Sigma_{\mathcal{G}}$ de $\Gamma^*(f)$) et $S_{\mathcal{G}}$ le transformé strict de S associé au morphisme $\pi := \pi_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{N}}$.

De manière analogue à la Proposition 4.2, le morphisme $\pi : S_{\mathcal{G}} \rightarrow S$ est la résolution minimale de S .

Montrer la bijectivité de l'application de Nash \mathcal{N}_S équivaut à montrer que, pour chaque diviseur essentiel E , tous les K -wedges admissibles centrés en N_E se relèvent à la résolution minimale de S . Dans la suite, on donne une idée de pourquoi un K -wedge admissible centré en N_E se relève à $S_{\mathcal{G}}$.

Soient $E \in \text{Ess}(S)$ et $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow S$ un K -wedge admissible centré en N_E . On rappelle que α_E est le point générique de N_E . On considère les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} (\mu_x, \mu_y, \mu_z) &:= (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x), \text{Ord}_t \alpha_E^*(y), \text{Ord}_t \alpha_E^*(z)); \\ (\eta_x, \eta_y, \eta_z) &:= (\text{Ord}_t \omega^*(x), \text{Ord}_t \omega^*(y), \text{Ord}_t \omega^*(z)), \end{aligned}$$

où α_E^* (resp. ω^*) est le comorphisme de α_E (resp. de ω). On peut donc écrire le comorphisme de ω de la façon suivante :

$$\omega^*(x) = t^{\eta_x} \chi, \quad \omega^*(y) = t^{\eta_y} \varphi, \quad \omega^*(z) = t^{\eta_z} \psi,$$

où les séries formelles χ , φ , ψ ne sont pas divisibles par t . Le K -wedge ω doit satisfaire l'équation $x^2 + y(y^2 + z^3) = 0$, d'où la relation suivante :

$$(2) \quad t^{2\eta_x} \chi^2 + t^{3\eta_y} \varphi^3 + t^{\eta_y + 3\eta_z} \varphi \psi^3 = 0.$$

De manière analogue aux Propositions 2.12 et 3.3, si les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles, alors le K -wedge admissible ω centré en N_E se relève à $S_{\mathcal{G}}$.

Comme dans les énoncés des Propositions 2.13 et 3.4, on peut majorer le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité des séries formelles χ , φ et ψ à l'aide des ν -ordres de la façon suivant :

$$\begin{aligned} \text{FI}(\chi) &\leq \text{Deg}_t \chi_v = \nu_v \chi = \mu_x - \eta_x \leq 6; \\ \text{FI}(\varphi) &\leq \text{Deg}_t \varphi_v = \nu_v \varphi = \mu_y - \eta_y \leq 4; \\ \text{FI}(\psi) &\leq \text{Deg}_t \psi_v = \nu_v \psi = \mu_z - \eta_z \leq 3. \end{aligned}$$

La proposition suivante est une propriété importante du vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) . Pour un cône τ dans $\Gamma^*(f)$, on note $G\tau$ le système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$.

Proposition 3.13. *Le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'union $G\tau_1 \cup G\tau_2 \cup G\tau_3$, où τ_1 (resp. τ_2 , τ_3) est le cône engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ (resp. $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$) et $(9, 6, 4)$ (voir la figure 5). Autrement dit, $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(3, 2, 2), (6, 4, 3), (9, 6, 4), (7, 5, 3), (5, 4, 2), (3, 3, 1), (5, 3, 2)\}$.*

Si on suppose les séries χ , φ et ψ non simultanément inversibles, on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.14. *S'il existe au moins une série formelle parmi les séries χ , φ , ψ qui n'est pas inversible, alors le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait une des relations suivantes :*

- i) $2\eta_x = \eta_y + 3\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$;
- ii) $2\eta_x = 3\eta_y$ et $2\eta_y < 3\eta_z$;
- iii) $2\eta_y = 3\eta_z$ et $3\eta_y < 2\eta_x$.

La Proposition 3.14 donne trois possibilités pour le vecteur (η_x, η_y, η_z) . Dans la suite, on considère chaque cas séparément pour obtenir des contradictions.

