HAL open science

Filtrage optimal, SVD et régularisation en holographie acoustique instantanée

Sébastien Paillasseur, Jean-Hugh Thomas, Jean-Claude Pascal

To cite this version:

Sébastien Paillasseur, Jean-Hugh Thomas, Jean-Claude Pascal. Filtrage optimal, SVD et régularisation en holographie acoustique instantanée. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00546821

HAL Id: hal-00546821

https://hal.science/hal-00546821v1

Submitted on 14 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

10ème **C**ongrès **F**rançais d'**A**coustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Filtrage optimal, SVD et régularisation en holographie acoustique instantanée

Sébastien Paillasseur, Jean-Hugh Thomas, Jean-Claude Pascal

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (UMR-CNRS 6613)

Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans, rue Aristote, 72085 Le Mans cedex 09

spaillasseur@free.fr, {jean-hugh.thomas,jean-claude.pascal}@univ-lemans.fr

L'holographie acoustique temps-réel est une méthode qui permet de reconstruire le champ acoustique rayonné dans le plan des sources continuellement au cours du temps à partir de mesures effectuées dans le champ proche par une antenne de microphones. Cette méthode, qui agit comme si les capteurs acoustiques étaient intégrés au sein même des sources sonores, est basée sur un traitement dans l'espace temps-nombre d'onde. Il met en œuvre un filtrage temporel du spectre de nombre d'onde instantané au niveau de l'antenne de microphones par un filtre inverse dont la réponse impulsionnelle est obtenue par inversion de la réponse impulsionnelle directe d'expression analytique connue. Cette inversion est néanmoins rendue délicate par le caractère mal posé du problème et peut notamment être réalisée par filtrage optimal au sens des moindres carrés à l'aide d'un filtre de Wiener. Une autre solution est l'utilisation d'une décomposition en valeurs singulières couplée à une régularisation de Tikhonov lorsque le produit de convolution dans l'espace temps-nombre d'onde est exprimé par un produit matriciel. L'étude présentée concerne la comparaison des champs acoustiques reconstruits au niveau des sources dans le cas de ces deux techniques d'inversion et en particulier lorsqu'un bruit de mesure vient perturber les données. Des critères objectifs permettent d'évaluer la pertinence de la reconstruction des signaux temporels sur le plan des sources mais aussi du champ acoustique spatial rétro-propagé. Ces critères mesurent la ressemblance des signaux reconstruits avec des signaux de référence. Dans le cas d'une application numérique avec trois sources monopolaires rayonnant des signaux non stationnaires, les résultats obtenus permettent de juger de l'intérêt de la technique employant la régularisation qui est moins sensible au bruit de mesure que la méthode d'inversion par filtrage optimal. L'holographie acoustique temps-réel apparaît ainsi comme un moyen de diagnostiquer au cours du temps l'évolution d'un système générant du bruit.

1 Introduction

L'objectif de la méthode développée dans cette étude, appelée holographie acoustique temps-réel, est de reconstituer en temps continu en tout point d'une grille virtuelle du plan source faisant face à une antenne de microphones, des signaux temporels émis par des sources pouvant être de nature non stationnaire. Cet objectif diffère des travaux de Hald [1], dédiés également aux sources non stationnaires, où il s'agit de reconstruire au cours du temps le champ acoustique rayonné mais pour une fréquence spécifique choisie au préalable. L'information apportée par l'holographie temps-réel se rapproche plutôt des études de Deblauwe et coll. [2], de La Rochefoucauld [3] et de Blais et coll. [4] études qui sont cependant limitées à la reconstruction de signaux transitoires de courte durée. La méthode d'holographie acoustique temps réel fournit au contraire une représentation des sources en temps continu sans limitation de durée [5, 6]. Ceci est rendu possible grâce à la connaissance du spectre de nombre instantané $P(k_x, k_y, z_m, t)$ sur le plan d'acquisition $z = z_m$, spectre qui va être rétropropagé sur le plan $z = z_c$ par un produit de convolution exprimé par l'équation

$$P(k_x, k_y, z_c, t) = P(k_x, k_y, z_m, t) * h^{-1}(k_x, k_y, \Delta z, t), \quad (1)$$

