



HAL
open science

Propagation non linéaire avec amortissement proportionnel: simulation entrée-sortie de solutions entropiques

Thomas Hélie, Christophe Vergez

► **To cite this version:**

Thomas Hélie, Christophe Vergez. Propagation non linéaire avec amortissement proportionnel: simulation entrée-sortie de solutions entropiques. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00554444

HAL Id: hal-00554444

<https://hal.science/hal-00554444v1>

Submitted on 10 Jan 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Propagation non linéaire avec amortissement proportionnel: simulation entrée-sortie de solutions entropiques

Thomas Hélie¹, Christophe Vergez²

¹ IRCAM - CNRS, UMR 9912, 1, place Igor Stravinsky, 75004 Paris, thomas.helie@ircam.fr

² Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique UPR 7051, 31, Chemin Joseph Aiguier - 13402 Marseille Cedex 20, vergez@lma.cnrs-mrs.fr

Nous présentons une méthode de résolution rapide d'une équation de propagation non linéaire uni-dimensionnelle avec pertes indépendantes de la fréquence dans un milieu non homogène.

La propagation des ondes dans les instruments de musique à vent est le plus souvent considérée linéaire, à juste titre. Un contre exemple bien connu est le cas des cuivres, à fort niveau sonore. Les effets non linéaires dans la propagation deviennent prépondérants et expliquent par leur caractère cumulatif la distorsion progressive des formes d'ondes pouvant conduire à la formation d'ondes de choc.

Du point de vue de la simulation dans un contexte de synthèse sonore temps réel, la propagation linéaire présente l'avantage de pouvoir se représenter dans un formalisme de système entrée-sortie : le résultat de la propagation (la sortie) se déduit de l'entrée par un calcul explicite (multiplication par une fonction de transfert dans le domaine de Laplace, convolution par une réponse impulsionnelle dans le domaine temporel). Cette propriété n'est plus garantie avec un phénomène non linéaire.

Nous montrons qu'il est pourtant possible de proposer une méthode de résolution explicite de la propagation non linéaire d'une onde (onde simple) lorsque l'amortissement est indépendant de la fréquence. La méthode repose sur deux éléments : (1) un changement de variable permet de récrire une équation conservative, (2) cette équation est résolue en introduisant un potentiel dont les propriétés permettent de sélectionner les branches de solutions "physiquement sensées" en cas de chocs et solutions multi-valuées. Cette approche permet aussi de gérer les chocs multiples. Un algorithme rapide est proposé pour une utilisation dans le cadre d'une synthèse sonore par temps réel.

1 Introduction

Pour un système linéaire, il est souvent avantageux d'utiliser un formalisme de système entrée/sortie, qui offre une représentation compacte tout en permettant un faible coût de calcul de la sortie directement en fonction de l'entrée. Lorsque le système est non linéaire, il n'y a pas d'approche générale pour obtenir une telle formulation, dont rien ne garantit d'ailleurs l'existence.

Nous montrons dans ce travail qu'il est possible de trouver une telle formulation lorsque le problème de départ est une équation aux dérivées partielles de transport non linéaire uni-dimensionnelle avec pertes indépendantes de la fréquence dans un milieu éventuellement non homogène.

Après avoir précisé le problème à résoudre (section 2), nous montrons qu'après un changement de fonction, le modèle se reformule comme une équation de transport conservative. Les solutions fortes sont données grâce à une adaptation de la méthode des caractéristiques (section 3). Les solutions faibles qui apparaissent dès que des chocs ont été formés ne sont pas uniques. Une fonctionnelle est introduite pour sélectionner une solution unique (section 5). Dans l'exemple traité ici, elle correspond précisément au *potentiel de Hayes* [2, 1]) qui permet d'identifier les branches de solutions "physiques" à retenir (au sens d'un critère entropique). Cette méthode permet de

construire une solution mono-valuée, même dans le cas de chocs multiples. L'application visée ici est la propagation non linéaire des ondes acoustiques à fort niveau sonore pour la simulation et la synthèse sonore.