Dans chaque cas du vecteur (η_x, η_y, η_z) , on peut simplifier la Relation 2 et on peut la récrire comme la somme de deux termes. Ceci permet d'établir des relations entre les facteurs irréductibles des décompositions possibles des séries χ , φ et ψ . L'idée est de trouver des contradictions dans les différents cas de décomposition obtenus.

D'abord, énonçons le lemme suivant qui est obtenu en utilisant la Relation 2.

Lemme 3.15. *Si on suppose que $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$, où φ_1 est une série formelle irréductible, alors la série formelle φ_1 divise la série formelle φ_2 . En particulier, la série formelle φ n'est pas irréductible.*

Maintenant, on considère le premier cas de la Proposition 3.14.

Proposition 3.16. *On suppose que $2\eta_x = \eta_y + 3\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$. Alors, les séries χ , φ , ψ sont inversibles.*

Idée de la démonstration. On remarque que d'après la relation 2, on obtient la relation suivante :

$$(3) \quad \chi^2 + t^{3\eta_y - 2\eta_x} \varphi^3 + \varphi \psi^3 = 0.$$

D'abord, on montre que la série φ est inversible, ce qui équivaut à montrer que $\mu_y - \eta_y = 0$. En utilisant les relations $2\eta_x = \eta_y + 3\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$, on obtient que $\eta_y \geq 3$. En vertu du Lemme 3.15 et la Proposition 3.13, on obtient que $\mu_y - \eta_y \in \{0, 2, 3\}$.

Si on suppose que $\mu_y - \eta_y = 2$, on obtient que $3\eta_y - 2\eta_x \in \{2, 3\}$. D'après le lemme 3.15, on a $\varphi = \varphi_1^2$, où φ_1 est irréductible.

Dans le cas $3\eta_y - 2\eta_x = 2$, on peut écrire la Relation 3 comme la somme de deux termes qui nous permet d'établir des relations entre les facteurs irréductibles des séries χ , φ et ψ et de trouver une contradiction.

Dans le cas $3\eta_y - 2\eta_x = 3$, on ne peut pas écrire de façon évidente la Relation 3 comme la somme de deux termes. Or, on peut supposer que $t = u^2$ et étudier la Relation 3 dans l'anneau $K[[s, u]]$. Dans cet anneau, on peut écrire cette relation comme la somme de deux termes et on traite ce cas comme le précédent.

Si on suppose que $\mu_y - \eta_y = 3$, on obtient $3\eta_y - 2\eta_x = 3$. D'après le lemme 3.15, on a $\varphi = \varphi_1^3$, où φ_1 est irréductible. Dans ce cas, on peut écrire la Relation 3 comme la somme de deux termes et on le traite comme les cas précédents.

D'après la Proposition 3.13, le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) satisfait une des relations suivantes :

- i) $2\mu_x = 3\mu_y$ et $2\mu_y < 3\mu_z$;
- ii) $2\mu_x = 3\mu_z$ et $3\mu_y < 2\mu_x$;
- iii) $2\mu_x = \mu_y + 3\mu_z$ et $2\mu_x \leq 3\mu_y$.

En utilisant que $\mu_y - \eta_y = 0$, on obtient le lemme suivant :

Lemme 3.17. *Le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) ne satisfait pas les relations suivantes :*

- i) $2\mu_x = 3\mu_y$ et $2\mu_y < 3\mu_z$;
- ii) $2\mu_x = 3\mu_z$ et $3\mu_y < 2\mu_x$.

En vertu du Lemme 3.17, on peut supposer que le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) satisfait la relation suivante : $2\mu_x = \mu_y + 3\mu_z$ et $2\mu_x \leq 3\mu_y$.

Maintenant, en raisonnant par l'absurde, on suppose que la série χ ou la série ψ n'est pas inversible. On peut donc établir une liste de cas possibles pour les vecteurs (μ_x, μ_y, μ_z) et (η_x, η_y, η_z) . En utilisant la Relation 3, la Proposition 3.13 et les majorants du nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité des séries formelles χ et ψ , on obtient une contradiction dans chaque cas de la liste, d'où la proposition. \square

La preuve des propositions suivantes est analogue à celle de la proposition 3.16.