où $\Delta z = z_c - z_m$ (voir figure 1), k_x et k_y sont les nombres d'onde dans les directions x et y alors que h^{-1} désigne l'inverse de la réponse impulsionnelle h décrivant le problème direct : obtenir le spectre de nombre d'onde sur un plan en aval à partir de celui du plan source. Les signaux acoustiques temporelles $p(x, y, z_c, t)$ au niveau du plan de calcul sont finalement obtenus par transformée de Fourier spatiale bi-dimensionnelle inverse des spectres de nombre d'onde $P(k_x, k_y, z_c, t)$ considérés à chaque instant t. La difficulté de la méthode réside dans l'inversion de la réponse impulsionnelle h. Deux pistes sont proposées dans cet article, d'une part une inversion par filtrage optimal au sens des moindres carrés [7], d'autre part une inversion par décomposition en valeurs singulières (SVD) couplée à une régularisation de Tikhonov [8, 9]. Les deux approches sont ensuite expérimentées sur des cas simulés et évaluées par l'intermédiaire d'indicateurs.

2 Inversion de la réponse impulsionnelle directe

Le point de départ de l'étude est la connaissance de la réponse impulsionnelle h. Or on dispose de l'expression analytique de cette réponse qui dépend de la distance de propagation, de k_x, k_y et donc de l'emplacement considéré dans le domaine des nombres d'onde [10, 11]. Néanmoins obtenir une version discrétisée dont les propriétés fréquentielles sont conformes à la théorie n'est pas aisée. Ce problème a été étudié par Grulier qui a expérimenté plusieurs techniques pour échantillonner et filtrer la réponse impulsionnelle analytique [5, 11]. Ces recherches ont montré que suréchantillonner la réponse impulsionnelle analytique, la filtrer à l'aide d'un filtre passe-bas de Chebyshev, puis enfin la décimer de façon à s'accorder à la fréquence d'échantillonnage des signaux acquis par l'antenne, conduit à une réponse dont les caractéristiques fréquentielles sont satisfaisantes. C'est donc cette version discrétisée de la réponse impulsionnelle qui va être utilisée dans la suite de l'étude. Le facteur de suréchantillonnage utilisé est de 8, la fréquence d'échantillonage est $f_e = 16000$ Hz et la fréquence de coupure du filtre de Chebyshev est $f_c = 6400$ Hz.

2.1 Filtrage optimal au sens des moindres carrés

La technique du filtrage optimal au sens des moindres carrés [7] appliquée à la réponse impulsionnelle discrétisée et filtrée h conduit à l'expression du vecteur $\mathbf{h}^{-1}$ de la réponse impulsionnelle inverse conformément à l'équation exprimée sous forme matricielle

$$\mathbf{h}^{-1} = \mathbf{\Phi_h}^{-1}\mathbf{h}^r, \tag{2}$$

où $\mathbf{\Phi_h}$ est la matrice d'autocorrélation de h et $\mathbf{h}^r$ le vecteur de la réponse impulsionnelle retournée [$\mathbf{h}(n) = \mathbf{h}^r(N-1-n)$, $n = 0, N-1$], N étant le nombre d'échantillons de la réponse impulsionnelle.

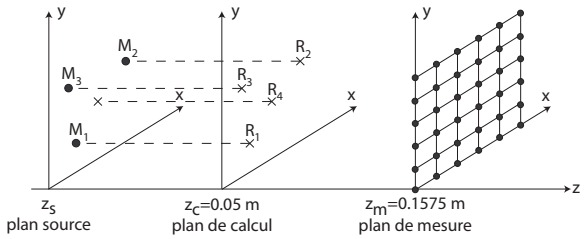

FIG. 1: Configuration du problème : reconstruire le champ de pression sur le plan $z = z_c$ à partir du champ acquis en $z = z_m$ dans le cas de la présence de trois sources non stationnaires simulées en M_1, M_2 et M_3.

2.2 SVD et Régularisation

L'équation du problème direct pour chaque point (k_{x_i}, k_{y_j}) du spectre de nombre d'onde

$$P(k_{x_i}, k_{y_j}, z_m, t) = P(k_{x_i}, k_{y_j}, z_c, t) * h(k_{x_i}, k_{y_j}, \Delta z, t), \tag{3}$$

peut s'exprimer par l'écriture matricielle

$$\begin{bmatrix} P_{i,j}(n_\tau) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ P_{i,j}(N-1) \end{bmatrix}_{z_m} = \begin{bmatrix} h_{i,j}(n_\tau) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ h_{i,j}(N-1) & \cdots & \cdots & \cdots & h_{i,j}(n_\tau) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_{i,j}(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ P_{i,j}(N-1-n_{\tau)} \end{bmatrix}_{z_c}. \tag{4}$$

où n_τ est l'indice correspondant au retard de propagation de l'onde sur la distance Δz. Il s'agit ici de déterminer le spectre de nombre d'onde instantané $P(k_{x_i}, k_{y_j}, z_c, t)$ sur le plan de calcul $z = z_c$ et donc de résoudre un problème du type

