



**HAL**  
open science

## Couplage acoustique vorticité dans un écoulement cisail  linéaire

Gael Favraud, Vincent Pagneux

► **To cite this version:**

Gael Favraud, Vincent Pagneux. Couplage acoustique vorticité dans un écoulement cisail  linéaire. 10 me Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00546842

**HAL Id: hal-00546842**

**<https://hal.science/hal-00546842v1>**

Submitted on 14 Dec 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# 10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

## Couplage acoustique vorticité dans un écoulement cisailé linéaire

Gael Favraud<sup>1</sup>, Vincent Pagneux<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LAUM, UMR CNRS 6613, Avenue Olivier Messiaen, 72 085 Le Mans Cedex 09, gael.favraud.etu@univ-lemans.fr & vincent.pagneux@univ-lemans.fr

Cette étude porte sur la propagation d'ondes acoustiques dans un écoulement 2-D cisailé linéairement. La réduction des équations du mouvement, dans un système de coordonnées convectées suivant l'écoulement, permet l'étude de d'ondes planes spatiales, et mène à un système différentiel linéaire du premier ordre reliant les dérivées temporelles des perturbations (vitesse et pression)   un opérateur variant au cours du temps et dépendant d'un petit paramètre  $\epsilon$ . Ce dernier représente le rapport entre la vorticité de l'écoulement moyen et la fréquence acoustique. Une méthode asymptotique empruntée à la mécanique quantique et valable dans la limite des faibles valeurs de  $\epsilon$  est utilisée. Il est alors possible de projeter le système sur une base dite "superadiabatique d'ordre  $m$ ", constituée du développement asymptotique à l'ordre  $m$  des solutions qui, au premier ordre, correspondent aux modes propres de l'opérateur (solutions WKB). Il a été montré (Berry, Proc R Soc Lond A, 429, 61-72, (1990)) que pour un cas modèle simple, il existe un ordre  $n$  particulier pour lequel l'expression des amplitudes dans cette base revêt un caractère universel. La possibilité d'utiliser ce résultat pour notre problème est investiguée. Cette méthode met notamment en évidence des couplages importants entre acoustique et vorticité, qui ne mettent en jeu que des phénomènes linéaires.

### 1 Introduction

La propagation d'ondes acoustiques dans un écoulement cisailé est une situation qui peut donner naissance à des effets parfois inattendus : réflexion, réfraction, canalisation du son, couplages...

Nous proposons ici de nous intéresser au cas d'un écoulement 2D simple, cisailé linéairement, de la forme  $\mathbf{u}_0 = Ay\mathbf{e}_x$ . Comme nous le verrons certains phénomènes de couplage ont lieu dans un tel écoulement.

Ce problème a été abordé par différents auteurs au moyen d'une approche modale, qui a alors montré quelques limites. Chagelishvili propose dans [1] une approche différente, non modale, qui prend pour point de départ l'utilisation d'un système de coordonnées convectées.

En utilisant cette même première étape, nous allons proposer une démarche inspirée de la mécanique quantique et formalisée par Berry [2, 3] : l'utilisation de bases superadiabatiques. Celle-ci repose sur le développement asymptotique de solutions qui au premier ordre correspondent aux modes propres de l'hamiltonien du système étudié. Berry montre, dans le cas d'un système à deux  tats, que ces bases sont particulièrement bien adaptées à la description des amplitudes de transitions des  tats. Un autre auteur, Elk [4], utilise cette méthode dans le cas d'un système à trois  tats, ressemblant à celui que nous obtiendrons, qu'il parvient à réduire à un système équivalent à deux  tats. Contrairement à ce dernier auteur, nous ne réduiront pas notre système à un problème d'ordre 2, mais nous proposerons d'appliquer directement la méthode de Berry à l'équation différentielle ordinaire d'ordre 3, équivalente d'un système à trois  tats, que nous obtiendrons.