Proposition 3.18. *On suppose que $2\eta_x = 3\eta_y$ et $2\eta_y < 3\eta_z$. Alors, les séries χ , φ , ψ sont inversibles.*

Proposition 3.19. *On suppose que $2\eta_y = 3\eta_z$ et $3\eta_y < 2\eta_x$. Alors, les séries χ , φ , ψ sont inversibles.*

La démonstration du cas \mathbb{E}_7 du Théorème 1.2 résulte des propositions 3.14, 3.16, 3.18 et 3.19.

4. UNE NOUVELLE PREUVE DE LA BIJECTIVITÉ DE L'APPLICATION DE NASH POUR LES SINGULARITÉS DE TYPE \mathbb{D}_n

Dans l'article [Plé08] l'auteur démontre la bijectivité de l'application de Nash $\mathcal{N}_{\mathbb{D}_n}$ associée à une singularité de type \mathbb{D}_n , $n \geq 4$. Dans cette section, en utilisant les mêmes méthodes que dans les preuves des Théorèmes 1.1 et 1.2, on donne une démonstration de la bijectivité de l'application $\mathcal{N}_{\mathbb{D}_n}$ différente de celle de [Plé08].

L'entier $n \geq 4$ étant fixé, soit S l'hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ donnée par l'équation $x^2 + z(y^2 + z^{n-2}) = 0$. L'hypersurface S a un unique point singulier de type \mathbb{D}_n .

Comme dans la preuve des Théorèmes 1.1 ou 1.2 pour prouver la bijectivité de l'application de Nash associée à S , on a besoin de quelques résultats sur la résolution minimale de S .

On considère l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ associé à $f := x^2 + z(y^2 + z^{n-2})$. Soit H un plan de \mathbb{R}^3 qui ne contient pas l'origine de \mathbb{R}^3 et tel que l'intersection de H et $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ soit un ensemble compact. La Figure 6 représente l'intersection de H avec la subdivision $\Gamma^*(f)$ de \mathbb{R}^3 . Chaque sommet du diagramme est identifié avec le *vecteur extrémal* correspondant. On note τ_1 (resp. τ_2, τ_3) le cône engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ (resp. $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$) et $(n-1, n-2, 2)$.

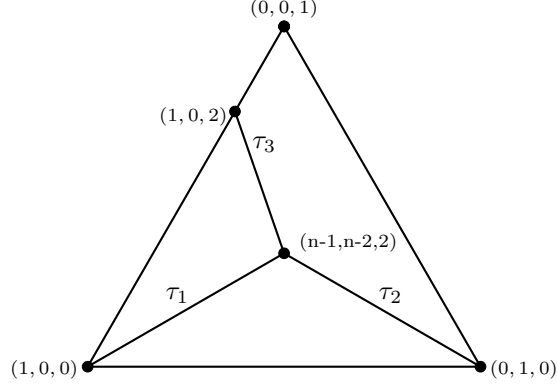


FIGURE 6. Éventail de Newton $\Gamma^*(f)$

Pour un cône τ dans $\Gamma^*(f)$, on note $G\tau$ le système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$. Par un calcul direct, on obtient le résultat suivant :

Proposition 4.1. *Le système générateur minimal du semi-groupe $\tau_3 \cap \mathbb{Z}^3$ est l'ensemble $G\tau_3 = \{(j, j-1, 2) \mid j \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$. De plus, soit $k \geq 2$ un entier, on a :*

- i) Si $n = 2k$, alors le système générateur minimal du semi-groupe $\tau_1 \cap \mathbb{Z}^3$ est l'ensemble $G\tau_1 = \{(1, 0, 0), (k, k-1, 1), (n-1, n-2, 2)\}$ et τ_2 est un cône régulier.*
- ii) Si $n = 2k-1$, alors le système générateur minimal du semi-groupe $\tau_2 \cap \mathbb{Z}^3$ est l'ensemble $G\tau_2 = \{(0, 1, 0), (k-1, k-1, 1), (n-1, n-2, 2)\}$ et τ_1 est un cône régulier.*

Soit Σ_G une G -subdivision régulière de $\Gamma^*(f)$. On note $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^*(f)) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ (resp. $\pi_G : X(\Sigma_G) \rightarrow X(\Gamma^*(f))$) le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ (resp. Σ_G de $\Gamma^*(f)$) et S_G le transformé strict de S associé au morphisme $\pi := \pi_G \circ \pi_{\mathcal{N}}$.