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{5}$$

où $\mathbf{y}$ est le vecteur des mesures et $\mathbf{x}$ celui des inconnus. En considérant la fonction de coût à minimiser

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_2^2, \tag{6}$$

contenant un terme d'adéquation de la solution aux données mesurées et une contrainte sur l'énergie de la solution, la solution régularisée de Tikhonov s'exprime [9]

$$\mathbf{x}_\lambda = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \lambda} \frac{\mathbf{u}_n^H \mathbf{y}}{\sigma_n} \mathbf{v}_n, \tag{7}$$

où σ_n, $\mathbf{v}_n$, $\mathbf{u}_n$ représentent respectivement les valeurs singulières, les vecteurs colonnes des matrices singulières obtenues suite à la décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathbf{A}$. ^{H} désigne l'opérateur Hermitien et λ est le paramètre de régularisation qui sera déterminé par la méthode de la validation croisée généralisée [8]. La solution obtenue correspondant au spectre de nombre d'onde instantanée $P(k_{x_i}, k_{y_j}, z_c, t)$ recherché sur le plan de calcul par transformée de Fourier bi-dimensionnelle inverse permet bien de reconstituer le champ de pression rayonné sur le plan de calcul à l'instant t.

3 Résultats

3.1 Configuration de la simulation

Les deux approches pour l'inversion de la réponse impulsionnelle sont testées en simulation à partir d'un plan source constitué de trois monopoles qui rayonnent des signaux non stationnaires (voir figure 1). M_1 et M_2 génèrent des signaux modulés linéairement en fréquence dont les amplitudes sont modulées par une gaussienne. M_3 émet un signal dont la forme est une ondelette de Morlet. L'acquisition des signaux est simulée avec une antenne de 11×11 microphones située à $z_m = 0.1575$m du plan des sources. L'objectif est ici de rétropropager le champ de pression spatial sur le plan $z_c = 0.05$m. Les champs $p\,(x, y, z_c, t)$ reconstruits par les deux méthodes sont comparés entre eux mais également avec des signaux de référence $p_{ref}\,(x, y, z_c, t)$ directement simulés sur le plan $z_c = 0.05$m.

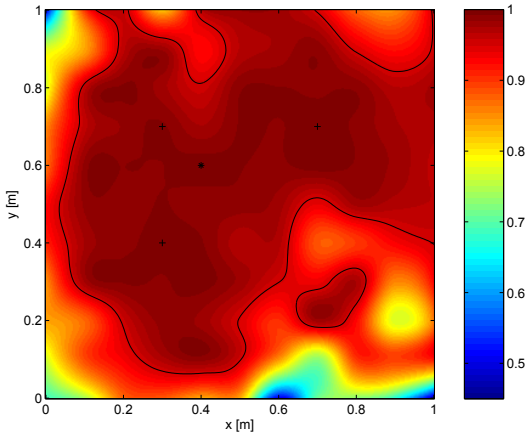

FIG. 2: Cartographie de l'indicateur T_1 sur le plan de calcul après reconstruction des signaux temporels par décomposition en valeurs singulières et régularisation. Le contour correspond à une valeur de T_1 de 0.95. Les positions R_1, R_2, R_3 et R_4 sont indiqués.

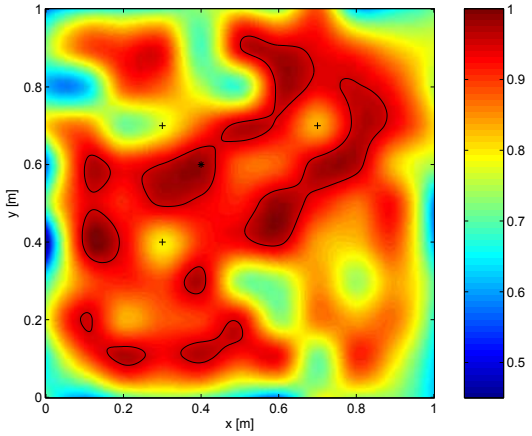

FIG. 3: Cartographie de l'indicateur T_1 sur le plan de calcul après reconstruction des signaux temporels par filtrage optimal au sens des moindres carrés. Le contour correspond à une valeur de T_1 de 0.95. Les positions R_1, R_2, R_3 et R_4 sont indiqués.

