



HAL
open science

Effets diffractifs et fonction de transfert de l'atmosphère à grande distance: Application au 'rumble' du bang sonique

Philippe Delorme

► **To cite this version:**

Philippe Delorme. Effets diffractifs et fonction de transfert de l'atmosphère à grande distance: Application au 'rumble' du bang sonique. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00541404

HAL Id: hal-00541404

<https://hal.science/hal-00541404>

Submitted on 30 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Effets diffractifs et fonction de transfert de l'atmosphère à grande distance: Application au "rumble" du bang sonique

Philippe Delorme[†]

[†] Numerical Simulations & Aero-acoustics Department, ONERA Chatillon, 92300, France

philippe.delorme@onera.fr

La propagation dans l'atmosphère du bang sonique est un phénomène complexe. Du point de vue des résultats expérimentaux fondés sur le bang sonique du Concorde [1], on peut distinguer quatre zones : champ proche (quelques longueurs du mobile), champ moyen (trace au sol dans la carapette primaire, fin des effets non-linéaires), champ lointain (entre 50 et 500 kilomètres), champ très lointain (au delà de 500 kilomètres). La première zone se modélise avec les équations de la mécanique des fluides et pour les corps élancés, on peut même utiliser une théorie linéarisée. Pour la deuxième zone, on doit à Whiteham une approche de "rayon non-linéaire" qui a réconcilié l'expérience et la théorie en expliquant la formation de l'onde en N. Pour la troisième zone on observe un allongement anormal du signal avec des oscillations chaotiques où l'on n'arrive pas à reconnaître une onde en N, même adoucie par les effets dissipatifs. On appelle ce phénomène le *rumble* par analogie au grondement du tonnerre lorsque l'éclair a eu lieu très loin de l'auditeur. La quatrième zone est encore plus incompréhensible.

Dans cette communication on essaye de comprendre les phénomènes de la troisième zone. En fait la fonction de transfert de l'atmosphère qui en champ proche est un retard pur (le temps de propagation) avec un gain correspondant à l'atténuation géométrique est un modèle idéal. On sait bien qu'à haute fréquence et à grande distance elle doit être corrigée des effets d'atténuation. Ce modèle doit aussi être corrigé aux basses fréquences car l'atmosphère n'est pas un milieu homogène et donc diffracte. En s'appuyant sur les équations d'Euler linéarisées ([2] pp 587), on fait apparaître un nombre sans dimension $g.r/a^2$ (avec g la constante de gravitation, r la distance de propagation et a la vitesse du son). Ce nombre vaut 1 lorsque la distance est de l'ordre de 10 km [3]. L'objectif de cette communication est donc de voir si cette modification de la fonction de transfert atmosphérique peut expliquer le "rumble" d'un avion supersonique.

1 Introduction

Lorsque l'on observe expérimentalement le bang sonique d'un avion à différentes distances de la trajectoire, on observe (par exemple pour le Concorde c.f. [1]) :

- très près (quelques envergures) une signature de pression complexe qui est fortement corrélée à la forme de l'avion ;
- à une dizaine de kilomètres (au sol sous la trajectoire) une signature caractéristique d'onde en N qui est à l'origine de la nuisance du bang sonique ;
- à plusieurs dizaines de kms une onde en N "adoucie" de quelques secondes ;
- à quelques centaines de kms on observe un signal infra-sonique de plusieurs minutes comportant des oscillations chaotiques modulées par des bouffées ;
- à plusieurs milliers de kms on observe un signal dont la durée est très importante.