La proposition suivante est un analogue de la Proposition 2.4.

Proposition 4.2. *S_G est la résolution minimale de S .*

Soient E un diviseur essentiel sur S ($E \in \text{Ess}(S)$) et α_E le point générique de N_E . On note

$$(\mu_x, \mu_y, \mu_z) := (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x), \text{Ord}_t \alpha_E^*(y), \text{Ord}_t \alpha_E^*(z)),$$

où α_E^* est le comorphisme de α_E .

La proposition suivante est un analogue des Proposition 2.11 et 3.2.

Proposition 4.3. *Soit k un entier, $k \geq 2$.*

Si $n = 2k$, alors le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'union de $G\tau_1$ et $G\tau_3$.

Si $n = 2k-1$, alors le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'union de $G\tau_1$ et $G\tau_3$.

Démontrer que l'application de Nash bijective pour les singularités de type \mathbb{D}_n , $n \geq 4$, équivaut à montrer que tous les wedges admissibles se relèvent à la résolution minimale de \mathbb{D}_n (voir [Reg06]). Dans la suite, on montre que pour chaque diviseur essentiel E tous les K -wedges admissibles centrés en N_E se relèvent à la résolution minimale de S .

Soit $E \in \text{Ess}(S)$ et on considère un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow S$ admissible centré en N_E . On pose :

$$(\eta_x, \eta_y, \eta_z) := (\text{Ord}_t \omega^*(x), \text{Ord}_t \omega^*(y), \text{Ord}_t \omega^*(z)).$$

On peut écrire le comorphisme de ω de la façon suivante :

$$\omega^*(x) = t^{\eta_x} \chi, \quad \omega^*(y) = t^{\eta_y} \varphi, \quad \omega^*(z) = t^{\eta_z} \psi,$$

où les séries formelles χ, φ, ψ ne sont pas divisibles par t .

La proposition suivante est un analogue des Propositions 2.14 et 3.5. On note τ^0 l'intérieur du cône $\tau \in \Gamma^*(f)$.

Proposition 4.4. *Soit k un entier, $k \geq 2$. S'il existe au moins une série formelle parmi les séries χ, φ, ψ qui n'est pas inversible, alors on a :*

- i) si $n = 2k$, alors le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'union de τ_1^0 et τ_3^0 ;
- ii) si $n = 2k - 1$, alors le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'union de τ_2^0 et τ_3^0 .

La proposition suivante est un analogue des Propositions 2.12 et 3.3.

Proposition 4.5. *Si les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles, alors le K -wedge admissible ω centré en N_E se relève à la résolution minimale de S .*

La proposition suivante est un analogue des Propositions 2.13 et 3.4.

Proposition 4.6. *Il existe un vecteur $v \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que :*

$$\begin{aligned} \text{FI}(\chi) &\leq \text{Deg}_t \chi_v = \nu_v \chi = \mu_x - \eta_x \leq n - 2 ; \\ \text{FI}(\varphi) &\leq \text{Deg}_t \varphi_v = \nu_v \varphi = \mu_y - \eta_y \leq n - 3 ; \\ \text{FI}(\psi) &\leq \text{Deg}_t \psi_v = \nu_v \psi = \mu_z - \eta_z \leq 1. \end{aligned}$$

De plus, la série χ (resp. φ, ψ) est inversible si et seulement si $\mu_x - \eta_x = 0$ (resp. $\mu_y - \eta_y = 0, \mu_z - \eta_z = 0$).

