

# Estimation d'état des systèmes non linéaires incertains sous forme multimodèle de type Takagi-Sugeno

Dalil ICHALAL, Benoît MARX, Didier MAQUIN, José RAGOT

Centre de Recherche en Automatique de Nancy,  
UMR 7039 – Nancy-Université, CNRS.

2, Avenue de la forêt de Haye. 54516 Vandoeuvre-les-Nancy.

prenom.nom@ensem.inpl-nancy.fr  
<http://www.cran.uhp-nancy.fr>

**Résumé**—Cet article traite le problème de la conception d'un observateur d'état pour un système non linéaire décrit par un modèle de Takagi-Sugeno (T-S). La particularité de ce travail réside dans la considération de l'hypothèse de non mesurabilité des variables de décision ou de prémisses. De plus, le modèle T-S considéré est supposé incertain et à mesures bruitées. On est alors face à un problème de conception d'observateur pour un système T-S incertain et à variables de décision non mesurables. Deux approches sont proposées, elles se basent sur l'utilisation de la seconde théorie de Lyapunov combinée aux techniques d'optimisation  $L_2$ . Les conditions de stabilité et de convergence de l'erreur d'estimation d'état sont formulées en terme d'inégalités linéaires matricielles (LMI). Un exemple académique est proposé afin d'illustrer les performances des approches proposées. Enfin, la seconde approche est appliquée à un modèle d'un bioprocédé.

**Mots-clés**—Systèmes non linéaires, modèle de Takagi-Sugeno, variables de décision non mesurables (VDNM), théorie de Lyapunov, estimation d'état, formalisme LMI.

## I. INTRODUCTION

Dans de nombreux travaux sur la commande des systèmes, le vecteur d'état est supposé accessible à la mesure. Or, d'un point de vue pratique, une telle hypothèse n'est pas toujours vérifiée. En effet, pour des raisons techniques et/ou économiques, il est difficile, voire impossible, de mesurer la totalité des variables d'état du système, d'où la nécessité d'estimer ces dernières à partir d'un jeu de données d'entrées-sorties. De façon générale, le besoin de connaître entièrement les variables d'état du système est souvent une nécessité dans les phases de modélisation ou d'identification, de diagnostic et de commande des systèmes, ce qui place le problème de la conception d'observateurs au cœur du problème général de contrôle des systèmes.

La conception d'observateur pour l'estimation d'état en se basant sur des modèles linéaires du système a atteint une certaine maturité. Cependant, l'hypothèse de linéarité limite la portée des résultats obtenus. En effet, la complexité des systèmes se traduit souvent par des comportements non linéaires, et un modèle linéaire ne peut représenter le comportement d'un système que dans une zone de fonctionnement restreinte. Afin d'améliorer les performances des systèmes, il est impératif de prendre en considération les non-linéarités dans la phase de modélisation. Cela permet de décrire fidèlement le comportement d'un système réel sur une large plage de fonctionnement. Les systèmes de commande et de diagnostic qui en résultant deviennent alors plus performants. Cependant, l'inconvénient principal des modèles non linéaires réside dans la complexité de leurs structures

du point de vue mathématique, ce qui les rend difficilement exploitables pour l'analyse de performance, le contrôle ou la supervision.

Les modèles de type *Takagi-Sugeno* (T-S) constituent des outils privilégiés de représentation des systèmes non linéaires. La forme particulière de ces modèles (i.e. des modèles linéaires inter-connectés par des fonctions non linéaires, permet d'exploiter certains outils et méthodes mis au point dans le contexte des systèmes linéaires. En particulier, il est possible de construire des observateurs dont la structure est calquée sur celle des modèles. Le gain de ces observateurs est souvent calculé en résolvant des jeux d'inégalités matricielles issus de l'analyse de stabilité s'appuyant sur la seconde méthode de Lyapunov. Selon la modélisation utilisée, les fonctions non linéaires d'interpolation dépendent de variables de décision mesurables ou non mesurables. Trois approches peuvent être rencontrées dans la littérature : l'identification (à partir d'un jeu de données d'entrées-sorties), la linéarisation (autour de plusieurs points de fonctionnement) et la transformation par secteurs non linéaires.

Dans le contexte de la modélisation T-S utilisant les transformations par secteurs non linéaires, il est à noter que le passage du modèle non linéaire au modèle T-S n'est pas unique. De plus, le nombre de sous-modèles croît exponentiellement suivant le nombre de non-linéarités considérées. Il convient alors de choisir de manière judicieuse les non-linéarités afin d'obtenir un modèle T-S ayant le moins de sous-modèles possible (ce qui réduit la complexité de résolution des conditions LMI issues de l'étude de la stabilité) tout en garantissant certaines propriétés structurelles du modèle par exemple la commandabilité et l'observabilité des sous-modèles.

La modélisation des systèmes à l'aide de modèles de Takagi-Sugeno [11], [12] est une façon intéressante de représenter le comportement des systèmes non linéaires. Celle-ci s'appuie sur l'utilisation d'un ensemble de modèles linéaires et d'un mécanisme d'interpolation de ces modèles à gain variable. Dans certain cas, ce type de modèle permet de décrire, de façon exacte, le comportement non linéaire d'un système en rejetant, dans les fonctions d'interpolation, toutes les non-linéarités du système [12]. L'intérêt majeur de cette formulation réside dans sa simplicité. L'interpolation s'effectue à l'aide de fonctions de pondération non linéaires qui vérifient la propriété de somme convexe. Ce type de modélisation a permis de transposer, aux systèmes

non linéaires, certains résultats obtenus pour les systèmes linéaires. Citons par exemple, des travaux relatifs à l'étude de la stabilité ou de la stabilisation de systèmes [12], [5], [8], [4] où les auteurs proposent des conditions suffisantes de stabilité élaborées en utilisant les techniques appliquées aux modèles linéaires.