Le but de ce travail est donc d'essayer de comprendre pourquoi l'on observe des signaux aussi différents entre 10 kms (signal impulsif de quelques secondes en forme de N) et quelques centaines de kms signal de plusieurs minutes de forme à priori aléatoire). On ne dispose malheureusement pas d'expérience spécifique qui pourrait nous mettre sur la voie. On tente donc de répondre aux

questions :

- mais où est donc passée l'onde en N ?
- quelle est l'hypothèse physique négligeable pour les courtes propagations et qui ne l'est plus à longue distance

On prolonge une réflexion débutée il y a quelques temps (c.f. [3]) pour tenter d'expliquer le grondement de sources lointaines. Dans un premier temps, on passe en revue, autant que faire ce peut, la physique de la propagation atmosphérique. La piste approfondie ici (qui semble être la plus vraisemblable) est la diffraction provoquée par l'hétérogénéité du milieu due à l'action de la gravité : l'atmosphère en première approximation est en effet un milieu stratifié. On rappelle donc comment on peut modéliser la propagation acoustique dans ce milieu grâce aux équations d'Euler linéarisées. Comme il est difficile de résoudre ces équations numériquement car le domaine est bien trop vaste pour les capacités de calcul actuelles, on a considéré un milieu "académique" où la vitesse du son serait constante c'est-à-dire une atmosphère sans gradient (vertical) de température. Cette hypothèse est exacte au dessus de 11km pour l'"I.S.A" et il peut exister des conditions météorologiques où cela est vrai au dessus du sol. Ainsi on peut mener des calculs analytiques où intervient un argument de type

phase stationnaire (pas forcément très simple). Ainsi on montre l'existence de deux régimes de diffraction selon un nombre sans dimension (*rumble number* ?) rg/a^2 (r : distance de propagation, g la gravité, a la vitesse du son). Si ce nombre est plus petit que 1 ($r \ll 10km$ les effets diffractifs ne jouent pas. Sinon, ces calculs analytiques montrent :

- un allongement du signal,
- l'apparition d'oscillations sans fréquence privilégiée,
- et, phénomène surprenant, une modulation du signal faisant intervenir la transformée de Fourier du signal "source" (et non le signal lui-même)¹ qui pourrait expliquer la *disparition de l'onde en N*.

2 Description des phénomènes physiques régissant la propagation lointaine du bang sonique

On passe en revue rapidement les limites et les hypothèses de la modélisation physique de la propagation du bang sonique depuis le mobile jusqu'au récepteur.

2.1 le champ proche :

La physique est décrite par les équations de Navier et Stokes et les calculs aérodynamiques sont en général en bon accord avec les essais en soufflerie quant à la description du champ de pression à quelques envergures du mobile. Si le corps est élané, un simple calcul linéarisé fournit des résultats convenables.

2.2 la propagation non linéaire :

Pour le calcul du champ moyen donc après une propagation conséquente, on pourrait imaginer prolonger le calcul linéarisé précédent, d'autant plus que par *l'effet géométrique* de la propagation, les niveaux moyens baissent l'hypothèse de petite perturbation semble être améliorée. Mais il n'en est rien car à cause de la longueur des trajets, les ondes de Mach se focalisent en ondes de choc. Ainsi la signature complexe au voisinage du mobile dégénère en une onde en N. On doit à Whiteham d'avoir réconcilier l'expérience et la théorie en prenant en compte les effets non-linéaires de raidissement de front conduisant (en général) à un choc de tête et à un choc de queue séparés par une détente.

2.3 les effets de dissipation et la propagation linéaire :

En fait ces fronts ne sont pas, stricto-sensu, des chocs car la viscosité leur confère une certaine épaisseur, résultat du conflit entre les deux phénomènes antagonistes du raidissement de front et de la viscosité. A cause de l'effet géométrique déjà cité, les effets non-linéaires diminuent au point de disparaître et on peut

1. ce phénomène surprenant a des analogues en optique qui s'expliquent aussi par des arguments à base de phase stationnaire : la figure de diffraction d'un trou circulaire est un sinus cardinal (transformée de Fourier du disque)

de nouveau légitimer la propagation linéaire, la limite étant difficile à cerner.

