



HAL
open science

Outils mathématiques utiles à la simulation d'un essai de choc de véhicule

J. P. Mizzi

► **To cite this version:**

J. P. Mizzi. Outils mathématiques utiles à la simulation d'un essai de choc de véhicule. 1994, 49p.
hal-00546542

HAL Id: hal-00546542

<https://hal.science/hal-00546542>

Submitted on 14 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS ET LEUR SECURITE
Département Modélisation Mécanique et Acoustique

**OUTILS MATHÉMATIQUES UTILES
A LA SIMULATION D'UN ESSAI DE CHOC
DE VÉHICULE**

**Subvention de la Région Rhône Alpes notifiée le 6/12/91
n° INRETS 9218-013**

MMA 9207

Novembre 1992

J.P. MIZZI

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : PRINCIPES DE LA MODELISATION	
I - CHOIX DU TYPE DE MODELISATION	2
I.1 - Eléments finis et systèmes multicorps.....	2
I.2 - Les situations à représenter	3
I.3 - Modèles unidirectionnels et bidirectionnels	3
II - DONNEES GEOMETRIQUES ET CINEMATIQUES	4
III - LOIS DE COMPORTEMENT DES LIAISONS DEFORMABLES	5
IV - PROPRIETES DES LIAISONS INDEFORMABLES	7
V- CONSTITUTION DU FICHER MODELE.....	7
CHAPITRE II : MECANIQUE DU MODELE-GENERATEUR D'EQUATIONS	
I - MISE EN EQUATIONS.....	8
I.1 - Formulations classiques	8
I.1.1- Emploi des théorèmes généraux de la mécanique.....	8
I.1.2 - Emploi du principe des travaux virtuels (ou de d'Alembert)	9
I.1.3 - Méthode utilisant les équations de LAGRANGE	9
I.2 - Formulation à l'aide des groupes de LIE [28].....	10
I.3 - Comparaison des différentes méthodes	11
II - LE GROUPE DES DEPLACEMENTS DE L'ESPACE AFFINE EUCLIDIEN - RAPPELS	12
II.1 - Algèbre de Lie du groupe des déplacements D (annexe)	12
II.1.1 - Généralités	12
II.1.2 - Choix d'une base de l'algèbre de LIE Δ	13
II.1.3 - Changement de base dans l'algèbre de LIE Δ	14
III - MECANIQUE DES SYSTEMES DE CORPS RIGIDES PAR LES GROUPES DE LIE.....	15
III.1 - Cinématique du mouvement.....	15
III.2 - Cinétique et dynamique du mouvement.....	17
III.3 - Résolution des équations du mouvement du système.....	18

IV - CREATION D'UN LOGICIEL DE SIMULATION DU MOUVEMENT D'UN SYSTEME MULTICORPS	22
IV.1 - Logiciel de génération automatique des équations du mouvement.....	22
IV.1.1 - Objectifs	22
IV.1.2 - Choix dans l'application de la méthode.....	22
IV.1.3 - Organisation du programme.....	25
IV.1.4 - Limitation du logiciel	25
IV.2 - Exemples de validation.....	26
IV.2.1 - Modèle faisant intervenir une liaison rotule.....	26
IV.2.2 - Modèle faisant intervenir une liaison plan sur plan	27
IV.2.3 - Modèle faisant intervenir des liaisons déformables.....	28
IV.2.4 - Solides de révolution.....	30
 CONCLUSION.....	 33
ANNEXE.....	34
BIBLIOGRAPHIE.....	46

INTRODUCTION

La sécurité primaire se préoccupe de la prévention des accidents. La sécurité secondaire met en jeu des connaissances dans divers domaines :

- l'accidentologie
- la biomécanique (tolérances humaines)
- les systèmes de retenue pour les passagers des véhicules
- le comportement des structures automobiles au choc
- le comportement des systèmes routiers de sécurité.

Pour ce qui est des deux derniers thèmes, l'INRETS* effectue depuis de nombreuses années des études expérimentales. Elles sont coûteuses. Ainsi, une recherche a été engagée sur la modélisation mathématique du véhicule lors d'un choc frontal. Le modèle théorique ainsi défini permettrait de compléter les résultats obtenus par l'expérience.

La modélisation mathématique doit répondre à un double objectif :

- reconstituer le champ de décélération à l'intérieur de l'habitacle d'un véhicule afin de fournir des données d'entrée aux études sur l'occupant,
- connaître le comportement cinématique et structural d'un véhicule au droit d'un obstacle rigide ou déformable.

Nous avons retenu pour l'élaboration d'un modèle, le principe d'une représentation par un système "corps-éléments de liaison". Un des soucis premiers est de rendre son exploitation informatique souple et rapide étant donné la grande variabilité des données d'entrée. La formation des équations de la mécanique se fait en utilisant la propriété de groupe de LIE du groupe des déplacements de l'espace affine euclidien. Elle est faite automatiquement à partir d'un générateur d'équations symboliques que nous avons conçu. La méthodologie est illustrée par des modèles de complexité croissante.

La complexité des liaisons mécaniques qui entrent en jeu ne permet qu'une connaissance a priori approchée des valeurs numériques de leurs paramètres descriptifs. Par contre les valeurs les moins fiables peuvent être précisées en utilisant les résultats effectifs des mesures obtenues lors des expérimentations de choc. Il s'agit alors de compléter la modélisation directe par des procédures d'identification et de recalage. Nous nous sommes engagés dans cette démarche avec l'Ecole Centrale de Lyon.

* INRETS - Institut National de Recherche sur les Transports et leur Sécurité - 109, avenue Salvador Allende - Case 24 - 69675 Bron Cédex - France

CHAPITRE I

PRINCIPES DE LA MODELISATION

I - CHOIX DU TYPE DE MODELISATION

I.1 - Eléments finis et systèmes multicorps

Deux manières de modéliser un véhicule peuvent être envisagées :

- la modélisation par la méthode des éléments finis
- la modélisation par la méthode corps-éléments de liaison.

La méthode des éléments finis a permis d'appréhender et de résoudre, avec l'appui de systèmes informatiques de plus en plus performants, des problèmes qui étaient jusque là restés sans solution mathématique analytique. Elle figure maintenant, parmi les méthodes de calcul des structures de véhicules [21, 22]. Elle nécessite cependant non seulement des temps de calcul importants même avec du matériel sophistiqué mais aussi des temps bien plus importants pour concevoir et réaliser le maillage du véhicule. La finalité d'une telle approche est de pouvoir prédire le comportement d'une structure dans ses moindres détails, et de savoir si, pour des systèmes de sollicitations données, il s'avère nécessaire de renforcer ou de transformer telle ou telle pièce.

La seconde méthode est basée sur le fait que lors d'un essai de collision frontale pour des vitesses modérées, la structure avant du véhicule se déforme de manière plastique alors que l'habitacle ne présente que de faibles déformations permanentes. De cette première observation, il vient que le véhicule peut être décomposé en deux parties distinctes :

- la structure avant à déformation plastique
- l'habitacle à déformation élastique.

De plus, les divers éléments constitutifs de la structure avant ne jouent pas le même rôle lors d'une collision. En effet, certains se déforment fortement alors que d'autres se comportent pratiquement en solides rigides. Nous pouvons remarquer que les éléments qui se déforment ont une faible masse alors que ceux qui ne se déforment pas ont des masses importantes. Ces remarques permettent alors de dire que l'avant d'un véhicule peut être représenté par un système de corps rigides et de liaisons (éléments se déformant). Un corps ou une liaison du modèle peut représenter plusieurs composants de la structure réelle. A la différence de la méthode des éléments finis, cette approche donne

des informations en des points particuliers de la structure (les corps du modèle), les autres éléments disparaissent derrière les lois de comportement des liaisons. Le modèle ainsi réalisé avec peu de degrés de liberté ne donnera pas d'informations détaillées sur le comportement des éléments de structure, mais permet de viser une connaissance correcte du comportement cinématique global.

I.2 - Les situations à représenter

Le modèle devra être suffisamment souple et évolutif pour pouvoir s'adapter rapidement à des conceptions de véhicules variées. C'est pour cela que la représentation corps-éléments de liaison nous paraît la mieux adaptée au problème que nous avons à traiter.

Une connaissance aussi complète que possible des phénomènes qui interviennent dans les accidents est nécessaire. Pour que les études expérimentales représentent le plus fidèlement la réalité, de nombreuses études accidentologiques ont été développées. Dans le cadre de la sécurité secondaire, l'objectif est de garantir un niveau de protection suffisant dans la plupart des configurations d'accidents. Parmi l'ensemble des accidents automobiles répertoriés chaque année, la grande majorité correspond à des chocs frontaux (55 % des automobilistes tués le sont à la suite d'un tel choc). Cependant, il ressort qu'il n'existe pas un seul type d'impact frontal mais plusieurs [29]. Cette répartition vient essentiellement de la façon dont les longerons et le bloc motopropulseur sont sollicités. Cette sollicitation dépend de la configuration géométrique du recouvrement entre les deux véhicules ou entre le véhicule et l'obstacle et de la violence de l'impact. Une seule configuration de test ne peut répondre à toutes les occurrences d'accidents réels. Le modèle devra donc pouvoir s'intéresser à au moins trois configurations d'essais différentes :

- choc frontal orthogonal (inclinaison 0°)
- choc frontal sur mur biais (inclinaison de l'ordre de 30°)
- choc sur mur décalé n'intéressant qu'un côté de véhicule.

La trajectoire d'un véhicule quel que soit la configuration d'essai choisie a un mouvement tridimensionnel plus ou moins marqué. C'est pourquoi le modèle intégrera les mouvements de solides dans l'espace soumis à des sollicitations extérieures de toute nature.

I. 3 - Modèles unidirectionnels et bidirectionnels

Il existe deux grands types de modèles :

- modèles unidirectionnels
- modèles bidirectionnels.

Dans le cadre du premier type, de nombreux auteurs se sont déjà penchés sur le problème de la modélisation de l'avant d'un véhicule, soumis à un choc contre un mur orthogonal. La plupart de ces études ont été effectuées aux U.S.A. où la conception des véhicules est totalement différente de celle des européens et en particulier des français. En effet, la plupart des véhicules de leur parc automobile sont à propulsion. Sur ces véhicules, le compartiment avant absorbe moins d'énergie et le report d'effort vers le reste de la structure par l'arbre de transmission joue un rôle essentiel.

Un modèle représentatif d'une voirure américaine type est composé d'un châssis sur lequel est montée une carrosserie et une propulsion. Ce genre de représentation n'est plus adapté avec l'arrivée du concept de la carrosserie autoporteuse. La RNUR [18] a étudié la modélisation de l'avant d'une R12. Ce modèle fut repris et mis à jour avec une R14 dans le cadre d'une étude de collision d'un véhicule léger contre un poids lourd.

Ce type de modèle a été aussi utilisé dans le cadre d'une simulation sur un mur à 30° , en considérant que dans une première phase du choc, tous les corps avaient un mouvement unidirectionnel. Au vu des essais on constate que le mouvement des éléments constitutifs du bloc avant ne peut se faire dans une seule direction ne serait-ce que pour créer un mouvement rectiligne de l'habitacle.

Très peu d'études ont été faites sur le deuxième type. L'une d'entre elles [26] a montré l'influence de la complexité du modèle sur les résultats obtenus. Un modèle comportant un seul corps et plusieurs liaisons semble suffisant pour représenter le seul déplacement de l'habitacle. Par contre pour restituer les vitesses et les accélérations plusieurs corps sont nécessaires ; mais pour un nombre de corps donnés, l'ajustement à l'expérience se détériore quand le nombre de liaisons augmente. Ceci provient du fait d'inexactitudes dans les lois de comportement de ces liaisons. L'étude a aussi porté sur l'influence des éléments transversaux et la valeur de la friction entre le mur et le véhicule en fonction du sens de rotation lors d'un choc dans une configuration de mur à 30° .

II - DONNEES GEOMETRIQUES ET CINEMATIQUES

Les informations d'entrée nécessaires au traitement du problème sont de deux ordres :

- les données géométriques et cinématiques des corps et des liaisons qui peuvent être quantifiées assez facilement,
- les données concernant le comportement mécanique des liaisons, dont la détermination nécessite une étude plus approfondie. Cela sera traité dans les paragraphes III et IV.

La connaissance de la géométrie du compartiment avant du véhicule, des conditions cinématiques initiales et du type d'essai de choc nous permet d'effectuer la décomposition en corps et en liaisons et donc de construire le modèle correspondant.

Chaque corps, considéré comme un solide rigide est caractérisé par sa masse, son tenseur d'inertie, sa position et son orientation et sa cinématique.

Nous avons considéré deux types de liaisons. Des liaisons de contact parfaites ou pas qui permettent un mouvement relatif d'un corps par rapport à l'autre qui sont alors définies par leur point d'application et leur type.