### 2 Modèle

Nous partons des équations linéarisées 2D régissant le comportement des perturbations compressibles de vitesse  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y$ , et de pression  $p$ , en présence d'un écoulement cisailé moyen  $\mathbf{u}_0 = Ay\mathbf{e}_x$  :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + Ay\frac{\partial}{\partial x}\right)u + Av = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}p \quad (1a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + Ay\frac{\partial}{\partial x}\right)v = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}p \quad (1b)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + Ay\frac{\partial}{\partial x}\right)p = -\rho_0 c_0^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v\right) \quad (1c)$$

La loi de comportement adiabatique du gaz a été considérée :  $p = c_0^2 \rho$  où  $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$  est la vitesse du son. Nous procédons au changement de variables dans le système de coordonnées convectées :

$$T = t \quad ; \quad X = x - Ayt \quad ; \quad Y = y \quad (2)$$

qui implique :

$$\frac{\partial}{\partial t} + Ay\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial T} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y} - AT\frac{\partial}{\partial X} \quad (3)$$

De plus nous adimensionnons toutes les longueurs par une distance  $L$  caractéristique des perturbations, les temps par  $L/c_0$ , les vitesses par  $c_0$ , et enfin la pression par  $\rho_0 c_0^2$ . En conséquence, les équations (1) se réécrivent :

$$\frac{\partial}{\partial T}u + \epsilon v = -\frac{\partial}{\partial X}p \quad (4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial T}v = -\left(\frac{\partial}{\partial Y} - \epsilon T\frac{\partial}{\partial X}\right)p \quad (4b)$$

$$-\frac{\partial}{\partial T}p = \frac{\partial}{\partial X}u + \left(\frac{\partial}{\partial Y} - \epsilon T\frac{\partial}{\partial X}\right)v \quad (4c)$$

où nous voyons apparaître le paramètre  $\varepsilon = \frac{AL}{c_0} = \frac{A}{\omega}$ , rapport de la vorticité  $A$  de l'écoulement moyen et d'une fréquence caractéristique des perturbations. Nous ne considérerons dans la suite que de faibles valeurs de  $\varepsilon$ , car c'est autour de ce paramètre que nous effectuerons nos développements asymptotiques.

Grâce au changement de coordonnées, les coefficients présents dans les équations (4) sont indépendants de l'espace. C'est sur ce point qu'intervient la linéarité de l'écoulement. Il est alors possible d'effectuer une décomposition de Fourier des perturbations en notant :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(T) \\ V(T) \\ P(T) \end{pmatrix} e^{i(\alpha_0 X + \beta_0 Y)} \quad (5)$$

En introduisant un temps lent  $\tau = \varepsilon T$ , en notant  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\beta(\tau) = \beta_0 - \alpha\tau$ , et en remplaçant  $P$  par  $iP$ , les équations (4) se réécrivent finalement sous la forme d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 3 :

$$\varepsilon \frac{d}{d\tau} \mathbf{X}(\tau) = \mathbf{H}(\tau) \mathbf{X}(\tau) \quad (6)$$

où l'on a nommé :

$$\mathbf{H}(\tau) = \mathbf{H}_0(\tau) + \varepsilon \mathbf{H}_1 \quad (7)$$

$$\mathbf{X}(\tau) = \begin{pmatrix} U(\tau) \\ V(\tau) \\ P(\tau) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{H}_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\beta(\tau) \\ \alpha & \beta(\tau) & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

C'est cette dernière formulation du problème, pour  $\varepsilon$  petit, qui retiendra toute notre attention dans la suite de notre étude.

### 3 Base adiabatique simple

En faisant une étude asymptotique au premier ordre (approche WKB), nous allons dégager une première base naturelle sur laquelle projeter la solution. Ceci consiste à chercher une solution sous la forme :

$$\mathbf{X}(\tau) = e^{i\frac{\sigma(\tau)}{\varepsilon}} (\mathbf{X}_0(\tau) + \varepsilon \mathbf{X}_1(\tau) + \varepsilon^2 \mathbf{X}_2(\tau) + \dots) \quad (11)$$

Nous l'injectons dans l'équation (6), et, en identifiant les termes de même ordre en  $\varepsilon$ , nous obtenons à l'ordre 0 :

$$i \frac{d\sigma}{d\tau} \mathbf{X}_0(\tau) = \mathbf{H}_0(\tau) \mathbf{X}_0(\tau) \quad (12)$$

Ceci nous conduit à la détermination des valeurs et vecteurs propres de  $\mathbf{H}_0$ . En effet, les solutions de (12) sont de la forme :

$$\mathbf{X}_0(\tau) = e^{i\frac{\sigma(\tau)}{\varepsilon}} \mathbf{v}(\tau) \quad (13)$$

où  $\sigma(\tau) = -\int i\lambda(\tau) d\tau$ ,  $\lambda$  est une valeur propre de  $\mathbf{H}_0$ , et  $\mathbf{v}$  est un vecteur propre associé à  $\lambda$ . Cependant l'équation vérifiée par  $\mathbf{X}_1$ , obtenue de façon analogue à (12) mais à

l'ordre 1, impose une condition particulière sur ces vecteurs propres. Cette équation s'écrit :

$$(\lambda(\tau) \text{Id} - \mathbf{H}_0(\tau)) \mathbf{X}_1(\tau) = \dot{\mathbf{v}}(\tau) + \mathbf{H}_1 \mathbf{v}(\tau) \quad (14)$$