Cependant, dans tous ces travaux, les auteurs supposent que la variable de décision (notée  $\xi(t)$  dans 1) est mesurable (i.e  $\xi(t) = u(t)$  ou  $\xi(t) = y(t)$ ). Dans le problème du diagnostic, cette hypothèse oblige à concevoir des bancs d'observateurs à base de multimodèles dont les fonctions d'activation dépendent de l'entrée  $u(t)$ , pour la détection et la localisation des défauts capteurs, ou de la sortie  $y(t)$  pour la détection et la localisation des défauts actionneurs. Ceci nécessite l'élaboration de deux multimodèles différents, représentant le même système, selon que l'on veut détecter et localiser des défauts capteurs ou des défauts actionneurs. Pour éliminer ce problème, il est intéressant de considérer le cas où les fonctions d'activation dépendent de l'état du système. Parmi les rares travaux publiés dans ce contexte, on peut citer par exemple [10] [2] [1] qui, sous l'hypothèse de fonctions d'activation  $\mu_i(x)$  lipschitziennes, ont proposé un observateur de type Luenberger. Les conditions de stabilité de ce dernier sont formulées sous forme d'inégalités linéaires matricielles (LMI) ce qui en rend la synthèse facile. Cependant, le problème de cette méthode réside dans le fait que la constante de Lipschitz apparaît dans les LMIs. Si cette constante de Lipschitz est de grande amplitude, le domaine de solution défini par les contraintes peut être très restreint ou même, dans certains cas, être vide. Dans [2] [1], se basant sur les résultats obtenus dans [10], un observateur à mode glissant est proposé pour compenser les termes inconnus du système. Dans [7], une autre approche a été proposée pour permettre de réduire le conservatisme inhérent aux méthodes précédentes et d'élargir le domaine des solutions même si la constante de Lipschitz est importante.

Il a été montré dans la littérature que les modèles T-S à variables de décision non mesurables (VDNM), permettent une représentation d'une classe de système plus large et de manière exacte dans un compact de l'espace d'état. De plus, dans le contexte du diagnostic, contrairement aux modèles T-S à variables de décision mesurables (entrées ou sorties du système), un seul modèle T-S suffit pour la construction de bancs d'observateurs destinés à la détection et la localisation de défauts de capteurs et d'actionneurs d'un système. Cependant, l'étude de cette classe de modèles T-S à variables de décision non mesurables est souvent complexe et constitue un champs de recherche intéressant. Pourtant les résultats obtenus, dans la littérature, sur l'estimation d'état et la commande utilisant les modèles T-S sont basés sur l'hypothèse de mesurabilité des variables de prémisses ou variables de décision intervenant dans les fonctions d'activation du modèle T-S. Or, ces fonctions d'activation peuvent dépendre partiellement ou entièrement du vecteur d'état qui peut ne pas être mesurable. Ce type de problème est très souvent rencontré dans la modélisation T-S issue des transformations par secteurs non linéaires.

Cet article présente une approche pour la conception d'observateurs d'état pour des systèmes non linéaires décrits par un modèle T-S à variables de décision non mesurables. La section II présente le modèle T-S ainsi que quelques notations utilisées dans le papier. Dans la section III, la première approche de conception d'observateurs est présentée et illustrée sur un exemple académique. Ensuite, la seconde approche levant les

hypothèses de Lipschitz des fonctions d'activation est donnée dans la section IV. Enfin, un exemple d'estimation d'état d'un bio-réacteur chimique utilisé dans les procédés de traitement des eaux usées est proposée.

## II. MODÈLE DE TAKAGI-SUGENO

L'approche T-S permet de représenter le comportement d'un système sous forme de plusieurs modèles linéaires. Chaque sous-modèle contribue à cette représentation globale suivant une fonction de pondération  $\mu_i(\xi(t))$  à valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$ . La structure multimodèle est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  représente le vecteur de sortie. Les matrices  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C$  sont connues réelles et constantes, de dimensions compatibles avec celles des signaux définis plus haut. Enfin, les quantités  $\mu_i(\xi(t))$  représentent les fonctions d'activation qui dépendent de la variable  $\xi(t)$ , encore appelée variable de décision, elle-même pouvant être une variable mesurable (entrée ou sortie du système) ou une variable non mesurable (état du système); ces fonctions ont les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\} \end{cases} \quad (2)$$

*Lemme 1* : Pour toutes matrices de dimensions appropriées  $X$  et  $Y$  et pour toute matrice  $\Omega > 0$  telle que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$X^T Y + Y^T X < X \Omega X^T + Y \Omega^{-1} Y^T \quad (3)$$

## III. ESTIMATION D'ÉTAT DES SYSTÈMES T-S À VDNM INCERTAINS

Considérons le système incertain suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))((A_i + \Delta A_i(t))x(t) \\ &+ (B_i + \Delta B_i(t))u(t)) \end{aligned} \quad (4)$$

$$y(t) = Cx(t) + D\omega(t) \quad (5)$$

où les incertitudes sont structurées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Delta A_i(t) &= M_i^A \Sigma_A(t) N_i^A \\ \Delta B_i(t) &= M_i^B \Sigma_B(t) N_i^B \end{aligned} \quad (6)$$

et où  $\Sigma_A(t)$  et  $\Sigma_B(t)$  vérifient les conditions :

$$\begin{aligned} \Sigma_A^T(t) \Sigma_A(t) &\leq I, \quad \forall t \\ \Sigma_B^T(t) \Sigma_B(t) &\leq I, \quad \forall t \end{aligned} \quad (7)$$

Le signal  $\omega(t)$  est un bruit de mesure borné en amplitude.

En utilisant les matrices  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $\bar{A}_i$  et  $\bar{B}_i$  :

$$A_0 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r A_i \quad (8)$$

$$B_0 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r B_i \quad (9)$$

$$A_i = \bar{A}_i + A_0 \quad (10)$$

$$B_i = \bar{B}_i + B_0 \quad (11)$$

on obtient une formulation équivalente de l'équation d'état (4) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + B_0 u(t) + \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) ((\bar{A}_i + \Delta A_i(t))x(t) \\ &+ (\bar{B}_i + \Delta B_i(t))u(t)) \end{aligned} \quad (12)$$

Les matrices  $A_0$  et  $B_0$  seront déterminées ultérieurement. Nous sommes intéressés par la conception d'un observateur pour estimer l'état du système (12). L'observateur est pris sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_0 \hat{x}(t) + B_0 u(t) + \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t)) (\bar{A}_i \hat{x}(t) + \bar{B}_i u(t) \\ &+ G_i(y(t) - \hat{y}(t))) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \quad (14)$$

et dépend des gains  $G_i$ . Compte tenu de (12) et (13), l'erreur d'estimation d'état :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (15)$$

obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t)) ((A_0 - G_i C)e(t) - G_i D w(t)) \\ &+ \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) (\Delta A_i(t)x(t) + \Delta B_i(t)u(t)) \\ &+ \sum_{i=1}^r (\bar{A}_i \delta_i(t) + \bar{B}_i \Delta_i(t)) \end{aligned} \quad (16)$$

où :

$$\delta_i(t) = \mu_i(x(t))x(t) - \mu_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t) \quad (17)$$

$$\Delta_i(t) = (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))u(t) \quad (18)$$