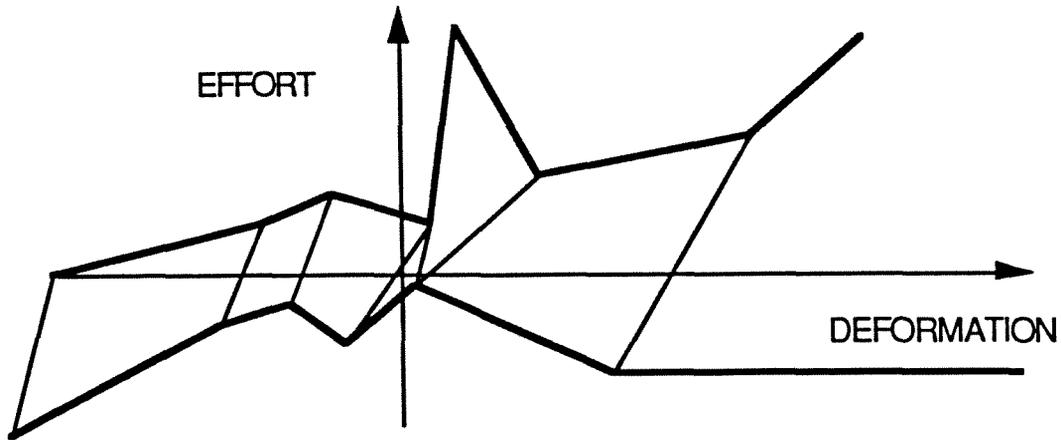
Les liaisons déformables sont définies par la donnée de la position de leurs points d'application entre les différents corps du modèle.

III - LOIS DE COMPORTEMENT DES LIAISONS DEFORMABLES

Dans le cas d'un essai de choc, ce sont les liaisons déformables qui jouent un rôle prépondérant. Etant donné le grand nombre de pièces constitutives du véhicule, il n'est pas envisageable de définir une liaison pour chaque élément. Le système auquel nous aboutirions serait d'une trop grande complexité. C'est pourquoi, par convention, une liaison devra pouvoir représenter un ensemble de pièces réelles dans la plupart des cas. C'est ainsi que la loi de comportement devra rendre compte de cet assemblage quelque peu artificiel. Elle mettra alors en évidence les jeux éventuels, les phénomènes de flambage d'un ou plusieurs éléments et les cycles de charge-décharge.

Pratiquement, nous nous sommes intéressés à un type particulier de liaisons que nous appellerons liaisons unidimensionnelles. Elles sont caractérisées par le fait qu'elles ne reprennent que des efforts selon la direction définie par le vecteur de leurs points d'application et leurs lois seront linéarisées par rapport aux déformations.

La linéarisation permet de rendre compte de plusieurs phénomènes. La courbe de compression plastique est représentée par plusieurs segments ce qui autorise l'introduction du flambement dans un élément. L'élasticité reste variable suivant la déformation atteinte. Le fait que les lois peuvent présenter deux pentes élastiques permet de simuler la présence de deux éléments en parallèle de longueur différente. Une déformation plastique et une absorption d'énergie sont toujours possibles (figure I.1). Il est également possible de simuler la rupture de certaines pièces. D'autre part, certains éléments peuvent subir non seulement des efforts de compression mais aussi de traction, c'est pourquoi il est nécessaire d'introduire des lois permettant de rendre compte de ces cycles de charge-décharge. Des boucles sont alors décrites sur les diagrammes des lois et l'énergie dissipée à chaque cycle correspond à la surface de la boucle.



TRACTION - COMPRESSION

Figure 1.1

L'avantage d'une telle représentation est qu'elle permet de bien représenter la plupart des phénomènes physiques d'un élément mécanique à géométrie complexe et d'avoir une seule loi pour le caractériser au lieu de nombreux éléments plus simples mis en série ou en parallèle. L'inconvénient de cette représentation est la détermination effective des paramètres qui nécessite un savoir-faire et des moyens expérimentaux importants.

D'autre part, il est nécessaire de prendre en compte une correction dynamique de l'effort dans le cas où la loi de comportement est déterminée à partir du quasi-statique. Ceci se fait en introduisant implicitement un amortissement de type visqueux. La relation empirique utilisée pour passer d'une force statique mesurée ou calculée à une force dynamique à un instant quelconque de l'impact est du type :

$$F_{\text{dynamique}} = F_{\text{statique}} f\left(\frac{\dot{d}_e}{V_0}\right) \quad (1.2)$$

où \dot{d}_e est la vitesse de déformation instantanée de l'élément
 V_0 est la vitesse de référence de l'enfoncement quasi-statique

Plusieurs types de fonction f ont été proposées notamment dans des comptes rendus américains d'expérience. Pour une vitesse instantanée d'enfoncement de 50 km/h, l'effort dynamique peut être supérieur à 1,2 fois l'effort statique. Le phénomène de vitesse amplifie les efforts tant à la compression qu'à la traction. Il s'avère qu'une correction linéaire permet une bonne représentation de la réalité.

$$f\left(\frac{\dot{d}_e}{V_0}\right) = 1 + 0.016 \frac{|\dot{d}_e|}{V_0} \quad (1.3)$$

IV - PROPRIETES DES LIAISONS INDEFORMABLES

Ces liaisons représentent des liaisons de contact. Les mécaniciens ont introduit des types de liaisons qui définissent la géométrie du contact et la mobilité relative que ce contact autorise. En ce qui nous concerne, nous nous intéresserons aux liaisons, glissière hélicoïdale, glissière, pivot, cylindre, rotule et plane. Elles permettent de rendre compte de tous les phénomènes que nous allons rencontrer.

Une liaison passive entre deux corps est parfaite si quel que soit le mouvement relatif d'un corps par rapport à l'autre, la puissance développée par les réactions mutuelles est nulle. En général, la liaison parfaite traduit soit l'absence de frottement, soit le non glissement (roulement pur). Lorsque l'hypothèse des liaisons parfaites ne peut être retenue, une bonne traduction mathématique des phénomènes suppose la prise en compte des déformations des solides en contact. Toutefois on peut modéliser de façon approximative des liaisons non parfaites en conservant l'hypothèse de corps rigides si l'on adopte les lois classiques du frottement dites "lois de Coulomb".

Il convient de noter que les trois types de liaisons à un degré de liberté (c'est-à-dire les liaisons pivot, glissière et hélicoïdale) permettraient de rendre compte de toutes liaisons géométriques qui deviennent décomposables en plusieurs liaisons à un degré de liberté disposées en série après avoir introduit des corps fictifs de masse nulle. Cependant, pour des questions d'habitudes, nous avons introduit quand même des liaisons cylindres, rotules et planes.

V - CONSTITUTION DU FICHER MODELE

Il faut définir des entités qui seront considérées comme les corps du modèle. En effet, ils peuvent être le résultat de l'assemblage de plusieurs pièces rigides du véhicule. Par exemple, le groupe motopropulseur qui en général représente un élément dans le modèle est composé effectivement du moteur proprement dit et de la boîte de vitesse qui suivant le type de conception du véhicule peut se situer à divers endroits par rapport au moteur.

On doit de la même manière définir les caractéristiques géométriques et mécaniques des liaisons. Celles-ci sont classées en deux types suivant qu'elles sont déformables ou pas.

Les positions des points d'application précédemment définis sont exprimées par rapport aux repères propres des solides.

CHAPITRE II

MECANIQUE DU MODELE- GENERATEUR D'EQUATIONS

En ce qui concerne la modélisation physique du véhicule et de l'obstacle, le choix principal qui a été fait est de considérer que toutes les interactions entre corps s'effectuent par l'intermédiaire de liaisons. L'avantage de cette approche est sa simplicité : les interactions corps-corps ou corps-obstacles sont toutes décrites de manière similaire. Connaissant alors les caractéristiques géométriques cinématiques et inertielles des corps, géométriques et mécaniques des liaisons, nous sommes en mesure d'écrire les équations du mouvement du système.

Cependant l'obstacle joue un rôle particulier. D'un point de vue cinématique il peut soit être fixe et les liaisons avec les autres corps imposent des conditions aux mouvements de ces derniers, soit mobile et les liaisons déterminent les mouvements relatifs avec les autres corps. Plus généralement, rien n'empêche de considérer le graphe correspondant à l'ensemble des corps et des liaisons d'un modèle comme la réunion de deux graphes provenant de deux modèles de véhicules et donc de résoudre le problème de l'impact de ces deux véhicules.

I - MISE EN EQUATIONS

I.1 - Formulations classiques

Il existe un nombre important de méthodes pour établir les équations d'un système multicorps. L'objectif de ce paragraphe n'est pas de réaliser une étude exhaustive mais de présenter les principaux types de méthodes. Nous n'évoquerons cependant pas les équations de HAMILTON, car elles ne semblent pas avoir débouché sur des applications pratiques. Cependant, elles restent une technique utilisable.

1.1.1- Emploi des théorèmes généraux de la mécanique

Cette méthode de formation des équations du mouvement d'un système repose sur l'application aux corps du système

- . du théorème de la quantité de mouvement
- . du théorème du moment cinétique
- . du principe de l'action et de la réaction et des lois physiques concernant les efforts de liaison

Les deux premiers théorèmes expriment la loi fondamentale de la dynamique pour un solide non ponctuel.

Dans une première étape, on applique les deux premiers théorèmes à chaque solide. Ensuite on élimine les inconnues de liaison. Il s'avère que l'étape d'élimination des inconnues de liaison pose des problèmes. Par exemple, on ne peut traiter facilement des systèmes présentant des boucles.

L'intérêt de la méthode développée par KRIEG [23] est d'utiliser le principe de JOURDAIN qui permet d'éliminer facilement les inconnues de liaison et cela pour un graphe quelconque. Cette méthode est une version améliorée de l'emploi des théorèmes généraux.

1.1.2 - Emploi du principe des travaux virtuels (ou de D'ALEMBERT)

Cette méthode consiste à exprimer que la somme des travaux élémentaires pour un déplacement cinématiquement admissible est nulle. Elle a été appliquée entre autres par WITTENBURG [17].

Au cours d'un déplacement virtuel compatible avec les liaisons, le travail virtuel effectué par les forces et couples extérieurs et d'inertie et par les forces et couples intérieurs est nul. Le point avantageux de cette méthode c'est qu'elle évite l'élimination des inconnus de liaison.

1.1.3 - Méthode utilisant les équations de LAGRANGE

Cette méthode, assez proche de la précédente, se déduit du principe des puissances virtuelles. Les équations se présentent sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (1.4)$$

où L est le lagrangien du système (différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système) et les Q_i sont les forces généralisées ne dérivant pas d'une fonction potentielle (par exemple les frottements).

L'intérêt de cette méthode est d'écrire directement les équations en fonction des grandeurs de commande du système et d'éviter l'élimination des inconnues de liaison. Son inconvénient est de nécessiter le calcul d'une part de l'énergie cinétique et potentielle et d'autre part le calcul des dérivées partielles de la fonction de LAGRANGE.

Très schématiquement, on peut dire que les méthodes classiques décrivent les vitesses du solide dans R^3 (il est alors nécessaire de considérer le vecteur rotation et le vecteur vitesse en un point). Une méthode originale est fondée sur l'emploi des groupes de LIE. Elle décrit les vitesses du solide dans un espace de dimension 6 (espace tangent

au groupe des déplacements) adapté à la cinématique du solide. On réalise ainsi une synthèse hexadimensionnelle des différentes grandeurs vectorielles et des équations.

I.2 - Formulation à l'aide des groupes de LIE [28]

Cette méthode est d'une approche très différente des précédentes mais présente par certains aspects une similitude avec l'utilisation des théorèmes généraux. On écrit les mêmes équations pour chaque corps, mais dans un espace de dimension 6 et sous une forme lagrangienne contrairement aux théorèmes généraux qui utilisent une description eulérienne. Elle fait appel à des notions mathématiques très abstraites de calcul différentiel et peu connues des ingénieurs. Les recherches effectuées en géométrie différentielle permettent de faire une synthèse des aspects algébriques et différentiels de la dynamique du solide et définissent des opérations sur des variétés ou des espaces vectoriels de dimension 6. L'élimination des réactions inconnues se produisant dans les liaisons est réalisée par des calculs algébriques. (Les éléments apparaissant dans les équations sont des endomorphismes des applications bilinéaires ou des formes linéaires). Cette méthode bien qu'utilisant des notions mathématiques abstraites se prête bien à une application informatique. On peut, en effet, séparer les étapes du calcul de façon claire et la formation des équations ne comporte que des opérations algébriques élémentaires. Le calcul entre autres ne nécessite pas de dérivation.

CHEVALLIER [28] en décrit les fondements par trois principes :

- User de la géométrie différentielle intrinsèque pour décrire les positions des solides indépendamment de tout choix de coordonnées et exprimer la cinématique du solide rigide sous la forme la plus condensée.
- Etudier dans le cadre précédent les propriétés géométriques des liaisons et la cinématique des systèmes de corps astreints à ces liaisons.
- Exprimer la cinétique et la théorie de l'inertie du solide rigide dans le cadre géométrique introduit pour la cinématique.

D'une façon générale, une position d'un solide dans l'espace est définie par un déplacement par rapport à une configuration de référence et les déplacements du solide sont les nouvelles inconnues du problème.