En première approximation, les effets de viscosité peuvent se modéliser par une fonction de transfert de type passe-bas (en temporel) :

$$F(f) = \exp(-\alpha r f^2)$$

Si r est petit, ce filtre a une fonction de transfert égale à 1, sinon il va adoucir les signaux en supprimant les hautes fréquences. Enfin à longue distance seuls les infra-sons vont se propager. Pour le Concorde, on a bien observé ces ondes en N adoucies.

2.4 la diffraction par l'hétérogénéité du milieu atmosphérique provoquée par la gravité

Désormais il est plausible de revenir à une théorie linéaire de propagation mais en modifiant en conséquence le signal source (et donc en supposant que le signal source est l'onde en N obtenue par calcul de propagation inverse depuis la limite du domaine linéaire).

On peut modéliser la propagation par les équations d'Euler linéarisées autour d'une atmosphère moyenne qui n'est jamais homogène. Dans l'opérateur différentiel obtenu, on distingue (c.f. [7]) le symbole principal (matriciel d'ordre 1) et un opérateur de multiplication (matriciel) où interviennent les gradients du milieu (i.e. si le milieu était homogène, les termes de la matrice disparaîtraient). Si on utilise une théorie de rayon, on ne prend en compte que le symbole principal. En propagation lointaine, cette théorie reposant sur une hypothèse de haute fréquence, devient un peu contradictoire avec le filtrage naturel de la dissipation qui détruit les hautes fréquences.

On peut grâce à la théorie perturbative de Born de comprendre cet effet de diffraction. Notre système se symbolise par les équations :

$$A_0 u + \epsilon B(x) u = h(x)$$

Si G_0 est la matrice de Green connue de l'opérateur homogène A_0 , on peut corriger cette matrice pour prendre en compte la diffraction :

$$u = [G_0 - G_0 \epsilon B(x)] * u$$

$$G \simeq G_0 - G_0 * [\epsilon B(x) G_0]$$

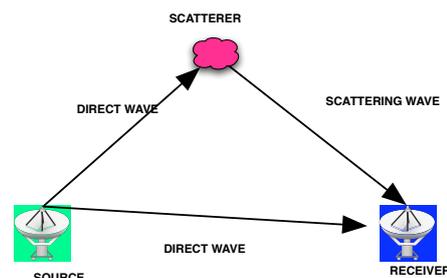


FIGURE 1 – schéma de l'approximation de Born

On a schématisé cet effet par la figure 1. S'il existe un "scatterer" (zone d'hétérogénéité) le signal reçu est

composé du signal direct plus un signal réémis par le scatterer quand il reçoit le signal principal et va ainsi provoquer un écho. Ce phénomène existe donc dans l'atmosphère (à cause de la stratification provoquée par la gravité notamment) mais doit être quantifié car on est sûr expérimentalement qu'il est négligeable à courte distance. Cette quantification est l'objectif majeur de cet article.

2.5 propagation à très longue distance :

On a observé le bang sonique du Concorde à plusieurs milliers de kms (voir [1]). Il semble qu'il puisse exister des guides d'onde permettant des propagations à de telles distances.

2.6 L'atmosphère est un milieu aléatoire :

On sait que l'atmosphère est un milieu turbulent et donc cette turbulence altère certainement la propagation. Cette problématique est d'ailleurs souvent retenue pour expliquer la caractère aléatoire des signaux reçus à longue distance. Cependant elle doit aussi être quantifiée.

3 équations régissant la propagation dans un milieu stratifié

Nous allons maintenant établir un analogue de l'équation d'Helmholtz pour un milieu stratifié où *la température est constante et sans vent*. Elle dérive du cas général des équations d'Euler linéarisées établies par exemple dans [2]. L'indice 0 correspond au milieu porteur (f_0 pour la quantité f). Pour l'atmosphère, on a donc :

- pour la quantité de mouvement suivant z (z est l'axe vertical) :

$$\partial_z P_0 = -\rho_0 g \quad (1)$$

P_0 est la pression, ρ_0 la densité et g la gravité.