De façon plus compacte, la dynamique de l'erreur d'estimation d'état peut être écrite sous la forme équivalente :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r (\mu_i(\hat{x}(t)) (A_0 - G_i C)e(t) + H_i(t)\tilde{\omega}(t) \\ &+ \bar{A}_i \delta_i(t) + \bar{B}_i \Delta_i(t)) \end{aligned} \quad (19)$$

où :

$$H_i(t) = \begin{bmatrix} -\mu_i(\hat{x}(t))G_i D & \mu_i(x(t))\Delta A_i & \mu_i(x(t))\Delta B_i \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\tilde{\omega}(t)^T = [\omega(t)^T \quad x(t)^T \quad u(t)^T] \quad (21)$$

*Hypothèse 1 :* Dans cette section, on fait les hypothèses suivantes :

- **A1.** La stabilité entrée-état du système (4) est vérifiée.
- **A2.** Les fonctions d'activation  $\mu_i(x)$  sont de type Lipschitz :

$$|\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| < \gamma_1 |x - \hat{x}|$$

- **A3.** Les fonctions  $\mu_i(x)x$  sont de type Lipschitz :

$$|\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}| < \gamma_2 |x - \hat{x}|$$

- **A4.** L'entrée  $u(t)$  du système est bornée :

$$|u(t)| \leq \beta$$

A partir des hypothèses (A1) et (A4), on conclut que le vecteur d'état  $x(t)$  du système ainsi que le terme  $\tilde{\omega}(t)$  sont bornés.

*Théorème 1 :* L'observateur optimal (13) pour le système T-S à VDNM incertain (4) est obtenu par la minimisation de  $\bar{\mu}$  sous les contraintes LMIs suivantes par rapport aux variables  $P = P^T > 0$ ,  $Q = Q^T > 0$ ,  $K_i$  et les scalaires positifs  $\bar{\mu}$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_4$ ,  $\sigma$  :

$$\min_{P, Q, K_i, \lambda_1, \lambda_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \sigma, \bar{\mu}} \bar{\mu}$$

s.c.

$$A_0^T P + P A_0 - K_i C - C^T K_i^T < -Q \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & X_i & Y_i & P M_i^A & P M_i^B & K_i D & \gamma_1 \sigma I \\ * & M_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & M_{2i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & M_{3i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\lambda_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\lambda_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_3 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_4 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

$$i \in \{1, \dots, r\}$$

$$\sigma - \lambda_2 \beta > 0 \quad (24)$$

où :

$$M = -Q + (\lambda_1 \gamma_2^2 + 1)I \quad (25)$$

$$M_{1i} = (-\bar{\mu} + \varepsilon_2)I \quad (26)$$

$$M_{2i} = -\bar{\mu}I + \varepsilon_3 (N_i^A)^T N_i^A \quad (27)$$

$$M_{3i} = -\bar{\mu}I + \varepsilon_4 (N_i^B)^T N_i^B \quad (28)$$

$$X_i = P A_i - P A_0 \quad (29)$$

$$Y_i = P B_i - P B_0 \quad (30)$$

Les gains de l'observateur sont calculés à partir de l'équation :

$$G_i = P^{-1} K_i \quad (31)$$

et le taux d'atténuation est donné par :

$$\mu = \sqrt{\bar{\mu}} \quad (32)$$

*Démonstration 1 :* Pour démontrer la convergence de l'erreur d'estimation d'état  $e(t)$ , on analyse l'évolution de la norme de l'erreur, en considérant une fonction de Lyapunov quadratique. Après calcul de sa dérivée par rapport au temps et utilisation de l'équation de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état (19), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \sum_{i=1}^r (\mu_i(\hat{x}(t)) e(t)^T (\Phi_i^T P + P \Phi_i) e(t) \\ &+ e(t)^T P \bar{A}_i \delta_i(t) + e(t)^T P \bar{B}_i \Delta_i(t) \\ &+ \delta_i(t)^T \bar{A}_i^T P e(t) + \Delta_i^T \bar{B}_i^T P e(t) \\ &+ e(t)^T P H_i(t) \tilde{\omega}(t) + \tilde{\omega}(t)^T H_i(t)^T P e(t)) \end{aligned} \quad (33)$$

où :

$$\Phi_i = (A_0 - G_i C) \quad (34)$$

L'utilisation du lemme 1 et des hypothèses **A1**, **A2**, **A3** et **A4** permet d'établir les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} e(t)^T P \bar{A}_i \delta_i(t) + \delta_i(t)^T \bar{A}_i^T P e(t) &< \lambda_1 \gamma_2^2 e(t)^T e(t) \\ &+ \lambda_1^{-1} e(t)^T P \bar{A}_i \bar{A}_i^T P e(t) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} e(t)^T P \bar{B}_i \Delta_i(t) + \Delta_i(t)^T \bar{B}_i^T P e(t) &< \lambda_2 \gamma_1^2 \beta^2 e(t)^T e(t) \\ &+ \lambda_2^{-1} e(t)^T P \bar{B}_i \bar{B}_i^T P e(t) \end{aligned} \quad (36)$$

En utilisant les majorations (35) et (36) dans la dérivée de la fonction de Lyapunov (33), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &\leq \sum_{i=1}^r (e(t)^T (\mu_i(\hat{x})(\Phi_i^T P + P\Phi_i) \\ &+ (\lambda_1 \gamma_2^2 + \lambda_2 \gamma_1^2 \beta^2) I + \lambda_1^{-1} P \bar{A}_i \bar{A}_i^T P \\ &+ \lambda_2^{-1} P \bar{B}_i \bar{B}_i^T P) e(t) \\ &+ e(t)^T P H_i \tilde{\omega}(t) + \tilde{\omega}(t)^T H_i^T P e(t) \end{aligned} \quad (37)$$