Elle est de la forme  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , et induit une condition de compatibilité, à savoir que  $\mathbf{b}$  est orthogonal au noyau de l'opérateur adjoint à  $\mathbf{A}$  :  $\mathbf{b} \perp (\ker(\mathbf{A}^*))$ . Plus simplement, nous pouvons obtenir le résultat qu'elle implique en considérant le produit scalaire de (14) par  $\mathbf{v}(\tau)$  :

$$0 = \langle \dot{\mathbf{v}}(\tau) | \mathbf{v}(\tau) \rangle + \langle \mathbf{H}_1 \mathbf{v}(\tau) | \mathbf{v}(\tau) \rangle \quad (15)$$

Si l'on note  $k(\tau) = \sqrt{\beta^2(\tau) + \alpha^2}$ , les trois valeurs propres s'écrivent :

$$\lambda_- = -ik \quad \lambda_z = 0 \quad \lambda_+ = +ik \quad (16)$$

La variation au cours du temps de leurs parties imaginaires est représentée sur la figure 1. Le temps  $\tau_* = \beta_0/\alpha_0$ , où  $k$  est minimum, correspond au point où ces trois valeurs propres sont les plus proches les unes des autres.

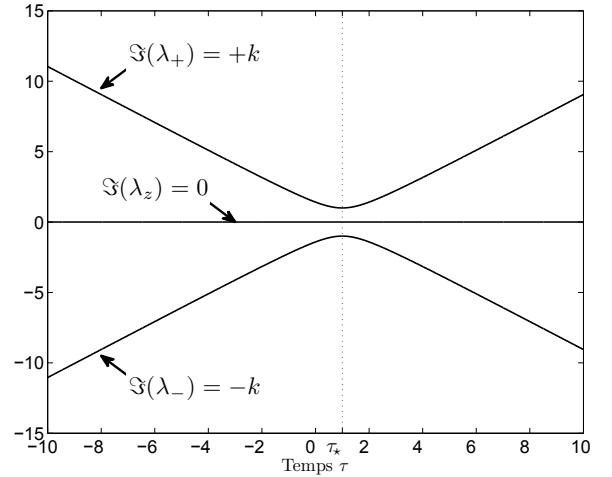


FIGURE 1 – Parties imaginaires des valeurs propres (parties réelles identiquement nulles).  $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$

Les vecteurs propres associés qui vérifient (15) sont respectivement :

$$\mathbf{U}_- = \frac{1}{\sqrt{k}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ +ik \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U}_z = \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U}_+ = \frac{1}{\sqrt{k}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -ik \end{pmatrix} \quad (17)$$

Ils fournissent les solutions WKB à l'ordre 0 de (12) :

$$\boldsymbol{\varphi}_-(\tau) = e^{\int \frac{-ik(\tau)}{\varepsilon} d\tau} \mathbf{U}_-(\tau) \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_z(\tau) = \mathbf{U}_z(\tau) \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_+(\tau) = e^{\int \frac{+ik(\tau)}{\varepsilon} d\tau} \mathbf{U}_+(\tau) \quad (20)$$

Nous distinguerons ainsi un mode et une solution associés à une onde acoustique aller ( $\mathbf{U}_+$ ), une onde acoustique retour ( $\mathbf{U}_-$ ), et une onde de vorticité ( $\mathbf{U}_z$ ).