2 Problème posé et modèle

On considère le problème de propagation 1D sur le domaine $\Omega =]0, X[$ avec $X > 0$ décrit par, pour tout $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\partial_x p(x, t) + \frac{1}{c(x, p(x, t))} \partial_t p(x, t) + \alpha(x) p(x, t) = 0, \quad (1)$$

avec des conditions initiales nulles

$$\forall x \in \Omega, \quad p(x, 0) = 0,$$

et un contrôle de type Dirichlet à la frontière en $x = 0$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p(0, t) = p_0(t),$$

où $p_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est supposée nulle sur \mathbb{R}^- . La fonction $(x, p) \mapsto c(x, p)$ est supposée continue sur $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, à dérivée continue selon p et telle que $c(0, 0) > 0$. La fonction $x \mapsto \alpha(x)$ est supposée continue et positive sur $\overline{\Omega}$.

Ce modèle décrit le transport d'une onde simple, soumise à un amortissement de coefficient α indépendant de la fréquence et variant dans l'espace, et qui se propage avec la célérité locale $c(x, p(x, t))$.

Dans cet article, nous cherchons des solutions de régularité \mathcal{C}^1 (sec. 3, solutions fortes) puis des solutions faibles entropiques en cas de chocs (sec. 5), sous la condition suivante

$$\exists c^* > 0 \mid c(x, p(x, t)) \geq c^* \text{ presque partout sur } \overline{\Omega} \times \mathbb{R}. \quad (2)$$

qui assure que les ondes se propagent dans le sens des x positifs (au moins avec la célérité c^*) et garantit la causalité du problème. Le but est ensuite de construire un algorithme de résolution numérique efficace, compatible avec les applications temps-réel, qui fournisse à x fixé le signal $p(x, t)$ en fonction de l'entrée $p_0(t)$.

Adimensionnement Une version sans dimension de ce problème est obtenue en appliquant le changement de variable suivant

$$(t, x) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{t}) = (x/X, c(0, 0)t/X)$$

Le problème se réécrit comme précédemment pour les quantités notées avec un tilde définies par $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}) = p(X\tilde{x}, \tilde{t}X/c(0, 0))$, $\tilde{\alpha}(\tilde{x}) = X\alpha(X\tilde{x})$, $\tilde{c}(\tilde{x}, P) = c(X\tilde{x}, P)/c(0, 0)$ et $\tilde{\Omega} =]0, 1[$. Dans la suite on considère, ce modèle en omettant les symboles "tilde", ce qui revient simplement à considérer que $X = 1$ et $c(0, 0) = 1$.

3 Solutions fortes

Cette partie donne des résultats basiques dans le cas où la solution est de régularité \mathcal{C}^1 (on note $\mathcal{C}^1(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ l'ensemble des fonctions continues, à dérivée continue, de \mathbb{E} dans \mathbb{F}). D'abord, un changement de fonction est introduit pour rendre le problème conservatif (théorème 1). Puis, la méthode standard des caractéristiques est adaptée au cas d'un problème à constantes localisées pour construire la solution (théorème 2).

Introduisons la fonction $A \in \mathcal{C}^1(\Omega,]0, 1])$, décroissante, définie par

$$A(x) = \exp - \int_0^x \alpha(\xi) d\xi. \quad (3)$$

Soit $c^* \in \mathbb{R}_+^*$ et $p_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}_-, p_0(t) = 0$ et $\forall (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}, c(x, A(x)p_0(t)) \geq c^*$. Alors, on a le théorème suivant.

Théorème 1 Si $q \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ est solution de

$$\partial_x q(x, t) + \frac{1}{c(x, A(x)q(x, t))} \partial_t q(x, t) = 0,$$

$$\forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad q(0, t) = p_0(t), \quad (5)$$

alors $p : (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \mapsto A(x)q(x, t)$ appartient à $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et est solution du problème original. La réciproque est aussi vraie.

La preuve est immédiate.

