



**HAL**  
open science

## Etude de cristaux phononiques de $N$ périodes d'un bi-réseau de cylindres infinis

Kun Zong, Hervé Franklin, Olivier Lenoir

► **To cite this version:**

Kun Zong, Hervé Franklin, Olivier Lenoir. Etude de cristaux phononiques de  $N$  périodes d'un bi-réseau de cylindres infinis. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00542866

**HAL Id: hal-00542866**

**<https://hal.science/hal-00542866>**

Submitted on 8 Dec 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# 10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

## Etude de cristaux phononiques de N périodes d'un bi-réseau de cylindres infinis

Kun Zong, Hervé Franklin, Olivier Lenoir

Laboratoire Ondes et Milieux Complexes, LOMC FRE 3102 CNRS

Fédération Acoustique du Nord-Ouest FANO FR CNRS

Université du Havre, Place Robert Schuman 76 610 Le Havre.

L'élaboration de cristaux phononiques possédant des propriétés acoustiques particulières nous a amené à étudier un milieu périodique bidimensionnel composé de N périodes ( $1 < N < 6$ ) d'un bi-réseau linéaire de cylindres infinis immergés dans un fluide d'extension infinie. Chaque période est constituée de deux réseaux de cylindres, les uns en acier les autres en polyéthylène, ces matériaux présentant un fort contraste d'impédance. Dans un réseau, les cylindres, de rayon a, sont séparés de la distance d et deux réseaux consécutifs sont distants de D. On s'est intéressé à la réflexion et à la transmission d'une telle structure lorsqu'elle est soumise à une onde plane monochromatique incidente sous incidence normale. Dans un premier temps, on a considéré que seul le mode fondamental, noté  $m=0$ , était propagatif dans le bi-réseau. Une étude préliminaire a consisté à étudier la réflexion et la transmission par N périodes de chaque réseau (acier ou polyéthylène) indépendamment. Ceci permet de mettre en évidence les bandes passantes et interdites des deux matériaux dans un même domaine de fréquence réduite ( $0,1 < ka < 2,37$ ) où k est le nombre d'onde de l'onde incidente et 2,37 la limite supérieure de l'intervalle correspondant à la fréquence de coupure au-delà de laquelle d'autres modes deviennent propagatifs. Il s'avère que l'on observe des bandes interdites bien distinctes. Dans un second temps, l'étude en incidence normale de N périodes du bi-réseau fait apparaître dans les bandes interdites du réseau en acier des bandes passantes très étroites dues au réseau en polyéthylène. On introduit ainsi un défaut périodique dans un réseau bidimensionnel de référence en acier. Des études au-delà de la première fréquence de coupure et en incidence oblique ont été également effectuées et la conservation de l'énergie vérifiée.

## 1 Introduction

Un des intérêts de l'étude de réseaux phononiques bi-dimensionnels (2D PCs) est de montrer que l'introduction de défauts répartis aléatoirement ou périodiquement dans un réseau périodique de référence permet l'ouverture dans ses bandes interdites de bandes passantes très étroites. Cela permet de réaliser des filtres très sélectifs. L'étude présentée dans ce papier porte sur un réseau périodique de cylindres infinis en acier dans lequel on insère périodiquement un réseau de défauts constitué de cylindres en polyéthylène, les deux matériaux présentant un fort contraste d'impédance acoustique. On parle dans ce cas d'un cristal phononique constitué de N périodes ( $1 < N < 6$ ) d'un bi-réseau de cylindres infinis. Les applications numériques présentés portent sur des réseaux de tubes de rayon externe a, de rayon interne b et remplis du même fluide qu'à l'extérieur. Dans la section 2, est rappelée succinctement la théorie de la diffusion multiple permettant le calcul des coefficients de réflexion et de transmission par une rangée comportant une infinité de cylindres d'un matériau donné, de longueur infinie, immergée dans l'eau [1-6]. Une représentation graphique est proposée pour la détermination du nombre de modes incidents propagatifs à prendre en compte dans une gamme de fréquences donnée pour un angle d'incidence fixé. Dans la section 3, on présente brièvement la méthode de calcul

