



HAL
open science

Indépendance de l'adaptation du propagateur et de la régularisation en holographie acoustique

Vincent Martin, Thibault Le Bourdon

► **To cite this version:**

Vincent Martin, Thibault Le Bourdon. Indépendance de l'adaptation du propagateur et de la régularisation en holographie acoustique. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00542590

HAL Id: hal-00542590

<https://hal.science/hal-00542590v1>

Submitted on 3 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon 12-16 Avril 2010

Indépendance de l'adaptation du propagateur et de la régularisation en holographie acoustique

Vincent Martin^{1,2}, Thibault Le Bourdon^{2,1}

¹CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris

²UPMC Univ. Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris
vincent.martin@upmc.fr

L'holographie acoustique procède par inversion d'un propagateur pour identifier la vitesse vibratoire d'un corps sonore à partir de la pression acoustique rayonnée sur une antenne de microphones. Ce champ de pression est dit hologramme. L'adéquation du propagateur avec l'hologramme mesuré est garant de la véracité de la vitesse identifiée. Or, la plupart du temps, ce propagateur n'est pas bien connu. Mais il a été montré que l'hologramme peut donner accès au propagateur en adaptant certains de ses paramètres (des admittances de conditions aux limites par exemple) afin de réduire une fonction coût issue de l'interprétation géométrique de l'holographie vue comme une minimisation d'une norme hermitienne.

On montrera que cette adaptation du propagateur est indépendante de la régularisation qui est mise en oeuvre pour garantir une certaine qualité de l'inversion de la matrice de propagation (ou de transfert). Il apparaîtra que la quantité de régularisation optimale est nettement moindre en présence d'un propagateur adapté. De plus, adaptation du propagateur et moindre régularisation conduisent à une vitesse de bien meilleure qualité.

Ces assertions seront observées sur une modélisation numérique d'un disque épais vibrant sur ses deux faces ainsi que sur son épaisseur, alors que la vitesse est identifiée seulement sur une des faces du disque.

1 Introduction

L'identification de la vitesse vibratoire d'un corps sonore de position connue à partir de la mesure de la pression acoustique qu'il rayonne est un problème ancien motivé par la recherche d'une mesure non-intrusive de cette vitesse vibratoire. Cette technique est dite holographie acoustique. En régime harmonique, le passage de la pression acoustique à la vitesse vibratoire a fait appel à la transformée de Fourier pour les variables conjuguées que sont les coordonnées de l'espace et les nombre d'onde [1] puis, plus tard, à la représentation intégrale du champ rayonné [2]

Les traitements sont aujourd'hui assez bien maîtrisés. La mise en oeuvre expérimentale reste exigeante entre autres à cause du besoin d'un grand nombre de points de mesure nécessitant soit un enregistreur ayant une bonne centaine de voies [3, partie B, Evolution de la technologie en ingénierie acoustique aérienne] soit une procédure itérative de mesure.

Il est vrai que l'holographie fournit de belles images mais nous sommes assez démunis pour prendre confiance dans ces images (à moins de faire intervenir un autre type de mesure de la vitesse vibratoire, limitant alors l'intérêt de la seule holographie). Parmi les raisons à l'origine d'images belles mais peu fiables, le propagateur acoustique utilisé lors du passage de la pression à la vitesse joue un grand rôle. Dès que le problème se présente avec des conditions aux limites mal définies, nous avons montré que le choix de

conditions aux limites approximatives pratiques n'est pas sans influence. On est alors conduit à vouloir identifier la vitesse vibratoire tout autant que le propagateur.

Cette recherche a donné lieu à une thèse [4]. Outre le succès de l'opération, les expériences numériques effectuées ont permis plusieurs observations. En particulier, la technique de l'holographie peut être interprétée en termes géométriques qui facilitent la définition de la qualité du processus, mais pas (pas encore) de la qualité des résultats obtenus quant à la vitesse vibratoire, même si les deux qualités vont de pair. Et il apparaît que la procédure de régularisation, ici de Tikhonov [5, Ch3], ne modifie pas la qualité du processus, bien qu'améliorant la qualité de la vitesse identifiée. Ce point particulier est développé dans ce papier. Notons que la régularisation a un prix [6]

Les expériences numériques ont aussi montré que la régularisation est d'autant plus faible que le propagateur est mieux identifié, même sans l'obtenir avec une grande précision. De plus, cette moindre régularisation fournit une vitesse vibratoire d'autant plus juste que l'adaptation du propagateur a eu lieu. L'intérêt de cette dernière s'ensuit.