Ces trois solutions forment une base  $\{\boldsymbol{\varphi}_-; \boldsymbol{\varphi}_z; \boldsymbol{\varphi}_+\}$  orthogonale, sur laquelle il sera intéressant de décomposer la solution, puisque cela nous permettra de séparer les contributions liées à des effets acoustiques de celles liées à des

effets de vorticité. En notant  $Y$  les coordonnées de  $X$  dans cette base :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_- \\ Y_z \\ Y_+ \end{pmatrix} \quad (21)$$

et en définissant la matrice de passage  $\Phi = (\varphi_- \varphi_z \varphi_+)$ , nous avons  $Y = \Phi^{-1}X$ , ou encore :

$$X = Y_- \varphi_- + Y_z \varphi_z + Y_+ \varphi_+ \quad (22)$$

## 4 Intégration numérique

La figure 2, décrit l'évolution en fonction du temps des amplitudes  $|Y_-|$ ,  $|Y_z|$  et  $|Y_+|$ , correspondant à chacun des modes. Nous avons imposé au temps  $\tau_i = -10$  la condition initiale  $X(\tau_i) = \psi_+(\tau_i)$  (mode acoustique + "incident"). Ce résultat a été obtenu par simulation numérique de la solution de (6) avec  $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ .

Ce graphe fait ressortir deux phénomènes importants.

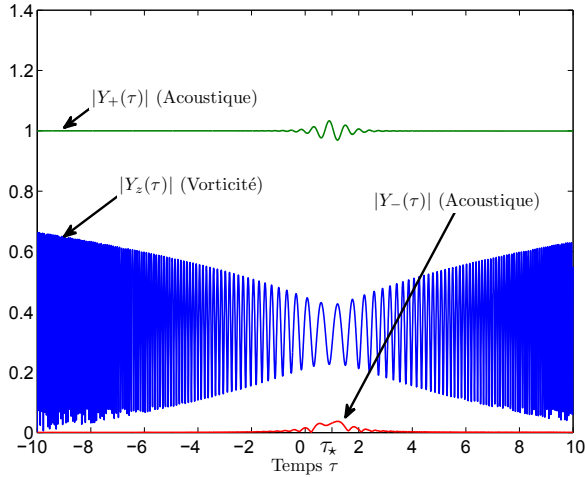


FIGURE 2 – Module des composantes de  $Y(\tau)$ . Résultat obtenu pour les valeurs :  $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ . Condition initiale :  $X(\tau_i) = \psi_+(\tau_i)$ .

Le premier est que, malgré le fait que nous ayons "injecté" un mode acoustique, nous constatons que le mode de vorticité apparaît de façon spontanée, avec une amplitude non négligeable et de fortes oscillations. Ceci suggère le fait qu'une onde acoustique puisse générer, dans une telle situation, de la vorticité.

Le second phénomène est l'existence d'une zone très particulière autour de  $\tau_*$ . Les amplitudes des modes acoustique sont dans un premier temps constantes. L'amplitude du mode +, qui a été excité, reste égale à 1 alors que celle de l'autre mode acoustique reste égale à 0. Mais pendant un court intervalle de temps autour de  $\tau_*$ , le mode + subit quelques oscillations significatives, et le mode - apparaît.

Un zoom sur chacune de ces courbes révélerait (comme nous le verrons plus loin sur la figure 3) que l'amplitude du mode + aura diminué d'un ordre de grandeur bien inférieur à celui des oscillations durant le passage par  $\tau_*$ . Le mode - aura lui gagné en amplitude, dans des ordres de grandeur équivalents. Ces transitions sont d'autant plus importantes que  $\varepsilon$  l'est, et suggère un couplage et un transfert d'énergie entre ces deux modes. Dans le cas présent, ces transitions sont trop faibles pour pouvoir être constatées sur la figure 2.

Enfin, cette zone autour de  $\tau_*$  correspond aussi à la zone où l'amplitude du mode de vorticité oscille le moins.

Il n'est pas surprenant de constater des phénomènes de couplage entre les différents modes autour de  $\tau_*$  puisqu'il s'agit du temps où les valeurs propres sont les plus proches les unes des autres. En revanche, l'apparition soudaine de vorticité est un phénomène plus étonnant, que nous allons tenter d'expliquer plus loin.

## 5 Invariant du système

### 5.1 Quantité conservée par la solution

Il existe, dans ce problème, un paramètre invariant par rapport au temps. En effet si l'on définit :

$$J_\varepsilon(\tau) = \begin{pmatrix} -\beta(\tau) \\ \alpha \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \quad (23)$$

qui est solution de :

$$\varepsilon \frac{d}{d\tau} J_\varepsilon(\tau) = -H^*(\tau) J_\varepsilon(\tau) \quad (24)$$

alors, en dérivant par rapport au temps le produit scalaire de  $J_\varepsilon$  et de  $X$ , et en utilisant les deux équations (6) et (24), nous obtenons :

$$\frac{d}{d\tau} \langle J_\varepsilon(\tau) | X(\tau) \rangle = 0 \quad (25)$$

En conséquence, si nous écrivons  $X$  sous la forme (22), nous pouvons établir que :

$$Y_z - i\varepsilon\sqrt{k} \left( e^{\int \frac{+ik}{\varepsilon}} Y_+ - e^{\int \frac{-ik}{\varepsilon}} Y_- \right) = \text{constante} \quad (26)$$