Définition 1 (Caractéristique) On définit K par

$$K : \begin{array}{ccc} \overline{\Omega} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & (x, T(x, t)) \end{array} \quad (6)$$

où, pour tout $(x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$,

$$T(x, t) = t + \int_0^x \frac{1}{c(y, A(y)p_0(t))} dy \quad (7)$$

Propriétés 1 Les fonctions T and K satisfont les propriétés suivantes :

- (i) T et K sont de régularité \mathcal{C}^1 ;
- (ii) $\forall (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}, T(x, t) \geq t$;
- (iii) K est surjective ;
- (iv) si $\forall (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \partial_t T(x, t) > 0$, alors K est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

Preuve (i) est évident puisque p_0 est de régularité \mathcal{C}^1 , A est continue et $(x, t) \mapsto 1/c(x, A(x)p_0(t))$ est bornée continue ($c^* > 0$).

(ii) est une conséquence immédiate de la positivité de $c(y, A(y)p_0(t))$ dans (7).

Par ailleurs, puisque $p_0(t) = 0$ pour $t \leq 0$, on a $T(x, t) = t + T(x, 0) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} -\infty$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$. De plus, d'après (ii), $T(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$.

Par conséquent, (iii) est satisfaite puisque T est continue.

Si $\forall (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \partial_t T(x, t) > 0$, alors pour tout $x \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R} \mapsto T(x, t)$ est injective puisqu'elle est strictement croissante. Donc, d'après (i) et (iii), K est de régularité \mathcal{C}^1 et bijective. Le jacobien $J(x, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_x T(x, t) & \partial_t T(x, t) \end{pmatrix}$ de K est continu et son déterminant $\det J(x, t) = \partial_t T(x, t) > 0$ est inversible, ce qui conclut la preuve. \diamond

Théorème 2 (Solution forte) Supposons que $\forall (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \partial_t T(x, t) > 0$ et définissons la fonction de régularité \mathcal{C}^1 donnée par $\tau : (x, \theta) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \mapsto [K^{-1}(x, \theta)]_2 \in \mathbb{R}$. Alors, $Q = p_0 \circ \tau \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une solution forte de (4-5).

Preuve D'après la propriété (iv), τ et Q sont de régularité \mathcal{C}^1 et

$$\forall (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}, T(x, \tau(x, t)) = t. \quad (8)$$

De plus, le calcul des membres de gauche et droite de $\frac{\partial_x \tau(x, t) \partial_t [(8)] - \partial_t \tau(x, t) \partial_x [(8)]}{D_2 T(x, \tau(x, t))}$ où

$D_2 T(x, \tau(x, t)) > 0$ conduit à

$$-D_1 T(x, \tau(x, t)) \partial_t \tau(x, t) = \partial_x \tau(x, t). \quad (9)$$

Or, $\partial_x Q(x, t) + \frac{1}{c(x, A(x)Q(x, t))} \partial_t Q(x, t) = [p'_0 \circ$

$\tau](x, t) \left(\partial_x \tau(x, t) + \frac{1}{c(x, A(x)Q(x, t))} \partial_t \tau(x, t) \right)$ est nul

d'après (9) et puisque, d'après (7), $D_1 T(x, \tau(x, t)) = \frac{1}{c(x, A(x)Q(x, t))}$. Finalement, Q est une solution de (4), ce qui conclut la preuve. \diamond

Les théorèmes 1 et 2 fournissent donc une solution du problème original, donnée par

$$p(x, t) = A(x) p_0(\tau(x, t)) \quad (10)$$

dans le cas où la solution est forte. Ceci est conditionné par l'existence de τ , c'est-à-dire par le fait que $\partial_t T > 0$ qui assure la bijectivité de K .