3.2 Indicateurs spatiaux

Les indicateurs T_1 et T_2 sont évalués afin de rendre compte de façon objective de la pertinence des résultats. Ils permettent d'évaluer la similarité des signaux temporels reconstruits et des signaux de référence en termes d'amplitude et de déphasage.

$$T_1(x, y) = \frac{< p_{ref}\,(x, y, z_c, t)\, p\,(x, y, z_c, t) >}{\sqrt{< p_{ref}^2\,(x, y, z_c, t) >< p^2\,(x, y, z_c, t) >}}, \quad (8)$$

$$T_2(x, y) = \frac{|p_{ref}^{rms}(x, y, z_c, t) - p^{rms}(x, y, z_c, t)|}{p_{ref}^{rms}(x, y, z_c, t)}, \quad (9)$$

où $p_{ref}^{rms}(x, y, z_c, t)$ et $p^{rms}(x, y, z_c, t)$ sont les pressions efficaces telles que

$$p_{ref}^{rms}(x, y, z_c, t) = \sqrt{< p_{ref}^2(x, y, z_c, t) >}, \quad (10)$$

$$p^{rms}(x, y, z_c, t) = \sqrt{< p^2(x, y, z_c, t) >}. \quad (11)$$

$<>$ désigne une valeur moyennée dans le temps.

T_1 en tant que coefficient de corrélation est représentatif de la similarité entre les formes des signaux temporels et est donc sensible au déphasage entre le signal reconstruit et la référence. T_2 exprime la différence relative entre les valeurs efficaces des deux signaux et donne une information sur la pertinence des niveaux d'amplitude reconstruits. Une reconstruction efficace se traduit par une valeur de T_1 proche de 1 et une valeur de T_2 proche de 0.

Afin d'évaluer la pertinence de la reconstruction sur tout le plan de calcul, ces deux indicateurs sont calculés en tout point de ce plan face aux microphones. Les cartographies des figures 2 à 5 illustrent les valeurs des indicateurs T_1 et T_2 pour une inversion réalisée par SVD suivie d'une régularisation et pour celle utilisant un filtrage optimum. Les lignes de contour sur les figures 2 et 3 correspondent à $T_1 = 0.95$. La zone intérieure correspond donc à $T_1 \geq 0.95$. En ce qui concerne l'indicateur T_1, la méthode avec régularisation donne de bons résultats notamment dans une zone assez étendue en face des sources. La phase des signaux reconstruits semble aussi moins pertinente sur les bords de l'antenne, et ceci pour les deux approches testées mais avec un degré nettement moindre pour l'approche avec SVD et régularisation.

Les figures 4 et 5 qui renseignent sur les valeurs de l'indicateur T_2 sur le plan de calcul mettent en évidence une zone grisée dans laquelles les valeurs sont comprises dans l'intervalle [-0.05 0.05]. La superficie de cette zone est nettement plus importante lorsque l'inversion de la réponse impulsionnelle directe est faite par SVD et régularisation.

L'observation des cartographies spatiales des indicateurs T_1 et T_2 montrent bien l'avantage de l'inversion par décomposition en valeurs singulières suivie d'une régularisation de Tikhonov sur la technique d'inversion par filtrage optimal au sens des moindres carrés.

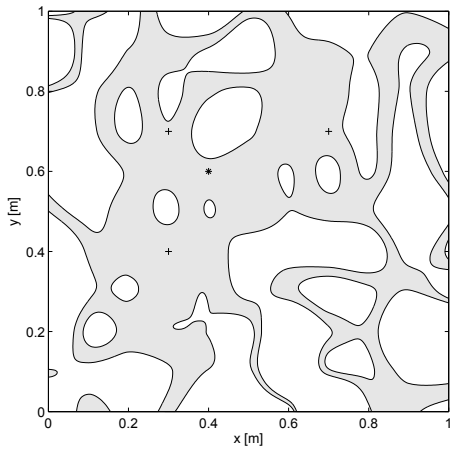

FIG. 4: Cartographie de l'indicateur T_2 sur le plan de calcul après reconstruction des signaux temporels par décomposition en valeurs singulières et régularisation. Les positions R_1, R_2, R_3 et R_4 sont indiqués.