Le groupe des déplacements de par ses propriétés de différentiabilité est un groupe de LIE et on utilise ces propriétés. Les vitesses deviennent alors des éléments de l'espace tangent au groupe des déplacements.

I.3 - Comparaison des différentes méthodes

Les méthodes les plus intéressantes semblent celles utilisant les équations de LAGRANGE et le principe des travaux virtuels, puisque les inconnues de liaison sont éliminées dès le départ. Par contre, les méthodes utilisant les principes généraux ne permettent pas une élimination aisée de ces inconnues.

Cependant, en y regardant de plus près, on s'aperçoit que le classement n'est pas aussi facile. Le problème des graphes complexes est à l'origine des difficultés dans l'élimination des inconnues de liaison lors de l'utilisation des théorèmes généraux. Ils nécessitent l'utilisation de multiplicateurs de LAGRANGE quand on utilise la méthode des travaux virtuels. La difficulté de traitement se retrouve alors à une étape ultérieure.

La méthode appliquant le formalisme des groupes de LIE est particulière. En effet, on peut tout autant l'adapter à la méthode des théorèmes généraux qu'à celle de D'ALEMBERT. Le principe des puissances virtuelles est choisi pour supprimer l'arbitraire des coupures dans les boucles des graphes et par voie de conséquence l'introduction des multiplicateurs de LAGRANGE. Toutes les méthodes classiques nécessitent du calcul de dérivées, qui se ramène dans tous les cas à du calcul de dérivées partielles. En revanche, cette méthode ne le nécessite pas ; c'est pourquoi cela peut devenir réalisable naturellement et simplement par un ordinateur. Le calcul d'une dérivée demanderait quant à elle un apprentissage des règles de dérivation.

L'avantage final de ce type de méthode est qu'il permet un calcul analytique totalement intrinsèque dans l'espace vectoriel des torseurs et ramène donc tout le calcul différentiel à des opérations algébriques.

II - LE GROUPE DES DEPLACEMENTS DE L'ESPACE AFFINE EUCLIDIEN - RAPPELS

II.1 - Algèbre de Lie du groupe des déplacements D (annexe)

II.1.1 - Généralités

\mathcal{E} l'espace affine euclidien

E l'espace vectoriel des vecteurs de \mathcal{E}

\wedge le produit vectoriel

Un champ équiprojectif X est une application : $\mathcal{E} \rightarrow E$ telle que

$$\forall m, p \in \mathcal{E} \quad X(p) = X(m) + n_x \wedge mp \quad (1.5)$$

Les champs de vitesse et de force appliqués à un solide sont des champs équiprojectifs. Ces champs sont alors parfaitement définis par la donnée de la valeur en un point et d'un vecteur. On peut donc appliquer la théorie des torseurs.

On montre alors que l'espace vectoriel des champs équiprojectifs sur l'espace affine euclidien est isomorphe à l'algèbre de LIE Δ qui est l'espace tangent en l'élément neutre du groupe des déplacements D munie du crochet de LIE comme loi produit.

$$\forall X, Y \in \Delta, \forall m \in \mathcal{E} \quad [X, Y](m) = n_x \wedge Y(m) - n_y \wedge X(m) \quad (1.6)$$

On appellera application linéaire adjointe de X et on la notera par $\text{ad } X$ l'application linéaire : $Y \mapsto [X, Y]$ de Δ dans Δ .

D'autre part, on nommera représentation adjointe de D, l'application :

$$y \in D \Rightarrow \text{Ad } y \in \text{Aut } \Delta \text{ (automorphismes de } \Delta)$$

$$\text{où } d(\text{Ad}) = \text{ad}$$

On montre également qu'il existe une application exponentielle qui permette d'écrire le groupe des rotations d'axe donné, celui des translations dans une direction donnée et celui des vissages d'axe et de pas donné en fonction d'un paramètre. On les appelle alors des groupes à un paramètre.

Soit Ω un élément du groupe spécial orthogonal $\text{SO}(E)$ de l'espace vectoriel E associé à l'espace affine euclidien \mathcal{E} .

Dans une base orthonormée quelconque Ω s'écrit sous forme matricielle :

$$\Omega = I_3 \cos\theta + \underline{u} \underline{u}^t (1 - \cos\theta) + [\check{u}] \sin\theta \quad (1.7)$$

C'est la rotation d'angle θ et de vecteur unitaire u .

I_3 représente la matrice identité de dimension 3
 $[u]$ la matrice antisymétrique associée à \underline{u}

$$\text{On peut noter que : } \Omega^{-1} = I_3 \cos\theta + \underline{u} \underline{u}^t (1 - \cos\theta) - [\check{u}] \sin\theta \quad (1.8)$$

Tout déplacement s de D peut être décomposé sous la forme d'une translation et d'une rotation :

$$s = T_{v(O)} \omega_O \quad (1.9)$$

où ω_O est l'élément de D d'origine O associé à une rotation vectorielle Ω et $v(O)$ le vecteur de translation d'origine O . s est alors caractérisé par le couple $(v(O), \Omega)$.

II.1.2 - Choix d'une base de l'algèbre de LIE Δ

Si en plus d'une origine O de \mathcal{E} , on se donne une base orthonormée $B(i, j, k)$ de \mathcal{E} , on peut définir alors une base $B = (\xi, \eta, \zeta, i, j, k)$ de l'algèbre de LIE Δ , telle que :

$$\begin{aligned} \xi(m) &= i \wedge om & \eta(m) &= j \wedge om & \zeta(m) &= k \wedge om \\ i(m) &= i & j(m) &= j & k(m) &= k \quad \forall m \in \mathcal{E} \end{aligned} \quad (1.10)$$

où ξ, η, ζ sont les champs équiprojectifs nuls en O et de résultante respectivement, i, j, k et i, j, k sont les champs uniformes de vecteurs i, j, k .

Pour un torseur quelconque X , sa décomposition sur la base s'écrit :

$$X = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + ai + bj + ck \quad (1.11)$$

$$X(m) = X(O) + n_X \wedge Om \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} X(O) &= ai + bj + ck \\ n_X &= \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta \end{aligned} \quad (1.13)$$

II.1.3 - Changement de base dans l'algèbre de LIE Δ .

Soit \mathfrak{B} une base de Δ , \mathfrak{B}' une nouvelle base, soit B le repère associé à \mathfrak{B} et B' celui associé à \mathfrak{B}' , on notera P la matrice de passage de la base définie par B et celle définie par B' et \mathcal{P} celle de \mathfrak{B} à \mathfrak{B}' .

\mathcal{P} permet de changer à la fois de base dans E et d'origine dans \mathfrak{E} . Soient O et O' les origines des 2 repères.

$$B = (O, i, j, k) \quad B' = (O', i', j', k') \quad (1.14)$$

$$\mathfrak{B} = (\xi, \eta, \zeta, i, j, k) \quad \mathfrak{B}' = (\xi', \eta', \zeta', i', j', k')$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ P \widetilde{OO'}_{/B'} & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ \widetilde{OO'}_{/B} P & P \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{bmatrix} P^t & 0 \\ -\widetilde{OO'}_{/B} P^t & P^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^t & 0 \\ -P^t \widetilde{OO'}_{/B'} & P^t \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

où $\widetilde{OO'}$ est la matrice antisymétrique associée au vecteur $\overrightarrow{OO'}$ exprimée suivant les cas dans la base B ou B' .

III - MECANIQUE DES SYSTEMES DE CORPS RIGIDES PAR LES GROUPES DE LIE

Un système multicorps est composé de solides rigides définissant un ensemble I et de liaisons dont l'existence est décrite par une structure de graphe sur I . L'ensemble des liaisons sera noté U .

Si $\alpha \in U$, on désigne par $o(\alpha) = i$ et $e(\alpha) = j$, l'origine et l'extrémité de α . α est alors une liaison entre les corps i et j . La symétrie du graphe entraîne l'existence d'une involution : si $\alpha \in U$ alors $\bar{\alpha} \in U$: $\bar{\alpha}$ étant définie par : $o(\bar{\alpha}) = e(\alpha)$, $e(\bar{\alpha}) = o(\alpha)$. Physiquement α et $\bar{\alpha}$ représentent la même liaison. L'existence ou la non existence de liaisons entre deux corps du système peut se définir par un graphe non orienté. Cependant, la description des efforts dans les liaisons utilise le principe de l'action et de la réaction et donc impose l'usage d'un graphe orienté. L'utilisation du multigraphe est nécessaire dans la mesure où l'on désire distinguer diverses liaisons reliant deux mêmes corps du système.

D'une façon générale, une position du système est décrite par une famille $S = (s_i)$. S est une variété de dimension 6. Un observateur représente les positions possibles d'un corps rigide par les points de S et les déplacements de ce corps par les éléments de D .

S a une structure de variété analytique réelle unique. Le calcul différentiel dans S se ramène alors au calcul différentiel dans D .

III.1 - Cinématique du mouvement

Le mouvement d'un corps rigide est défini par une application : $t \mapsto s(t) \in S$. Cette application détermine sa position à chaque instant. Par définition, sa vitesse est le vecteur tangent

$$\frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t) \quad (1.17)$$

$\dot{s}(t)$ appartient à l'espace tangent à S en $s(t)$:

$$\dot{s}(t) \in T_{s(t)}S \quad (1.18)$$

La cinématique se réduit à ces applications de \mathbb{R} dans S . Les concepts de vitesse de rotation et de translation sont liés aux particularités structurales de D .

Une vitesse \dot{s} d'un solide dans la configuration représentée par s s'obtient en

appliquant à s un élément u de Δ tel que :

$$\dot{s} = u \cdot s \quad (1.19)$$

u correspond au champ de vitesses eulérien

Si l'on se fixe une configuration de référence r pour le corps, il existe un élément d de D unique tel que :

$$s = d \otimes r \quad (1.20)$$

De même on peut associer à s un élément unique $v \in \Delta$ tel que :

$$\dot{s} = L_d^T(v \cdot r) \quad (1.21)$$

où L_d^T est l'application tangente associée à

$$L_d : d \rightarrow d \otimes r, r \text{ fixé}$$

v correspond alors au champ de vitesses lagrangien.

Les vitesses lagrangiennes et eulériennes sont alors reliées par la relation :

$$u = \text{Ad } d \ v \quad (1.22)$$

Les composantes eulériennes et lagrangiennes correspondent aux divers champs équivariants ou torseurs introduits dans les expressions traditionnelles de la cinématique et de la dynamique. Ils ne s'identifient donc pas aux vitesses ou aux accélérations de la mécanique usuelle.

Pour deux corps i et j quelconques, posons r_i, r_j leurs positions de références
 s_i, s_j leurs positions actuelles.

$$\begin{aligned} \text{Il existe alors deux éléments de } D \text{ tels que : } & s_i = d_i \otimes r_i \\ & s_j = d_j \otimes r_j \end{aligned} \quad (1.23)$$

On posera également $d = d_i^{-1} d_j$ le déplacement relatif entre les deux corps.

Il vient alors les relations suivantes entre les champs de vitesses et d'accélération eulériens et lagrangiens

$$v_j = \text{Ad } d^{-1} v_i + v \quad \dot{v}_j = \text{Ad } d^{-1} \dot{v}_i + \dot{v} + [\text{Ad } d^{-1} v_i, v] \quad (1.24)$$

$$u_j = u_i + \text{Ad } d_i u \quad \dot{u}_j = \dot{u}_i + \text{Ad } d_i \dot{u} + [u_i, \text{Ad } d_i u] \quad (1.25)$$

III.2 - Cinétique et dynamique du mouvement

A tout corps rigide est associé un endomorphisme \mathcal{H} invariant à gauche de TS (espace tangent à S). \mathcal{H} exprime la relation entre la vitesse et la quantité de mouvement de manière analogue aux torseurs.

Définition : La "quantité de mouvement" associée à la vitesse $v \in \text{TS}$ d'un solide dont l'opérateur d'inertie est \mathcal{H} est le vecteur $\mathcal{H}(v) \in \text{TS}$ (tel que $o(\mathcal{H}(v)) = o(v)$).

Propriétés :

* \mathcal{H} est symétrique

$$* d . \mathcal{H}(v) = \mathcal{H}(d . v) \quad (1.26)$$

* $\mathcal{H}(u . r) = H_r(u) . r$ où H_r est un endomorphisme de Δ qui exprime la relation champs de vitesses champs de moments cinétiques indépendamment de la situation s.

$$\text{Dans la situation } s \quad H_s = \text{Ad } d H_r \text{Ad } d^{-1} \quad (1.27)$$

On peut définir alors deux composantes eulériennes et lagrangiennes correspondant au moment cinétique, lié par une relation du même type que celle des vitesses.

La matrice de l'endomorphisme H_r est une matrice bloc. Chaque bloc étant un opérateur dans E qui dépend de la position r mais aussi du point origine du repère. C'est pourquoi au centre de gravité elle prend la forme simple suivante :

$$H_r = \begin{bmatrix} 0 & mI_3 \\ J_G & 0 \end{bmatrix}_G \quad (1.28)$$

I_3 matrice identité d'ordre 3
 J_G tenseur d'inertie en G (centre de gravité du corps)

dans un repère quelconque de E d'origine G.