Dans l'objectif d'atténuer l'effet de  $\tilde{\omega}(t)$  sur l'erreur d'estimation d'état, on utilisera l'approche  $\mathcal{L}_2$  [3]. On cherche à garantir :

$$\frac{\|e(t)\|_2}{\|\tilde{\omega}(t)\|_2} < \mu, \quad \mu > 0 \quad (38)$$

Le système générant l'erreur d'estimation d'état est stable et le gain  $\mathcal{L}_2$  noté  $\mu$  du transfert de  $\tilde{\omega}(t)$  vers  $e(t)$  est borné, si :

$$\dot{V}(e(t)) + e(t)^T e(t) - \mu^2 \tilde{\omega}(t)^T \tilde{\omega}(t) < 0 \quad (39)$$

Par substitution de  $\dot{V}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^r (e(t)^T (\mu_i(\hat{x}(t))(\Phi_i^T P + P\Phi_i) \\ &+ (\lambda_1 \gamma_2^2 + \lambda_2 \gamma_1^2 \beta^2 + 1) I \\ &+ \lambda_1^{-1} P \bar{A}_i \bar{A}_i^T P + \lambda_2^{-1} P \bar{B}_i \bar{B}_i^T P) e(t) + e(t)^T P H_i \tilde{\omega}(t) \\ &+ \tilde{\omega}(t)^T H_i^T P e(t) - \mu^2 \tilde{\omega}(t)^T \tilde{\omega}(t) < 0 \end{aligned} \quad (40)$$

L'inégalité (40) est respectée si  $\forall i \in \{1, \dots, r\}$  :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t)) (\Phi_i^T P + P\Phi_i) < -Q \quad (41)$$

et :

$$\begin{aligned} &e(t)^T (-Q + (\lambda_1 \gamma_2^2 + \lambda_2 \gamma_1^2 \beta^2 + 1) I \\ &+ \lambda_1^{-1} P \bar{A}_i \bar{A}_i^T P + \lambda_2^{-1} P \bar{B}_i \bar{B}_i^T P) e(t) \\ &+ e(t)^T P H_i(t) \tilde{\omega}(t) + \tilde{\omega}(t)^T H_i(t)^T P e(t) \\ &- \mu^2 \tilde{\omega}(t)^T \tilde{\omega}(t) < 0 \end{aligned} \quad (42)$$

où  $Q = Q^T > 0$ . Les fonctions d'activation satisfont la propriété de somme convexe, donc (41) est vérifiée si les inégalités matricielles suivantes sont vérifiées :

$$(A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C) < -Q, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (43)$$

La négativité de la forme quadratique en  $(e^T \quad \tilde{\omega}^T)^T$  du membre gauche de l'inégalité (42) est garantie si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & P H_i(t) \\ H_i(t)^T P & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (44)$$

où :

$$\Psi_i = -Q + (\lambda_1 \gamma_2^2 + \lambda_2 \gamma_1^2 \beta^2 + 1) I + \lambda_1^{-1} P \bar{A}_i \bar{A}_i^T P + \lambda_2^{-1} P \bar{B}_i \bar{B}_i^T P$$

En utilisant la définition de la matrice  $H_i(t)$  (20), l'inégalité (44) peut être écrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu^2 I \end{bmatrix} + W_i(t) + W_i(t)^T < 0 \quad (45)$$

où :

$$W_i(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\mu_i(\hat{x}) P G_i D & \mu_i(x) P \Delta A_i & \mu_i(x) P \Delta B_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

qui peut être décomposée, en tenant en compte des définitions de  $\Delta A_i(t)$  et  $\Delta B_i(t)$  (6) :

$$W_i(t) = \mathcal{W}_i \mathcal{F}(t) \quad (47)$$

où :

$$\mathcal{W}_i = \begin{bmatrix} 0 & P G_i D & P M_i^A & P M_i^B \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathcal{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_i(x) I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_i^A(t) N_i^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_i^B(t) N_i^B \end{bmatrix} \quad (49)$$

où  $F_i^A(t) = \mu_i(x) \Sigma_A(t)$  et  $F_i^B(t) = \mu_i(x) \Sigma_B(t)$ . Les propriétés de somme convexe et des termes  $\Sigma_A(t)$  et  $\Sigma_B(t)$  permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \mu_i(\hat{x})^T \mu_i(\hat{x}) &\leq 1 \\ F_i^A(t)^T F_i^A(t) &\leq I \\ F_i^B(t)^T F_i^B(t) &\leq I \end{aligned}$$

Définissons la matrice  $\Omega$  comme suit :

$$\Omega = \text{diag}(\varepsilon_1 I, \varepsilon_2 I, \varepsilon_3 I, \varepsilon_4 I)$$

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_3 > 0, \quad \varepsilon_4 > 0$$

En utilisant le lemme 1 et les définitions (6)-(7), on obtient, après calculs, les inégalités matricielles suivantes :

$$W_i(t) + W_i(t)^T < \begin{bmatrix} \Xi_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 (N_i^A)^T N_i^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 (N_i^B)^T N_i^B \end{bmatrix} \quad (50)$$

où :

$$\begin{aligned} \Xi_i &= \varepsilon_2^{-1} P G_i D D^T G_i^T P + \varepsilon_3^{-1} P M_i^A (M_i^A)^T P \\ &+ \varepsilon_4^{-1} P M_i^B (M_i^B)^T P \end{aligned} \quad (51)$$

En substituant (50) dans (45) on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Theta_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{3i} \end{bmatrix} < 0 \quad (52)$$

$$\begin{aligned}\Theta_i &= -Q + (\lambda_1\gamma_2^2 + \lambda_2\gamma_1^2\beta^2 + 1)I + \lambda_1^{-1}P\bar{A}_i\bar{A}_i^T P \\ &+ \lambda_2^{-1}P\bar{B}_i\bar{B}_i^T P + \varepsilon_2^{-1}PG_iDD^TG_i^T P \\ &+ \varepsilon_3^{-1}PM_i^A(M_i^A)^T P + \varepsilon_4^{-1}PM_i^B(M_i^B)^T P\end{aligned}\quad (53)$$

où  $M_{1i}$ ,  $M_{2i}$  et  $M_{3i}$  sont données dans (26)-(28).