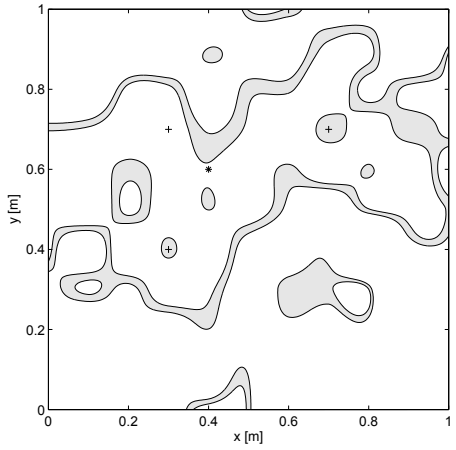

FIG. 5: Cartographie de l'indicateur T_2 sur le plan de calcul après reconstruction des signaux temporels par filtrage optimal au sens des moindres carrés. Les positions R_1, R_2, R_3 et R_4 sont indiqués.

3.3 Influence du bruit de mesure

Les deux méthodes d'inversion de la réponse impulsionnelle ont également été testées en présence d'un bruit de mesure simulé. En effet, le bruit est un paramètre déterminant dans le cadre des problèmes inverses, sa présence intensifiant souvent de façon considérable le caractère mal posé de la situation. Au cours de simulations, un bruit blanc gaussien indépendant a été ajouté aux signaux de pression acquis par les microphones de l'antenne dans le but d'évaluer l'effet régularisant des deux méthodes d'inversion présentées. Deux rapports signal à bruit (RSB) de 3 dB et 10 dB ont été testés. Les signaux de pression rétropropagés sur le plan de calcul à deux emplacements R_2 et R_3 situés en face des sources et à un emplacement R_4 quelconque (voir figure 1), dans le cas plus défavorable d'un RSB de 3 dB, sont présentés sur les figures 6 à 11 pour les deux méthodes d'inversion de la réponse impulsionnelle. A chaque fois figure également un signal de référence pour faciliter la comparaison. Les indicateurs T_1 et T_2 sont calculés au niveau des quatre points R_1, R_2, R_3 et R_4 et reportés dans la table 1. Malgré l'ajout d'un bruit de mesure important, les deux méthodes d'inversion permettent d'obtenir des solutions relativement stables. Les valeurs des indicateurs au niveau des quatre points R_1, R_2, R_3 et R_4 sont en fait proches des valeurs obtenues sans bruit de mesure [6]. La méthode d'inversion basée sur le filtrage optimal semble cependant être plus sensible au bruit de mesure. Ceci peut s'expliquer car la méthode ne prend pas en compte le bruit de mesure lors du calcul du filtre inverse. Lors de la régularisation du processus d'inversion dans la seconde méthode, le signal bruité concourt au contraire à la détermination du paramètre de régularisation.

	Filtrage optimal	SVD+Régularisation
		R_1
T_1	0.759	0.986
T_2	0.078	0.056
		R_2
T_1	0.817	0.987
T_2	0.101	0.070
		R_3
T_1	0.663	0.977
T_2	0.005	0.084
		R_4
T_1	0.652	0.948
T_2	0.691	0.041

TAB. 1: Indicateurs T_1 et T_2 [voir équations (8) et (9)] calculés à partir des signaux de référence et des signaux rétropropagés sur le plan de calcul aux emplacements R_1, R_2, R_3 et R_4 (voir figure 1). Le rapport signal sur bruit de mesure est de 3 dB.

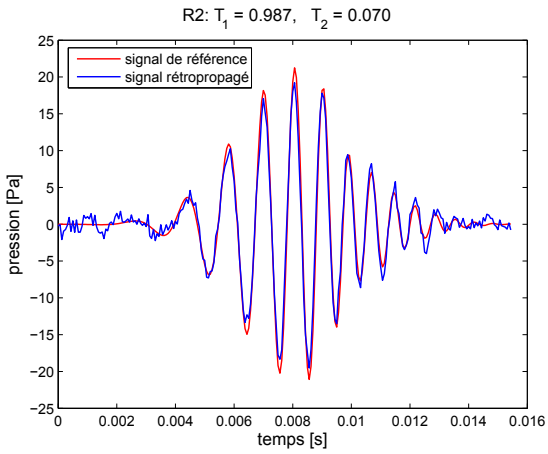

FIG. 6: Signal temporel reconstruit au niveau de R_2 par la méthode basée sur la régularisation (en bleu) et signal de référence (en rouge). Le rapport signal à bruit est de 3 dB.