- Si on a un profil de température $T_0 = T(z)$ dépendant du flux d'énergie et la loi des gaz parfaits,

$$P = \rho RT \quad (2)$$

on peut calculer les profils de $P_0(z)$ et de $\rho_0(z)$. Pour les fluctuations (avec l'indice 1, f_1 pour la quantité f), on commence par introduire une quantité adimensionnée :

$$\mu = \frac{\rho_1}{\rho_0(z)}$$

et u, v, w sont les composantes de la vitesse. Si on suppose vérifiée, comme souvent, l'hypothèse d'"isentropie" on a :

$$dp_1 = a^2 d\rho_1 \quad a : \text{vitesse du son}$$

On peut écrire ainsi les équations (linéarisées) de conservation de la quantité de mouvement et de la masse :

$$\begin{aligned} \partial_0 u_1 + a^2 \partial_x \mu &= 0 \\ \partial_0 v_1 + a^2 \partial_y \mu &= 0 \\ \partial_0 w_1 + a^2 (\partial_z (\rho_0 \mu) / \rho_0) + g \mu &= 0 \\ \partial_0 \mu + \partial_x u_1 + \partial_y v_1 + \partial_z w_1 + \rho'_0 / \rho_0 w_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

On va maintenant pour alléger l'écriture oublier l'indice 1 sans que cela présente d'ambiguïté.

$$\begin{aligned} \partial_0 u + a^2 \partial_x \mu &= 0 \\ \partial_0 v + a^2 \partial_y \mu &= 0 \\ \partial_0 w + a^2 (\partial_z \mu + k_\mu \mu) &= 0 \\ \partial_0 \mu + \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w + k_w w &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

A cause de la stratification on introduit donc deux nombres d'onde (inverses d'une longueur) k_μ et k_w :

$$\begin{aligned} k_w &= \rho'_0 / \rho_0 = P'_0 / P_0 - T'_0 / T_0 = -\gamma g / a^2 - k_\theta \\ k_\mu &= g / a^2 + k_\mu = (1 - \gamma) g / a^2 - k_\theta \end{aligned} \quad (5)$$

L'expression de k_w s'obtient facilement à partir des formules 2 et 1 et l'expression de la vitesse du son pour un gaz parfait :

$$a^2 = \gamma RT$$

On a gardé momentanément dans les expressions ci-dessus un profil de température variable qui induit donc le terme $k_\theta = T'_0 / T_0$. Dans le cas de l'atmosphère ISA pour une altitude inférieure à 11 km, l'ordre de grandeur de $1/k_\theta \simeq -30 \text{ km}$ et au dessus $k_\theta = 0$. Par contre l'ordre de grandeur de g/a^2 est 10^{-4} m^{-1} et donc n'est pas fondamentalement affecté par l'hypothèse de température constante. On définit donc le nombre d'onde $k_0 = g/a^2$. Ainsi *la longueur caractéristique des effets de gravité est de 10 km*. On revient maintenant à un profil de température constante :

$$\begin{aligned} k_w &= -\gamma k_0 \\ k_\mu &= (1 - \gamma) k_0 \end{aligned} \quad (6)$$

Avec nos hypothèses simplificatrices, on va pouvoir obtenir un analogue de l'équation des ondes pour la quantité μ (qui est localement proportionnelle à la pression). Dans l'équation 5, on dérive la dernière équation (masse) par rapport au temps puis on retranche la première dérivée par rapport à x ainsi que la seconde dérivée par rapport à y pour obtenir :

$$\begin{aligned} \partial_{tt} \mu + a^2 (\partial_z \mu + k_\mu \mu) &= 0 \\ \partial_{tt} \mu + \partial_{xx} \mu + \partial_{yy} \mu + \partial_{tz} w + k_z \partial_t w &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Maintenant grâce à la première équation de 7 et sa dérivation par rapport au temps on obtient un analogue de l'équation des ondes :

$$\Delta \mu - \partial_{tt} \mu / a^2 + k_w \partial_z \mu + k_w k_\mu \mu = 0 \quad (8)$$