Pour l'exposé d'aujourd'hui, le développement repose sur un hologramme exact mais nos travaux ont aussi porté sur la maîtrise des erreurs en présence d'erreur sur l'objectif (ici l'hologramme).

2 Expériences numériques

2.1 Motivation et configuration

Le roulement des voitures fait du bruit surtout par l'air-pumping proche du contact roue/chaussée, et peut-être aussi par le rayonnement des vibrations du pneumatique. L'holographie acoustique de champ proche serait-elle capable d'identifier les vibrations du pneu en roulement? Dans l'état actuel de nos expériences, on ne peut pas apporter une réponse à cette question. Mais l'occasion nous est donnée de justifier la question de l'adaptation du propagateur.

La roue est en partie entourée de la carrosserie (figure 1a). L'antenne plane des microphones ne permettra que l'identification de la vitesse vibratoire de la face "avant" de la roue. Mais la pression captée par l'antenne dépend aussi de l'environnement de la roue. Quelles sont les conditions aux limites qu'il faudra envisager? Celles-ci proviennent de la carrosserie, de la cavité roue, du rayonnement des vibrations de la bande de roulement et de la face "arrière" de la roue. Pour aborder l'identification du propagateur, on simplifie la configuration en envisageant une roue dans un milieu 3D non borné (fig. 1b). Elle rayonne une pression acoustique sur l'antenne en Γ_H (fig. 2a). Lors du problème inverse, on envisage la roue dans l'espace 3D semi-infini (figure 2b). On saura déterminer les conditions aux limites sur le plan qui contient la face avant de la roue. Pourra-t-on retrouver ces conditions aux limites seulement à l'aide de l'hologramme?

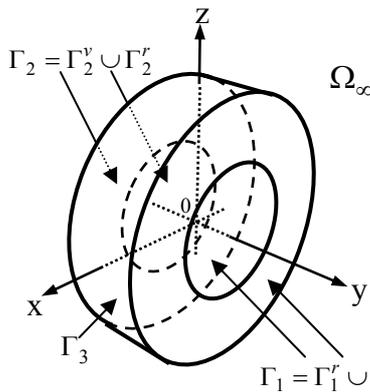


Figure 1.

En haut 1a: roue avec son environnement et antenne plane.

En bas 1b: disque épais dans l'espace 3D non borné

2.2 Modèle dans l'espace 3D semi-infini (en régime harmonique)

Soient ρ la densité de l'air, ω la pulsation, k le nombre d'onde, v la vitesse vibratoire, p la pression

acoustique, β l'admittance acoustique, H l'équation de Helmholtz, u un scalaire, \mathbf{u} un vecteur et \mathbf{u}' son transposé, \mathbf{U} une matrice et \mathbf{U}^* sa transposée conjuguée, $i = \sqrt{-1}$.

Dans l'espace 3D semi-infini de la figure 2b, il a été montré que l'opérateur équivalent à celui dans l'espace 3D non borné de la figure 1b est :

$$\left\{ \begin{array}{l} H p = 0 \quad \text{dans } \Omega_{1/2\infty} \text{ (extérieur au plan } x0z) \\ \partial_y p + i k \beta_1 p = -i \rho \omega v \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \partial_y p + i k \beta_s^c p = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s^c \\ \partial_y p = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{ext} \quad (\text{information a posteriori}) \\ \text{Condition de Sommerfield (rayonnement en } +\infty) \end{array} \right.$$

La forme intégrale de l'opérateur avec le noyau g_N tel que $\partial_n g_N = 0$ sur le plan $x0z$ est :

$$\begin{aligned} p(Q) &= i \rho \omega \int_{\Gamma_1} v(P) g_N(P, Q) dP \\ &+ i k \int_{\Gamma_1} \beta_1 p(P) g_N(P, Q) dP \\ &+ i k \int_{\Gamma_s^c} \beta_s^c p(P) g_N(P, Q) dP \end{aligned}$$

