



**HAL**  
open science

## **Modèle de Biot modifié : pour une description plus réaliste de la propagation des ondes ultra-sonores dans l'os trabéculaire**

Mouna Naas, Naima Sebaa, Serge Derible, Zine El Abiddine Fellah, Erick Ogam, Claude L. Depollier

### ► To cite this version:

Mouna Naas, Naima Sebaa, Serge Derible, Zine El Abiddine Fellah, Erick Ogam, et al.. Modèle de Biot modifié : pour une description plus réaliste de la propagation des ondes ultra-sonores dans l'os trabéculaire. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00541385

**HAL Id: hal-00541385**

**<https://hal.science/hal-00541385>**

Submitted on 30 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# 10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

## Modèle de Biot modifié : pour une description plus réaliste de la propagation des ondes ultra-sonores dans l'os trabéculaire

M. Naas<sup>1</sup>, N. Sebaa<sup>1</sup>, S. Derible<sup>2</sup>, Z.E.A. Fellah<sup>3</sup>, E. Ogam<sup>3</sup>, C. Depollier<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LAUM, Bat. IAM, UFR Sciences et Techniques Université du Maine, Ave O. Messiaen 72085 Le Mans Cedex 09,

{Mouna.Naas.Etu,claudedepollier}@univ-lemans.fr, naima.sebaa@yahoo.fr

<sup>2</sup> Ondes et Milieux complexes, Université du Havre, IUT Caucriauville, 76610 Le Havre deribles@univ-lehavre.fr

<sup>3</sup> Laboratoire de Mécanique et d'acoustique, 31 Chemin Joseph Aiguier- 13402 Marseille Cedex 20{ogam,fellah}@lma.cnrs-mrs.fr

La théorie de Biot est un des modèles les plus réalistes pour décrire la propagation des ondes sonores dans un milieu poreux, en particulier elle prend en compte les différents couplages entre le fluide et la structure solide. Toutefois cette théorie a été établie pour des milieux homogènes. L'os trabéculaire étant un milieu poreux fortement inhomogène, elle ne lui est donc pas applicable sans quelques modifications. En pratique, dans un milieu inhomogène, les valeurs des paramètres changent d'un point à l'autre. Lorsque les variances de ces grandeurs aléatoires sont suffisamment petites, leurs valeurs moyennes sont une approximation relativement bonne des paramètres qu'elles représentent. Au contraire, lorsque les variables aléatoires prennent leurs valeurs sur un large intervalle, leurs moyennes sont faiblement significatives. Si on souhaite améliorer la modélisation de la propagation des ondes acoustiques dans de tels milieux, il est donc nécessaire de modifier la théorie de Biot en prenant en compte l'aspect aléatoire des grandeurs évoquées plus haut. En particulier, on doit redéfinir les effets visqueux induits par le passage d'une onde dans un milieu poreux compte tenu des statistiques d'ordre 1 et 2 des paramètres aléatoires.

Nous montrons, sur des simulations numériques, les effets introduits par la prise en compte des corrections ainsi introduites dans la théorie de Biot.

## 1 Introduction

Alors que le modèle de la propagation des ondes acoustiques dans le milieu poreux proposé par Biot se révèle bien adapté pour beaucoup de matériaux poreux, quelques unes de ses prédictions semblent ne pas être en accord avec certains résultats expérimentaux obtenus lorsqu'il s'agit de l'os trabéculaire. La non observation de l'onde lente et l'excès d'atténuation de l'onde rapide sont deux de ces principaux désaccords. Nous proposons ici un modèle de Biot modifié qui prend en compte les fluctuations des paramètres physiques de l'os trabéculaire. Un tel modèle montre que l'excès d'atténuation de l'onde rapide est dû à plusieurs processus : i) l'atténuation classique de Biot, ii) la diffusion des ondes qui augmente la longueur du trajet de l'onde, iii) les conversions de modes qui se développent aux frontières et aux interfaces des inhomogénéités. Quelques comparaisons de simulations numériques sont proposées.