4 Application : algorithme rapide entrée-sortie

On considère pour illustrer les résultats de la section précédente le cas simple pour lequel l'amortissement est constant (milieu homogène, $\alpha = 1$) et la célérité est donnée par

$$c(x, p(x, t)) = 1/(1 - p(x, t)). \quad (11)$$

Cette célérité correspond à un modèle acoustique non linéaire souvent utilisé pour représenter la propagation à fort niveau dans les instruments de musique à vent ([3]). D'après les équations (4-5), qui définissent les caractéristiques :

$$T(x, t) = t + x - E_\alpha(x) q(0, t) \text{ avec } E_\alpha(x) = \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha}. \quad (12)$$

Les caractéristiques ainsi définies sont présentées en figure 1 pour le signal d'entrée $q(0, t) = p_0(t) = -0.3 \sin(8\pi t)$. Notons que dans le plan (x, T) , à cause

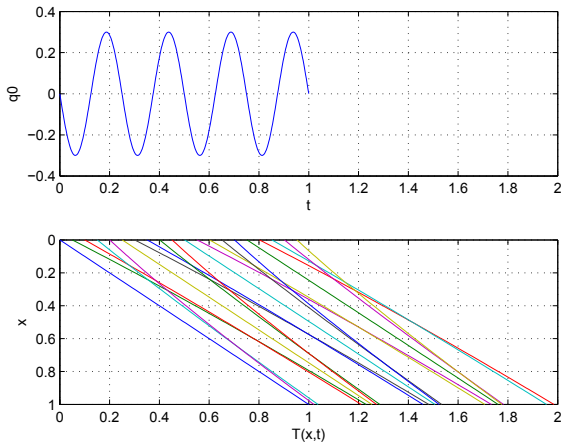


FIGURE 1 – En haut : signal d'entrée (en $x = 0$). En bas, caractéristiques dans le plan $(T(x, t), x)$ données par (6) et (7).

de l'amortissement, ces caractéristiques ne décrivent pas des droites, conformément à l'équation (12).

Les solutions fortes du problème sont alors directement construites à partir de (10) et du théorème 2. Elles sont présentées en figure 2 pour plusieurs distances x . Sur l'image du haut, on retrouve la distorsion de la forme d'onde sinusoïdale $q(x, t)$ attendue pour ce type de non-linéarité (transport conservatif [4, 6]). L'image du bas présente en plus les effets de l'amortissement, pris en compte grâce au théorème 1 et (10) avec $A(x) = e^{-\alpha x}$.

D'après le théorème 2, la validité de cette construction est conditionnée par $\partial_t T > 0$ qui assure la bijectivité de K . Graphiquement, la limite de validité est atteinte dès que des caractéristiques se croisent (figure 1, en bas). Une analyse précise des caractéristiques et de la figure 2 permet de trouver que la première intersection correspond à $x = x^* \approx 0.1414$. Pour le signal $q(0, t)$, cette distance marque donc la fin du domaine de validité de la solution forte. Au delà, l'utilisation des caractéristiques conduirait à une solution $q(x, t)$ multi-valuée.

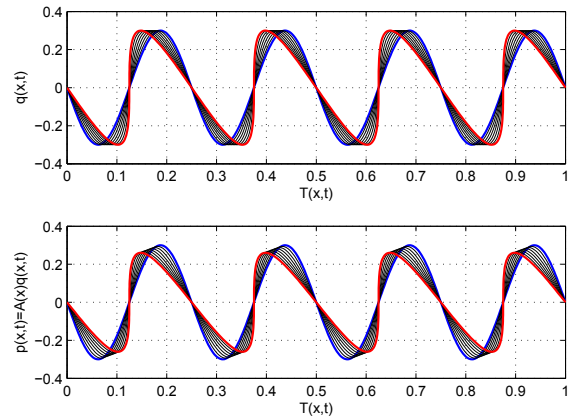


FIGURE 2 – Solutions fortes calculées en $x_n = \frac{n}{N}x^*$ pour $n=0$ (bleu), $1 \leq n \leq N-1$ (noir) et $n=N=7$ (rouge), où $x^* \approx 0.1414$ est la distance à laquelle apparaît le choc. En haut : $q(x, t)$ solution de (4-5) ; en bas : $p(x, t) = A(x)q(x, t)$ solution de (1).

5 Solutions faibles

Le croisement de caractéristiques est incompatible avec une solution forte (K n'est plus bijectif). Un croisement s'interprète comme le transport de quantités distinctes au même endroit au même instant, ce qui définirait alors une solution multi-valuée. Il correspond à l'apparition de chocs (solution discontinue dite faible). Dans ce cas, du point de vue mathématique, la résolution doit être faite au sens des distributions, ce qui fournit plusieurs solutions. Une seule respecte le principe entropique [5].