### 5.2 Création de vorticité à partir du mode acoustique

Supposons les conditions initiales à un temps initial  $\tau_i$  :  $X(\tau_i) = a\varphi_+(\tau_i)$ , i.e.  $Y_-(\tau_i) = Y_z(\tau_i) = 0$  et  $Y_+(\tau_i) = a$ . La valeur du second membre constant de (26) est déduite de cette condition, d'où :

$$|Y_z| = \varepsilon \left| \sqrt{k} e^{\int \frac{+ik}{\varepsilon}} Y_+ - \sqrt{k} e^{\int \frac{-ik}{\varepsilon}} Y_- - a\sqrt{k(\tau_i)} \right| \quad (27)$$

Nous avons vu dans la section 4, pour laquelle nous avons la même situation (avec  $a = 1$  et  $\varepsilon = 0.1$ ), que le mode acoustique  $\varphi_-$  est d'amplitude très faible devant celle de  $\varphi_+$ , qui elle ne varie que peu. Si nous faisons l'hypothèse  $|Y_+(\tau)| \simeq a \gg |Y_-(\tau)|$ , (27) devient :

$$|Y_z| \simeq \varepsilon a \left| \sqrt{k} e^{\int \frac{+ik}{\varepsilon} d\tau} - \sqrt{k(\tau_i)} \right| \quad (28)$$

Cette dernière équation explique le comportement de l'amplitude  $|Y_z|$  du mode de vorticité : il émerge bien de façon spontanée, et oscille autour de la valeur moyenne  $\varepsilon a \sqrt{k(\tau)}$  avec une amplitude modulée par  $\varepsilon a \sqrt{k(\tau)}$ . C'est bien ce que nous avons pu constater sur la figure 2. Il est alors intéressant de voir que cette valeur moyenne dépend de la valeur de  $k$  au temps initial ( donc de  $|\tau_* - \tau_i|$  ), et est proportionnelle à  $\varepsilon$ .

## 6 Base super-adiabatique

Les base super-adiabatiques ont été introduites par Berry [2, 3]. Elles consistent à utiliser les développements asymptotiques des solutions WKB comme vecteurs de base pour projeter la solution d'une équation de Schrödinger.

Berry montre, que le comportement de ces vecteurs est dominé par les effets de singularités présentes dans les équations déterminant les premiers ordres de ces vecteurs. Ces singularités sont les zéros complexes des valeurs propres. Pour des ordres élevés, par des effets d'intégrations successives, elles ont des effets significatifs jusque sur l'axe des réels. Il existe un ordre particulier pour lequel les amplitudes dans la base de cet ordre tendent vers une forme générale, à savoir la fonction d'erreur de Gauss. Au delà de cet ordre, le développement asymptotique commence à diverger.

Nous allons ici tenter d'appliquer cette théorie, et construire les bases super-adiabatiques de notre système.

### 6.1 Theorie

Dans la section 3, nous avons cherché les solutions de

$$\varepsilon \dot{X} = (H_0 + \varepsilon H_1) X \quad (29)$$

sous la forme d'un développement asymptotique sur  $\varepsilon$  :

$$X = e^{\int \frac{\lambda}{\varepsilon}} (X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \dots) \quad (30)$$

La base adiabatique simple qui en a résulté est composée des troncatures à l'ordre 0 de ces solutions :  $\varphi_-$ ,  $\varphi_z$  et  $\varphi_+$ . Mais elles ne sont que les premiers termes des développements à l'ordre  $n$  :  $\psi_-^{(n)}$ ,  $\psi_z^{(n)}$ , et  $\psi_+^{(n)}$ , qui constitueront la base dite super-adiabatique d'ordre  $n$ .