## 2 Modèle de Biot

Durant la dernière décennie, plusieurs modèles [1, 2] ont été développés pour expliquer les résultats expérimentaux concernant la propagation des ondes acoustiques dans l'os trabéculaire et ce, en vue d'améliorer les techniques ultrasonores destinées au diagnostic de l'ostéoporose. Plus spécifiquement, les motivations de ces travaux concernent la dépendance de

la vitesse et de l'atténuation des ultrasons en fonctions des valeurs des paramètres physiques de la structure de l'os, comme la densité, la porosité, les coefficients d'élasticité...

Dans un matériau poreux à structure souple, les ondes acoustiques se propagent à la fois dans le solide constituant le squelette et dans le fluide saturant les pores. Le modèle de Biot [3, 4] est l'outil le mieux adapté pour décrire les interactions fluide-structure qui se développent au cours de cette propagation. Le résultat le plus probant du modèle de Biot est la prédiction de trois modes de propagation : un mode transversal et deux modes longitudinaux, à savoir, l'onde rapide et l'onde lente (ou onde de Biot) confirmée expérimentalement par Plona [5]. De plus, ce modèle prend en compte les différents couplages entre fluide et structure solide : i) couplage inertiel, modélisé par la tortuosité dynamique du milieu et qui est responsable du terme additionnel de densité, ii) couplage visqueux dû à la viscosité du fluide et iii) couplage potentiel ou couplage élastique traduisant le principe de réciprocité des interactions fluide-structure.

Ainsi, les ondes acoustiques diffusées (réfléchies et transmises) par un milieu poreux contiennent quantité d'informations relatives aux interactions entre les phases fluide et solide qui sont correctement décrites par le modèle de Biot. Ces raisons militent en faveur de l'utilisation des ultrasons pour caractériser l'état des tissus osseux trabéculaires et observer leurs variations résultant de l'ostéoporose [6].

## 2.1 Equations du mouvement

Il existe plusieurs méthodes pour établir les équations des mouvements des phases fluide et solide dans le cadre de la théorie de Biot. La méthode d'homogénéisation apparaît comme la plus rigoureuse et est souvent citée comme justification *a posteriori* des autres méthodes. La formulation lagrangienne donnée par Johnson [7] montre que le modèle de propagation développé par Biot est la description linéaire la plus générale des interactions fluide-solide d'un milieu diphasique.

Les équations du mouvement du fluide et du solide sont [8] :

$$\nabla \cdot \bar{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \ddot{\mathbf{w}}, \quad (1)$$

$$-\nabla p_f = \rho_f \ddot{\mathbf{u}} + \tilde{Y}(t) * \dot{\mathbf{w}}, \quad (2)$$

$$\tilde{Y}(t) = m \frac{\partial}{\partial(t)} \delta(t) + \frac{\eta}{\kappa} \delta(t), \quad (3)$$

où les contraintes  $\sigma$  et  $p_f$  sont données par :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + (\lambda_c\theta_s - \alpha M\zeta)\delta_{ij} \quad (4)$$

$$p_f = M(-\alpha_s\theta + \zeta). \quad (5)$$

Dans ces relations,  $\rho$  est la masse volumique totale du poreux,  $\rho_f$  est celle du fluide,  $u$  est le déplacement du solide,  $w$  est le déplacement relatif du fluide  $w = \phi(U - u)$ ,  $\phi$  est la porosité,  $p_f$  est la pression dans le fluide, et  $\zeta = -\nabla \cdot w$ .  $\tilde{Y}(t)$  est l'opérateur viscodynamique,  $m$  est un coefficient de correction de masse déduit des effets visqueux :  $m = \frac{\alpha_\infty}{\phi} \rho_f$  où  $\alpha_\infty$  est la tortuosité,  $\kappa$  la perméabilité et  $\alpha_s$  est le coefficient de Biot-Willis donné par :  $\alpha_s = 1 - K_d/K_s$ ,  $K_s$ ,  $K_d$  et  $K_f$  étant respectivement le coefficient de compressibilité du solide, celui du squelette et celui du fluide. La propagation de l'onde lente de Biot est gouvernée par la valeur de la profondeur de pénétration des effets visqueux  $\delta \approx \sqrt{2\eta/\omega\rho_f}$ . Dans l'os trabéculaire où le fluide saturant est la moelle osseuse, pour des ondes de fréquence de l'ordre de 1 MHz, l'onde de Biot est diffusive. Compte tenu de cette remarque, lorsqu'on substitue les expressions de  $\sigma_{ij}$  et  $p_f$  dans les équations de Biot, on obtient l'équation matricielle [9] :