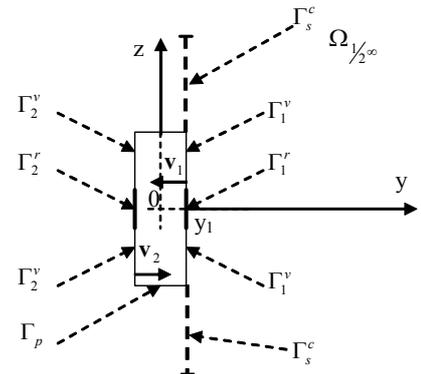
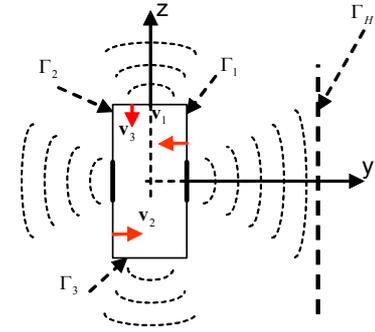


Figure 2

En haut 2a: rayonnement du disque dans l'espace 3D

En bas 2b: disque dans le semi-espace 3D

Après discrétisation des frontières et approximation par collocation, le modèle numérique est

$$\mathbf{p}(Q_s \in \partial\Omega) = (\mathbf{I} - i k \mathbf{A}(\beta_1, \beta_s^c))^{-1} i \rho \omega \mathbf{B} \mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \left(Q \in \Omega_{1/2^\infty} \right) &= i\rho\omega \\ \left(ik \mathbf{c}' \left(\beta_1, \beta_s^c \right) \left(\mathbf{I} - ik \mathbf{A} \left(\beta_1, \beta_s^c \right) \right)^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{d}' \right) \mathbf{v} \\ &= \mathbf{E} \left(\beta_1, \beta_s^c \right) \mathbf{v} \end{aligned}$$

Pour l'expérience numérique du problème direct en 3D non borné, le disque est maillé avec 128 facettes : 40 sur la face avant, 40 sur la face arrière, 48 sur le pourtour.

Lors du problème inverse, la pression est "mesurée" sur une antenne de 11x11=121 points alors que la vitesse est cherchée sur la face avant (sur 40 points).

Résoudre le problème surdéterminé avec le modèle donné, (c'est-à-dire avec les paramètres $\beta = (\beta_1, \beta_s^c)$ connus) revient à résoudre le problème

$$\min_{\mathbf{v}} J_{\beta}(\mathbf{v}) = \min_{\mathbf{v}} \left\| \mathbf{E}_{\beta} \mathbf{v} - \mathbf{p}_H \right\|_{L^2(\Gamma_H)}^2 \quad \text{de solution}$$

$$\mathbf{v}^{opt} = \left(\mathbf{E}_{\beta}^* \mathbf{E}_{\beta} \right)^{-1} \mathbf{E}_{\beta}^* \mathbf{p}_H, \quad \text{conduisant à}$$

$$J_{\beta, \min} = J_{\beta}(\mathbf{v}^{opt}) = \left\| \mathbf{E}_{\beta} \left(\mathbf{E}_{\beta}^* \mathbf{E}_{\beta} \right)^{-1} \mathbf{E}_{\beta}^* \mathbf{p}_H - \mathbf{p}_H \right\|_{L^2(\Gamma_H)}^2.$$

$$\text{En notant } \sqrt{\frac{J_{\beta, \min}}{\left\| \mathbf{p}_H \right\|_{L^2(\Gamma_H)}^2}} = \sin \psi \text{ avec } \psi \in [0, \pi/2], \text{ il}$$

apparaît que l'angle ψ est un indicateur de la qualité de la minimisation notée $Q = 1/\sin \psi$: elle est infinie quand $\psi = 0$ et est la pire quand $\psi = \pi/2$. (La qualité $Q = 1/\tan \psi$ aurait été une meilleure définition...)