Corollaire 4.7. *La série formelle ψ est irréductible ou inversible.*

Maintenant, on donne notre preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités de type \mathbb{D}_n . On rappelle que S est l'hypersurface normale de $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^3$ donnée par l'équation $x^2 + z(y^2 + z^{n-2}) = 0, n \geq 4$.

Théorème 4.8. *L'application de Nash \mathcal{N}_S associée à S est bijective.*

Démonstration. On rappelle que démontrer que l'application de Nash \mathcal{N}_S est bijective équivaut à montrer que tous les wedges admissibles se relèvent à la résolution minimale de S .

En vertu de la Proposition 4.5, pour montrer que le K -wedge admissible ω se relève à la résolution minimale de S , il suffit de montrer que les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles. En raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il y a au moins l'une d'elles n'est pas inversible.

On remarque qu'une série formelle $\phi \in K[[s, t]]$ est inversible dans $K[[s, t]]$ si et seulement si elle est inversible dans $\overline{K}[[s, t]]$, où \overline{K} est la clôture algébrique de K . Dans toute la suite, on suppose que le corps K est algébriquement clos.

Le K -wedge ω doit satisfaire l'équation $x^2 + z(y^2 + z^{n-2}) = 0$, d'où la relation suivante :

$$(4) \quad t^{2\eta_x} \chi^2 + t^{2\eta_y + \eta_z} \varphi^2 \psi + t^{(n-1)\eta_z} \psi^{n-1} = 0$$

En vertu de la Proposition 4.4 on a les cas suivants :

- Cas 1). le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'intérieur τ_3^0 du cône τ_3 ;
 Cas 2). l'entier n est égal à $2k$, où k est un entier supérieur ou égal à 2, et le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'intérieur τ_1^0 du cône τ_1 ;
 Cas 3). l'entier n est égal à $2k - 1$, où k est un entier supérieur ou égal à 2, et le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'intérieur τ_2^0 du cône τ_2 .

Dans chaque cas ci-dessus, on va obtenir une contradiction, ce qui achève la preuve du Théorème.

Cas 1). On suppose que $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in \tau_3^0$. Dans ce cas, on a $\eta_z = 2$ et $\eta_x = \eta_y + 1$. Au moyen de la Relation 4, on obtient la relation suivante :

$$\chi^2 + \varphi^2 \psi = -t^{2(n-2-\eta_y)} \psi^{n-1}.$$

On remarque que $n - 2 - \eta_y > 0$, car le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'intérieur du cône τ_3 .

D'après les Propositions 4.1 et 4.3, on a $\mu_z \leq 2$. Par conséquent, $\mu_z - \eta_z = 0$, ce qui implique que la série formelle ψ est inversible (voir la proposition 4.6).

Comme ψ est inversible et K algébriquement clos, il existe une série formelle inversible ψ_0 tel que $\psi = -\psi_0^2$, d'où

$$(\chi + \psi_0 \varphi)(\chi - \psi_0 \varphi) = (-1)^n t^{2(n-2-\eta_y)} \psi_0^{2(n-1)}.$$

Par conséquent, t divise χ et φ ou χ et φ sont inversibles. Ce sont des contradictions.

Cas 2). On suppose que $n = 2k$, où k est un entier supérieur ou égal à 2 et $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in \tau_1^0$.

Comme (η_x, η_y, η_z) appartient à τ_1^0 et $n = 2k$, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait les relations suivantes :

$$(k - 1)\eta_z = \eta_y \text{ et } 2\eta_x > (2k - 1)\eta_z.$$

Comme $1 \leq \eta_x \leq \mu_x \leq 2k - 1$ (voir les Propositions 4.1 et 4.3), on obtient que $\eta_z = 1$, $\eta_y = 2k - 1$ et $\eta_x \geq k$. On a donc $\mu_z = 2$. En effet, si $\mu_z = 1$, alors $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (k, k - 1, 1)$. D'après la Proposition 4.6, les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles, ce qui est une contradiction, car on a supposé que parmi ces séries formelles il y en a au moins une qui n'est pas inversible.