$$\begin{pmatrix} L_{ij}^{(1)} & L_{ij}^{(2)} \\ L_{ij}^{(3)} & L_{ij}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ w_j \end{pmatrix} = 0, \quad (6)$$

où les opérateurs  $L^{(n)}$  sont :

$$L_{ik}^{(1)} = \rho\omega^2\delta_{ik} + \partial_j G (\delta_{jk}\partial_i + \delta_{ik}\partial_j - 2\delta_{ij}\partial_k), \quad (7)$$

$$L_{ik}^{(2)} = \rho_f\omega^2\delta_{ik} + \partial_i C \partial_k, \quad (8)$$

$$L_{ik}^{(3)} = L_{ik}^{(2)}, \quad (9)$$

$$L_{ik}^{(4)} = q\omega^2\delta_{ik} + \partial_i M \partial_k. \quad (10)$$

où  $q = \eta/(\omega\kappa)$ .

## 2.2 Solutions des équations de Biot

La réponse du milieu poreux à la perturbation  $-(F_i^0\delta(r_i - r'_i), f_i^0\delta(r_i - r'_i))^t$  constitue la solution  $(u_i, w_i)^t$  de ce système d'équations lorsque le membre

de droite de (6) est le vecteur des forces impulsionnelles  $-(F_i^0\delta(r_i - r'_i), f_i^0\delta(r_i - r'_i))^t$ . Elle est obtenue à partir du tenseur de Green  ${}^0G$  sous la forme générale :

$$\begin{pmatrix} u_i(\mathbf{r}) \\ w_i(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \int d\mathbf{r}' \begin{pmatrix} {}^0G_{ik}^F(\mathbf{r} - \mathbf{r}') & {}^0G_{ik}^f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ {}^0G_{ik}^f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') & {}^0G_{ik}^w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k(\mathbf{r}') \\ f_k(\mathbf{r}') \end{pmatrix}. \quad (11)$$

## 2.3 Milieux inhomogènes : modèle de Biot modifié

Quand une onde se propage dans un milieu inhomogène c'est à dire dont les paramètres physiques varient d'un point à l'autre, les coefficients des équations de mouvement sont des variables aléatoires. Dans de tels milieux, la propagation des ondes est décrite par des équations stochastiques. Ainsi, dans (6) on peut écrire les opérateurs  $L^{(n)}$  sous la forme suivante :

$$L^{(n)} = \bar{L}^{(n)} + \tilde{L}^{(n)} \quad (12)$$

où  $\bar{L}^{(n)}$  est la valeur moyenne de  $L^{(n)}$  et  $\tilde{L}^{(n)}$  est la fluctuation de cette valeur agissant comme une perturbation. Ainsi,  $\langle \tilde{L}^{(n)} \rangle = 0$  et l'eq.6 devient :

$$\begin{pmatrix} \bar{L}_{ij}^{(1)} & \bar{L}_{ij}^{(2)} \\ \bar{L}_{ij}^{(3)} & \bar{L}_{ij}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ w_j \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \tilde{L}_{ij}^{(1)} & \tilde{L}_{ij}^{(2)} \\ \tilde{L}_{ij}^{(3)} & \tilde{L}_{ij}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ w_j \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Sa solution est donnée par :

$$\begin{pmatrix} u_i \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i^0 \\ w_i^0 \end{pmatrix} + \int dV \begin{pmatrix} G_{ik}^F & G_{ik}^f \\ G_{ik}^f & G_{ik}^w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{L}_{kj}^{(1)} & \tilde{L}_{kj}^{(2)} \\ \tilde{L}_{kj}^{(3)} & \tilde{L}_{kj}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ w_j \end{pmatrix}. \quad (14)$$