Adapter le modèle c'est trouver $\beta = (\beta_1, \beta_s^c)$ qui résoud $\min_{\beta} \sin \psi(\beta)$ c'est à dire

$$\min_{\beta} J_{\min}(\beta) = \min_{\beta} \left\| \mathbf{E}_{\beta} \left(\mathbf{E}_{\beta}^* \mathbf{E}_{\beta} \right)^{-1} \mathbf{E}_{\beta}^* \mathbf{p}_H - \mathbf{p}_H \right\|_{L^2(\Gamma_H)}^2.$$

Régulariser le problème c'est résoudre $\min_{\mathbf{v}} J_{\lambda, \beta}(\mathbf{v})$ où

$J_{\lambda, \beta}(\mathbf{v}) = \left\| \mathbf{E}_{\beta} \mathbf{v} - \mathbf{p}_H \right\|_P^2 + \lambda \left\| \mathbf{p}_H \right\|_P^2$ avec le paramètre λ donné *a priori*. Celui-ci est optimal s'il résoud $\min_{\lambda} \left(\min_{\mathbf{v}} J_{\lambda, \beta}(\mathbf{v}) = \left\| \mathbf{E}_{\beta} \mathbf{v} - \mathbf{p}_H \right\|_P^2 + \lambda \left\| \mathbf{p}_H \right\|_P^2 \right)$. Une telle régularisation sert à mieux approcher l'inverse de la matrice \mathbf{E}_{β} lorsqu'elle est mal conditionnée. Ce papier est centré sur l'indépendance entre λ et ψ .

2.3 Résultats graphiques

Les résultats montrent que l'identification de la vitesse vibratoire sur la face avant exige à la fois une adaptation de modèle et une régularisation pour être de qualité.

A 250Hz (cf table 1), la forme modale à deux lignes nodales diamétrales est imposée aussi bien sur les faces avant et arrière que sur le pourtour lors du problème direct. Les amplitudes y sont respectivement 1., 1., 0.6. Il n'y a pas de vitesse vibratoire sur ce qui pourrait correspondre à des jantes. A partir de la pression rayonnée sur l'antenne de 121 points, on cherche à identifier la vitesse sur les 40 points de

la face avant. Les paramètres $\beta = (\beta_1, \beta_s^c)$ révèlent implicitement les vitesses sur la face arrière et sur le pourtour tout autant que le rayonnement arrière.

On remarque sur la figure 3 que la régularisation optimale est d'autant plus faible que le modèle est mieux adapté et qu'alors la norme de la vitesse reconstruite est d'autant meilleure.[4]

Toujours à 250Hz mais avec 6 lignes nodales, on obtient la table 2.

Il a été noté que pour un jeu de données sur β donc à modèle \mathbf{E}_{β} figé, l'angle ψ n'est pas sensible à la variation

$$\text{de } \lambda \text{ dans } J_{\lambda, \beta}(\mathbf{v}) = \left\| \mathbf{E}_{\beta} \mathbf{v} - \mathbf{p}_H \right\|_P^2 + \lambda \left\| \mathbf{p}_H \right\|_P^2$$

3 Analyse

Avant l'analyse proprement dite, on traduit en termes ensemblistes [4] ce que les expériences numériques nous ont appris.

Soit V l'ensemble \mathbb{C}^n des vecteurs vitesses. Celles-ci sont cherchées en 40 ou 150 points sur l'aire Γ_1 et n vaut

40 voire 150. Soit P l'ensemble \mathbb{C}^m des vecteurs pressions. Celles-ci sont mesurées sur une antenne de m points (ici m vaut 121 voire 400). Les espaces de travail

sont donc de dimension finie. Soit \mathbf{E}_{β} l'opérateur qui fournit les pressions en fonction des vitesses, opérateur linéaire par rapport à ces vitesses (mais non par rapport aux conditions aux limites exprimées via l'admittance β). On a

$\mathbf{E}_{\beta} \mathbf{v} = \mathbf{p}_H$. Comme V ne peut pas rayonner n'importe quelle distribution de pression sur l'hologramme, on dispose de l'écriture $\mathbf{E}_{\beta} : V \rightarrow \mathbf{E}_{\beta}(V) \subset P$.