3.4 Indicateur temporel

Les indicateurs présentés précédemment ont permis d'évaluer la qualité de la reconstruction des signaux temporels pour une position déterminée de l'espace. Les cartographies montrent que la pertinence des reconstructions dépend de l'emplacement considéré. Un nouvel in-

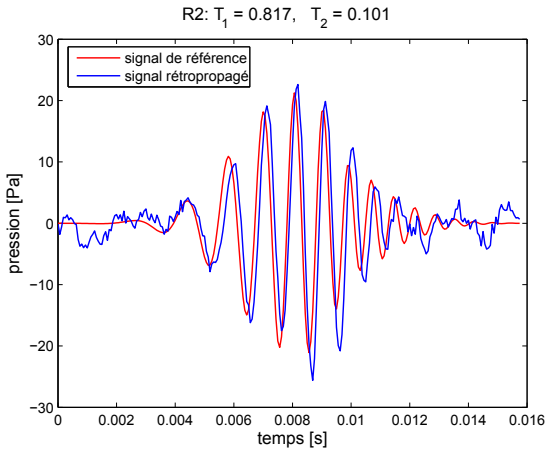

FIG. 7: Signal temporel reconstruit au niveau de R_2 par la méthode basée sur le filtrage inverse de Wiener (en bleu) et signal de référence (en rouge). Le rapport signal à bruit est de 3 dB.

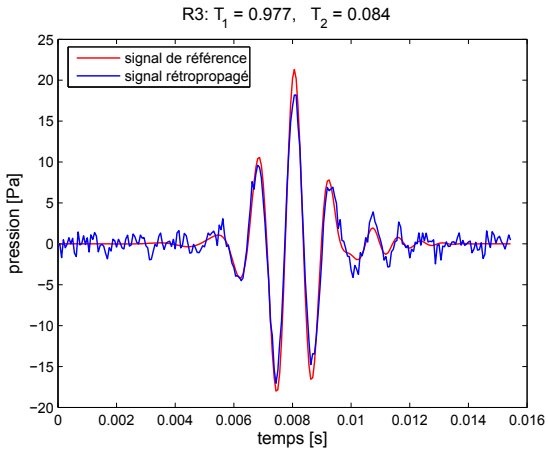

FIG. 8: Signal temporel reconstruit au niveau de R_3 par la méthode basée sur la régularisation (en bleu) et signal de référence (en rouge). Le rapport signal à bruit est de 3 dB.

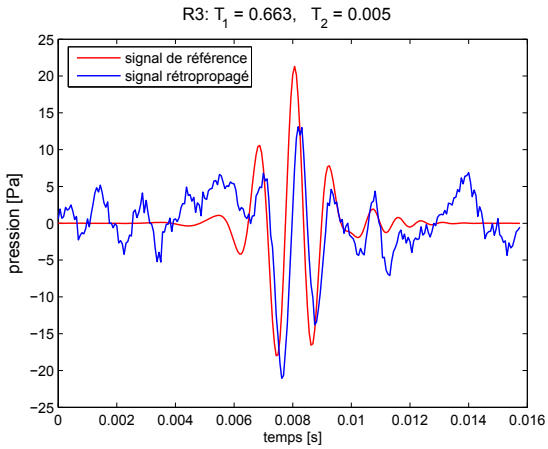

FIG. 9: Signal temporel reconstruit au niveau de R_3 par la méthode basée sur le filtrage inverse de Wiener (en bleu) et signal de référence (en rouge). Le rapport signal à bruit est de 3 dB.