Afin d'éliminer les non-linéarités de type produit dans (53), le complément de Schur ainsi que le changement de variable  $K_i = PG_i$  sont utilisés. De plus, on considère que la constante  $\mu$ , représentant le gain  $\mathcal{L}_2$  du transfert de  $\tilde{\omega}(t)$  vers  $e(t)$ , dans (52) est une variable à minimiser. Donc, on effectue également le changement de variable  $\bar{\mu} = \mu^2$ .

Notons que la borne de l'entrée peut également être considérée comme variable à optimiser qu'on appellera  $\rho$ . En multipliant le terme  $\lambda_2\gamma_1^2\rho^2$  par  $\lambda_2\lambda_2^{-1}$  on obtient :

$$\lambda_2\gamma_1^2\beta^2 = \lambda_2\lambda_2^{-1}\lambda_2\gamma_1^2\rho^2\quad (54)$$

grâce au complément de Schur et au changement de variable  $\sigma = \lambda_2\rho$ , on obtient l'inégalité linéaire matricielle (23). Cependant, si on laisse les variables  $\sigma$  et  $\lambda_2$  libres, il se peut que les valeurs déterminées par l'algorithme ne permettent pas de satisfaire la condition de l'hypothèse **A4**. (la valeur de  $\rho$  trouvée par l'algorithme doit être supérieure ou égale à la borne  $\beta$  de l'entrée). Pour cela, on propose d'ajouter des contraintes sur  $\sigma$  et  $\lambda_2$  pour garantir que le rapport  $\frac{\sigma}{\lambda_2}$  soit supérieur ou égal à la borne de l'entrée. On sait que :

$$\|u(t)\| \leq \beta_2\quad (55)$$

La valeur de  $\rho$  trouvée par l'algorithme doit satisfaire  $\rho \geq \beta$ , on obtient alors  $\frac{\sigma}{\lambda_2} \geq \beta$ , qui conduit à la contrainte :

$$\sigma - \beta\lambda_2 \geq 0\quad (56)$$

Finalement la convergence de l'erreur d'estimation d'état est assurée si les inégalités (43) et (52) sont vérifiées. Après utilisation du complément de Schur dans (52), on obtient les LMIs données dans le théorème 1.

#### IV. EXEMPLE DE SIMULATION

On considère le système (4) défini par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -18.5 & 5 & 18.5 \\ 0 & -20.9 & 15 \\ 18.5 & 15 & -33.5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -22.1 & 0 & 22.1 \\ 1 & -23.3 & 17.6 \\ 17.1 & 17.6 & -39.5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.25 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

$$M_i^A = N_i^A = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1], M_i^B = N_i^B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$i = 1, 2$

Les fonctions d'activation sont :

$$\begin{cases} \mu_1(x) = \frac{1 - \tanh(x_1)}{2} \\ \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x) \end{cases}$$

$\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$  sont identiques et illustrées sur la figure 1.

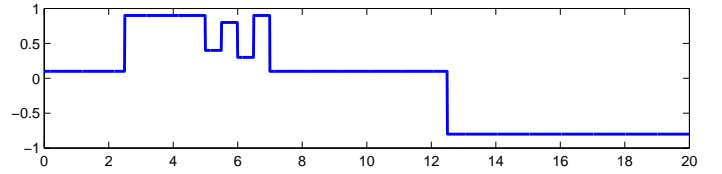


Fig. 1. Evolution dans le temps de  $\Sigma_A(t)$  et  $\Sigma_B(t)$

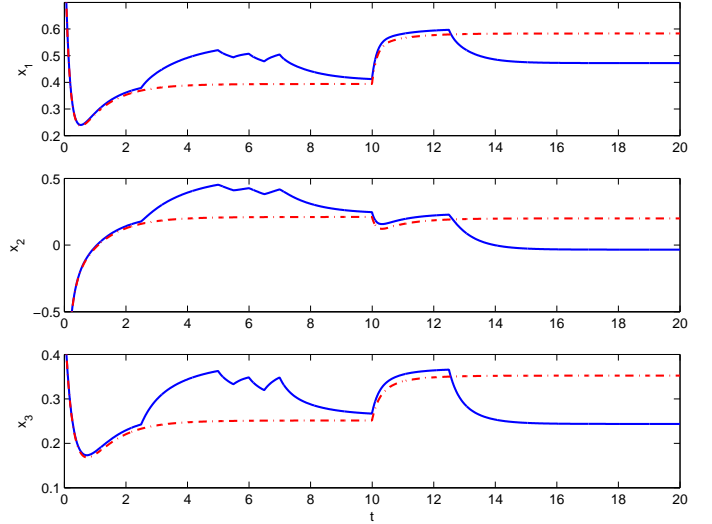


Fig. 2. Comparaison entre les états du système sans incertitudes (courbes rouge discontinues) et ceux du système avec incertitudes (courbes bleues continues)

Une comparaison entre le modèle T-S avec incertitudes de modélisation et sans incertitudes est présentée dans la figure 2. On note clairement l'influence significative des incertitudes sur l'évolution des états dans le temps.

Après résolution des LMIs (22)-(24), on obtient les matrices suivantes :

$$G_1 = \begin{bmatrix} 56.02 & -8.70 \\ 56.51 & -10.23 \\ 54.92 & -8.42 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 57.85 & -11.35 \\ 58.23 & -12.94 \\ 56.82 & -11.19 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.14 & -0.31 & -0.70 \\ -0.31 & 0.84 & -0.41 \\ -0.70 & -0.41 & 1.24 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 13.05 & -0.14 & 0.18 \\ -0.14 & 12.99 & 0.13 \\ -0.18 & 0.13 & 13.11 \end{bmatrix}$$

Le taux d'atténuation des perturbations sur l'erreur d'estimation d'état obtenu est  $\mu = 0.0283$ . Les résultats de simulation sont illustrés sur les figures 3 et 4. La figure 3 montre la convergence des états estimés par l'observateur robuste et ceux du système incertains. Un autre observateur ne tenant pas compte des incertitudes a été développée suivant l'approche proposée dans [6], [7]. La figure 4 présente les erreurs d'estimation d'état obtenues avec l'observateur robuste (bleu) et celles obtenues avec l'observateur proposé dans [6], [7]. On peut conclure que les gains obtenus par la résolution des LMIs données dans le théorème 1 permettent d'atténuer les effets des incertitudes de modélisation et du bruit de mesure. En conclusion, la méthode proposée dans cette partie est robuste par rapport aux incertitudes de modélisation et par rapport au bruit de mesure.