La méthode des perturbations de Keller [10] conduit à écrire le tenseur de Green  $G$  du milieu aléatoire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} G_{im}^F & G_{im}^f \\ G_{im}^f & G_{im}^w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0G_{im}^F & {}^0G_{im}^f \\ {}^0G_{im}^f & {}^0G_{im}^w \end{pmatrix} + \int dV \begin{pmatrix} G_{km}^F & G_{km}^f \\ G_{km}^f & G_{km}^w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{L}_{jk}^{(1)} & \tilde{L}_{jk}^{(2)} \\ \tilde{L}_{jk}^{(3)} & \tilde{L}_{jk}^{(4)} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

ou encore, plus brièvement :

$$G = G^0 + \int G^0 \tilde{L} G. \quad (16)$$

Par iteration, elle devient :

$$G = G^0 + \int G^0 \tilde{L} G^0 + \int \int G^0 \tilde{L} G^0 \tilde{L} G^0 + \dots \quad (17)$$

La valeur moyenne du tenseur de Green est alors :

$$\bar{G} = G^0 + \int \int G^0 Q \bar{G}, \quad (18)$$

où "l'opérateur masse"  $Q$  est donné par

$$Q = \left\langle \tilde{L} G^0 \tilde{L} + \int \tilde{L} G^0 \tilde{L} G^0 \tilde{L} + \int \dots \right\rangle. \quad (19)$$

L'équation (18) est l'analogie matriciel de l'équation de Dyson. Une solution approchée de cette équation est obtenue en tronquant l'expression de l'opérateur  $Q$ . Par exemple, en se restreignant au premier l'ordre, on trouve :

$$\bar{G} = G^0 + \int \int G^0 \langle \tilde{L} G^0 \tilde{L} \rangle \bar{G} = G^0 + \int \int G^0 Q^{(app)} \bar{G}. \quad (20)$$

La matrice  $\bar{G}$  est la moyenne du tenseur de Green à l'ordre un. Quant à La matrice  $Q^{(app)}$  ces éléments sont les opérateurs définis par la relation :

$$Q^{(app)} = \begin{pmatrix} Q_{ij}^{(1)} & Q_{ij}^{(2)} \\ Q_{ij}^{(3)} & Q_{ij}^{(4)} \end{pmatrix} = \langle \tilde{L} G^0 \tilde{L} \rangle. \quad (21)$$

### 3 Vitesse et atténuation de l'onde rapide

L'approximation précédente (au premier ordre) nécessite seulement la connaissance des statistiques jusqu'à l'ordre deux des variables aléatoires et n'est valable que pour des fluctuations faibles des paramètres, c'est à dire si :  $|\tilde{L}^{(n)}/\bar{L}^{(n)}| \ll 1$ . Il en résulte que le nombre d'onde effectif de l'onde rapide est donné par :

$$\bar{k}_p = k_p \left( 1 + \Sigma_2 + \Sigma_1 k_{ps}^2 \int_0^\infty r B(r) e^{ik_{ps}r} dr \right). \quad (22)$$

Le nombre d'onde effectif est ainsi la contribution de trois termes : le nombre d'onde du milieu hôte homogène  $k_p$  et deux termes de correction.  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont des fonctions des corrélations entre les paramètres aléatoires, c'est à dire entre les inhomogénéités du milieu et dépendent essentiellement du modèle des fonctions de corrélation choisi pour les calculs. Dans cette équation  $k_{ps} = \sqrt{\omega\eta/\kappa N}$  est le nombre d'onde de l'onde de Biot,  $\omega$  est la pulsation de l'onde et  $N$  un facteur dépendant des coefficients d'élasticité du solide et du fluide.