Si on suppose une source harmonique en temps on obtiendrait un analogue de l'équation d'Helmholtz. Le calcul de la fonction de Green de cette dernière est traitée dans [3] pour étudier le "rumble" de source lointaine. Pour obtenir la perturbation autour d'un corps élané (l'adjectif élané justifie l'utilisation des équations d'Euler linéarisées) avec les mêmes hypothèses simplificatrices que précédemment, il suffit de faire un changement de repère Galiléen pour se placer dans le repère du mobile. Le mobile est animé d'une vitesse V_0 et on définit son nombre de Mach $M_0 = V_0/a$. Comme on suppose la perturbation stationnaire dans le repère "mobile", il

suffit donc de remplacer dans 8 le terme en ∂_{tt} par ∂_{xx} (l'axe x est la trajectoire du mobile). On obtient ainsi :

$$\partial_{zz}\mu + \partial_{yy}\mu - (M_0^2 - 1)\partial_{xx}\mu + k_w\partial_z\mu + k_w k_\mu\mu = 0 \quad (9)$$

Si le mobile est supersonique, on introduit comme usuellement le nombre de Glauert :

$$\beta = \sqrt{(M_0^2 - 1)}$$

L'équation ressemble fortement à une équation d'onde bidimensionnelle :

$$\Delta_2\mu - \partial_{xx}\mu\beta^2 + k_w\partial_z\mu + k_w k_\mu\mu = 0 \quad (10)$$

L'axe des temps étant remplacé par l'axe x et la vitesse du son par $1/\beta$. (Δ_2 étant le Laplacien bidimensionnel).

4 Fonction de Green

Pour résoudre le problème de la signature acoustique d'un mobile élané, on va donc proposer une méthode analogue à celle utilisée classiquement lorsque l'on suppose l'atmosphère homogène. On se place dans le repère mobile, ce dernier est modélisé par une ligne de source relié à l'aire de section transversale $A(x)$ du mobile. Le champ d'écart de pression est obtenu par convolution de la fonction de Green de l'équation de propagation avec la ligne de source. Ainsi dans le cas homogène on doit résoudre :

$$\Delta_2\mu - \partial_{xx}\mu\beta^2 = 0$$

La fonction de Green de l'équation des ondes 2D est la fonction :

$$G = 1/2\pi \frac{1}{\sqrt{x^2 - \beta^2 r^2}}$$

avec $r^2 = y^2 + z^2$ Si on fait une approximation de champ lointain on a la formule classique sur l'écart de pression :

$$\delta p(x - \beta r) = p_0 \frac{\gamma M_0^2}{\sqrt{2\beta r}} F(x - \beta r) \quad (11)$$

avec F fonction dite de Whitham

$$F(x) = 1/2\pi \int_0^x \frac{A''(s)}{\sqrt{x-s}} ds$$

On va généraliser à notre cas mais de manière un peu différente en utilisant la transformée de Fourier selon x. La solution sera obtenue de la manière équivalente suivante :

1. on prend la transformée de Fourier de la source
2. on la multiplie par la fonction de Green de l'équation correspondant à l'équation de Helmholtz
3. enfin on prend la transformée de Fourier inverse

On utilise simplement la propriété de la transformée de Fourier de transformer le produit de convolution par un produit simple.