Lorsque le modèle (l'opérateur) est exact parce que les conditions aux limites le sont, lorsque la mesure sur l'hologramme est parfaite, on a $\mathbf{p}_H \in \mathbf{E}_{\beta}(V)$ et l'on peut remonter à la vitesse exacte, tout du moins en principe et d'un point de vue seulement fonctionnel. En pratique, le

calcul s'effectue par $\mathbf{v}^{opt} = \left(\mathbf{E}_{\beta}^* \mathbf{E}_{\beta} \right)^{-1} \mathbf{E}_{\beta}^* \mathbf{p}_H$ et comme

$\mathbf{p}_H = \mathbf{E}_{\beta} \mathbf{v}^{ex}$ il apparaît $\mathbf{v}^{opt} = \mathbf{v}^{ex}$ et $J_{\beta, \min} = 0$. Dans

l'espace 3D non borné et dans cette situation où tout est exact, l'expérience numérique montre que le coefficient de régularisation optimal est excessivement faible mais reste quand même utile pour retrouver la forme modale à défaut de retrouver les bonnes amplitudes modales. Il est en effet connu que l'holographie d'une pièce vibrante 3D avec une antenne plane en une seule position ne donne pas des résultats parfaits.

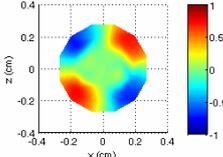
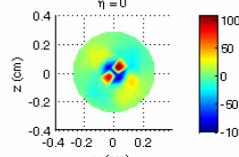
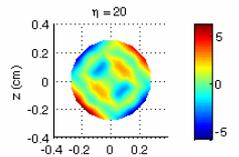
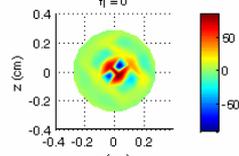
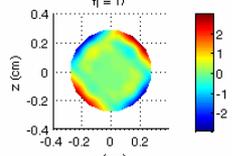
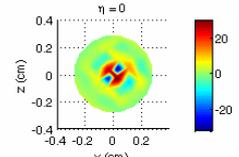
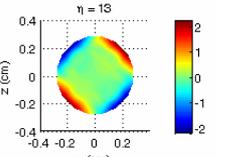
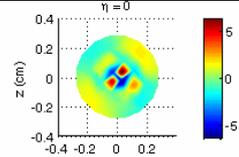
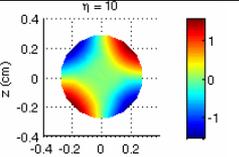
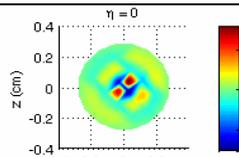
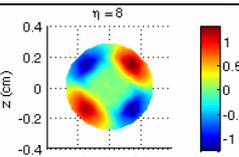
ψ en deg	Vitesse normale imposée sur Γ_1^v	$\lambda = 0$	$\lambda = \lambda^{opt}$
15			
6			
4			
2			
0.9			

Table 1. Vitesse vibratoire identifiée avec adaptation du propagateur et sans ou avec régularisation

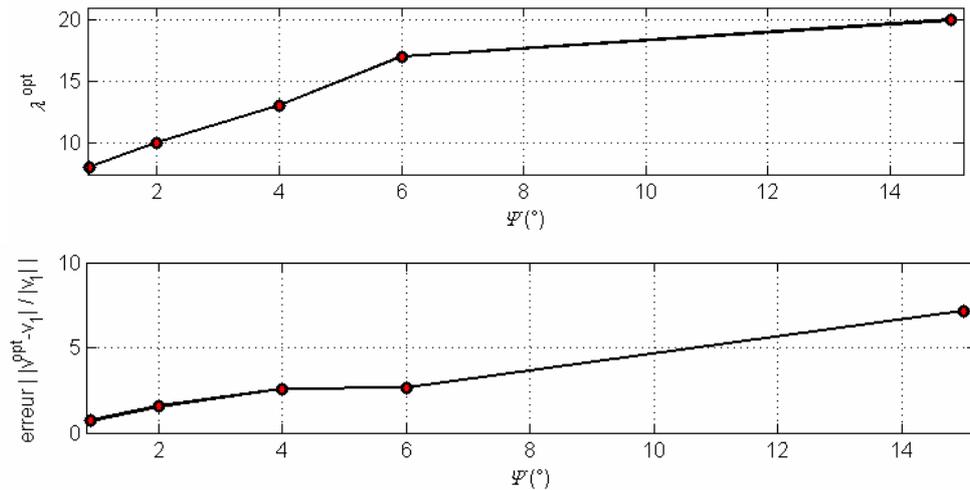


Figure 3.

En haut, réduction de la régularisation optimale en fonction de la qualité du propagateur.
 En bas, erreur sur la vitesse vibratoire en fonction de la qualité du propagateur (et de sa régularisation optimale afférente).