Pour calculer l'expression d'un vecteur super-adiabatique  $\psi^{(n)}$  (associé à la valeur propre  $\lambda$  et au vecteur propre  $U$ ) parmi les trois que nous venons de nommer, il est commode de décomposer les termes correspondant à chaque ordre en  $\varepsilon$  sur la base des vecteurs propres de  $H_0$  :

$$\psi^{(n)} = e^{\int \frac{\lambda}{\varepsilon}} \sum_{m=0}^n \varepsilon^m (c_-^{(m)} U_- + c_z^{(m)} U_z + c_+^{(m)} U_+) \quad (31)$$

Dès lors, nous injectons cette expression dans (29) et identifions les termes de même ordre en  $\varepsilon$ . De plus, pour simplifier les calculs, nous paramétrons  $H_0$  en posant :  $\alpha = k(\tau) \sin(\theta(\tau))$  et  $\beta(\tau) = k(\tau) \cos(\theta(\tau))$ . L'équation qui permet de déterminer les coefficients  $c^{(m)}$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \lambda - \lambda_- & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_z & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda_+ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_-^{(m+1)} \\ c_z^{(m+1)} \\ c_+^{(m+1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{d\tau} & \frac{\sin^2 \theta}{k^{3/2}} & -\frac{\cos \theta \sin \theta}{2} \\ -k^{3/2} & -\frac{d}{d\tau} & -k^{3/2} \\ -\frac{\cos \theta \sin \theta}{2} & \frac{\sin^2 \theta}{k^{3/2}} & -\frac{d}{d\tau} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_-^{(m)} \\ c_z^{(m)} \\ c_+^{(m)} \end{pmatrix} \quad (32)$$

Nous avons bien entendu  $\psi^{(0)} = \varphi$  ce qui fixe les valeurs de départ à  $m = 0$ . Par ailleurs il est supposé qu'à des temps infiniment loin vers le passé, toutes les composantes d'ordre  $m \geq 1$  sont nulles :  $c_-^{(m)}(\tau \rightarrow -\infty) = c_z^{(m)}(\tau \rightarrow -\infty) = c_+^{(m)}(\tau \rightarrow -\infty) = 0 \quad \forall m \geq 1$ .

### 6.2 Calcul des coefficients

L'un des éléments diagonaux de la matrice dans le terme de gauche de (32) est obligatoirement nul. Ainsi, (32) fournit trois équations. Deux d'entre elles déterminent explicitement deux coefficients à un ordre  $m + 1$  en fonction des trois autres à l'ordre  $m$ . La troisième, dont le terme de gauche est nul, relie la dérivée du dernier coefficient aux deux autres coefficients du même ordre. Il est alors possible de calculer chacun des coefficients à n'importe quel ordre, au moins d'un point de vue formel.

En effet, sans difficulté majeure, nous trouvons pour le premier ordres :

Composantes de  $\psi_-^{(m)}$  :

$$c_{-,z}^{(0)} = 1 \quad \text{et} \quad c_{-,z}^{(0)} = c_{-,+}^{(0)} = 0 \quad (33)$$

$$c_{-,+}^{(1)} = -i \frac{\cos^3 \theta}{24\alpha} + i \frac{\cos \theta}{\alpha} - \frac{23i}{24\alpha} \quad (34)$$

$$c_{-,z}^{(1)} = -i\alpha^{1/2} \sin^{-1/2} \theta \quad (35)$$

$$c_{-,+}^{(1)} = -i \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{4\alpha} \quad (36)$$

Composantes de  $\psi_z^{(m)}$  :

$$c_{z,z}^{(0)} = 1 \quad \text{et} \quad c_{z,-}^{(0)} = c_{z,+}^{(0)} = 0 \quad (37)$$

$$c_{z,-}^{(1)} = -i \frac{\sin^{9/2} \theta}{\alpha^{5/2}} \quad (38)$$

$$c_{z,z}^{(1)} = 0 \quad (39)$$

$$c_{z,+}^{(1)} = i \frac{\sin^{9/2} \theta}{\alpha^{5/2}} \quad (40)$$

Composantes de  $\psi_+^{(m)}$  :

$$c_{+,+}^{(0)} = 1 \quad \text{et} \quad c_{+,-}^{(0)} = c_{+,z}^{(0)} = 0 \quad (41)$$

$$c_{+,-}^{(1)} = i \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{4\alpha} \quad (42)$$

$$c_{+,z}^{(1)} = i\alpha^{1/2} \sin^{-1/2} \theta \quad (43)$$

$$c_{+,+}^{(1)} = i \frac{\cos^3 \theta}{24\alpha} - i \frac{\cos \theta}{\alpha} + \frac{23i}{24\alpha} \quad (44)$$

En revanche, les expressions de ces composantes gagnent en complexité très rapidement lorsque l'ordre augmente, et il devient alors fastidieux de les résoudre. Pour cette raison, ce calcul a été effectué au moyen d'un logiciel de calcul formel (*Maxima* version 5.19.2), ce qui permet d'obtenir des expressions analytiques.