La fonction de Green de l'équation de Helmholtz 2D est la fonction de Hankel $H_0^1(\beta\xi r)$ (où ξ est la variable duale de x). dont on connaît un comportement asymptotique en champ lointain

$$H_0^1(\beta\xi r) \simeq e^{-i\beta\xi r} / \sqrt{\beta\xi r}$$

Une transformée de Fourier inverse conduit à la formule 11 Dans notre cas nous avons donc à calculer la fonction de Green de la transformée de Fourier de l'équation 10 soit

$$\Delta_2\mu + \xi^2\mu\beta^2 + k_w\partial_z\mu + k_w k_\mu\mu = 0 \quad (12)$$

soit pour la fonction de Green G :

$$\Delta_2 G + (k_w + k_\mu)\partial_z G + (k_w k_\mu + \xi^2\beta^2)G = \delta(y - y_s)\delta(z - z_s) \quad (13)$$

l'indice s correspondant à la position de la source. Un simple calcul permet de se ramener à l'équation d'Helmholtz "classique" en posant

$$G = e^{bz}\tilde{G}$$

on a :

$$\begin{aligned} \partial_z G &= e^{bz}(\partial_z \tilde{G} + b\tilde{G}) \\ \partial_{zz} G &= e^{bz}(\partial_{zz} \tilde{G} + 2b\partial_z \tilde{G} + b^2\tilde{G}) \end{aligned} \quad (14)$$

Donc \tilde{G} vérifie :

$$\begin{aligned} \Delta_2 \tilde{G} + (k_w + k_\mu + 2b)\partial_z \tilde{G} \\ + (b^2 + (k_w + k_\mu)b + k_w k_\mu + \xi^2\beta^2)\tilde{G} = \\ e^{-bz}\delta(y - y_s)\delta(z - z_s) \end{aligned} \quad (15)$$

De plus comme on a :

$$e^{-bz}\delta(z) = \delta(z)$$

en effet, si ϕ est une fonction test,

$$\langle e^{-bz}\delta, \phi \rangle = \langle \delta, e^{-bz}\phi \rangle = e^{-b0}\phi(0) = \phi(0)$$

Le second membre de 16 est simplement :

$$\delta(y - y_s)\delta(z - z_s)$$

En choisissant $b = -(k_w + k_\mu)/2$ on s'affranchit du terme en ∂_z et donc on est ramené pour le calcul de \tilde{G} à une équation d'Helmholtz 2D :

$$G = e^{-(k_w + k_\mu)z}\tilde{G} \quad (16)$$

$$(\xi^2\beta^2 - \xi_0^2)\tilde{G} + \Delta_2\tilde{G} = \delta(y - y_s)\delta(z - z_s) \quad (17)$$

Avec :

$$\xi_0 = (k_\mu - k_w)/2 = \frac{g}{2a^2} = k_0/2^2 \quad (18)$$

ce qui conduit avec les précautions d'écriture quant à la définition de la racine carrée :

$$\tilde{G} = H_0^1[\sqrt{(\xi^2\beta^2 - \xi_0^2)} r]$$

$$G(\xi, y, z) = e^{-(k_w + k_\mu)z} H_0^1[\sqrt{(\xi^2\beta^2 - \xi_0^2)} r] \quad (19)$$

Finalement, la *stratification* a deux effets :

- l'un sur l'amplitude via le facteur $e^{-(k_w + k_\mu)z}$
- un autre sur la phase à cause de la présence du ξ_0

Si on prend une approximation champ lointain de la fonction de Hankel :

$$H_0^1(z) \simeq e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz} \quad (2\pi > \arg(z) > -\pi) \quad (20)$$

On voit donc que lorsque $\|\beta\xi\| \leq \|\xi_0\|$ alors l'onde n'est plus propagative mais évanescence.