Un moyen élégant de résolution fut proposé (sans preuve) par Hayes [2] et a été réétudié récemment par Coulouvrat [1]. Il repose sur l'introduction d'une fonction (appelée "potentiel" dans [2, 1]) dont nous proposons une version généralisée adaptée au problème (4).

5.1 Résultats préliminaires

Définition 2 (Fonctions ϕ et Φ^+) Pour tout $x > 0$, $t \in \mathbb{R}$, on note $T_0(x, t) = T(x, t)|_{p_0=0}$ et on définit

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \int_{-\infty}^t \frac{T_0(x, t') - T(x, t')}{x} \partial_{t'} T(x, t') dt' \quad (13) \\ \Phi^+(x, \theta) &= \sup_{t \in \mathbb{T}(x, \theta)} \phi(x, t), \quad (14) \end{aligned}$$

où $\mathbb{T}(x, \theta) = \{t \in \mathbb{R} \mid T(x, t) = \theta\}$.

Notons que pour tout $t \leq 0$, $T_0(x, t) = T(x, t)$ de sorte que $\phi(x, t)$ est nul si $t \leq 0$.

Propriétés 2 On a les résultats suivants :

- (i) ϕ est de régularité \mathcal{C}^1 .
- (ii) les ensembles $\mathbb{T}(x, \theta)$ sont fermés et non vides,
- (iii) si a et b appartiennent à $\mathbb{T}(x, \theta)$, alors

$$x[\phi(x, b) - \phi(x, a)] + \int_a^b T(x, t) dt = \theta(b - a),$$

- (iv) la fonction Φ^+ est continue en θ .

Preuve (i) découle de la propriété 1(i).

(ii) $\mathbb{T}(x, \theta) = \tilde{T}_x^{-1} < \{\theta\} >$ est fermé puisqu'il est l'image inverse du fermé $\{\theta\}$ par la fonction continue $\tilde{T}_x : t \mapsto T(x, t)$. Il est non vide car $\tilde{T} < \mathbb{R} > = \mathbb{R}$ (voir la preuve de la propriété 1(ii)).

(iii) se déduit immédiatement de (13).

(iv) On se limite ici à indiquer des éléments de la preuve qui s'appuient sur la construction de la courbe paramétrée $t \mapsto (T(x, t), \phi(x, t))$ à x fixé (voir les courbes en haut à droite des figures 3 et 4).

Dans les zones pour lesquelles \mathbb{T} est un singleton, la continuité de Φ^+ est assurée par celle de ϕ et T . Pour les zones complémentaires, la première étape consiste à montrer que la fonction $\psi_t^+ : \Omega \times]-\infty, \theta^+(t)] \rightarrow \mathbb{R}$ où

$$\psi_t^+(x, \theta) = \sup_{a \in \mathbb{T}_t(x, \theta)} \phi(a) \text{ avec } \mathbb{T}_t(x, \theta) = \mathbb{T}(x, \theta) \cap]-\infty, t],$$

et $\theta^+(t) = \sup_{a \leq t} T(x, a)$, est continue sur $] -\infty, T(x, t)]$.

Pour cela, on utilise le fait que pour $(a, b) \in [\mathbb{T}(x, \theta)]^2$ tel que $a < b$, on a (d'après (iii) et pour $x > 0$)

(A) si $T(x, t) < \theta$ pour $t \in]a, b[$ alors $\phi(x, b) > \phi(x, a)$,

(B) si $T(x, t) = \theta$ pour $t \in [a, b]$ alors $\phi(x, b) = \phi(x, a)$ ($= \phi(x, t)$),