De façon analogue à la section 4, nous allons nous intéresser aux composantes de la solution écrite dans ces bases super-adiabatiques :

$$\Psi^{(n)} = (\psi_-^{(n)} \psi_z^{(n)} \psi_+^{(n)}) \quad (45)$$

$$Y^{(n)} = (\Psi^{(n)})^{-1} X \quad (46)$$

On remarquera que l'on a bien l'ordre 0 de notre base super-adiabatique qui n'est autre que la base adiabatique classique :  $\Phi = \Psi^{(0)}$  et  $Y = Y^{(0)}$ .

### 6.3 Résultats

Notre système est un peu différent de celui considéré dans [2, 3], dans la mesure où, dans ces deux articles, le

système est d'ordre deux. Ainsi les résultats de Berry restent à redémontrer pour les équations auxquelles nous sommes confrontés. Ceci n'a, pour l'heure, pas été effectué, et implique une plus grande complexité. En revanche nous proposons ici de voir qu'ils s'appliquent d'un point de vue pratique.

Le zéro complexe de la valeur propre  $ik$  le plus proche de l'axe des réels est  $\tau_c = \beta_0/\alpha_0 \pm i$ . On pourra tout de suite remarquer que les effets de couplage que nous avons pu observer jusqu'à présent avaient lieu autour de la valeur de  $\tau_* = \beta_0/\alpha_0$ , qui d'une part minimise la valeur de  $k(\tau)$ , mais surtout n'est autre que la partie réelle de la singularité  $\tau_c$ .

La figure 3 représente la projection sur les vecteurs super-adiabatiques d'ordres 0, 1 et 5, associés au mode acoustique  $-$ , de la solution exposée sur la figure 2 (mode acoustique  $+$  incident). La courbe pour laquelle  $n = 0$  est la même que celle correspondant à  $|Y_-|$  en bas de la figure 2, mais l'échelle est différente. Nous voyons ici qu'entre le moment où l'on entre dans la zone de transition autour  $\tau_*$  et le moment où l'on en sort, ce mode aura gagné en amplitude.

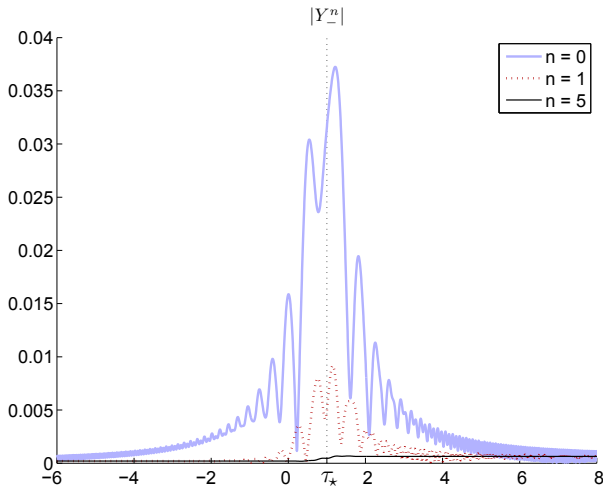


FIGURE 3 – Projection de  $X$  sur  $\psi_-^{\{n\}}$  pour  $n = 0, 1$  et 5. Même configuration que pour la figure 2.

Nous pouvons constater que les itérations successives de l'ordre de la base super-adiabatique utilisée, ont réduit l'ordre de grandeur des oscillations à proximité de  $\tau_*$ , jusqu'à les rendre inférieures à la transition d'amplitude. L'écart d'amplitude entre avant et après la zone de transition est alors bien plus lisible, et la base super-adiabatique semble particulièrement bien adaptée à la description de cette transition.

La figure 4 exhibe les mêmes résultats concernant les vecteurs super-adiabatiques associés au mode de vorticité. Ici, l'effet des bases d'ordre élevé est de supprimer les fortes oscillations d'amplitude, et de laisser une courbe qui semble être constante.

Il convient cependant de noter quelques limitations de cette approche :

Nous n'avons pas pu imposer, dans de très rares cas, les conditions aux limites en  $-\infty$  pour les vecteurs super-adiabatiques. C'est le cas notamment de  $c_{+,z}^{\{1\}}$ .