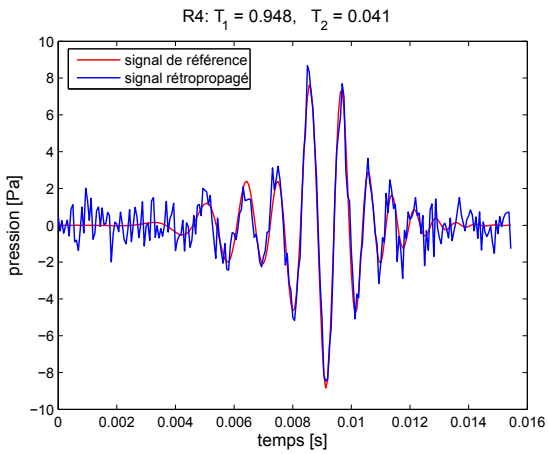

FIG. 10: Signal temporel reconstruit au niveau de R_3 par la méthode basée sur la régularisation (en bleu) et signal de référence (en rouge). Le rapport signal à bruit est de 3 dB.

dicateur est proposé dans le but de juger de la pertinence de la localisation sonore des sources acoustiques au cours du temps. Il s'agit du critère d'erreur spatiale $E_{x,y}(t)$ évalué à chaque instant t.

$$E_{x,y}(t) = \sqrt{< (p_{ref}(x,y,z_c,t) - p(x,y,z_c,t))^2 >}. \quad (12)$$

Il correspond à l'erreur moyennée dans le domaine spatial (plan $z = z_c$ pour tous les x et y) entre le champ de pression spatial de référence $p_{ref}(x,y,z_c,t)$ et le champ de pression spatial rétropropagé $p(x,y,z_c,t)$. L'évolution temporelle de l'erreur $E_{x,y}(t)$ est illustrée aux figures 12 et 13 avec et sans bruit de mesure pour les deux méthodes d'inversion de la réponse impulsionnelle. L'examen des valeurs globales de l'erreur spatiale souligne l'avantage de la méthode d'inversion basée sur la régularisation de Tikhonov par rapport à celle basée sur un filtrage optimal au sens des moindres carrés. Concernant la méthode faisant appel à une régularisation, la présence du bruit de mesure contribue notablement à l'augmentation de l'erreur lorsque les sources acoustiques sont peu actives (à partir de l'instant $t = 0.012$s). La régularisation permet de stabiliser la solution et diminuer le bruit de mesure mais ne le filtre pas entièrement. Lorsque les sources acoustiques rayonnent, le bruit de mesure a peu d'influence sur l'erreur spatiale : la technique de SVD couplée à la régularisation est donc bien adaptée à la résolution du problème inverse présenté ici en présence de bruit de mesure. Au contraire la méthode d'inversion par filtrage optimum est sensible au bruit de mesure d'après l'augmentation de l'erreur spatiale lorsque les sources rayonnent.

4 Conclusion

L'holographie acoustique temps-réel ou holographie acoustique instantanée est une technique d'imagerie de sources acoustiques qui permet de reconstruire en continu les signaux temporels émis à partir du plan des sources comme si le capteur était imbriqué au niveau même des sources. La méthode est particulièrement adaptée à l'étude de signaux dont les ca-

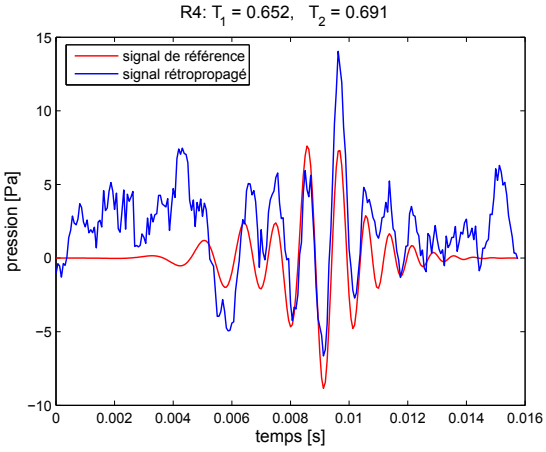

FIG. 11: Signal temporel reconstruit au niveau de R_3 par la méthode basée sur le filtrage inverse de Wiener (en bleu) et signal de référence (en rouge). Le rapport signal à bruit est de 3 dB.