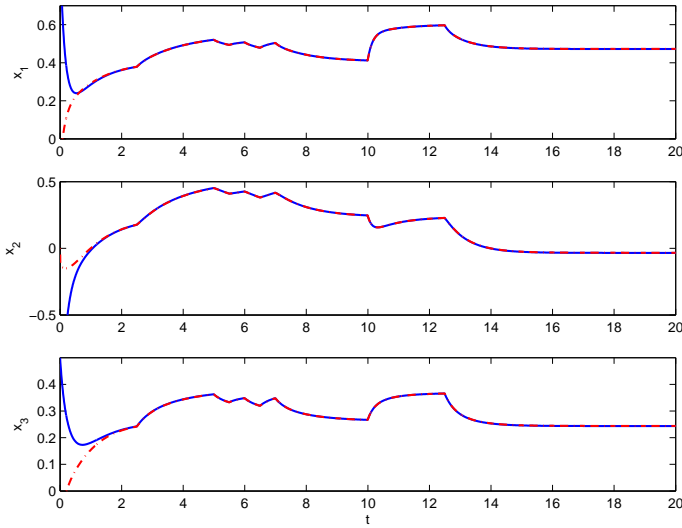


Fig. 3. Etats réels (trait continu bleu) et estimés (pointillés)

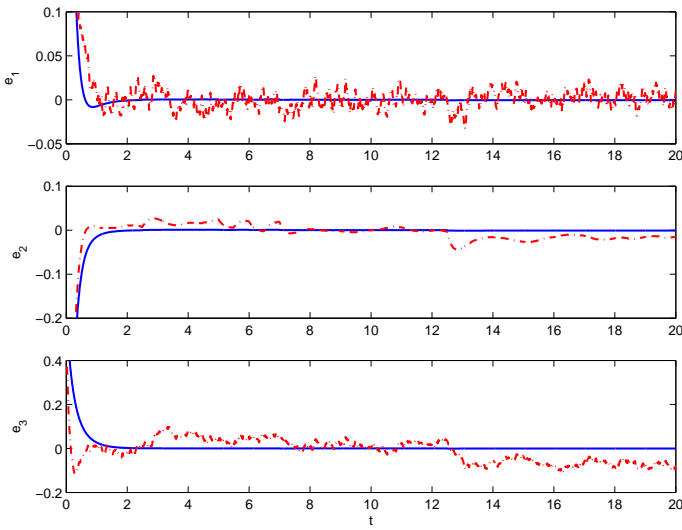


Fig. 4. Comparaison des erreurs d'estimation d'état obtenues avec le théorème 1 (trait continu bleu) et avec le théorème dans [7] (trait en pointillés rouge)

L'approche proposée dans cette section se base sur des hypothèses de Lipschitz des fonctions d'activation du modèle T-S. La section suivante permet d'étendre cette méthode aux systèmes ayant des fonctions d'activation ne satisfont pas les contraintes de Lipschitz, ce qui permet de considérer une classe plus large de systèmes T-S.

## V. EXTENSION AUX FONCTIONS D'ACTIVATION NON LIPSCHITZIENNES

Le système (4) peut se mettre sous la forme équivalente :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t))((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + \nu(t)) \quad (57)$$

$$y(t) = Cx(t) + D\omega(t) \quad (58)$$

où la quantité  $\hat{x}(t)$  est l'état estimé du système et où :

$$\begin{aligned} \nu(t) = & \sum_{i=1}^r (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))((A_i + \Delta A_i(t))x(t) \\ & + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)) \end{aligned} \quad (59)$$

est alors considéré comme une perturbation.

L'observateur proposé s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) &= C(t)\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (60)$$

L'erreur d'estimation d'état entre (57) et (60) est définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (61)$$

Sa dynamique est :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t))((A_i - L_i C)e(t) + \Delta A_i(t)x(t) \\ &+ \Delta B_i(t)u(t) - L_i D\omega(t) + \nu(t)) \end{aligned} \quad (62)$$

qui peut être écrite sous la forme suivante :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t))((A_i - L_i C)e(t) + \mathcal{M}_i \tilde{\omega}(t)) \quad (63)$$

où :

$$\tilde{\omega} = [\nu^T \omega^T x^T u^T]^T, \quad \mathcal{M}_i = [I \quad -G_i D \quad \Delta A_i \quad \Delta B_i]$$

Cette forme, que l'on peut comparer à celle obtenue en (19), est caractérisée, d'une part, par la matrice d'état  $\sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t))(A_i - L_i C)$  dont il convient de garantir la stabilité, et d'autre part, par les termes de perturbation  $\tilde{\omega}(t)$  dont il convient de réduire l'influence. On suppose que les hypothèses **A1** et **A4** sont vérifiées, donc  $\tilde{\omega}(t)$  est bornée.

**Théorème 2 :** Les gains de l'observateur (60) pour le système T-S à VDNM incertain (57) sont obtenus par la minimisation de  $\bar{\gamma}$  sous les contraintes LMIs suivantes par rapport aux variables  $P = P^T > 0$ ,  $K_i$  et des scalaires positifs  $\bar{\gamma}$ ,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  :

$$\min_{P, K_i, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \bar{\gamma}} \bar{\gamma}$$

sous les contraintes suivantes pour  $i \in \{1, \dots, r\}$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11i} & P & -K_i D & 0 & 0 & P M_i^A & P M_i^B \\ P & -\bar{\gamma} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D^T K_i^T & 0 & -\bar{\gamma} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{33i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{44i} & 0 & 0 \\ (M_i^A)^T P & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ (M_i^B)^T P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (64)$$

où :

$$\begin{aligned} \Psi_{11i} &= A_i^T P + P A_i - C^T K_i^T - K_i C + I \\ \Psi_{33i} &= -\bar{\gamma} I + \varepsilon_1 (N_i^A)^T N_i^A \\ \Psi_{44i} &= -\bar{\gamma} I + \varepsilon_2 (N_i^B)^T N_i^B \end{aligned}$$

Les gains de l'observateur sont calculés à partir de  $G_i = P^{-1} K_i$  et le taux d'atténuation est obtenu par  $\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$ .