2. on peut remarquer que cette fréquence ne dépend pas du gradient de température k_θ

5 Fonction de transfert atmosphérique

Pour avoir une idée de la réponse impulsionnelle à travers ce milieu, il faut calculer la transformée de Fourier inverse de la fonction de Green. On va montrer qu' à des distances de propagation telles que le nombre sans dimension $k_0 r$ soit grand (r bien supérieur à 5 km), il est possible dans le calcul de la transformée de Fourier d'utiliser l'approximation de la phase stationnaire et d'obtenir une formule analytique. Intuitivement, si la distance reste inférieure à 5 km les effets diffractifs sont négligeables. On ne s'occupe pas du terme $e^{-(k_w+k_\mu)z}$. On a donc à calculer :

$$S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} H_0^1[\sqrt{(\xi^2\beta^2 - \xi_0^2) r}] d\xi \quad (21)$$

On fait les changements de notations et de variables suivants :

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 \eta / \beta \\ N &= r \xi_0 \\ s &= x \xi_0 / \beta \\ S(x) &= \frac{\xi_0}{2\beta\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iN s \eta} H_0^1(N \sqrt{(\eta^2 - 1)}) d\eta \end{aligned} \quad (22)$$

On utilise 4

$$S(x) \simeq \frac{\xi_0 e^{-i\pi/4}}{2\beta\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{(\eta^2 - 1)}} \exp(iN s \eta) \exp(-i N \sqrt{(\eta^2 - 1)}) d\eta \quad (23)$$

La phase $\phi(\eta) = s\eta - \sqrt{(\eta^2 - 1)}$ est stationnaire lorsque

$$\begin{aligned} s &= \frac{\eta}{\sqrt{(\eta^2 - 1)}} \\ \eta &= \frac{s}{\sqrt{(s^2 - 1)}} \\ (s^2 - 1) &= \frac{1}{\eta^2 - 1} \end{aligned} \quad (24)$$

La formule est involutive. On calcule la dérivée seconde de la phase :

$$\phi'(\eta) = s - \frac{\eta}{\sqrt{(\eta^2 - 1)}} \quad (25)$$

$$\phi''(\eta) = -\frac{1}{(\eta^2 - 1)^{3/2}} \quad (26)$$

$$\phi''[\eta(s)] = -(s^2 - 1)^{3/2} \quad (27)$$

Après des calculs un peu complexes on obtient :

$$S(s) \simeq \frac{\xi_0}{N\beta} \frac{\cos(\pi/4 + N\sqrt{s^2 - 1})}{\sqrt{s^2 - 1}} \quad (28)$$

On donne sur la figure 3 l'allure de cette réponse impulsionnelle qui présente une singularité intégrable à l'origine.

Les allures des courbes sont identiques au "rumble" temporel décrit dans [3] et montrent des oscillations chaotiques analogues aux résultats expérimentaux.

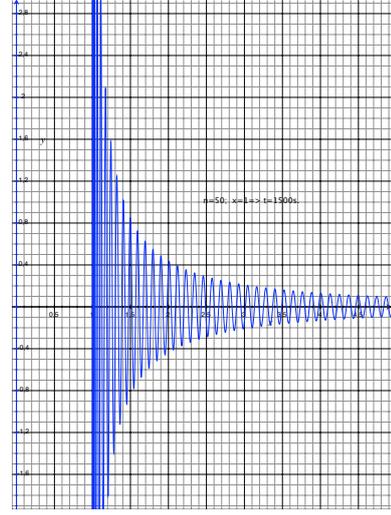


FIGURE 2 – allure de la réponse impulsionnelle

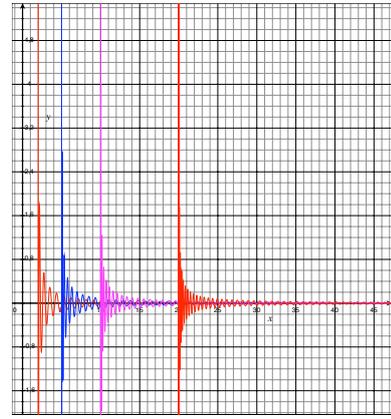


FIGURE 3 – allure de la réponse impulsionnelle pour différentes distances

6 Onde en "N" à longue distance

Appliquons la méthode précédente pour une onde en N. Le spectre spatial d'une onde en N s'écrit si L en est sa longueur : (voir par exemple [1] p 79)

$$\mathcal{N}(\xi) \simeq \frac{\cos(\xi L)}{\xi L} - \frac{\sin(\xi L)}{(\xi L)^2}$$