(C) si $T(x, t) > \theta$ pour $t \in]a, b[$ alors $\phi(x, b) < \phi(x, a)$,

et on découpe chaque zone connexe en intervalles ordonnés $[a_k, b_k]$ de type (A,B,C), éventuellement complétés par les intervalles $[b_k, a_{k+1}]$ lorsque $a_{k+1} \neq b_k$. La conclusion est ensuite obtenue en remarquant que $T(x, t) \geq t$ et $\theta^+(x, t) \geq t$ de sorte que ψ_t^+ et Φ^+ coïncident sur $] -\infty, t]$. Ainsi, la fonction continue $\psi_t^+|_{]-\infty, t]}$ reconstruit Φ^+ lorsque $t \rightarrow +\infty$. \diamond

Remarque 1 *Le type (A) correspond à une branche négative ($\partial_t T \leq 0$) puis positive, le type (C) à une branche positive puis négative.*

Théorème 3 (Sélection d'une solution faible)

La fonction définie par $\hat{q} = p_0 \circ \hat{\tau}$ avec

$$\hat{\tau}(x, \theta) = \sup\{t \in \mathbb{T}(x, \theta) \mid \phi(x, t) = \Phi^+(x, \theta)\}$$

fournit une solution unique de (4-5) au sens des distributions.

L'unicité de la sélection opérée par $\hat{\tau}$ est évidente et on vérifie que \hat{q} satisfait bien la condition de Rankine-Hugoniot aux lieux de discontinuités.

5.2 Application et lien avec la méthode de Hayes

Pour l'application présentée en section 4, on trouve que

$$\phi(x, t) = \frac{E_\alpha(x)}{x} \left[\int_0^t p_0(t) dt - \frac{1}{2} E_\alpha(x) (p_0(t))^2 \right]. \quad (15)$$

Dans le cas particulier où l'amortissement α tend vers zero, on a $E_\alpha(x) \rightarrow x$ et (15) reconduit au potentiel défini par Hayes [2] (voir aussi l'équation (9) dans [1] où le rôle de l'espace y et du temps t sont échangés) :

$$\phi_H(x, t) = \int_{-\infty}^t p_0(t') \partial_{t'} T(x, t') dt'. \quad (16)$$

La sélection opérée par $\hat{\tau}$ correspond donc ici à celle opérée par le potentiel de Hayes. Mais même si les quantités sont identiques, elles ne le seront pas en général et les interprétations de (13) et (16) sont très différentes.

Ainsi, dans (13), $(T_0 - T)/x$ représente l'écart (moyen par unité de longueur) entre la durée du transport de 0 à x d'une quantité nulle (référence) et celle d'une quantité non nulle (p_0). Cet écart est intégré par rapport à $\partial_{t'} T(x, t') dt'$ qui s'interprète comme la mesure du temps d'arrivée (tant que T reste bijectif). La sélection opérée par Φ^+ et $\hat{\tau}$ correspond donc à retenir les parties maximales d'une information construite exclusivement à partir du temps de transport. Dans (16), on n'a plus une interprétation purement temporelle et on perd aussi en général la propriété 2(iii).

Il a été montré que le potentiel de Hayes fournit la solution entropique pour cette application particulière mais pas en général [1]. Cette question reste ouverte pour la sélection opérée par Φ^+ et $\hat{\tau}$. La continuation de ce travail sur ce point et la recherche d'interprétations affinées devront être lancées.

6 Résultats

La figure 3 présente la propagation du signal jusqu'en $x = x^*$. L'image en bas à gauche, qui représente la dérivée temporelle du signal original $q(0, t)$ (rappelé en haut à gauche) ainsi que la limite verticale (rouge) marquant l'apparition d'un choc ($dq(0, t)/dt = \alpha/(1 - e^{-\alpha x})$), permet de vérifier que $x = x^* \approx 0.1414$ marque bien la limite de validité de l'hypothèse "solutions fortes", ce que suggérait la figure 1. Cette information est aussi donnée de manière équivalente par l'image en bas à droite qui montre qu'en certains points, $\partial_t T$ s'approche de 0 (sans toutefois l'atteindre).