**Démonstration 2 :** L'objectif est de minimiser l'effet de  $\tilde{\omega}(t)$  sur l'erreur d'estimation d'état (63). En utilisant le lemme borné réel [3], on obtient :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t)) \begin{bmatrix} (A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C) + I & P M_i \\ M_i^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (65)$$

Avec les changements de variables  $K_i = PG_i$  et  $\bar{\gamma} = \gamma^2$ , on a :

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i - C^T K_i^T - K_i C + I & P M_i \\ M_i^T P & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0 \quad (66)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}$$

Compte tenu de la définition de  $M_i$ , l'inégalité (66) peut être ré-écrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11i} & P & -PG_i D & P \Delta A_i & P \Delta B_i \\ P & -\bar{\gamma} I & 0 & 0 & 0 \\ -D^T G_i^T P & 0 & -\bar{\gamma} I & 0 & 0 \\ \Delta A_i^T P & 0 & 0 & -\bar{\gamma} I & 0 \\ \Delta B_i^T P & 0 & 0 & 0 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0 \quad (67)$$

L'utilisation de la même approche et avec des calculs semblables à ceux de (45)-(50) dans la démonstration précédente, conduit aux conditions LMIs (64). On notera que la négativité du bloc  $\Psi_{11i}$  garantit la stabilité de l'observateur.

#### A. Discussion

Dans le théorème 2, la borne sur l'entrée  $\beta$  et les constantes de Lipschitz  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  définies dans l'hypothèse 1 ne sont pas utilisées et n'apparaissent donc pas dans les LMIs (64). Par conséquent, la seconde méthode est plus générale que la première dans la mesure où elle ne nécessite pas les hypothèses (A2) et (A3) de 1. L'application de cette nouvelle méthode pour l'exemple précédent donne cependant des résultats similaires.

Les théorèmes 1 et 2 fournissent des résultats généraux puisque ils prennent en compte les incertitudes de modélisation sur les matrices  $A_i$  et  $B_i$  ainsi que l'influence du bruit de mesure. Il est donc possible de traiter les cas particuliers (par exemple traiter seulement les incertitudes sur la dynamique du système), cela revenant à éliminer les lignes et les colonnes correspondantes dans les inégalités matricielles.

## VI. ESTIMATION D'ÉTAT D'UN BIORÉACTEUR

Dans cette section, l'approche de conception d'observateur robuste est appliquée afin d'estimer l'état d'un bioréacteur. Noter que ce type de système est largement utilisé dans les procédés de traitement des eaux usées (stations d'épuration). La problématique d'estimation d'état constitue alors une tâche primordiale dans la surveillance du bon fonctionnement du procédé, afin de pouvoir réagir face à un dysfonctionnement.

Le système considéré est réduit à deux équations d'état non linéaires représentées par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{ax_1(t)x_2(t)}{x_2(t)+b} - x_1(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{cax_1(t)x_2(t)}{x_2(t)+b} + (d - x_2(t))u(t) \end{cases} \quad (68)$$

où  $x_1(t)$  représente la concentration en biomasse,  $x_2(t)$  est la concentration en substrat et  $u(t)$  est le taux de dilution. Les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont fixés aux valeurs numériques  $a = 0.5$ ,  $b = 0.07$ ,  $c = 0.7$ ,  $d = 2.5$ .

#### A. Mise sous forme multimodèle

Afin d'écrire le système (68) sous forme multimodèle de type T-S, on utilise la transformation par secteurs non linéaires permettant l'obtention d'un modèle équivalent au modèle (68) [12],

[9]. Pour ce faire, en observant les non-linéarités du modèle (68), on choisit les variables de prémisses :

$$\begin{cases} z_1(t) = -u(t) \\ z_2(t) = \frac{ax_1(t)}{x_2(t)+b} \\ z_3(t) = -u(t) - \frac{cax_1(t)}{x_2(t)+b} \end{cases} \quad (69)$$

Un modèle T-S est obtenu sur un compact de l'espace d'état conduisant ainsi à définir les intervalles de variations de  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  et  $z_3(t)$  par  $z_1(t) \in [-1, -0.2]$ ,  $z_2(t) \in [0.004, 15]$ ,  $z_3(t) \in [-1.72, -0.2]$ . Compte tenu des valeurs minimales et maximales des variables de prémisses, ce choix conduit à 8 sous-modèles définis par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.2 & 15 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -0.2 & 15 \\ 0 & -1.72 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.004 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.004 \\ 0 & -1.72 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 0 & -1.72 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} -1 & 0.004 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0.004 \\ 0 & -1.72 \end{pmatrix}$$

$$B_i = B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

On considère que seul l'état  $x_1(t)$  est mesuré, ce qui donne :

$$y(t) = x_1(t) + w(t) = Cx(t) + Rw(t) \quad (70)$$

où  $w(t)$  est un bruit de mesure aléatoire à amplitude borné par 0.3 est ajouté et

$$C = (1 \ 0), \quad R = 1$$

On note que les variables de prémisses  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  et  $z_3(t)$  dépendent de l'entrée  $u(t)$  et de l'état  $x_1(t)$  qui sont mesurables mais aussi de l'état  $x_2(t)$  qui n'est pas mesurable. Cela constitue un obstacle pour la conception d'observateur avec les approches classiques basées sur la connaissance des variables de prémisses, d'où l'intérêt du travail présenté dans ce papier.

Afin de montrer les résultats fournis par l'approche proposée, nous allons introduire des incertitudes de modélisation, bornées affectant les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$ . La comparaison entre le système incertain et le système sans incertitudes est donnée sur la figure 5 qui montre l'influence des incertitudes et la nécessité de concevoir un observateur robuste. Les incertitudes sont communes aux 8 sous-modèles et ont la forme générale suivante :

$$\Delta A_i(t) = \Delta A(t) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} \Sigma_A(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ce modèle d'incertitudes bornées prend en compte une large classe d'incertitudes pouvant intervenir lors de la phase de modélisation d'un système (dynamiques négligées, mesures bruitées...).