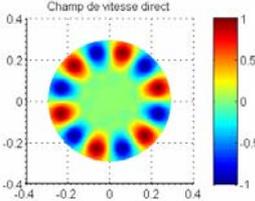
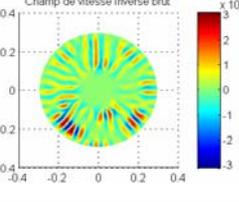
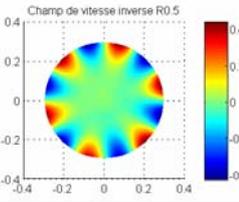
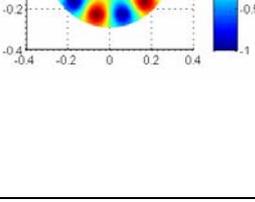
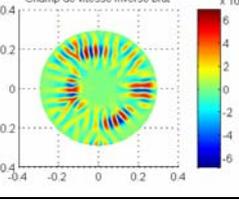
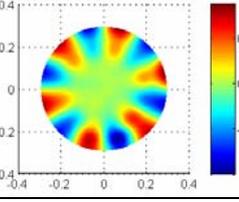
ψ	Vitesse normale imposée sur Γ_1	$\lambda = 0$	$\lambda = \lambda^{opt}$	$\frac{\ \mathbf{v}_1^{opt} - \mathbf{v}^{ex}\ }{\ \mathbf{v}^{ex}\ }$
élevé car calcul avec $\beta = 0$				0.72 avec $\lambda^{opt} = 0.5$
faible car calcul avec adaptation du propagateur				0.48 avec $\lambda^{opt} = 0.001$

Table 2. Vitesse vibratoire identifiée avec adaptation du propagateur et sans ou avec régularisation

Si maintenant l'objectif $\hat{\mathbf{p}}_H \notin \hat{\mathbf{E}}_\beta(V)$ soit que l'on ait le bon modèle avec $\hat{\mathbf{E}}_\beta(V) = \mathbf{E}_\beta(V)$ mais que la mesure soit erronée sur l'antenne des microphones et qu'alors $\hat{\mathbf{p}}_H = \tilde{\mathbf{p}}_H \neq \mathbf{p}_H$, soit que l'on ait un mauvais modèle avec $\hat{\mathbf{E}}_\beta(V) \neq \mathbf{E}_\beta(V)$ tout en ayant une mesure parfaite et donc $\hat{\mathbf{p}}_H = \mathbf{p}_H$. Dans la seconde configuration (figure 4) et d'un point de vue fonctionnel, l'opérateur $\hat{\mathbf{E}}_\beta(V)$ ne peut pas s'inverser pour trouver une vitesse dans V . En pratique la résolution de $(\hat{\mathbf{E}}_\beta^* \hat{\mathbf{E}}_\beta) \mathbf{v} = \hat{\mathbf{E}}_\beta^* \mathbf{p}_H$ conduit à $\hat{\mathbf{v}}^{opt} \neq \mathbf{v}^{ex}$. Mais, s'il est vrai que l'on obtient une solution dans V , elle peut être loin de la solution exacte. \mathbf{v}^{ex}

En revanche, l'expérience numérique montre que la résolution de $(\lambda \mathbf{I} + \hat{\mathbf{E}}_\beta^* \hat{\mathbf{E}}_\beta) \mathbf{v} = \hat{\mathbf{E}}_\beta^* \mathbf{p}_H$ avec la valeur optimale de λ donne $\hat{\mathbf{v}}_{\lambda^{opt}}^{opt} \neq \mathbf{v}^{ex}$ mais plus proche (au sens de la norme dans V) de la solution exacte que $\hat{\mathbf{v}}^{opt}$. Cette méthode crée un opérateur $\mathbf{R}_\lambda = (\lambda \mathbf{I} + \hat{\mathbf{E}}_\beta^* \hat{\mathbf{E}}_\beta)^{-1} \hat{\mathbf{E}}_\beta^* \mathbf{p}_H$ pour approcher l'inverse inaccessible $\hat{\mathbf{E}}_\beta^{-1}$ de $\hat{\mathbf{E}}_\beta$ mais elle n'agit pas sur l'opérateur $\hat{\mathbf{E}}_\beta$ lui-même. L'espace $\hat{\mathbf{E}}_\beta(V)$ n'est donc pas modifié et, ne modifiant pas non plus l'objectif $\hat{\mathbf{p}}_H = \mathbf{p}_H$, la distance minimale (avec la norme dans P) d_{min} de $\hat{\mathbf{p}}_H = \mathbf{p}_H$ à $\hat{\mathbf{E}}_\beta(V)$ ne sera pas altérée par la régularisation (optimale ou pas).