Définition : La force d'inertie dans le mouvement $t \mapsto s(t)$ par rapport à un référentiel galiléen est le vecteur tangent à S

$$j(t) = - \left(\frac{d}{dt} \mathcal{H}(u(t)) \cdot s(t) \right) \quad (1.29)$$

Cette définition contient à la fois les définitions au signe près de la résultante et des moments dynamiques d'un corps en mouvement.

Le torseur dynamique lagrangien s'exprime alors par :

$$A = H_r(\dot{v}) + [v, H_r(v)] \quad (1.30)$$

Lorsqu'une unité de temps est fixée, l'on peut définir une force comme un vecteur tangent $f \in TS$, $s = o(f)$ (où o est l'application qui à $f \in TS$ associe son origine) représente alors la position du corps dans laquelle la force est appliquée et cette définition réunit dans un concept unique les notions de position et de torseur des forces.

Une loi de forces appliquées à un solide est une force fonction du temps et de la vitesse (elle contient implicitement la position), c'est une application

$$F : \mathbb{R} \times TS \rightarrow TS \text{ tel que } o(F(t,u)) = o(u) \quad (1.31)$$

On obtient alors une forme de la loi fondamentale de la dynamique réunissant à la fois les théorèmes de résultante et de moment suivant une description :

$$\text{eulérienne} \quad \frac{d}{dt} \mathcal{H}(u(t)) = F(t,u) \quad (1.32)$$

$$\text{ou lagrangienne} \quad H_r(\dot{v}) + [v, H_r(v)] = \text{Ad } d^{-1} \cdot F(t,u) \quad (1.33)$$

Quand le mouvement est repéré dans un référentiel non galiléen, il convient d'introduire les forces d'inertie de Coriolis et d'entraînement. Ces termes d'inertie s'expriment intégralement à partir des opérateurs H mais aussi des opérateurs bilinéaires C et B définis par :

$$B(X,Y) = [X, H(Y)] \quad (1.34)$$

$$C(X,Y) = [X, H(Y)] + [Y, H(X)] + H([X,Y]) \quad (1.35)$$

III.3 - Résolution des équations du mouvement du système

Chaque corps i est soumis à trois types de forces :

- les contraintes de liaison qui ne développent aucune puissance si elles sont parfaites. Ce sont les inconnues de liaison. Soit N_{ji} la somme du torseur lagrangien correspondant agissant de j sur i

- les contraintes de liaison issues de liaisons dont on connaît les lois de comportement. Soit R_{ji} le torseur lagrangien des efforts exercés de j sur i

- les forces extérieures : en l'occurrence le poids. Soit P_i le torseur lagrangien associé.

On utilise le principe de l'action et de la réaction. Pour résoudre les équations du mouvement, il faut éliminer le torseur N_{ji} .

L'équation du mouvement s'écrit pour chaque corps i , dans le cas où le référentiel est galiléen :

$$H_i(\dot{v}_i) + [v_i, H(v_i)] = P_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n (R_{ji} + N_{ji}) \quad (1.36)$$

où n est le nombre de corps hormis le corps de référence

Dans ce qui suit, nous supposons toujours, après avoir défini un corps comme corps de référence, que le référentiel qui lui est attaché est galiléen.

La chaîne définie par la connexion de liaisons à réactions inconnues entre les corps peut être ouverte ou fermée. Si l'on note l le nombre de ces liaisons et b le nombre de boucles indépendantes on a la relation $l = b + n$. Il n'est plus alors possible en isolant l'un des solides de ne faire intervenir qu'un seul torseur N_{ji} inconnu dans l'équation du mouvement transformée. Ces torseurs ne sont plus découplés. Comme le nombre d'équations scalaires devient inférieur au nombre d'inconnues, il faut établir des équations supplémentaires qui rendent compte du caractère fermée de la chaîne : ce sont les équations de fermeture qui signifient que la somme des torseurs des vitesses relatives associées à chaque liaison d'une boucle est égale au torseur nul quand on parcourt cette boucle.

Dans ce qui suit, nous ne nous intéresserons pas au cas des chaînes fermées mais plutôt à celui des chaînes ouvertes quelconques.

L'obtention d'un algorithme récurrent nécessite la définition du degré de connexion d'un solide. Ce degré représente le nombre entier qui exprime le nombre minimal de liaisons reliant le corps au corps de référence. Cela permet d'en déduire une méthode pour numéroter les corps et les liaisons suivant leur degré de connexion.

On posera $A_i = H_i(\dot{v}_i) + [v_i, H_i(v_i)]$ (1.37) la force d'inertie pour plus de simplicité dans les notations.

On supposera de plus que les liaisons sont parfaites.

Pour les corps terminaux, on pourra toujours écrire que :

$$N_{qk} = -P_k - R_{qk} + A_k \quad (1.38)$$

Or la puissance développée est nulle pour chaque élément d'une base de vitesses ξ cinématiquement admissibles.

Si on appelle d_k le nombre de degré de liberté entre le corps k et $k-1$

$$\xi_p \cdot N_{qk} = 0 \quad \text{pour } p = 1, \dots, d_k \quad (1.39)$$

Pour un corps i quelconque dans la chaîne l'équation devient :

$$N_{qi} = -P_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (N_{ji} + R_{ji}) + A_i - R_{qi} \quad (1.40)$$

La loi de l'action et de la réaction s'écrit :

$$\text{Ad } B_{ij} \cdot N_{ij} + N_{ji} = 0 \quad (1.41)$$

$$\text{Ad } B_{ij} \cdot R_{ij} + R_{ji} = 0 \quad (1.42)$$

où B_{ij} est le déplacement relatif entre les corps i et j .

donc

$$N_{qi} = -P_i - \sum_{j=1}^n \text{Ad } B_{ij} (N_{ij} + R_{ij}) + A_i - R_{qi} \quad (1.43)$$

On connaît par récurrence les N_{ij} donc N_{qi} est entièrement déterminé. On écrit ensuite que $\xi_p \cdot N_{qi} = 0$ (1.44) pour $p = 1, \dots, d_i$ et on obtient les d_i équations scalaires du mouvement.

En résumé, on détermine d'abord les équations du mouvement pour le corps terminal d'ordre de connexion le plus élevé, puis on les détermine pour les corps i dans l'ordre décroissant de leur ordre de connexion ce jusqu'au corps de référence.

Afin d'établir les équations classiques de la dynamique, il est nécessaire d'avoir une expression des grandeurs, v_i , \dot{v}_i , R_{ij} , P_i et $\text{Ad}B_{ij}$.

Comme pour les équations de la dynamique, on détermine v_i et \dot{v}_i par un processus récurren. Mais au lieu de commencer la récurrence par le corps terminal d'ordre de connexion le plus élevé, on considère en premier lieu le corps de base et on procède par degré de connexion croissant.

Les expressions des torseurs lagrangien des vitesses et des accélérations font intervenir les torseurs lagrangiens des vitesses et des accélérations relatives. Ces vitesses représentent la vitesse lagrangienne d'un des deux corps reliés par une liaison quand l'autre est fixe.

La liaison limite par sa nature le nombre de degré de liberté donc la dimension de l'espace des vitesses cinématiquement admissibles (Annexe).

IV - CREATION D'UN LOGICIEL DE SIMULATION DU MOUVEMENT D'UN SYSTEME MULTICORPS

IV.1 - Logiciel de génération automatique des équations du mouvement

IV.1.1 - Objectifs

L'objectif d'un tel logiciel est de fournir pour un système donné, les équations régissant le mouvement en fonction de coordonnées généralisées. Pour cela, il faut mettre en place toute la formulation mathématique explicite afin de concevoir et réaliser des algorithmes directement programmables. Ce logiciel s'attachera à utiliser la formulation de la mécanique rationnelle à partir des groupes et algèbres de LIE.

Quand on s'intéresse à des applications de ce type, il faut pouvoir définir de manière cohérente et précise des structures de données adaptées à ce problème.

Pour des facilités de compréhension et d'extension, la philosophie de programmation adoptée sera de type modulaire. Cela permet de plus de mettre au point différentes parties du programme relativement séparément.

IV.1.2 - Choix dans l'application de la méthode

IV.1.2.1 - Utilisation du calcul formel ou symbolique

Pour résoudre les équations du mouvement, on peut à chaque pas de l'intégration temporelle déterminer les termes des équations algébriques du mouvement. Cependant, cette démarche présente plusieurs inconvénients.

Premièrement, cette méthode oblige à recalculer à chaque pas tous les termes intervenant dans les équations. Cependant, dans le cas général les liaisons induisent des torseurs inconnus qui rendent les équations plus ou moins complexes. Les recalculer à chaque pas se révèle pénalisant. On pourrait les garder en mémoire et les réutiliser au moment opportun. Mais le traitement informatique deviendrait vite confus.

Deuxièmement, passer à chaque pas de calcul en coordonnées est contraire à l'esprit de la méthode des groupes de LIE. En effet, on a vu qu'elle consistait à exprimer, d'une part les vitesses et les accélérations lagrangiennes des corps (équations cinématiques du mouvement) et d'autre part les équations dynamiques du mouvement qui expriment l'organisation du système multicorps.

Dans une dernière étape, on conjugue ces deux calculs préalables en passant en coordonnées. Donc former les équations du mouvement analytiquement et non numériquement correspond à l'esprit de la méthode. On ne passe qu'une fois en

coordonnée et au cours de l'intégration numérique on ne fait plus appel à une écriture des équations du mouvement.

Il apparaît donc utile de séparer le processus de formation des équations et celui de l'intégration numérique. Cependant, comme on manipule des expressions représentant des équations et non des valeurs numériques, il s'avère indispensable d'utiliser du calcul formel. Ce dernier présente l'avantage de réduire les erreurs d'arrondi numérique puisqu'on dispose d'expressions exactes. Toutefois, toutes les données géométriques et mécaniques du système seront introduites sous forme numérique pour permettre des simplifications éventuelles et ne pas introduire des manipulations sur des chaînes de caractères trop volumineuses. Cet optique a été choisi parce que l'inconvénient qu'elle induit (c'est-à-dire que l'étude de deux systèmes différents uniquement par leurs données d'entrée demanderont de lancer le programme deux fois) est de peu d'importance eu égard à la complexité qui résulterait de la manipulation d'un grand nombre de chaînes de caractères. De plus, si l'optimisation du logiciel est suffisamment importante, la répétition des calculs n'entraînent pas des temps de passage machine conséquents.

Deux directions d'études s'offraient à nous pour mettre en place ce calcul formel :

- utiliser un logiciel existant en adaptant les structures de données,
- construire un logiciel adapté à la résolution d'un problème précis.

La deuxième solution a été choisie parce que les logiciels existants comme ils se veulent les plus généraux possibles pour pouvoir s'adapter à de nombreuses applications présentent des carences à différents niveaux quand on multiplie dans les applications les structures et les enchaînements complexes.

Remarques sur le calcul symbolique : Utilité d'un module intégré de simplification

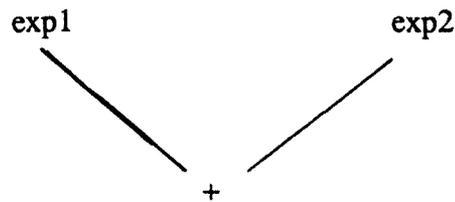
On travaille toujours sur des arbres binaires d'expressions créés directement à partir de la physique du problème. Ainsi on évite la traduction de chaînes de caractères représentant une expression mathématique en un arbre binaire d'expressions qui n'est pas un problème évident (c'est le rôle de l'analyseur syntaxique). On se contente de traduire un arbre binaire d'expressions en une chaîne de caractères qui est un problème plus facile.

C'est pourquoi si l'on devait utiliser un logiciel de calcul formel réalisant les simplifications, on devrait donner en entrée une expression sous forme de chaîne de caractères. Ainsi, l'opération d'analyse syntaxique est inévitable et consomme du temps de calcul.

IV.1.2.2 - Problèmes de simplification

A priori, d'après le principe de la méthode, on ne réalise que des additions et des multiplications vu que seules des opérations algébriques sont effectuées (pas de dérivation en particulier). Dans cet optique, le calcul formel se simplifie.

On représente les expressions mathématiques sous forme d'arbre binaire. Les opérations d'addition, de multiplication sont simples : Si $exp1$ et $exp2$ sont deux arbres binaires d'expression la somme est représentée par :



Cependant, les expressions obtenues ne sont pas simplifiées et sont parfois beaucoup plus compliquées que l'expression simplifiée. Ainsi, il est difficile de prime abord de vérifier qu'on obtient avant l'intégration numérique les bonnes équations dans la phase de validation du programme. De plus, des expressions non simplifiées allongent les temps de calcul de l'intégration numérique.

On pourrait avancer que le temps de calcul nécessaire pour la simplification peut être supérieur au temps gagné sur l'intégration temporelle. Cependant, du fait de la troncature numérique, les expressions simplifiables peuvent générer un mauvais conditionnement des équations et perturber le résultat final. De plus, la structure de donnée employée prévoit l'utilisation de paramètres. Cette option a été retenue pour répondre au besoin éventuel de l'étude de la variation d'un ou plusieurs paramètres. On peut alors pour un même jeu d'équations effectuer plusieurs intégrations des équations. Dans ce cas, le temps perdu lors de la simplification sera compensé pour peu que le nombre d'intégrations nécessaires soit important.