Au moyen de la Relation 4, on obtient la relation suivante :

$$t^{2\eta_x+1-n} \chi^2 + \varphi^2 \psi = -\psi^{n-1}.$$

On remarque que ψ est irréductible car $\nu_v \psi = \mu_z - \eta_z = 1$ (voir la Proposition 4.6 et le Corollaire 4.7) Au moyen de la relation ci-dessus, on obtient que $\chi = \chi_0 \psi^k$ et $\varphi = \varphi_0 \psi^{k-1}$, où χ_0 et φ_0 sont deux séries formelles qui satisfont la relation suivante :

$$t^{2\eta_x+1-n} \chi_0^2 \psi + \varphi_0^2 = -1.$$

Comme $\nu_v \psi = 1$, on obtient que $\nu_v \chi = \nu_v \chi_0 \psi^k = \nu_v \chi_0 + k$. Comme $\mu_x \leq 2k - 1$ et $\eta_x \geq k$, on a $\nu_v \chi = \mu_x - \eta_x \leq k - 1$ (voir la Proposition 4.6). Par conséquent, on a $\nu_v \chi_0 \leq -1$, ce qui est une contradiction.

La preuve du Cas 3) est analogue à celle du Cas 2).

Cas 3). On suppose que $n = 2k - 1$, où k est un entier supérieur ou égal à 2 et $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in \tau_2^0$.

Comme (η_x, η_y, η_z) appartient à τ_2^0 et $n = 2k - 1$, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait les relations suivantes :

$$(k - 1)\eta_z = \eta_x \text{ et } 2\eta_y > (2k - 3)\eta_z.$$

Comme $1 \leq \eta_y \leq \mu_y \leq 2k - 3$ (voir les Propositions 4.1 et 4.3), on obtient que $\eta_z = 1$, $\eta_x = k - 1$ et $\eta_y \geq k - 1$. On a donc $\mu_z = 2$. En effet, si $\mu_z = 1$, alors $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (k - 1, k - 1, 1)$. D'après la Proposition 4.6 les séries formelles χ , φ et ψ sont inversibles, ce qui est une contradiction car on a supposé que parmi ces séries formelles il y en a au moins une qui n'est pas inversible.

Au moyen de la Relation 4, on obtient la relation suivante :

$$\chi^2 + t^{2\eta_y+2-n}\varphi^2\psi = -\psi^{n-1}.$$

On remarque que ψ est irréductible car $\nu_v\psi = \mu_z - \eta_z = 1$ (voir la Proposition 4.6 et le Corollaire 4.7) Au moyen de la relation ci-dessus, on obtient que $\chi = \chi_0\psi^{k-1}$ et $\varphi = \varphi_0\psi^{k-1}$, où χ_0 et φ_0 sont deux séries formelles qui satisfont la relation suivante :

$$\chi_0^2 + t^{2\eta_y+2-n}\varphi_0^2\psi = -1.$$

Comme $\nu_v\psi = 1$, on obtient que $\nu_v\varphi = \nu_v\varphi_0\psi^{k-1} = \nu_v\varphi_0 + k - 1$. Comme $\mu_y \leq 2k - 3$ et $\eta_y \geq k - 1$, on a $\nu_v\varphi = \mu_y - \eta_y \leq k - 2$ (voir la Proposition 4.6). Par conséquent, on a $\nu_v\varphi_0 \leq -1$, ce qui est une contradiction.

Dans le trois cas précédent, on a obtenu une contradiction, d'où le théorème. \square