des coefficients de réflexion et de transmission de N réseaux identiques. Des résultats numériques concernant le coefficient de réflexion sont fournis dans le but de valider cette méthode. Dans la section 4, le coefficient de réflexion d'un bi-réseau constitué de deux rangées de cylindres de deux matériaux différents est ensuite donné. Dans la section 5 le *modus operandi* pour calculer les coefficients de réflexion et de transmission pour N bi-réseaux est expliqué. Les résultats numériques montrent l'évolution de ce coefficient lorsque l'on passe de 3 à 6 bi-réseaux. L'obtention de bandes passantes très étroites dans les bandes interdites est mise en évidence pour 6 bi-réseaux dans le cas où seul le mode 0 est propagatif dans un bi-réseau. En conclusion, des perspectives à ce travail sont évoquées, comme une validation expérimentale par exemple.

## 2 Généralités

On considère d'abord un réseau constitué d'une infinité de cylindres identiques de longueur infinie, de diamètre 2a, disposés périodiquement avec une distance entre axes notée d (cf. Figure 1). Les pressions incidentes, réfléchies et transmises sont données par :

$$P_{inc}^v = A_{inc}^v e^{j(k_0^v x + \ell_0^v y)}, \quad (1)$$

$$P_R^V = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} A_R^{V,\varepsilon} e^{j(-k_\varepsilon^V x + \ell_\varepsilon^V y)}, \quad (2)$$

$$P_T^V = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} A_T^{V,\varepsilon} e^{j(k_\varepsilon^V x + \ell_\varepsilon^V y)}, \quad (3)$$

où

$$k_\varepsilon^V = \left( k^2 - (\ell_\varepsilon^V)^2 \right)^{1/2}, \quad (4)$$

$$\ell_\varepsilon^V = k \sin \alpha_V + 2\pi\varepsilon/d, \quad (6)$$

$$A_R^{V,\varepsilon} = \frac{2}{k_\varepsilon^V d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^V \left( \frac{\ell_\varepsilon^V + jk_\varepsilon^V}{k} \right)^n, \quad (7)$$

$$A_T^{V,\varepsilon} = A_{inc}^V \delta_{\varepsilon V} + \frac{2}{k_\varepsilon^V d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^V \left( \frac{\ell_\varepsilon^V - jk_\varepsilon^V}{k} \right)^n. \quad (8)$$

$\alpha_V$  est l'angle d'incidence et  $k = \omega/c$ . Les  $C_n^V$  représentent les coefficients de diffusion multiple [2, 4, 5]. Les coefficients de réflexion et de transmission du réseau sont définis par

$$R^{V,\varepsilon} = A_R^{V,\varepsilon} / A_{inc}^V, \quad T^{V,\varepsilon} = A_T^{V,\varepsilon} / A_{inc}^V. \quad (9)$$

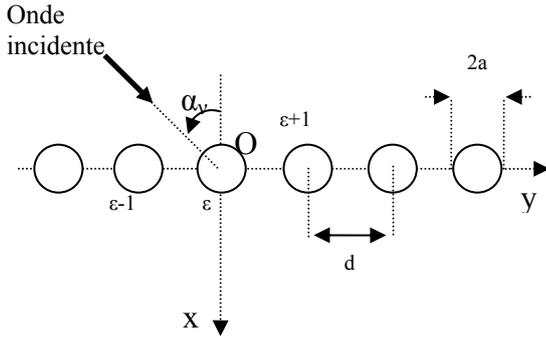


Figure 1 : un réseau linéaire

Pour que des modes puissent se propager à travers le réseau, il faut que  $k_\varepsilon^V \geq 0$ , c'est-à-dire que  $-\varepsilon_{sup} < \varepsilon < \varepsilon_{inf}$  avec  $\varepsilon_{sup} = E \left[ kd(1 + \sin \alpha_V) / 2\pi \right]$  et  $\varepsilon_{inf} = E \left[ kd(1 - \sin \alpha_V) / 2\pi \right]$ . Ici, E désigne la fonction partie entière. Compte tenu de l'encadrement précédent, pour que tous les modes  $\mathcal{E} = \{-\varepsilon_{sup}, \dots, \varepsilon_{inf}\}$  puissent se propager, il faut que la fréquence réduite soit telle que