Enfin l'expérience numérique nous apprend que $\|\hat{\mathbf{v}}_{\lambda^{opt}}^{opt} - \mathbf{v}^{ex}\|_V$ diminue quand la distance d_{min} diminue.

On démontre maintenant par voie algébrique que la régularisation ne modifie pas la distance de l'objectif à l'espace lié au modèle.

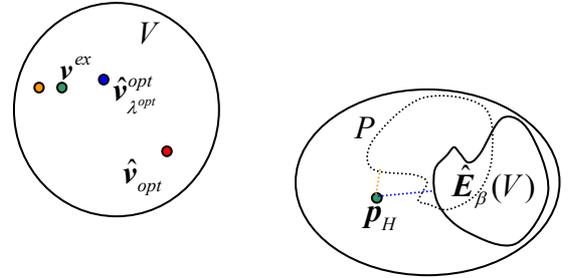


Figure 4. Espace des solutions et des objectifs. Influence de l'adaptation du modèle et de la régularisation dans l'espace des solutions, telle qu'observée lors des expériences numériques.

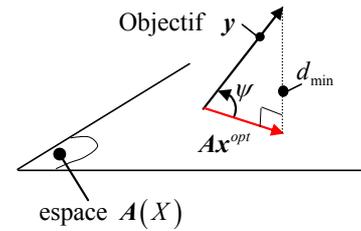


Figure 5. Interprétation de l'espace des objectifs en géométrie euclidienne

1/ Soit $\min_x J(\mathbf{x}) = \min_x \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ avec $\mathbf{A} : X = \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbf{A}(X) \subset Y = \mathbb{C}^m$ et $J : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ ou $m > n$. La figure 5 donne la représentation euclidienne avec $X = \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{A}(X) = Y \subset \mathbb{R}^3$, et dans le cas où $\mathbf{y} \notin \mathbf{A}(X) \subset Y$.

Soit la décomposition en valeurs singulières de \mathbf{A} telle que $\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{U}}_{m,n} \underbrace{\mathbf{\Lambda}}_{m,m \text{ diagonale}} \underbrace{\mathbf{V}^*}_{n,n}$ avec $\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^* = \mathbf{I}_m$ et $\mathbf{V}^* \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^* = \mathbf{I}_n$.

La matrice U est formée des vecteurs de base de l'espace objectif où se situe la donnée y , et la matrice V est formée des vecteurs de base de l'espace X de la variable x . Quand $y \notin A(X) \subset Y$, on ne peut pas trouver $x \in X$ (on ne peut pas inverser A) et on remplace A^{-1} par le terme dit pseudo-inverse de A qui vaut $\underbrace{\left({}^p A \right)^{-1}}_{n,m} = \underbrace{\left(A^* A \right)^{-1}}_{n,n} \underbrace{A^*}_{n,m}$. Cette procédure conduit à

la solution $x^{opt} \in X$ qui donne $y' \in A(X)$ le plus proche de y au sens de la norme hermitienne dans $Y = \mathbb{C}^m$.

Comme $x^{opt} = \left({}^p A \right)^{-1} y$, il vient $x^{opt} = V \left({}^p A \right)^{-1} U^* y$ avec $\underbrace{\left({}^p A \right)^{-1}}_{n,m} = \underbrace{\left(A^* A \right)^{-1}}_{n,n} \underbrace{A^*}_{n,m}$. On

a aussi $\underbrace{A \left({}^p A \right)^{-1}}_{m,m} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ conduisant à

$$\begin{aligned} Ax^{opt} &= AV \left({}^p A \right)^{-1} U^* y = \left(UAV^* \right) V \left({}^p A \right)^{-1} U^* y \\ &= UA \left({}^p A \right)^{-1} U^* y = U \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* y \end{aligned}$$

2/ Soit la fonctionnelle de Tikhonov qui sert à approcher la matrice inverse A^{-1} et qui est une procédure de régularisation : $J_\lambda(x) = \|Ax - y\|_Y^2 + \lambda \|x\|_X^2$ avec $J_\lambda : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

A λ donné, $x'_\lambda = V \left({}^p A_\lambda \right)^{-1} U^* y$ résulte de $J_\lambda(x)$ minimisé où $\left({}^p A_\lambda \right)^{-1} = \left(A^* A + \lambda I_n \right)^{-1} A^*$.