Sur l'image en haut à droite est représenté le potentiel $\phi(x, t)$ défini en (13) mais tracé ici en fonction de $T(x, t)$. Ici encore, le fait que $\phi(x, T(x, t))$ soit monovalué montre que la solution est forte. Ainsi d'après (13) :

$$\Phi^+(x, \theta) = \phi(x, t) \quad \forall t \in \mathbb{T}(x, \theta), \quad (17)$$

et tous les points du signal d'entrée $q(0, t)$ apparaissent dans le signal de sortie $q(x, T(x, t))$. Les points marqués d'un \circ (vert) sur les différentes images de la figure sont en correspondance.

La situation est différente si on considère la propagation sur une distance plus importante. La figure 4 est comparable à la figure 3 mais en $z = 1$. Sur l'image en bas à gauche $\frac{dq(0, t)}{dt}$ dépasse la limite d'existence d'une solution forte ($dq(0, t)/dt = \alpha/(1 - e^{-\alpha x})$) en plusieurs points (repérés en rouge). Ces points sont repérés en rouge sur les autres image de la figure. Ces points correspondent à ceux pour lesquels $\partial_t T \leq 0$ (en bas à droite). L'examen de l'image en haut à droite révèle un potentiel multivalué, et on a donc :

$$\Phi^+ \neq \phi$$

La solution temporelle (faible) en $x = 1$ doit donc être construite, comme indiqué par le théorème 3. Le résultat est présenté en figure 5, pour différents x équidistants entre $x = 0$ et $x = 1$. Sur l'image du haut, les tracés de $q(x, t)$ révèlent des chocs de plus en plus marqués

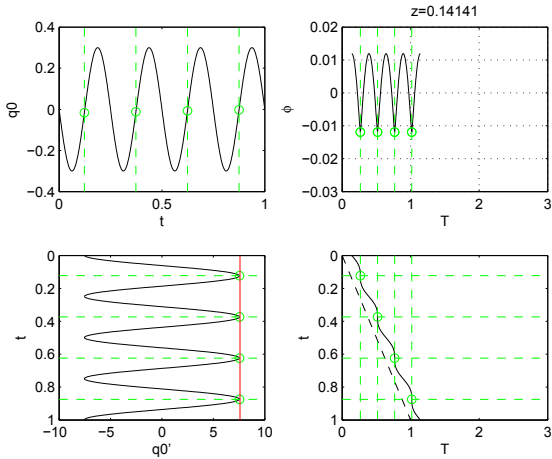


FIGURE 3 – En haut à gauche : signal à l’entrée $p_0(t) = q(0, t)$. En haut à droite, potentiel $\Phi(x^*, t)$ défini par l’équation (13). En bas à gauche, dérivée du signal temporel à l’entrée $q(0, t)$ et la limite (droite verticale en rouge) dont le non franchissement indique l’absence de choc avant $x = x^*$. En bas à droite, influence de la propagation non linéaire sur les temps d’arrivée en $x = x^*$. La droite en pointillés noirs représente le cas d’une propagation linéaire à célérité $c(x, p(x, t)) = 1$.

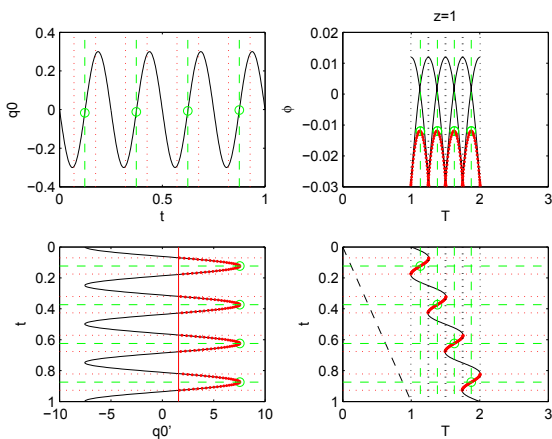


FIGURE 4 – Mêmes quantités représentées qu’en figure 3, mais en $z = 1$. Les points marqués en rouge sont ceux pour lesquels la condition $\partial_t T > 0$ n’est pas vérifiée, c’est à dire ceux impliqués dans au moins un choc.