$$f \geq \sup \left( \frac{\varepsilon_{sup}^c}{d(1 + \sin \alpha_V)}, \frac{\varepsilon_{inf}^c}{d(1 - \sin \alpha_V)} \right), \quad (10)$$

ou encore  $f \geq \sup(f_{c\varepsilon+}, f_{c\varepsilon-})$ . La conservation d'énergie s'écrit alors :

$$\sum_{\varepsilon=-\varepsilon_{sup}}^{\varepsilon_{inf}} \frac{k_\varepsilon^V}{k_0^V} \left( |R^{V,\varepsilon}|^2 + |T^{V,\varepsilon}|^2 \right) = 1. \quad (11)$$

La figure 2 montre l'évolution des fréquences de coupure en fonction de  $\alpha_V$ . Pour  $\alpha_V = 0^\circ$  par exemple, en dessous de la fréquence réduite  $ka = 5$ , seuls les modes

$\varepsilon = -2, -1, 0, 1, 2$  se propagent. Pour  $\alpha_V = 10^\circ$  et en dessous du même nombre d'onde réduit, seuls les modes  $\varepsilon = -2, -1, 0, 1$  se propagent.

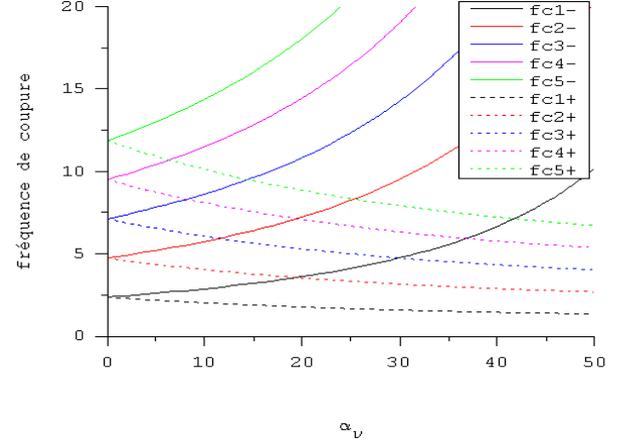


Figure 2 : Evolution des fréquences de coupure  $f_{c\varepsilon+}$  (pointillés) et  $f_{c\varepsilon-}$  (continus) avec l'angle  $\alpha_V$

### 3 Analyse de N réseaux identiques

On étudie ici un réseau 2D (cristal phononique) constitué de N rangées de réseau linéaire. Soient  $\varphi_0$  l'angle d'incidence,  $T_a, R_a$  les coefficients de transmission et de réflexion d'un premier réseau,  $T_b, R_b$  les coefficients de transmission et de réflexion d'un deuxième réseau.  $T_a, R_a$  et  $T_b, R_b$  sont évidemment égaux pour des réseaux identiques. Le choix de prendre des notations différentes pour deux réseaux consécutifs s'explique par le fait qu'il est possible de construire facilement des réseaux 2D comportant des rangées de tubes de matériau différent. Ceci sera discuté dans le chapitre suivant. Des réflexions et transmissions multiples apparaissant entre les deux réseaux, on définit le coefficient de transmission  $T_2$  d'un bi-réseau par :

$$T_2 = \frac{T_a T_b \cdot e^{j\varphi_T}}{1 - R_a R_b \cdot e^{j\varphi_T}}, \quad (12)$$

où  $\varphi_T = kD / \cos \varphi_0$ . Similairement, le coefficient de réflexion  $R_2$  d'un bi-réseau est défini par:

$$R_2 = R_a + \frac{T_a^2 R_b \cdot e^{j\varphi_R}}{1 - R_a R_b \cdot e^{j\varphi_R}}, \quad (13)$$

avec  $\varphi_R = 2\varphi_T$ .

Le cas d'un réseau 2D comportant N réseaux identiques peut alors être traité de façon itérative. On construit un système qui contient  $j$  réseaux linéaires.