#### 3.1 Vitesse de l'onde rapide

La vitesse de phase de l'onde rapide est donnée par la partie réelle du rapport  $\omega/\bar{k}_p$  :

$$v = \Re\left\{ \frac{\omega}{\bar{k}_p} \right\} = \frac{\omega}{k_p} \left( 1 - \Sigma_2 + 2\Sigma_1 (k_{ps}^r)^2 \int_0^\infty r B(r) \sin ik_{ps}^r r dr \right) \quad (23)$$

où  $k_{ps}^r = \Re\{k_{ps}\} = (\eta\omega/2\sigma N)^{1/2}$ . Le terme  $\Sigma_2$  modifie la vitesse de phase de l'onde dans le milieu homogène en la diminuant : tout se passe donc comme si les inhomogénéités présentes dans le milieu rallongeaient le parcours effectif des ondes en les diffusant et ce d'autant plus que les corrélations entre inhomogénéités sont fortes, c'est à dire que leur concentration est importante. Quant à la dispersion de l'onde, elle est donnée par le terme proportionnel à  $\Sigma_1$  qui traduit les conversions de modes aux interfaces des inhomogénéités.

#### 3.2 Atténuation de l'onde rapide

La partie imaginaire du nombre d'onde est liée à l'atténuation de l'onde dans le milieu. On définit alors

le facteur de qualité  $Q$  par :

$$Q^{-1} = 2 \frac{\Im\{\bar{k}_p\}}{\Re\{\bar{k}_p\}} \quad (24)$$

$$= 4\Sigma_1 (k_{ps}^r)^2 \int_0^\infty r B(r) e^{-k_{ps}^r r} \cos(k_{ps}^r r) dr \quad (25)$$

Dans cette expression, on voit que seul le terme  $\Sigma_1$  est responsable de l'effet des inhomogénéités sur l'atténuation de l'onde rapide. Ainsi, dans un milieu inhomogène, plusieurs processus contribuent à l'atténuation de l'onde rapide qu'on peut donc représentée comme la somme d'autant de termes. On représente ces contributions par les longueurs d'atténuation de chacun des processus qui sont les distances parcourues par l'onde sur lesquelles l'amplitude est divisée par  $e$ . Le premier est l'atténuation "classique" donnée par la théorie de Biot ; elle est caractérisée par la longueur  $l_{hom}$ . Le second est l'atténuation ( $l_{path}$ ) due à l'augmentation du parcours de l'onde qui est la conséquence des diffusions multiples par les inhomogénéités, elles-mêmes mises en évidence par le terme  $\Sigma_2$ . Enfin le terme le plus important est l'atténuation due aux conversions de modes qui se développent aux interfaces des inhomogénéités ( $l_{conv}$ ). Dans l'os trabéculaire, le processus de conversion de modes est très asymétrique : l'onde de Biot étant diffusive, elle ne cède pas d'énergie par conversion de modes à l'onde rapide, alors que cette dernière en cède à l'onde lente. La longueur effective d'atténuation  $l_{eff}$  de l'onde rapide est alors donnée par la relation :

$$\frac{1}{l_{eff}} = \frac{1}{l_{hom}} + \frac{1}{l_{path}} + \frac{1}{l_{conv}}. \quad (26)$$

### 3.3 Résultats de simulations

Pour illustrer ces résultats, quelques simulations numériques sont présentées. L'essentiel de ces simulations réside dans les calculs des corrélations (croisées ou autocorrélations) entre les inhomogénéités du milieu poreux. Pour ça, on introduit la corrélation de la grandeur  $X(r)$  par

$$C_{XX}(r) = \langle X(r' + r)X(r') \rangle, \quad (27)$$

où  $\langle . \rangle$  représente la moyenne statistique sur l'ensemble du milieu inhomogène. La figure 1 montre l'influence de la dispersion des valeurs du module de cisaillement  $G$  sur l'atténuation de l'onde rapide pour trois valeurs de la longueur de corrélation  $\sigma_G^2 = C_{GG}(0)$  définie pour une fonction de corrélation gaussienne  $B(r) \propto \exp(-r^2/a^2)$  en fonction de la fréquence normalisée par la fréquence critique de Biot  $f/f_c$ . Les courbes obtenues pour corrélations des autres paramètres montrent des effets qualitativement similaires. Cette étude présente toutefois une situation irréaliste où les coefficients d'élasticité du milieu poreux varient indépendamment les uns des autres. La figure 2 présente les variations de la vitesse de l'onde rapide en fonction de la fréquence normalisée pour trois valeurs de la longueur de corrélation. On voit que la vitesse augmente avec la longueur de corrélation (les inhomogénéités sont de moins en moins faiblement corrélées)