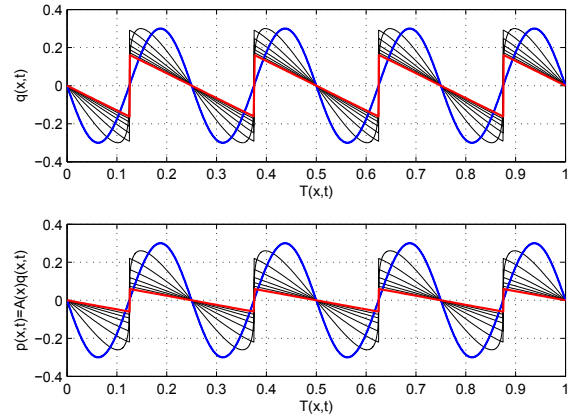


FIGURE 5 – Solutions fortes ou faibles pour plusieurs distances $x = n x^*$ pour $0 \leq n \leq 7$. En haut : $q(x, t)$ solution de (4-5); en bas : $p(x, t) = A(x)q(x, t)$ solution de (1).

(apparition d’un onde en N, [4]). Sur l’image du bas, les tracés de $p(x, t) = A(x)q(x, t)$ montrent la solution du problème original amorti, avec une diminution de l’amplitude apportée par l’amortissement. La forme d’onde est conservée puisque par hypothèse l’amortissement α est indépendant de la fréquence.

7 Conclusion

Un premier intérêt de l’approche présentée dans cet article est de séparer lors de la propagation les effets liés à l’amortissement (indépendant de la fréquence) et ceux liés au transport non linéaire. De plus l’introduction d’un potentiel permet de traiter le problème non linéaire comme un problème entrée/sortie, même en présence de chocs. On garde ainsi l’avantage apporté par la méthode des caractéristiques, mais l’algorithme décrit n’est pas limité aux solutions fortes comme la méthode des caractéristiques. Le traitement de chocs multiples n’est pas plus coûteux. Cette qualité sera exploitée pour simuler en temps-réel le fonctionnement des cuivres à fort niveau sonore, et étendre les algorithmes de synthèse sonore existant qui sont limités, soit à une propagation sans perte et aux solutions fortes ([8]) ou aux solutions faibles correspondant à des chocs symétriques ([7]), soit à une propagation avec pertes visco-thermiques et aux solutions fortes ([9]).

Le travail présenté dans cet article s’est focalisé sur un modèle particulier de transport non linéaire, mais l’objectif est de prouver que n’importe quelle équation du type de (1) peut être traitée dans le même formalisme.

Références

- [1] Coulouvrat F., "A quasi-analytical shock solution for general nonlinear progressive waves", *Wave Motion*, 46, 97-107, (2009).
- [2] Hayes W.D., Haefeli R.C., Kulsrud H.E., "Sonic boom propagation in a stratified atmosphere with

- computer program”, *Technical report, NASA CR-1299*, (1969).
- [3] Hirschberg A., Gilbert J., Msallam R., Wijnands A.P.J, ”Shock waves in trombones” ,*J. Acoust. Soc. Am.*, 99, 1754-1758 (1996).
 - [4] Makarov S., Ochmann M. , ”Nonlinear and Thermoviscous Phenomena in Acoustics, Part II” , *Acta Acustica united with Acustica* , 83, 197-222 (1997).
 - [5] Godlewski E., Raviart P.-A., ”Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws”, Springer, New York (1996).
 - [6] Hamilton M.F., Blackstock D.T., ”Nonlinear Acoustics”, Academic Press, San Diego (1998).
 - [7] Vergez C., Rodet X., ”New algorithm for nonlinear propagation of a sound wave. Application to a physical model of a trumpet.”, *Journal of Signal Processing*, 4(1), 79-87 (2000).
 - [8] Msallam R., Dequidt S., Caussé R., Tassart S., ”Physical Model of the Trombone Including Nonlinear Effects. Application to the Sound Synthesis of Loud Tones.”, *Acta Acustica united with Acustica* , 86 (2000).
 - [9] Helie Th., Smet V., ”Simulation of the weakly nonlinear propagation in a straight pipe : application to a real-time brassy audio effect”, *Mediterranean Conference on Control and Automation*, 16, 1580-1585, (2008).