Pour ces raisons, nous avons opté pour la simplification des expressions.

IV.1.2.3 - Le paramétrage

Il s'agit là de définir quelles coordonnées l'on choisit pour représenter les mouvements des corps. La position d'un corps dans l'espace est défini par la donnée de six paramètres. La translation peut être définie par la donnée d'un vecteur dont l'extrémité est attachée au corps. Les coordonnées peuvent être exprimées en cartésiennes, cylindriques ou sphériques. Pour spécifier l'orientation angulaire dans une base de vecteurs, il suffit de donner l'orientation angulaire d'une base de vecteurs rigidement attachés à lui. On peut donc fournir la matrice des cosinus directeurs et les équations de contraintes. Cette formulation présente des inconvénients. Il en existe d'autres qui

préconisent l'utilisation de trois paramètres ou de quatre paramètres avec une équation de contrainte. Nous avons donc les angles d'Euler, de Bryant ou les paramètres d'Euler.

Par exemple, les formulations d'Euler et de Bryant présentent l'avantage de fournir trois paramètres sans équations de contraintes. La conséquence désavantageuse en est que les cosinus directeurs sont des fonctions circulaires compliquées. De plus, la formulation des angles d'Euler présente des singularités pour certains types de rotation.

C'est pourquoi un paramétrage variable suivant les systèmes traités a été choisi .

IV.1.2.4 - Le langage de programmation

La méthodologie des groupes de LIE utilise des structures récurrentes. Le calcul formel dans son principe également. C'est pourquoi nous devons choisir un langage qui permette l'emploi de structures récursives et la manipulation de pointeurs associés à des structures. D'autre part, l'objectif étant d'avoir un outil souple et évolutif, il s'avère que le langage C portable et rapide convient tout à fait.

IV.1.3 - Organisation du programme

On établit à l'aide d'un module les équations intrinsèques du mouvement ainsi que les équations cinématiques. Un autre module permet d'écrire les expressions des différents endomorphismes H_i , AdB_{ij} et des éléments de l'algèbre de LIE v_i , \dot{v}_i , v et \dot{v} en coordonnées en fonction du paramètre choisi.

Connaissant tous les éléments des équations, on détermine alors les équations du mouvement à l'aide d'un autre module.

En parallèle, un module de simplification permet d'alléger l'écriture au cours du processus.

Des modules secondaires contiennent des fonctions de conversion, de copie et diverses opérations algébriques (crochet de LIE par exemple).

IV.1.4 - Limitation du logiciel

Le point qui permettrait d'avoir un logiciel tout à fait général qui puisse donc traiter tout problème de mécanismes est l'introduction de graphe de liaisons comportant des boucles. Différentes approches sont envisageables. Cependant, la conception a été faite de telle sorte que l'introduction de ce point ne remette pas en cause l'existence actuelle du programme.

IV.2 - Exemples de validation

IV.2.1 - Modèle faisant intervenir une liaison rotule

Afin de valider le logiciel mis en oeuvre, nous allons entreprendre une série de tests.

Tout d'abord, nous considérerons un système qui sera constitué de deux corps dont l'un est fixe et l'autre mobile relié par une liaison de type rotule (figure I.2).

Le solide mobile tournant sans frottement autour des trois axes Ox_0 , Oy_0 , Oz_0 .

Son tenseur d'inertie en son centre de gravité G s'écrit dans le repère (G, x, y, z) :

$$J = \begin{bmatrix} a & 0 \\ & a \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

$$a = 2 \text{ kg.m}^2$$

$$c = 4 \text{ kg.m}^2$$

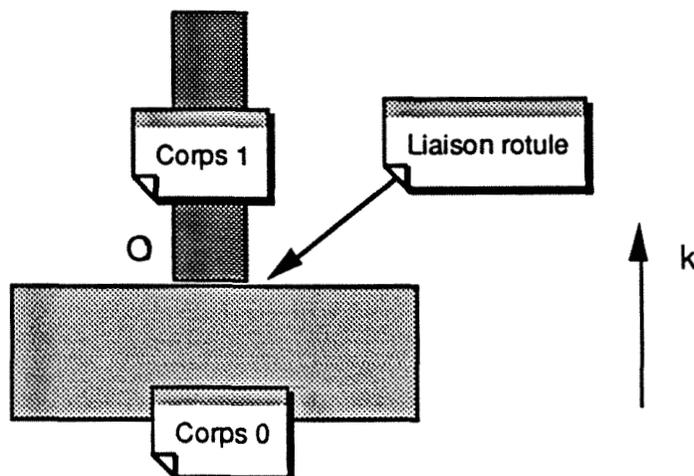
L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur.

Les positions du centre de gravité G et du point O caractérisant la liaison sont définies comme suit dans l'état de référence :

$$OG = 0 \text{ k} \quad (1.46)$$

On définit les angles entre le corps immobile noté 0 et le corps mobile noté 1 à l'aide des angles d'Euler. On les notera q_{01} , r_{01} , p_{01} .

Le logiciel nous permet d'écrire les équations du mouvement sous forme symbolique avec ce type de paramétrage. Nous avons alors vérifié ce résultat avec une approche manuelle. Les résultats sont concordants.



equations du mouvement finales en coordonnees

$$4.000e+00 \cdot \cos(r_{<0,1>}) \cdot (d2p_{<0,1>} - dq_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>})) \cdot dr_{<0,1>} \cdot \sin(p_{<0,1>})^2 - 2.000e+00 \cdot dq_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>}) \cdot dr_{<0,1>} \cdot \cos(p_{<0,1>})^2 + d2q_{<0,1>} \cdot \cos(r_{<0,1>}) - 2.000e+00 \cdot \sin(r_{<0,1>}) \cdot \sin(p_{<0,1>}) \cdot ((dr_{<0,1>} \cdot \sin(p_{<0,1>}) - dq_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>})) \cdot \cos(p_{<0,1>}) + (dp_{<0,1>} + dq_{<0,1>} \cdot \cos(r_{<0,1>})) + (dr_{<0,1>} \cdot \sin(p_{<0,1>}) - dq_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>})) \cdot \cos(p_{<0,1>}) \cdot dp_{<0,1>} - (dq_{<0,1>} \cdot \cos(r_{<0,1>})) \cdot dr_{<0,1>} + d2q_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>}) \cdot \sin(p_{<0,1>}) - d2r_{<0,1>} \cdot \cos(p_{<0,1>}) - 2.000e+00 \cdot \sin(r_{<0,1>}) \cdot \cos(p_{<0,1>}) \cdot ((dq_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>})) \cdot \sin(p_{<0,1>}) + dr_{<0,1>} \cdot \cos(p_{<0,1>})) \cdot (dp_{<0,1>} + dq_{<0,1>} \cdot \cos(r_{<0,1>})) + (dq_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>})) \cdot \sin(p_{<0,1>}) + dr_{<0,1>} \cdot \cos(p_{<0,1>}) \cdot dp_{<0,1>} + d2r_{<0,1>} \cdot \sin(p_{<0,1>}) - (dq_{<0,1>} \cdot \cos(r_{<0,1>})) \cdot dr_{<0,1>} + d2q_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>}) \cdot \cos(p_{<0,1>})) = 0$$

$$- (2.000e+00 \cdot \cos(p_{<0,1>}) \cdot ((dr_{<0,1>} \cdot \sin(p_{<0,1>}) - dq_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>})) \cdot \cos(p_{<0,1>}) + (dp_{<0,1>} + dq_{<0,1>} \cdot \cos(r_{<0,1>})) + (dr_{<0,1>} \cdot \sin(p_{<0,1>}) - dq_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>})) \cdot \cos(p_{<0,1>}) \cdot dp_{<0,1>} - (dq_{<0,1>} \cdot \cos(r_{<0,1>})) \cdot dr_{<0,1>} + d2q_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>}) \cdot \sin(p_{<0,1>}) - d2r_{<0,1>} \cdot \cos(p_{<0,1>}) - 2.000e+00 \cdot \sin(p_{<0,1>}) \cdot ((dq_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>})) \cdot \sin(p_{<0,1>}) + dr_{<0,1>} \cdot \cos(p_{<0,1>})) \cdot (dp_{<0,1>} + dq_{<0,1>} \cdot \cos(r_{<0,1>})) + (dq_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>})) \cdot \sin(p_{<0,1>}) + dr_{<0,1>} \cdot \cos(p_{<0,1>}) \cdot dp_{<0,1>} + d2r_{<0,1>} \cdot \sin(p_{<0,1>}) - (dq_{<0,1>} \cdot \cos(r_{<0,1>})) \cdot dr_{<0,1>} + d2q_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>}) \cdot \cos(p_{<0,1>})) = 0$$

$$4.000e+00 \cdot d2p_{<0,1>} - 4.000e+00 \cdot dq_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>}) \cdot dr_{<0,1>} \cdot \sin(p_{<0,1>})^2 - 2.000e+00 - 4.000e+00 \cdot dq_{<0,1>} \cdot \sin(r_{<0,1>}) \cdot dr_{<0,1>} \cdot \cos(p_{<0,1>})^2 + 4.000e+00 \cdot d2q_{<0,1>} \cdot \cos(r_{<0,1>}) = 0$$

IV.2.2 - Modèle faisant intervenir une liaison plan sur plan

Ce type de liaison est nécessaire dans la simulation générale d'un choc de véhicule. Elle permet de passer d'un mouvement tridimensionnel à un mouvement bidimensionnel.

Dans cet exemple, nous avons aussi deux corps dont l'un est fixe (figure I.1). Le solide mobile peut sans frottement se mouvoir en translation dans un plan Ox_0, Oy_0 et tourner autour de l'axe Oz_0 . Son tenseur d'inertie en son centre de gravité G s'écrit dans le repère (G, x, y, z) .

$$J = \begin{bmatrix} a & 0 \\ & a \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$a = 2 \text{ kg.m}^2 \qquad c = 4 \text{ kg.m}^2 \qquad (1.47)$$

L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur.

Les positions du centre de gravité G et du point caractérisant la liaison sont définies comme suit :

$$OG = 0 . k \qquad (1.48)$$

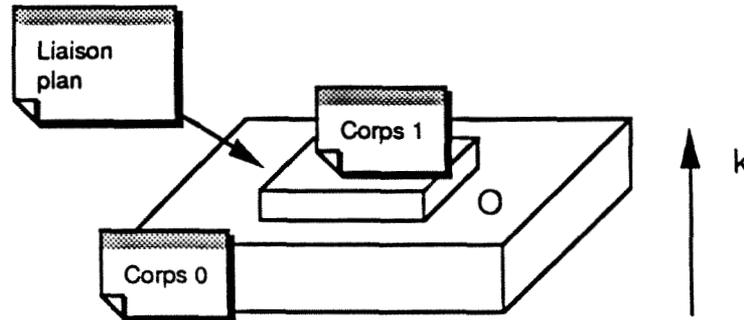
On définit par p_{01} l'angle entre le solide de référence noté zéro et le corps mobile noté 1.

Les équations du mouvement sont alors obtenues.

$$-(dp_{<0,1>} * (dy_{<0,1>} + dp_{<0,1>} * x_{<0,1>}) + dp_{<0,1>} * dy_{<0,1>} + d2p_{<0,1>} * y_{<0,1>} - d2x_{<0,1>}) = 0$$

$$d2y_{<0,1>} - dp_{<0,1>} * (dp_{<0,1>} * y_{<0,1>} - dx_{<0,1>}) + dp_{<0,1>} * dx_{<0,1>} + d2p_{<0,1>} * x_{<0,1>} = 0$$

$$x_{<0,1>} * (d2y_{<0,1>} - dp_{<0,1>} * (dp_{<0,1>} * y_{<0,1>} - dx_{<0,1>}) + dp_{<0,1>} * dx_{<0,1>} + d2p_{<0,1>} * x_{<0,1>} + y_{<0,1>} * (dp_{<0,1>} * (dy_{<0,1>} + dp_{<0,1>} * x_{<0,1>}) + dp_{<0,1>} * dy_{<0,1>} + d2p_{<0,1>} * y_{<0,1>} - d2x_{<0,1>}) + 4.000e+00 * d2p_{<0,1>} = 0$$



IV.2.3 - Modèle faisant intervenir des liaisons déformables

Dans un modèle général de véhicule, comme nous l'avons signalé, il existe des liaisons dites déformables qui permettent de rendre compte de la déformation du véhicule. Le logiciel tel qu'il a été conçu permet non seulement d'utiliser de telles liaisons mais aussi de pouvoir utiliser certaines données comme paramètres. Pour illustrer cela, nous avons considéré un système composé de trois corps : un fixe et deux mobiles (figure I.4).

* Le premier corps mobile noté 1 peut glisser sans frottement selon l'axe z_1 . Son tenseur d'inertie en son centre de gravité G_1 s'écrit dans le repère (G_1, x_1, y_1, z_1)

$$J_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ & a_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

$$a_1 = 2 \text{ kg.m}^2 \quad c_1 = 4 \text{ kg.m}^2$$

Un ressort relie l'origine du repère du corps fixe au centre de gravité G_1 .