RÉFÉRENCES

- [BGS95] Catherine Bouvier and Gérard Gonzalez-Sprinberg. Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G -désingularisations de variétés toriques. *Tohoku Math. J. (2)*, 47(1) :125–149, 1995.
- [CGSLJ96] Antonio Campillo, Gérard Gonzalez-Sprinberg, and Monique Lejeune-Jalabert. Clusters of infinity near points. *Math. Ann.*, 306(1) :169–194, 1996.
- [EM09] Lawrence Ein and Mircea Mustață. Jet schemes and singularities. In *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2*, volume 80 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 505–546. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [FZ03] Hubert Flenner and Mikhail Zaidenberg. Rational curves and rational singularities. *Math. Z.*, 244(3) :549–575, 2003.
- [GP07] P. D. González Pérez. Bijectiveness of the Nash map for quasi-ordinary hypersurface singularities. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (19) :Art. ID rnm076, 13, 2007.
- [GSLJ91] Gérard Gonzalez-Sprinberg and Monique Lejeune-Jalabert. Modèles canoniques plongés. I. *Kodai Math. J.*, 14(2) :194–209, 1991.
- [GSLJ97] Gérard Gonzalez-Sprinberg and Monique Lejeune-Jalabert. Families of smooth curves on surface singularities and wedges. *Ann. Polon. Math.*, 67(2) :179–190, 1997.
- [IK03] Shihoko Ishii and János Kollár. The Nash problem on arc families of singularities. *Duke Math. J.*, 120(3) :601–620, 2003.
- [Ish05] Shihoko Ishii. Arcs, valuations and the Nash map. *J. Reine Angew. Math.*, 588 :71–92, 2005.
- [Ish06] Shihoko Ishii. The local Nash problem on arc families of singularities. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56(4) :1207–1224, 2006.
- [Ish07] Shihoko Ishii. Jet schemes, arc spaces and the Nash problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.*, 29(1) :1–21, 2007.
- [KKMS73] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat. *Toroidal embeddings. I*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339. Springer-Verlag, Berlin, 1973.

- [LA11] Maximiliano Leyton-Alvarez. Une famille d'hypersurfaces quasi-rationnelles avec application de nash bijective, 2011. À paraître dans *Comptes rendus de l'Académie de sciences*, Paris.
- [LJ80] Monique Lejeune-Jalabert. Arcs analytiques et resolution minimale des singularites des surfaces quasi homogenes. In *Séminaire sur les Singularités des Surfaces*, volume 777 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 303–336. Springer Berlin / Heidelberg, Amsterdam, 1980.
- [LJRL99] Monique Lejeune-Jalabert and Ana J. Reguera-López. Arcs and wedges on sandwiched surface singularities. *Amer. J. Math.*, 121(6) :1191–1213, 1999.
- [Mor08] Marcel Morales. Some numerical criteria for the Nash problem on arcs for surfaces. *Nagoya Math. J.*, 191 :1–19, 2008.
- [Nas95] John F. Nash, Jr. Arc structure of singularities. *Duke Math. J.*, 81(1) :31–38 (1996), 1995. A celebration of John F. Nash, Jr.
- [Oka87] Mutsuo Oka. On the resolution of the hypersurface singularities. In *Complex analytic singularities*, volume 8 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 405–436. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [Pet09] Peter Petrov. Nash problem for stable toric varieties. *Math. Nachr.*, 282(11) :1575–1583, 2009.
- [Plé08] Camille Plénat. The Nash problem of arcs and the rational double points D_n . *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(7) :2249–2278, 2008.
- [PP10] Maria Pe-Pereira. Nash problem for quotient surface singularities. Preprint, arXiv :1011.3792v1 [math.AG], 2010.
- [PPP06] Camille Plénat and Patrick Popescu-Pampu. A class of non-rational surface singularities with bijective Nash map. *Bull. Soc. Math. France*, 134(3) :383–394, 2006.
- [PPP08] Camille Plénat and Patrick Popescu-Pampu. Families of higher dimensional germs with bijective Nash map. *Kodai Math. J.*, 31(2) :199–218, 2008.
- [PS10] Camille Plénat and Mark Spivakovsky. The nash problem of arcs and the rational double point E_6 . Preprint, arXiv :1011.2426v1 [math.AG], 2010.
- [Reg06] Ana J. Reguera. A curve selection lemma in spaces of arcs and the image of the Nash map. *Compos. Math.*, 142(1) :119–130, 2006.

UNIVERSITÉ GRENOBLE I, INSTITUT FOURIER, UMR 5582 CNRS-UJF, BP 74, 38402 ST. MARTIN D'HÈRES CÉDEX, FRANCE

E-mail address: leyton@ujf-grenoble.fr