#### B. Synthèse de l'observateur

Notons qu'une multitude de choix existe pour les variables de prémisses, ici le choix (69) est fait de façon à obtenir des matrices  $B_i = B$  identiques afin de s'affranchir de la borne sur l'entrée dans les problèmes LMI à résoudre pour la conception

de l'observateur. Après résolution du problème d'optimisation sous contraintes LMI du théorème 2, on aboutit aux matrices de gain suivantes :

$$G_1 = \begin{pmatrix} 50.28 \\ 0.81 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 50.35 \\ 0.81 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 50.27 \\ 0.49 \end{pmatrix},$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} 50.22 \\ 0.50 \end{pmatrix}, G_5 = \begin{pmatrix} 49.56 \\ 0.81 \end{pmatrix}, G_6 = \begin{pmatrix} 49.63 \\ 0.80 \end{pmatrix},$$

$$G_7 = \begin{pmatrix} 49.76 \\ 0.49 \end{pmatrix}, G_8 = \begin{pmatrix} 49.46 \\ 0.49 \end{pmatrix}$$

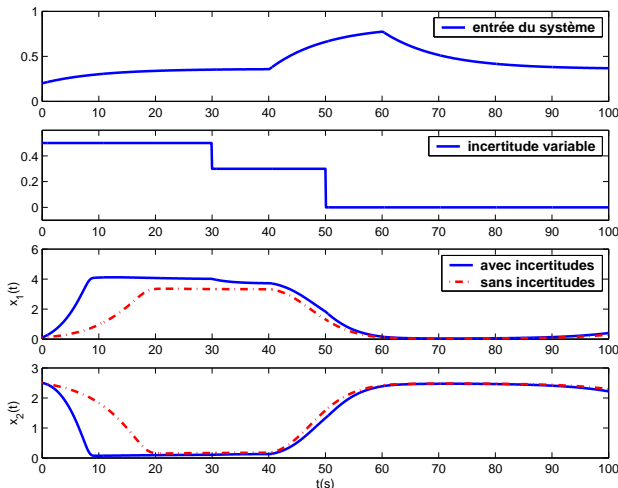


Fig. 5. Effet de l'incertitude

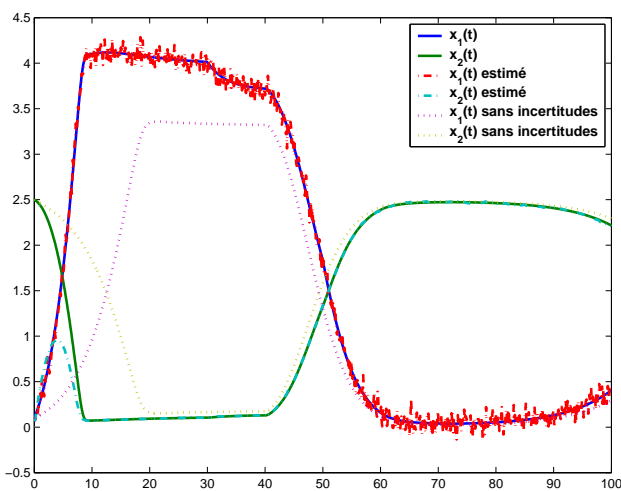


Fig. 6. Estimation d'état du bioréacteur

Les résultats de simulation illustrés dans la figure 6 montre la robustesse de l'observateur proposé vis-à-vis des incertitudes de modélisation.

## VII. CONCLUSION

Dans ce papier, le problème de la conception d'observateurs pour des systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno incertain à variables de décision non mesurables est traité. L'observateur proposé est une extension de l'observateur de Luenberger développé pour les systèmes linéaires aux cas des systèmes non linéaires. L'originalité du travail réside dans

l'hypothèse de non mesurabilité des variables de décision intervenant dans les fonctions d'activation du modèle T-S. En effet, cette hypothèse permet une représentation d'une classe plus large de systèmes non linéaires comparée à celle décrite par des modèles T-S à variables de décision mesurables. De plus, elle offre une représentation exacte d'un modèle non linéaire de la forme générale  $\dot{x} = f(x, u)$  en utilisant la transformation par secteurs non linéaires. La première approche proposée se base sur des hypothèse de Lipschitz des fonctions d'activation et sur la borne sur l'entrée du système. La stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état est traitée en utilisant la théorie de Lyapunov ainsi que les techniques de minimisation  $\mathcal{L}_2$ . Les conditions de stabilité ainsi obtenues sont formulées en termes d'inégalités linéaires matricielles afin de faciliter leurs résolution. La seconde approche est proposée afin de lever les hypothèses de Lipschitz des fonctions d'activation et de permettre ainsi la prise en compte d'une classe plus générale de systèmes. Les travaux futurs seront focalisés sur les méthode de relaxation des conditions LMI, en utilisant par exemple d'autres types de fonctions de Lyapunov, par exemple les fonction polyquadratiques, ou utiliser le théorème de Polya sur la négativité de sommes pondérées de matrices.

## ACKNOWLEDGMENT

Ce travail de recherche est supporté par le programme TASSILI sous le numéro PAI 07 MDU 714.

## RÉFÉRENCES

- [1] P. Bergsten, R. Palm, and D. Driankov. Fuzzy observers. In *IEEE International Fuzzy Systems Conference*, Melbourne, Australia, 2001.
- [2] P. Bergsten, R. Palm, and D. Driankov. Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B : Cybernetics*, 32(1) :114–121, 2002.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM ed., 1994.
- [4] M. Chadli. *Analyse des systèmes non linéaires décrits par des multimodèles*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2002.
- [5] T-M. Guerra, A. Kruszewski, L. Vermeiren, and H. Tirmant. Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(9) :1248–1259, May 2006.
- [6] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot, and D. Maquin. Conception de multi-observateurs à variables de décision non mesurables. In *2è Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, Reims, France, 2007*.
- [7] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot, and D. Maquin. Conception d'observateurs pour un modèle de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables. In *Eighth international Conference on Sciences and Techniques of Automatic control, STA'2007*, Sousse, Tunisia, November 05-07 2007.
- [8] A. Kruszewski. *Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, Valenciennes, France, 2006.
- [9] A. M. Nagy, G. Mourot, B. Marx, G. Schutz, and J. Ragot. Systematic multimodeling methodology applied to an activated sludge reactor model. *Industrial Engineering Chemistry Research*, 49(6) :2790–2799, 2010.
- [10] R. Palm and P. Bergsten. Sliding mode observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ IEEE, San Antonio, TX, USA, 2000*.
- [11] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15 :116–132, 1985.
- [12] K. Tanaka and H.O. Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis : A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley and Sons, 2001.