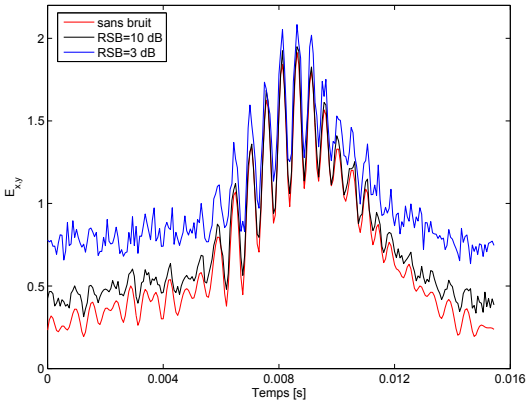

FIG. 12: Influence du bruit de mesure sur l'erreur spatiale $E_{x,y}$ dans le cas de la méthode d'inversion par SVD et régularisation.

ractéristiques sont non stationnaires. Elle est basée sur la convolution dans le temps entre le spectre de nombre d'onde instantanée captée par une antenne de microphones dans le champ proche et une réponse impulsionnelle inverse à déterminer à partir d'une réponse directe donnée, traitée à bon escient. Deux approches ont été présentées pour réaliser l'inversion de cette réponse impulsionnelle directe, inversion qui constitue le point délicat de la méthode. La première approche procède par filtrage optimum au sens des moindres carrés, la seconde par décomposition en valeurs singulières puis régularisation. Les résultats de simulation présentés dans le cas du rayonnement acoustique de trois sources sonores générant des signaux non stationnaires soulignent l'apport de la régularisation dans la précision des signaux reconstruits. De plus l'inversion par décomposition en valeurs singulières couplée à une régularisation de Tikhonov s'est avérée moins sensible au bruit de mesure que l'inversion par filtrage optimum au sens des moindres carrés au regard des indicateurs proposés. Cette méthode de reconstruction continue des signaux acoustiques au cours du temps offre donc des perspectives intéressantes en termes de diagnostic d'un système acoustique.

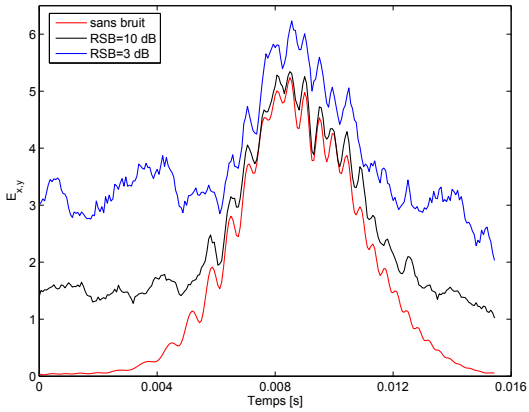

FIG. 13: Influence du bruit de mesure sur l'erreur spatiale $E_{x,y}$ dans le cas de la méthode d'inversion par filtrage optimum au sens des moindres carrés.

Références

[1] Hald J., "Time domain acoustical holography and its applications", *Sound Vib.* 55, 16-25 (2001).

[2] Deblauwe F., Leuridan J., Chauray J.L., Béguet B., "Acoustic holography in transient conditions", proceedings of the Sixth International Congress on Sound and Vibration, Copenagen, Denmark, 899-906 (1999).

[3] La Rochefoucauld 0., "Résolution du problème inverse spatio-temporel en imagerie acoustique de champ proche : Application au rayonnement de sources industrielles instationnaires", *Thèse de l'Université du Maine* (2002).

[4] Blais J.-F., Ross A., "Backward propagation of sound fields radiated by impacted plates using a transient acoustical holography approach", proceedings of Inter-noise, Ottawa, Canada, 916 (2009).

[5] Grulier V., "Propagation directe et inverse dans l'espace temps-nombre d'onde : application à une méthode d'holographie acoustique de champ proche pour les sources non stationnaires", *Thèse de l'Université du Maine* (2005).

[6] Paillasseur S., "Développement de la technique d'holographie acoustique de champ proche temps-réel pour l'analyse de sources de bruit fluctuantes", *Thèse de l'Université du Maine* (2009).

[7] Haykin S., *Adaptive Filter Theory*, New Jersey, Prentice Hall (1996).

[8] Hansen P.C., *Rank-deficient and discrete ill-posed problems*, SIAM, Philadelphia (1998).

[9] Williams E. G., "Regularization methods for near-field acoustical holography", *J. Acoust. Soc. Am.* 110 (4), 1976-1988 (2001).

[10] Forbes M., Letcher S., Stepanishen P., "A wave vector, time-domain method of forward projecting time-dependent pressure fields", *J. Acoust. Soc. Am.* 90 (5), 2782-2792 (1991).

[11] Grulier V., Paillasseur S., Thomas J.-H., Pascal J.-C., Le Roux J.-C., "Forward propagation of time evolving acoustic pressure : Formulation and investigation of the impulse response in time-wavenumber domain", *J. Acoust. Soc. Am.* 126 (5), 2367-2378 (2009).