* Un deuxième corps mobile noté 2 peut glisser sans frottement selon l'axe z_2 . Son tenseur d'inertie en son centre de gravité G_2 s'écrit dans le repère (G_2, x_2, y_2, z_2)

$$J_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ & a_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

$$a_2 = 2 \text{ kg.m}^2 \quad c_2 = 4 \text{ kg.m}^2$$

Un ressort relie le centre de gravité G_1 au centre de gravité G_2 . L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur.

Les positions des centres de gravité G_1 , G_2 et des points caractéristiques des liaisons O , O_1 sont définis par :

$$OG_1 = 5 \text{ k} \qquad OG_2 = 15 \text{ k} \qquad OO_1 = 7 \text{ k} \quad (1.51)$$

On définit par x_{01} la translation entre le corps 0 (corps fixe) et 1 et x_{12} celle entre le corps 1 et 2.

Les équations du mouvement sont alors obtenues automatiquement.

$$-(\text{par}\langle 0, 102 \rangle * x\langle 0, 1 \rangle - d2x\langle 1, 2 \rangle - 2.000e+00 * d2x\langle 0, 1 \rangle - 1.387e+01) = 0$$

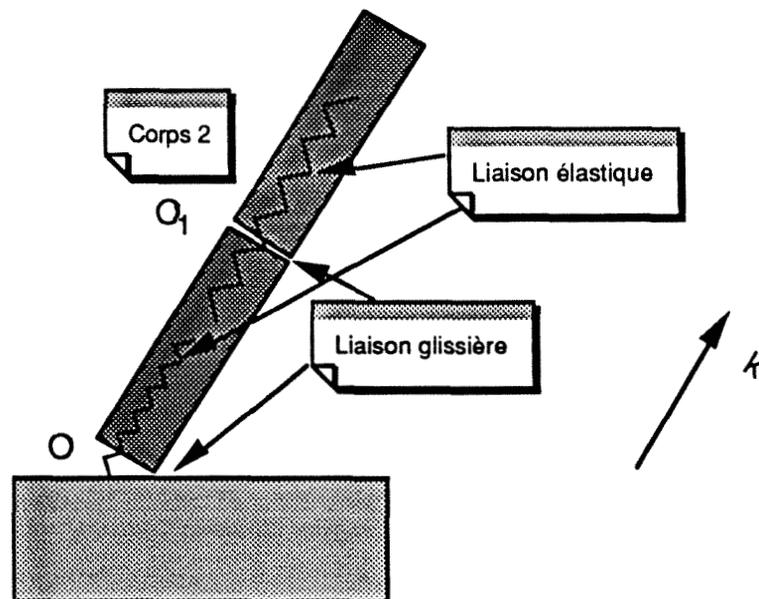
$$0.000e+00 = 0$$

$$0.000e+00 = 0$$

$$-(\text{par}\langle 1, 102 \rangle * x\langle 1, 2 \rangle - d2x\langle 1, 2 \rangle - d2x\langle 0, 1 \rangle - 6.937e+00) = 0$$

$$0.000e+00 = 0$$

$$0.000e+00 = 0$$



IV.2.4 - Solides de révolution

Nous nous proposons d'étudier maintenant afin d'effectuer des tests sur des modèles de complexité croissante le système composé des éléments suivants (figure I.3) :

* Un étrier (E) tournant sans frottement autour de l'axe Oz vertical ascendant de vecteur directeur k. Son moment d'inertie par rapport à Oz est $c_1 = 4 \text{ kg.m}^2$. Sa masse est $m_1 = 1 \text{ kg}$.

* Une tige (T) pouvant tourner sans frottement autour de l'axe O_1x_2 Sa masse est $m_2 = 10 \text{ kg}$, son tenseur d'inertie en G_2 a pour matrice dans le repère (G_2, x_2, y_2, z_2) est :

$$J_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

$$a_2 = 30 \text{ kg.m}^2, \quad c_2 = 40 \text{ kg.m}^2$$

* Un solide S de révolution d'axe Oz_3 pouvant tourner sans frottement autour de la tige T. Sa masse est $m_3 = 15 \text{ kg}$ et son tenseur d'inertie en (G_3, x_3, y_3, z_3) est noté :

$$J_3 = \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

$$a_3 = 25 \text{ kg.m}^2, \quad c_3 = 30 \text{ kg.m}^2$$

L'ensemble est soumis à l'accélération g de la pesanteur.

Les positions des centres de gravité et du point O_1 sont définies comme suit dans l'état de référence :

$$OG_1 = 10 \text{ k} \quad OG_2 = 25 \text{ k} \quad OG_3 = 30 \text{ k} \quad OO_1 = 15 \text{ k} \quad (1.54)$$

On définit par q_{01} l'angle entre le solide de référence noté zéro et le corps 1, q_{12} celui entre le corps 1 et 2 et q_{23} celui entre le corps 2 et 3.

On se propose d'écrire les équations du mouvement de ce système. Manuellement à partir du formalisme de LAGRANGE (Annexe), on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned}
 & (4434 - 4360 \cos^2 q_{12}) \ddot{q}_{01} + 30 \cos q_{12} \ddot{q}_{23} + 8720 \cos q_{12} \sin q_{12} \dot{q}_{01} \dot{q}_{12} \\
 & \quad - 30 \sin q_{12} \dot{q}_{12} \dot{q}_{23} = 0 \\
 & 4430 \ddot{q}_{12} - 4360 \cos q_{12} \sin q_{12} \dot{q}_{01}^2 + 30 \sin q_{12} \dot{q}_{01} \dot{q}_{23} - 3188.25 \sin q_{12} = 0 \\
 & \ddot{q}_{23} + \cos q_{12} \ddot{q}_{01} - \sin q_{12} \dot{q}_{01} \dot{q}_{12} = 0
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

Le logiciel quant à lui fournit le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
 * & - 4359.935000 \cos(q_{12})^2 d^2q_{01} + 30.00200000 \cos(q_{12}) d^2q_{23} \\
 & - .0002289000000 \cos(q_{12}) \cos(q_{23}) dq_{12}^2 \sin(q_{23}) \\
 & + .00046 \cos(q_{12}) \cos(q_{23})^2 dq_{12} \sin(q_{12}) dq_{01} \\
 & + 8720.427270 \cos(q_{12}) \sin(q_{12}) dq_{01} dq_{12} \\
 & + .0002289000000 \cos(q_{12}) \sin(q_{23}) dq_{01}^2 \cos(q_{23}) \\
 & - .0002289000000 \cos(q_{12})^3 \sin(q_{23}) dq_{01}^2 \cos(q_{23}) + 4433.935000 d^2q_{01} \\
 & - 30.00260512 \sin(q_{12}) dq_{12} dq_{23} \\
 * & 4430.000 d^2q_{12} - 3188.340000 \sin(q_{12}) - 990.000 \cos(q_{12}) \sin(q_{12}) dq_{01}^{2.000} \\
 & - 3370.190000 \cos(q_{12}) dq_{01}^2 \sin(q_{12}) + 30.00260512 \sin(q_{12}) dq_{01} dq_{23} \\
 * & 30.000 \cos(q_{12}) d^2q_{01} + 30.000 d^2q_{23} - 30.000 \sin(q_{12}) dq_{01} dq_{12}
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

Le système d'équations auquel nous aboutissons, même une fois simplifié au maximum, n'est pas en général intégrable par des méthodes analytiques. De plus, suivant les cas sa résolution nécessite des méthodes particulières. C'est pourquoi, il peut être envisageable d'avoir à notre disposition une palette de méthodes qui puissent être applicables à la plupart des configurations que nous pouvons rencontrer.

Cette partie pourrait être un autre point de développement en vue de rendre le plus convivial et le plus efficace la simulation de systèmes multicorps.

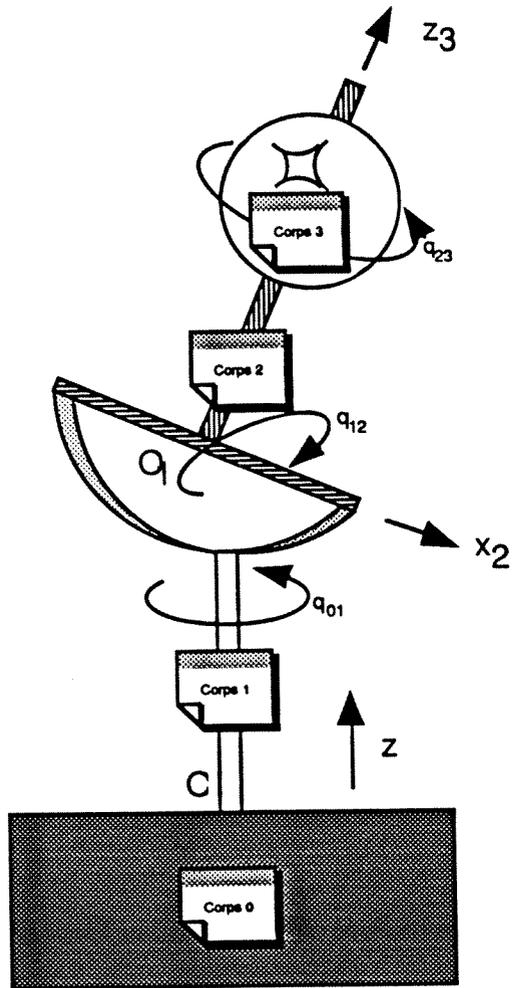


Figure 1.5

CONCLUSION

Nous avons étudié comment modéliser un véhicule soumis à un essai de choc.

Nous avons montré que pour concevoir un modèle corps-éléments de liaison déformables et géométriques, il faut avoir à sa disposition des outils qui permettent de faciliter la tâche de création des fichiers utiles à l'analyse de la simulation. En effet, bien qu'il n'y ait qu'un nombre restreint de degrés de liberté, la quantité des données nécessaires est importante.

La génération des équations du mouvement à partir de la géométrie différentielle des groupes de LIE est une approche nouvelle en mécanique. Elle présente l'avantage de pouvoir s'adapter facilement au niveau informatique quand elle est couplée à du calcul formel. Le plus d'une formulation analytique est indiscutable quand les systèmes mécaniques sont de plus en plus complexes. Les problèmes générés par le tout numérique sont en grande partie évités. Cette formulation permet de plus de pouvoir pour un même système mécanique de choisir plusieurs types de paramétrage en cours d'élaboration des équations sans remettre en cause une grande partie des calculs qui sont de nature intrinsèque.

Les exploitations effectuées ont permis des comparaisons avec des résultats analytiques relatifs à des cas types simples. Les résultats obtenus permettent d'envisager le passage au système général de façon positive. La mise au point du modèle complet ne pose pas de nouveau problème théorique.

Cependant, il est clair que le choix de valeurs numériques des paramètres d'entrée deviendra à ce stade une difficulté dominante. C'est pourquoi, afin de comprendre l'influence de ces valeurs et de faire des comparaisons critiques avec l'expérience, nous sommes confrontés au délicat problème de l'identification. Pour le résoudre, il existe un grand nombre de méthodes éprouvées dans des situations bien précises, autres que celles qui nous préoccupent. Il est évident qu'il n'existe pas une méthode universelle et la détermination d'une méthode que l'on pourra dire efficace pour le problème posé est souvent difficile. Le critère de choix dépend aussi de la précision avec laquelle on désire identifier les paramètres. C'est l'objet de notre collaboration avec l'ECL de préciser les méthodes adaptées à la simulation d'essais de chocs.

Un point important qu'il convient de souligner est que si tout ce qui a été fait l'a été dans l'objectif de simuler des essais de choc de véhicule, tout ou partie de ces procédures peuvent être appliquées à d'autres domaines des transports soit en l'état, soit après les avoir étendues. Une application de l'ensemble peut sans difficulté être envisagé dans le domaine du transport routier en ne s'intéressant qu'à des sous structures de véhicules, dans le domaine de la biomécanique en étudiant le comportement des mannequins soit d'un point de vue passif soit d'un point de vue actif, mais également dans le domaine du transport guidé.

ANNEXE

ANNEXE

ALGÈBRE DE LIE DU GROUPE DES DÉPLACEMENTS D

A.1 - Généralités

a) Champs de vecteurs invariants à gauche

Soit G un groupe de Lie et $s \in G$. La translation à gauche L_s étant un difféomorphisme de G sur G , l'application linéaire tangente dL_s existe en chaque point x de G et si X est un champ de vecteurs sur G , l'image de X par dL_s est encore un champ de vecteurs sur G que l'on note sX (champ translaté à gauche par s). Par définition :

$$(sX)(x) = dL_s(X(s^{-1}x)) \quad (\text{a.1})$$

Définition : Un champ de vecteurs X sur un groupe de LIE G est dit invariant à gauche si :

$$(sX)(x) = X(x) \quad \forall s \in G \quad \forall x \in G \quad (\text{a.2})$$

Proposition 1 : Un champ de vecteurs invariant à gauche est déterminé par sa valeur en e élément neutre de G .

$$X(x) = dL_x(X(e)) \quad (\text{a.3})$$

Proposition 2 : Les champs de vecteurs invariants à gauche forment un espace vectoriel sur \mathbb{R} isomorphe à T_e (espace vectoriel tangent en e à G).