$T_1, R_1$  (resp.  $T_{j-1}, R_{j-1}$ ) représentent les coefficients de

réflexion et de transmission d'un réseau linéaire seul (resp. d'un réseau 2D contenant  $(j-1)$  réseaux linéaires). Par conséquent, on peut généraliser simplement les équations (12) et (13) sous la forme :

$$T_a = T_1, \quad R_a = R_1, \quad (14)$$

$$T_b = T_{j-1}, \quad R_b = R_{j-1}. \quad (15)$$

On détermine les coefficients de réflexion et de transmissions globaux en utilisant les relations de récurrence suivantes :

$$T_j = \frac{T_1 T_{j-1} \cdot e^{j\phi_T}}{1 - R_1 R_{j-1} \cdot e^{j\phi_T}}, \quad (16)$$

$$R_j = R_1 + \frac{T_1^2 R_{j-1} \cdot e^{j\phi_R}}{1 - R_1 R_{j-1} \cdot e^{j\phi_R}}. \quad (17)$$

Le calcul numérique est effectué pour des réseaux de tubes en acier et en polyéthylène (rapport rayon interne sur rayon externe  $b/a = 0.88$ ), remplis d'eau et immergés dans l'eau. La distance  $D$  entre deux réseaux consécutifs est égale à  $6a$ . Seuls les coefficients de réflexion sont présentés ici. Tous les paramètres physiques sont présentés dans le tableau suivant ( $\rho$  masse volumique en  $\text{kg/m}^3$ ,  $c_l$  (resp.  $c_t$ ) vitesses longitudinale (resp. transversale) en m/s).

Matériau	$\rho$	$c_l$	$c_t$
Acier	7900	5790	3100
Polyéthylène	940	2370	800
Eau	1000	1470	

Les figures 3 et 4 montrent les coefficients de réflexion d'un ou plusieurs réseaux en acier en fonction de la fréquence réduite  $ka$ , en incidence normale. Les figures 5 et 6 présentent les coefficients de réflexion de plusieurs réseaux en polyéthylène, en incidence normale également.

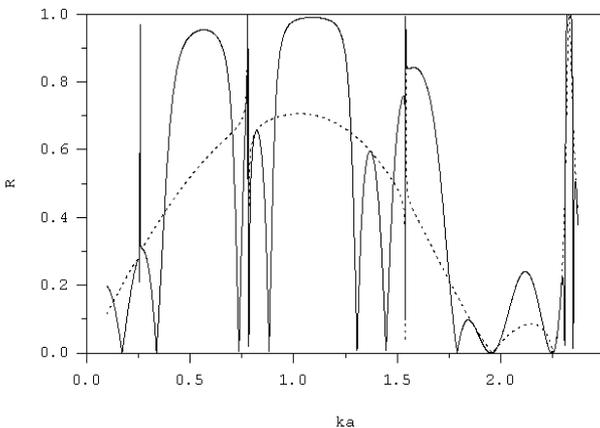


Figure 3 : Coefficients de réflexion d'un réseau (pointillé) et de 3 réseaux (continu) avec des tubes en acier.