3/ Poser $A_\lambda = UA_\lambda V^*$ sans encore avoir défini ce qu'est A_λ et soit $J'_\lambda(x) = \|A_\lambda x - y\|^2$ dont la minimisation, à λ donné, fournit x'_λ . Il apparaît $x'_\lambda = x^{opt}$. Ainsi, pour le moment, les fonctionnelles $J_\lambda(x) = \|Ax - y\|^2 + \lambda \|x\|^2$ et $J'_\lambda(x) = \|A_\lambda x - y\|^2$ possèdent le même objectif y et la même valeur optimale de leur variable.

4/ Or l'on a

$$\begin{aligned} A_\lambda x'_\lambda &= A_\lambda x^{opt} \\ &= \left(UA_\lambda V^* \right) V \left({}^p A_\lambda \right)^{-1} U^* y \\ &= U \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* y = Ax^{opt} \end{aligned}$$

Dans ces conditions, les fonctionnelles $J(x) = \|Ax - y\|^2$ et $J'_\lambda(x) = \|A_\lambda x - y\|^2$ partagent le même objectif et la

même distance minimale d_{\min} et ce quel que soit λ . Ainsi

$$\text{l'angle } \psi \text{ tel que } \cos \psi = \frac{\|Ax^{opt}\|}{\|y\|} = \frac{\|A_\lambda x'_\lambda\|}{\|y\|} \text{ ne}$$

dépend pas du coefficient de Tikhonov λ . Dans le cas de la configuration euclidienne de la figure 5, le schéma vaut pour les deux fonctionnelles.

5/ La régularisation de Tikhonov ne modifie pas le plan modèle $A(X)$ dans l'espace Y des objectifs, mais elle a un rôle dans l'espace V des solutions. On ne s'attend donc pas à pouvoir la représenter dans l'espace des objectifs.

4 Conclusion

En holographie acoustique, l'adaptation du modèle permet de limiter la quantité de régularisation et donne de meilleurs résultats en situation nominale.

En ce qui concerne la qualité des résultats, elle dépend de la qualité du processus holographique (pour lequel on dispose d'un descripteur de qualité) mais elle dépend aussi du coefficient optimal de régularisation. Quel est alors le descripteur de la qualité des résultats en fonction de ψ et de λ^{opt} ? Un tel descripteur serait très utile à bien d'autres problèmes inverses en acoustique.

Les auteurs sont reconnaissants au programme REBECA (Réduction du Bruit Extérieur dans la Conception Automobile) financé par l'ADEME de leur avoir permis cette recherche.

Références

- [1] Maynard J.D., Williams E.G., Lee Y., "Nearfield acoustic holography (NAH) 1. Theory of generalized holography and the development of NAH", *Journal of the Acoustical Society of America*, 78(4), 1395-1412 (1985)
- [2] Bai M.R., "Application of BEM-based acoustic holography to radiation analysis of sound sources with arbitrarily shaped geometries", *Journal of the Acoustical Society of America*, 92(1), 533-549 (1992)
- [3] Martin V., Le Bourdon T., Alais P., Moingeon H., Ollivon C., Ollivier F., "Amélioration des méthodes d'antennerie en acoustique", *Rapport D13 du contrat n° 0566C0073, ADEME*, (mars 2008)
- [4] Le Bourdon T., "Interprétation géométrique de l'holographie acoustique de champ proche; utilisation pour l'adaptation du propagateur", *Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris6* (2009)
- [5] Kirsch A., "An introduction to the mathematical theory of inverse problems", *Springer* (1996)
- [6] Kim Y., Nelson P.A., "Spatial resolution limits for the reconstruction of acoustic source strength by inverse methods", *Journal of Sound and Vibration*, 265, 583-608 (2003)