Berry considère systématiquement des matrices qui correspondent à des Hamiltoniens, elles sont symétriques, et non-dégénérées. Or notre matrice est dégénérée (valeur propre du mode de vorticité).

Enfin, les résultats théoriques que Berry a établis sont à

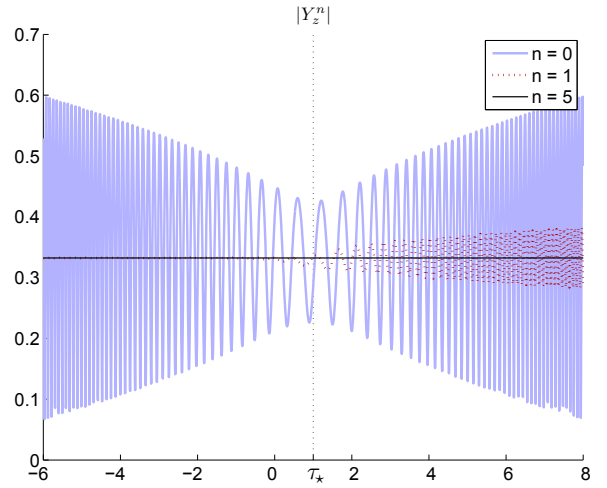


FIGURE 4 – Projections de  $X$  sur  $\psi_z^{\{n\}}$  Ordres 0, 1 et 5.

redémontrer pour notre système d'ordre 3.

## 7 Conclusion

Ce travail constitue une première étape d'une étude sur la propagation d'ondes acoustiques dans des écoulements cisailés, ainsi que des couplages qui peuvent avoir lieu. Nous avons mis en évidence que, pour des valeurs modérées du paramètre  $\varepsilon$ , une onde acoustique génère de la vorticité et crée une onde retour. Dès que de l'acoustique est présent, de la vorticité sera générée de façon immédiate. L'amplitude est proportionnelle à  $\varepsilon$ , et dépend du temps auquel est générée l'onde acoustique.

L'utilisation de bases super-adiabatiques semble très bien adaptée à la description des phénomènes en jeux. En effet, l'utilisation d'une telle base permet de lisser les amplitudes de chaque composante en supprimant les oscillations qui sont à des ordres de grandeurs bien supérieurs aux changements d'amplitude que nous cherchons à étudier. Il reste néanmoins à prouver ce résultat de façon théorique.

Cette étude sur ce type d'écoulement peut constituer un point de départ pour deux développements possibles. Il peut être envisageable d'étudier des écoulements qui ne soient pas nécessairement linéaires mais lentement variables, en approchant localement la description de ces écoulements par celle d'un écoulement linéaire tel que celui traité ici (variation de  $\varepsilon$  lentement selon l'axe  $e_y$ ).

Par ailleurs, il peut aussi être intéressant de se pencher sur un problème plus général ou l'écoulement moyen sera décrit par le produit d'une matrice et des coordonnées de l'espace :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (47)$$

L'intérêt d'une telle approche est qu'elle ouvre la voie à la description de différentes situations. De plus, tout écoulement 2D peut localement être approché de cette manière. Enfin, le caractère linéaire de l'écoulement est conservé, et il est possible d'effectuer un changement de coordonnées convectées d'une manière analogue à ce qui a été fait dans la première section de cette étude.

## Remerciements

Nous remercions le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, ainsi que l'E.D.X., pour l'attribution de la bourse A.M.X. qui finance ce travail dans le cadre de la thèse du premier auteur.

## Références

- [1] GD Chagelishvili. New linear mechanisms of acoustic wave generation in smooth shear flows - (nonmodal study). In Y Auregan, A Maurel, V Pagneux, and JF Pinton, editors, *SOUND-FLOW INTERACTIONS*, volume 586 of *LECTURE NOTES IN PHYSICS*, pages 210–237. SPRINGER-VERLAG BERLIN, 2002.
- [2] M V Berry. Histories of adiabatic quantum transitions. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 429 :61–72, 1990.
- [3] R Lim and M V Berry. Superadiabatic tracking of quantum evolution. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 24(14) :3255–3264, 1991.
- [4] M Elk. Adiabatic transition histories of population transfer in the  $\lambda$  system. *Phys. Rev. A*, 52(5) :4017–4022, 11 1995.