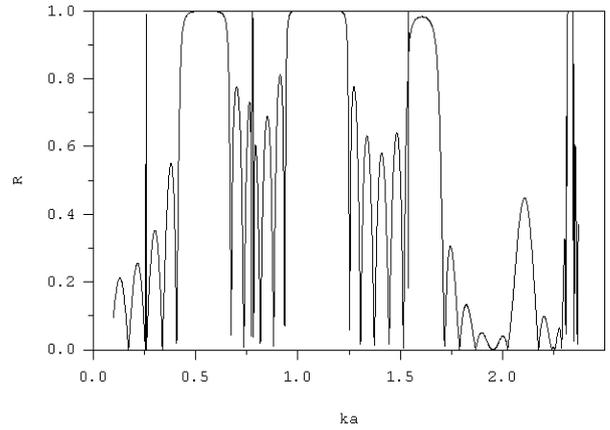


Figure 4 : Coefficient de réflexion de 6 réseaux avec des tubes en acier

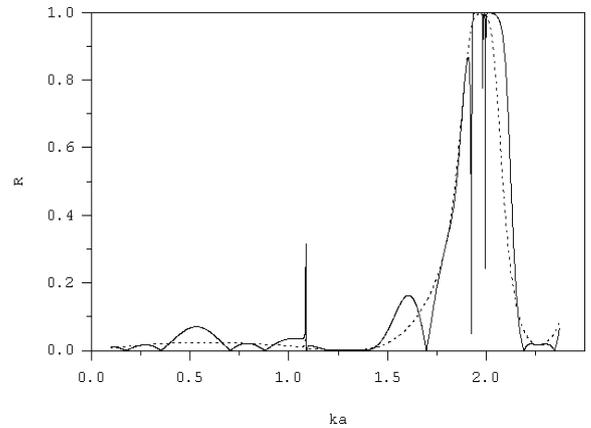


Figure 5 : Coefficients de réflexion d'un réseau (pointillé) et de 3 réseaux (continu) avec des tubes en polyéthylène

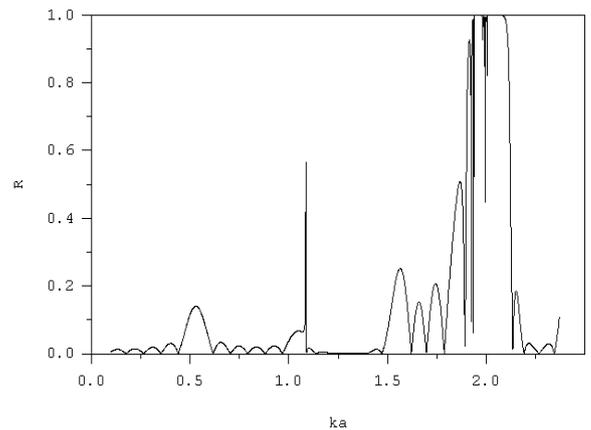


Figure 6 : Coefficient de réflexion de 6 réseaux avec des tubes en polyéthylène

Dans les deux cas, les courbes sont tracées sur la gamme de fréquence réduite  $ka$  comprise entre 0,1 et 2,373. La valeur maximale correspond à la première fréquence de coupure, donc seul le mode 0 est pris en compte.

Dans le cas d'un seul réseau de tubes en acier, on observe une zone fréquentielle dans laquelle le module du coefficient de réflexion (courbe en pointillé, Figure 3) passe par un maximum n'atteignant pas 1 et, par suite, le

module du coefficient de transmission passera lui par un minimum n'atteignant pas 0. Quand le nombre de réseaux de tubes en acier augmente (de 3 à 6), il se forme une zone dans laquelle les coefficients de réflexion tendent vers 1 et les coefficients de transmission tendent vers 0 (Figures 3 et 4). L'accumulation de réseaux linéaires infinis répartis périodiquement entraîne donc l'apparition de bandes interdites, trois dans ce cas, dans lesquelles il n'y a pas d'ondes qui peuvent être transmises à travers le cristal phononique. On constate par ailleurs que plus le nombre de réseaux augmente, plus les bandes interdites sont marquées d'une part et plus les oscillations de part et d'autre des bandes interdites sont nombreuses, d'autre part.

Des observations similaires peuvent être faites pour des réseaux de tubes en polyéthylène, la seule différence étant que seule une bande interdite se forme dans la gamme de fréquence réduite étudiée (figures 5 et 6).

#### 4 Etude d'un bi-réseau de tubes élastiques infinis

On suppose que le bi-réseau est constitué de deux réseaux linéaires, l'un en acier et l'autre en polyéthylène. Ils sont distants de  $D$ .

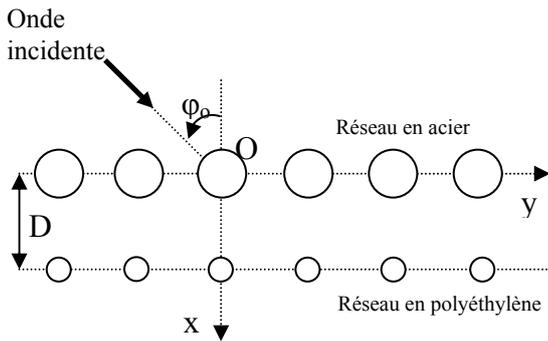


Figure 7 : bi-réseau acier/polyéthylène

Les résultats numériques concernant ce type de bi-réseau sont présentés Figure 8 dans le cas où l'insonation se fait du côté acier, les rayons des tubes étant identiques.