Si X et Y sont deux champs de vecteurs C^1 sur une variété analytique v on appelle crochet de X et Y en un point x et on note $[X, Y]_x$ l'application qui à chaque fonction numérique de classe ≥ 2 et définie dans un voisinage de x fait correspondre le nombre

$$[X, Y]_x f = X(Yf)_x - Y(Xf)_x \quad (\text{a.4})$$

où Yf et Xf sont les dérivées de f par rapport à x .

L'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de LIE G et que l'on peut noter \mathfrak{G} constitue une algèbre sur \mathbb{R} quand on le munit de la loi de composition interne définie par le crochet.

Le produit sur \mathfrak{G} possède les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} [X, X] &= 0 \\ [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] &= 0 \quad \text{Identité de JACOBI} \end{aligned} \quad (\text{a.5})$$

\mathfrak{G} est appelée algèbre de LIE.

Le crochet est une fonction bilinéaire alternée de X et Y et $[X, Y] = -[Y, X]$. (a.6)

b) Champs de vecteurs équiprojectifs

L'ensemble des déplacements voisins du déplacement identique e (élément neutre de D) est l'espace tangent au point e au groupe D . On note Δ cette algèbre de LIE. Un élément X de Δ s'identifie aux champs des vecteurs équiprojectifs sur l'espace affine euclidien. Δ est alors un espace vectoriel de dimension 6. X est entièrement déterminé par ses éléments de réduction en un point M quelconque qui sont sa résultante n et sa valeur en ce point $X(M)$ qui est donc un torseur. On pourra alors appliquer la théorie qui s'y rattache.

Dans ce cas, le crochet de LIE s'écrit :

$$[X, Y](M) = n_X \wedge Y(M) - n_Y \wedge X(M) \quad \forall X, Y \in \Delta \quad \forall M \in \mathcal{E} \quad (\text{a.7})$$

Le comoment $X.Y$ des torseurs est alors défini par :

$$X \bullet Y = n_X \bullet Y(M) + n_Y \bullet X(M) \quad (\text{a.8})$$

$X.Y$ est alors un réel et ne dépend pas du point où on le calcule. Sur Δ , $X.Y$ ne peut être interprété comme un produit scalaire parce que $X.X$ n'est pas forcément positif ou nul. En particulier il est nul dans le cas des glisseurs et des champs uniformes.

c) Représentation adjointe

Définition : On appelle représentation d'une algèbre de LIE \mathfrak{G} dans une autre algèbre de LIE \mathfrak{G}' une application linéaire f de \mathfrak{G} dans \mathfrak{G}' telle que :

$$f([X, Y]) = [f(X), f(Y)] \quad (\text{a.9})$$

Définition : Une représentation linéaire d'une algèbre de LIE \mathfrak{G} dans un espace vectoriel V est une représentation de \mathfrak{G} dans l'algèbre de LIE des endomorphismes de V .

Définition : Dans une algèbre \mathfrak{G} , on appelle dérivation toute application linéaire D de \mathfrak{G} dans \mathfrak{G} vérifiant :

$$D(X \cdot Y) = X D(Y) + D(X) Y \quad (\text{a.10})$$

$X \cdot Y$ désignant le produit dans l'algèbre

Définition : Soit \mathfrak{G} une algèbre de LIE, X un élément de \mathfrak{G} . L'application linéaire $Y \mapsto [X, Y]$ de \mathfrak{G} dans \mathfrak{G} s'appelle l'application linéaire adjointe de X et se désigne par $\text{ad}X$.

Proposition : Soit \mathfrak{G} une algèbre de LIE. Pour tout $X \in \mathfrak{G}$, $\text{ad}X$ est une dérivation. L'application $\text{ad} X \mapsto \text{ad}X$ est une représentation de \mathfrak{G} dans \mathfrak{G} appelée représentation adjointe de \mathfrak{G} .

Soit y un élément de G , on peut lui associer un automorphisme intérieur de G : ρ_y défini par

$$\rho_y(x) = y x y^{-1} \quad (\text{a.11})$$

$y \mapsto \rho_y$ est une représentation algébrique de G dans $\text{Aut } G$ (ensemble des automorphismes de G) donc définit un automorphisme $d\rho_y$ de \mathfrak{G} que l'on note Ad_y .

Proposition : $y \mapsto \text{Ad}_y$ est une représentation analytique de G dans $\text{Aut } \mathfrak{G}$ appelée représentation adjointe de G .

Soit θ la différentielle de la représentation adjointe de G . θ est une application linéaire de \mathfrak{G} dans l'algèbre de LIE de $\text{Aut } \mathfrak{G}$.

On avait défini une application de \mathfrak{G} dans $\text{Hom}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$: $x \mapsto \text{ad}X$ qui avait été appelée représentation adjointe de l'algèbre de LIE.

$$\text{Théorème :} \quad \theta(X) = \text{ad}X \quad \text{où } d(\text{Ad}) = \text{ad} \quad (\text{a.12})$$

Remarque :

$$\text{Ad}_x \cdot Y = x Y x^{-1} \quad \forall x \in G \quad \forall Y \in \mathfrak{G} \quad (\text{a.13})$$

Propriétés

$$\text{Ad}(ab) = \text{Ada Adb}$$

$$\text{Ada}^{-1} = (\text{Ada})^{-1}$$

$$\text{Ada}[X, Y] = [\text{Ada X}, \text{Ada Y}]$$

$$\text{Ada X} \cdot \text{Ada Y} = X \cdot Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{G} \quad \forall a, b \in G$$

(a.14)

d) Exponentielle du groupe

Définition : On appelle représentation analytique d'un groupe de LIE G , dans un groupe de LIE G' un homomorphisme de G dans G' qui est une application analytique.

Fonctions analytiques : soit f une application d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ un élément de \mathbb{R}^n , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une suite de n entiers positifs ou nuls.

Nous poserons :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$$x^\alpha = (x^1)^{\alpha_1} \dots (x^n)^{\alpha_n}$$

(a.15)

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial (x^1)^{\alpha_1} \dots \partial (x^n)^{\alpha_n}}$$

f est analytique au point x_0 de Ω s'il existe un voisinage V de x_0 tel que pour $x_0 + u \in V$, on ait :

$$f(x_0 + u) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{u^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x_0) \quad (a.16)$$

la série étant absolument convergente.

f est donc représentable dans V par sa série de Taylor. f sera dite analytique dans Ω si elle est analytique en tous les points de Ω .

Définition : On appelle sous-groupe à un paramètre d'un groupe de LIE G , une représentation analytique ρ de \mathbb{R} dans G .

Théorème : Pour tout élément X de \mathfrak{G} , il existe un sous-groupe à un paramètre unique $\rho(t, X)$ tel que $d\rho\left(\frac{d}{dt}\right) = X$. (a.17) L'application $(t, X) \mapsto \rho(t, X)$ est analytique en t et en X .

La fonction $\rho(t, X)$ ne dépend que du produit tX . On a alors $\rho(t, X) = \rho(1, tX)$. On pose alors : $\rho(1, tX) = \exp tX$ (a.18)

Propriétés

$$\begin{aligned} \exp(tX)\exp(t'X) &= \exp((t+t')X) \\ \exp(-X) &= (\exp X)^{-1} \\ \exp(X)\exp(X') &\neq \exp(X+X') \\ \theta(X) &= \frac{d}{dt}(\exp t\theta(X))_{t=0} = \frac{d}{dt}(\text{Ad}\exp(tX))_{t=0} \quad \forall X \in \mathfrak{G} \end{aligned} \quad (\text{a.19})$$

Théorème : L'application $h : X \mapsto \exp X$ de \mathfrak{G} dans G est un difféomorphisme analytique d'un voisinage de 0 dans \mathfrak{G} dans un voisinage de e dans G .

Soit X_1, \dots, X_n une base arbitraire de l'algèbre de LIE \mathfrak{G} . D'après le théorème précédent, il existe un voisinage V de e dans G , tel que tout élément x de V s'écrive de façon unique sous la forme

$$x = \exp\left(\sum_{i=1}^n x^i X_i\right) \quad (\text{a.20})$$

(x^1, \dots, x^n) s'appelle le système de coordonnées canoniques relatives à la base (X_1, \dots, X_n) .

Le groupe des rotations d'axe donné, celui des translations dans une direction donnée et celui des vissages d'axe et de pas donné sont des groupes à un paramètre.

A.2 - Application au cas du groupe D

a) Expression des déplacements de l'espace par l'application exponentielle

a.1 - Cas de la rotation

Soit une rotation d'axe (O, u) et d'angle θ . Nous prenons comme base de l'espace le vecteur u unitaire et 2 vecteurs orthonormés quelconques du plan orthogonal à u .

Dans ce système d'axe nous prenons comme paramètre θ . La matrice associée s'écrit :

$$\Omega = \exp(\theta \check{u}) \quad (\text{a.21})$$

Le champ équijectif associé à cette rotation s'écrit :

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad X(M) = \check{u} \cdot OM \quad \text{et} \quad X = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}_O \quad (\text{a.22})$$

Dans la base choisie par exemple

$$u = (0,0,1)^t \quad \check{u} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{a.23})$$

$$\Omega = \sum_{k \geq 1} \frac{\theta^k}{k!} X^k = \exp(\theta X) \quad (\text{a.24})$$

$$\text{d'où} \quad \Omega(M) = \sum_{k \geq 1} \frac{\theta^k}{k!} \check{u}^k OM = \exp(\theta \check{u}) \quad (\text{a.25})$$

a.2 - Cas de la translation

Soit une translation de vecteur $v = qv_0$, v_0 étant unitaire. On choisira comme base le vecteur v_0 et deux vecteurs orthonormés du plan orthogonal à v_0 . L'image M' d'un point M de l'espace s'écrit :

$$MM' = qv_0 \quad (\text{a.26})$$

Le champ équijectif associé à cette translation s'écrit :

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad X(M) = v_0 \quad \text{et} \quad X = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (\text{a.27})$$

$$T = \exp(qX) \text{ mais } X^2(M) = 0$$

$$\text{d'où} \quad T = I_3 + qX \quad (\text{a.28})$$

a.3 - Cas d'un déplacement quelconque

$$\text{Le champ équijectif s'écrit } \forall M \in \mathcal{E} \quad X(M) = X(O) + u \wedge OM \quad (\text{a.29})$$

$$\text{d'où } X = \begin{bmatrix} u \\ X(O) \end{bmatrix} \quad (\text{a.30})$$

$$D = \exp(qX) \quad (\text{a.31})$$

$$\text{donc } D(M) = \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{k!} X^k(M) \quad (\text{a.32})$$

or le crochet de Lie d'un champ associé à une translation X^T et de celui associé à une rotation X^R est nul d'où comme X peut s'écrire :

$$X = X^T + X^R \quad (\text{a.33})$$

$$\text{il vient que : } D = \exp(qX) = \exp(qX^T) \exp(qX^R) \quad (\text{a.34})$$

b) Représentation de Ad par une matrice d'ordre 6

$$\text{Ad}_g = \text{Ad}(\exp(qX)) = \exp(q \text{ ad}X) = \sum_{n \geq 0} \frac{q^n}{n!} (\text{ad}X)^n \quad (\text{a.35})$$

$$\text{or } \text{ad}X \cdot Y = [X, Y] \quad \forall Y \in \Delta \quad (\text{a.36})$$

Comme les éléments de Δ s'identifient aux champs équijectifs

$$\text{ad}X \cdot Y(M) = n_X \wedge Y(M) - n_Y \wedge X(M) \quad \forall M \in \mathcal{E} \quad (\text{a.37})$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } X(M) &= X(O) + n_X \wedge OM \\ Y(M) &= Y(O) + n_Y \wedge OM \end{aligned} \quad (\text{a.38})$$

$$\text{d'où } \text{ad}X \cdot Y(M) = n_X \wedge Y(O) - n_Y \wedge X(O) + (n_X \wedge n_Y) \wedge OM \quad (\text{a.39})$$

$\text{ad}X \cdot Y$ est le torseur de résultante $n_X \wedge n_Y$ et de moment en O

$$n_X \wedge Y(O) - n_Y \wedge X(O).$$

$$\text{d'où } \text{adX} = \begin{bmatrix} \check{n}_X & 0 \\ \check{X}(O) & \check{n}_X \end{bmatrix}_O \quad (\text{a.40})$$

où \check{n}_X et $\check{X}(O)$ sont les matrices antisymétriques associées aux vecteurs n_X et $X(O)$.

adX dépend des éléments de réduction du torseur en un point.