Il doit être corrigé de la dissipation atmosphérique en le multipliant par la fonction de transfert :

$$F(\xi) = \exp(-\alpha r \xi^2)$$

qui va détruire ses hautes fréquences. Le spectre résultant doit être multiplié par la fonction de Green puis le signal spatial est calculé par transformation de Fourier inverse. Mais, si on peut utiliser l'approximation de la phase stationnaire, le signal spatial va simplement être le produit de la réponse impulsionnelle $S(s)$ de 28 multiplié par le spectre de l'onde en N à la fréquence spatiale ξ correspondante au point stationnaire de la phase soit :

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 / \beta \eta \\ \eta &= \frac{s}{\sqrt{(s^2 - 1)}} \end{aligned} \quad (29)$$

Le signal obtenu est donc la réponse impulsionnelle modulée par le spectre de l'onde en N parcourue des hautes

fréquences vers les basses (selon la dépendance de ξ en fonction de s . Le signal "arrive" pour $s=1$. On a donc un curieux phénomène qui pourrait bien expliquer pourquoi il est si difficile de retrouver l'onde en N.

Shuttle Columbia (STS-107)", *National Center of Physical Acoustics, Uty of Mississippi* 2003

- [7] Ph. J. Delorme "Study of the aero-acoustical phenomena by use of a high frequency parametrix" *Proc. of Wave'05 pp.44-46*(2005)

7 Conclusions et perspectives

Il n'a été présenté ici que des résultats préliminaires, mais on peut cependant noter que certains points ont été établis :

- le problème du "rumble" d'un bang sonique est clairement posé ;
- les différentes pistes physiques susceptibles d'expliquer ce problème ont été passées en revue ;
- il apparaît que même sur un cas "météorologique" académique, le phénomène de diffraction par une atmosphère hétérogène pouvait modifier profondément la signature acoustique à longue distance, invalidant la théorie des rayons ;
- enfin ces premiers résultats académiques présentent des similitudes avec l'expérience encourageantes.

Il semble donc logique de continuer à approfondir la piste de la diffraction par exemple en se lançant dans des simulations numériques conséquentes :

- avec des simples outils de F.F.T., on peut éviter l'hypothèse de la phase stationnaire et ainsi pouvoir observer de manière continue l'effet de l'augmentation de la distance de propagation ;
- un calcul avec une méthode semi-analytique à base de transformée de Fourier partielle pourrait s'envisager dans le cas d'une atmosphère stratifiée ;
- bien que le domaine de calcul semble a priori énorme, on peut envisager un calcul numérique de résolution des équations d'Euler linéarisées.

Enfin, il faudrait essayer de comparer avec un cas réel, bien que cela ne soit pas toujours évident car on n'a pas forcément connaissance de toutes les données (trajectoire et cinématique du mobile, conditions météorologiques...)

Références

- [1] Geraldine Menexiadis, "Localisation de sources sonores supersoniques à partir de signaux acoustiques", *Phd thesis*
- [2] Allan D. PIERCE, "ACOUSTICS : An introduction to its physical principles and applications", *published by the ASA through the AIP*
- [3] Ph. Delorme, Géraldine Ménéxiadis, "Rumble of distant source" *Proc. of ASA-ESA Paris*(2008)
- [4] Henry E. Bass &al , "Modification of the sonic boom wave form during propagation from the source to the ground", *J.Acoust.Soc.Am. 111(1), Pt. 2* Jan 2002
- [5] Olaf Gainville &al , "Modélisation asymptotique de la propagation atmosphérique des ondes infrasonores", *17^{eme} congrès français de Mécanique*, Troyes Sept 2005
- [6] H. Bass &al , "Report to the departement of Defense on infrasonic re-entry signals from the Space