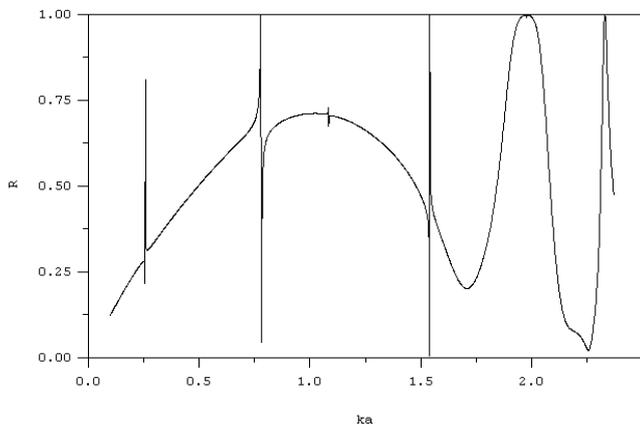


Figure 8 : Coefficient de réflexion d'un bi-réseau (acier et polyéthylène).

En comparant cette figure avec les figures 3 et 5, on peut observer que le coefficient de réflexion d'un bi-réseau est la superposition des coefficients de réflexion du réseau en acier et du réseau en polyéthylène. On peut donc distinguer facilement les informations provenant de chaque type de matériau.

#### 5 Analyse de N biréseaux linéaires

On étudie maintenant un cristal phononique composé de  $N$  bi-réseaux linéaires, chaque bi-réseau étant constitué de la même manière (acier/polyéthylène) qu'au paragraphe précédent. On note  $R(j)$  et  $T(j)$  les coefficients de réflexion et de transmission globaux pour  $j$  bi-réseaux ( $2 < j < N$ ) quand l'insonation se fait côté acier et  $R_d(j)$  et  $T_d(j)$  les coefficients de réflexion et de transmission globaux pour  $j$  bi-réseaux quand l'insonation se fait côté polyéthylène. Le schéma de la Figure 9 décrit en particulier la situation pour un cristal à deux bi-réseaux (trait gras : réseau acier, trait fin : réseau polyéthylène). Il permet de trouver les formules de récurrence reliant les coefficients de réflexion et de transmission quand on passe d'un cristal à  $(j-1)$  bi-réseaux à un cristal à  $j$  bi-réseaux :

$$R(j) = R(j-1) + \frac{R(1)T^2(j-1)e^{j\varphi_R}}{1 - R(1)R_d(j-1)e^{j\varphi_R}} \quad (18)$$

et

$$T(j) = \frac{T(1)T(j-1)e^{j\frac{\varphi_R}{2}}}{1 - R(1)R_d(j-1)e^{j\varphi_R}} \quad (19)$$

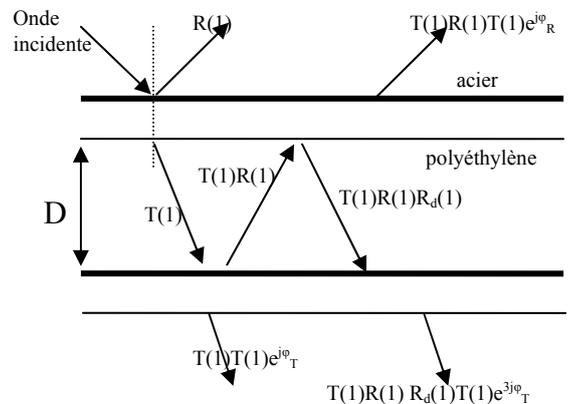


Figure 9 : cristal phononique à deux bi-réseaux

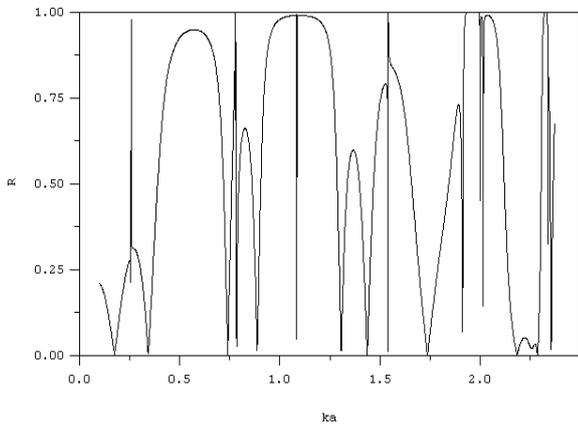


Figure 10 : Coefficient de réflexion de 3 bi-réseaux (acier et polyéthylène)