On obtient donc une matrice d'ordre 6 pour adX ,

$$\text{d'où } \text{Adg} = \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{k!} \left(\begin{bmatrix} \check{n}_X & 0 \\ \check{X}(O) & \check{n}_X \end{bmatrix} \right)^k \quad (\text{a.41})$$

qui est également une matrice d'ordre 6.

b.1 - Cas de la rotation r

Dans ce cas le torseur est nul en un point de l'axe de rotation d'où

$$X(O) = 0 \quad \text{donc } \check{X}(O) = 0 \quad (\text{a.42})$$

$$\text{donc } \text{Adr} = \begin{bmatrix} \exp(\theta \check{u}) & 0 \\ 0 & \exp(\theta \check{u}) \end{bmatrix}_O \quad (\text{a.43})$$

b.2 - Cas de la translation t

La résultante du torseur est nulle. Le champs est uniforme. La représentation adjointe dans l'algèbre s'écrit :

$$\text{adX} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \check{X}(O) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{a.44})$$

Cette représentation ne dépend plus du point.

or $(\text{adX})^2$ est la matrice nulle (l'algèbre de LIE des translations est un idéal commutatif) d'où :

$$\text{Adt} = I_6 + q \text{adX} \quad (\text{a.45})$$

A.3 - Formulation du poids

Le torseur associé à la pesanteur s'écrit à l'aide de ses éléments de réduction au centre de gravité G pour un solide de masse m

$$\underline{f}_p = \begin{bmatrix} mg \\ 0 \end{bmatrix}_G \quad (\text{a.46})$$

Si le solide est en une position s à l'instant t :

$$s = d * r \quad (\text{a.47}) \quad \text{où } r \text{ est sa position de référence}$$

d est le déplacement nécessaire pour passer de la position r à la position s.

L'expression du torseur sous forme lagrangienne se formule alors :

$$F_p = \text{Add}^{-1} \cdot \underline{f}_p \quad (\text{a.48})$$

En introduisant l'opérateur d'inertie H_r , on obtient finalement :

$$F_p = H_r \text{Add}^{-1} X_G \quad \text{où } X_G = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}_G \quad (\text{a.49})$$

A.4 - Liaisons à un degré de liberté

Le déplacement autorisé par une liaison à un degré de liberté peut s'écrire :

$$d = \exp(qX) \quad (\text{a.50})$$

où X est un champ équijectif et q est un paramètre.

Nous avons les propriétés suivantes :

$$Xd = dX \quad (\text{a.51})$$

$$\text{Add} \cdot X = X \quad (\text{a.52})$$

Le torseur X est indépendant du temps (il caractérise géométriquement la liaison), d'où :

$$\dot{d} = \dot{q}Xd \quad (\text{a.53})$$

et par voie de conséquence $\dot{d}^{-1} = -\dot{q}d^{-1}X$ (a.54)

Il vient alors que les vitesses et accélérations lagrangiennes et eulériennes s'expriment de la façon suivante :

$$v = u = \dot{q}X \quad (a.55)$$

$$\dot{v} = \dot{u} = \ddot{q}X \quad (a.56)$$

A.5 - Exemple de validation

Ici sont explicités les calculs se rattachant à l'exemple donné au paragraphe I.2.5 .

- Calcul de l'énergie potentielle

$$V = -m_1OG_1g - (m_2OG_2 + m_3OG_3)g \cos q_{12} \quad (a.57)$$

- Calcul de l'énergie cinétique

* énergie cinétique de l'étrier

$$T_E = \frac{1}{2}C_1\dot{q}_{01}^2 \quad (a.58)$$

* énergie cinétique de la tige

$$T_T = \frac{1}{2}[(A_2 + m_2O_1G_2^2)(\dot{q}_{12}^2 + \dot{q}_{01}^2 \sin^2 q_{12}) + C_2 \dot{q}_{01}^2 \cos^2 q_{12}] \quad (a.59)$$

* énergie cinétique du solide

$$T_S = \frac{1}{2}[(A_3 + m_3O_1G_3^2)(\dot{q}_{12}^2 + \dot{q}_{01}^2 \sin^2 q_{12}) + C_3(\dot{q}_{23} + \dot{q}_{01} \cos q_{12})^2] \quad (a.60)$$

Le lagrangien s'écrit alors

$$L = T_E + T_T + T_S - V \quad (a.61)$$

d'où les 3 équations

$$\begin{aligned}
 & [C_1 + (A_2 + m_2 O_1 G_2^2 + A_3 + m_3 O_1 G_3^2) \sin^2 q_{12} + (C_2 + C_3) \cos^2 q_{12}] \ddot{q}_{01} \\
 & + C_3 \cos q_{12} \dot{q}_{23} + 2(A_2 + m_2 O_1 G_2^2 + A_3 + m_3 O_1 G_3^2) \cos q_{12} \sin q_{12} \dot{q}_{01} \dot{q}_{12} \quad (\text{a.62}) \\
 & - 2(C_2 + C_3) \cos q_{12} \sin q_{12} \dot{q}_{12} \dot{q}_{01} - C_3 \sin q_{12} \dot{q}_{12} \dot{q}_{23} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (A_2 + m_2 O_1 G_2^2 + A_3 + m_3 O_1 G_3^2) \ddot{q}_{12} \\
 & + (-A_2 - m_2 O_1 G_2^2 - A_3 - m_3 O_1 G_3^2 + C_2 + C_3) \cos q_{12} \sin q_{12} \dot{q}_{12} \dot{q}_{01} \\
 & + C_3 \sin q_{12} \dot{q}_{01} \dot{q}_{23} - (m_2 O G_2 + m_3 O G_3) g \sin q_{12} = 0
 \end{aligned}$$

$$C_3 (\ddot{q}_{23} + \ddot{q}_{01} \cos q_{12} - \dot{q}_{01} \dot{q}_{12} \sin q_{12}) = 0$$

BIBLIOGRAPHIE

MODELISATION

- [1] - W. GOLDSMITH - *Impact. The theory and Physical Behaviour of Colliding Solids* - EDWARD ARNOLD LTD 1960 .
- [2] - J. M. BIGGS - *Introduction to Structural Dynamics* - Mc. GRAW-HILL Book Company 1964.
- [3] - J.F. ADAMS - *Lectures on Lie Groups* - Chicago Press, 1969
- [4] - F. CORNACCHIA - Car Engineering Dept., FIAT, SPA - *Behaviour of a Specific Body Structure in Crash Testing*, International Automotive Safety Conference. - 13-15 May 1970 - Detroit Michigan.
- [5] - J.O. SMITH et O.M. SIDEBOTTOM - *Comportement Inélastique des Structures Porteuses* - Dunod 1970 .
- [6] - M.M. KAMAL - Research Labs, General Motors Corp. - *Analysis and Simulation of Vehicle to barrier impact* - SAE, paper 700414 presented at SAE Congress, May-June 1970.
- [7] - J. STOER et R. BURLISCH - *Introduction to Numerical Analysis* - Springer Verlag New-York, Heidelberg, Berlin, 1972.
- [8] - S.P NATVERLAL - *A Digital Computer Based Simulation Procedure for Multiple Degree of Freedom Mechanical Systems with Geometric Constraints* - Ph D University of Wisconsin 1972.
- [9] - G. PICHON - *Groupes de Lie* - Hermann Paris, 1973
- [10] - DR. L. ROSTI ROSSINI, ALFA ROMEO - *Some Considerations of body Structure Crushability in Relation to Impact Speed* - Fifth International Technical Conference on Experimental Safety Vehicle London June 4 - 7 1974.
- [11] - W.C. EMMERSON, J.E. FOWLER - *The Application of Computer Simulations in Vehicle Safety* - Fifth International Technical Conference on Experimental Safety Vehicle London, June 4 - 7 1974.
- [12] - M. RENAUD - *Contribution à l'Etude de la Modélisation et de la Commande des Systèmes Mécaniques Articulés* - Mémoire de Thèse - Université de Toulouse 1975.
- [13] - C. TARRIERE, A. FAYON, F. HARTEMANN and Ph. VENTRE - *The contribution of Physical Analysis of Accidents Towards Interpretation of Severe Traffic Trauma* - Nineteenth Stapp Car Crash Conference - November 17 - 19 1975 San Diego California.
- [14] - P. VENTRE, J.C. RULLIER and J.P. VEROLLET - *The Behaviour of Vehicles and Occupants in Asymmetrical Frontal Collisions* - 6 th International Conference on Experimental Safety Vehicles - October, 12 - 15 1976, Washington, D.C.
- [15] - J.E. GREENE - *Computer Simulation of Car to Car Collisions* - SAE Paper 770015. International Automotive Engineering Congress and Exposition Cobo Hall, Detroit, February 28, March 4, 1977.
- [16] - K. MAGNUS - *Dynamics of Multibody Systems* - Symposium Munich/Germany August 29 - September 3 Springer - Verlag 1977.

- [17] - J. WITTENBURG - *Dynamics of Systems of Rigid Bodies* - B.G Teubner Stuttgart 1977.
- [18] - G.I.E.P.R. (Groupement d'Intérêt Economique de Recherches et d'Etudes Peugeot Renault) - *Action Thématique Programmée - Amélioration de la Structure du véhicule pour la Protection des Occupants en cas de Choc Frontal* - 1978.
- [19] - G.H. TIDBURY - *Vehicle Structural Analysis : a Survey* - Int. Journal of Vehicle Design, vol. 1, n° 2 1980.
- [20] - G. ZECH, B. CLOS, W. SEITZ - *Entwicklungs - und Optimierungsmethoden für die Crashstruktur von Personenkraftwagen* - XVIII Fisita Internationaler Congress, 5 - 8 Mai 1980 Hamburg.
- [21] - P. GUELLEC - *Modélisation de la Caisse - Méthodologie et Applications SIA 81 - 12* - L'évolution de la conception de la structure et des éléments de carrosserie.
- [22] - M.J. GRATADOUR - *Optimisation par le calcul d'un élément de structure travaillant en choc* - SIA 82-1.
- [23] - M. KRIEG - *Bewegungsgleichungen Gewöhnlicher und Allgemeiner Mehrkörpersysteme* - Mémoire de thèse - Universität Stuttgart 22 Janvier 1982.
- [24] - T. BELYTCHKO and T.J.R. HUGHES - *Computational Methods for Transient Analysis. Computational Methods in Mechanics* - Volume 1, 1983.
- [25] - M. CROUZEIX et A.L. MIGNOT - *Analyse Numérique des Equations Différentielles* - 1983. MASSON.
- [26] - M. BRENNAN, M. MACAULAY and A. WYNN-RUFFHEAD - *Modelling the Collapse of Cars in asymmetrical Barrier Impact tests* - International Conference on Vehicle Structures, 16-18 July 1984.
- [27] - G.A.O. DAVIES, J. MORTON - *Structural Impact and Crashworthiness* - Volume 1 et 2 - Elsevier Applied Science Publishers 1984.
- [28] - D. CHEVALLIER - *Groupes de Lie et Mécanique des Systèmes de Corps Rigides* - Séminaire "Modélisation Mathématique", Kassel, 1984, MacGraw Hill
- [29] - F. HARTEMANN, J.Y. FORET BRUNO, C. HENRY, G. FAVERJON, C. GOT, A. PATEL and J.C. COLTAT - *The characteristics of frontal Impacts in Real World Accidents* - Tenth Technical Conference on Experimental Safety Vehicles, July 1 - 4 1985.
- [30] - G. BIANCHI and W. SCHIEHLEN - *Dynamics of Multibody Systems* - IUTAM/IFTOMM Symposium, Udine, Italy, September 16 - 20, Springer - Verlag 1985.
- [31] - P.G. CIARLET - *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation* - 1985. MASSON.
- [32] - D. CHEVALLIER - *Le Principe des Puissances Virtuelles en Mécanique Analytique, ses Relations avec la Mécanique de Newton Euler* - Cahier du CERMA n° 6, décembre 1986

- [33] - D. CHEVALLIER, J.P. LEBACQUE - *Mise au point d'un Modèle Théorique de Déformation de l'Avant d'un Véhicule Léger en Configuration Plane lors d'un Choc Frontal* - Rapport de contrat I.N.R.E.T.S.-C.E.R.M.A. 1987.
- [34] - J.P. MIZZI - *Approche d'une Modélisation de Véhicule Léger soumis à un Essai de choc* - Rapport intermédiaire NNS 8701 - Mai 1987.
- [35] - J.P. MIZZI - *Modélisation d'un véhicule léger soumis à un essai de choc. Présentation d'un modèle plan à liaisons non encastrées* - Rapport intermédiaire NNS 8703 - Décembre 1987.
- [36] - D. CHEVALLIER - *Principe d'Objectivité et Théorie Newtonienne de l'Inertie du Solide Rigide* - Cahier du CERMA n° 9, juin 1988
- [37] - D. CHEVALLIER, J.P. LEBACQUE, J.P.MIZZI - *Modélisation Bidimensionnelle du Compartiment Avant d'un Véhicule au cours du Choc* - Matériaux, Mécanique, Electricité n° 426, juin 1988
- [38] - J.P. MIZZI *Simulations d'essais de choc d'un véhicule automobile*. Rapport INRETS n° 72 - Juillet 1988
- [39] - E.J. HAUG - *Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems - Volume I : Basic Methods* - Allyn and Bacon 1989.
- [40] - V.I ARNOLD - *Mathematical Methods of Classical Mechanics (Second Edition)* - Springer - Verlag 1989.