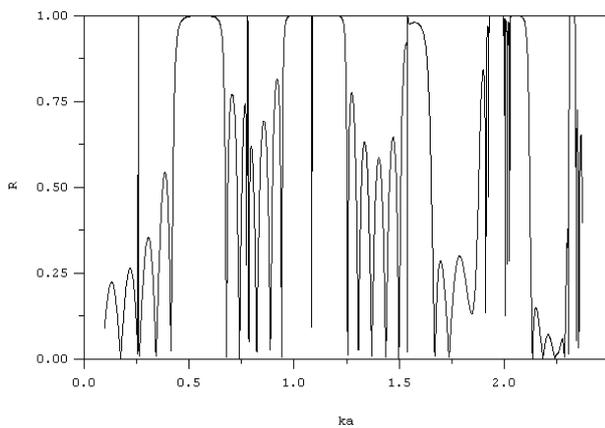


Figure 11 : Coefficient de réflexion de 6 bi-réseaux (acier et polyéthylène)

Tout se passe comme si les coefficients de réflexion et de transmission de  $N$  bi-réseaux étaient la superposition de ces coefficients pour des réseaux uniformes. On constate également qu'il y a plus de bandes interdites que dans les cas de réseaux uniformes, sur une même gamme de fréquence réduite.

Une transition très fine est apparue dans la bande interdite située entre 0,9 et 1,3, associée au réseau uniforme de tubes en acier. La fréquence réduite de cette transition correspond exactement à celle du premier pic de la fonction de forme de diffusion d'un tube en polyéthylène. On crée donc une bande passante très étroite dans une bande interdite en intercalant dans le réseau de tubes en acier un réseau de tubes en polyéthylène.

## 6 Conclusion

L'examen des tracés des coefficients de réflexion par  $N$  bi-réseaux montre que tout se passe comme s'ils étaient la superposition des coefficients de réflexion et de transmission par  $N$  réseaux de tubes en acier et  $N$  réseaux de tubes en polyéthylène. Par ailleurs, on peut observer dans la bande interdite centrale, sur la gamme de fréquence étudiée, l'apparition d'une bande passante très fine permettant la transmission d'ondes à travers le cristal, n'existant pas pour un réseau uniforme de tubes en acier. On peut voir l'ensemble des réseaux de tubes en polyéthylène comme l'introduction de défauts dans un réseau uniforme de tubes en acier. Ceci explique le dernier

phénomène décrit. On a ainsi créé un filtre très sélectif. Des études non présentées ici, au-delà de la première fréquence de coupure et en incidence oblique, montrent des tendances similaires. Une validation expérimentale est en cours.

## Références

- [1] Twersky V., "On the scattering of waves by an infinite grating", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **AP-4** 330-345 (1956).
- [2] Twersky V., "On scattering of waves by the infinite grating of circular cylinders", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **10**, 737-765 (1962)
- [3] Huang X.Y., Heckl M., "Transmission and dissipation of sound waves in tube bundles", *Acustica* **78**, 191-200 (1993).
- [4] Mulholland L. S., Heckl M., "Multidirectional sound wave propagation through a tube bundle", *J. Sound Vibration* **176**(3), 377-398 (1994).
- [5] Robert S., Franklin H., J.-M. Conoir, "Elastic resonances of a periodic array of fluid-filled cylindrical cavities embedded in an elastic matrix", *J. Sound Vibration* **289**, 109-129 (2006).
- [6] Sainidou R., Djafari-Rouhani B., Pennec Y., Vasseur O., "Locally resonant phononic crystals made of hollow spheres and cylinders", *Physical Review* **024302** (2006).