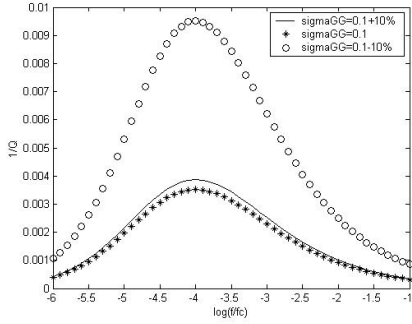


FIG. 1 – Influence de la dispersion des valeurs du coefficient de cisaillement en fonction de la fréquence.

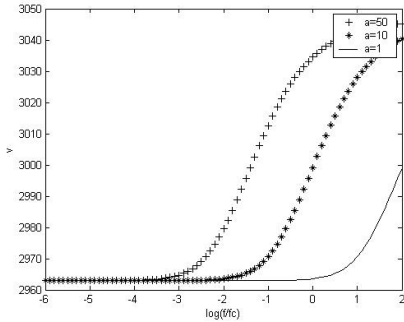


FIG. 2 – Influence de la longueur de corrélation  $a$  sur la vitesse de l'onde rapide en fonction de la fréquence.

## 4 Facteur de correction de viscosité

Dans un milieu poreux, l'écoulement du fluide est régi par la loi de Darcy :

$$\phi U_{moy} = -\frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (28)$$

où  $U_{moy}$  est la vitesse moyenne de l'écoulement dans la direction  $x$  et  $dp/dx$  le gradient de pression dans cette direction. En régime établi, le flux laminaire à travers un tube capillaire de rayon  $r$  est donné par la relation de Poiseuille :

$$U_{moy} = -\frac{r^2}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (29)$$

### 4.1 Correction de la viscosité

Lorsque, dans un capillaire de rayon  $r$ , le fluide est soumis à une force sinusoïdale, il oppose au gradient de pression des forces de viscosité et d'inertie, dont l'importance relative est régie par le paramètre  $\epsilon = r\sqrt{\omega\rho_f/\eta}$ . Dans la théorie de Biot, ceci se traduit en introduisant le facteur de correction de la viscosité  $F(\omega)$ . Ainsi la viscosité  $\eta$  du fluide est changée en  $\eta F(\omega)$ . Pour des capillaires cylindriques identiques de rayon  $r$ , ce facteur  $F(\omega)$  est donné par :

$$F(\omega) = \frac{1}{4} \frac{\epsilon K(\epsilon)}{1 - (2/\epsilon)K(\epsilon)}, \quad (30)$$

où

$$K(x) = \frac{ber'(x) + ibei'(x)}{ber(x) + ibei(x)} \quad (31)$$

dans laquelle  $ber$  et  $bei$  sont les parties réelles et imaginaires des fonctions de Kelvin et  $ber'$  et  $bei'$  leurs dérivées.

Dans un milieu poreux réel, la valeur des rayons des pores n'est pas uniforme mais est plutôt caractérisée par une distribution  $e(r)$ . Plusieurs modèles ont été développés [11, 4, 12, 13] pour exprimer  $F(\omega)$  en fonction de la distribution  $e(r)$  des rayons des pores. Ainsi, pour les milieux poreux dont les pores ont des rayons distribués suivant  $e(r)$ , on définit le facteur  $F(\omega)$ , par :

$$F(\omega) = \frac{G(\omega)}{G(0)}, \quad (32)$$

où  $G(\omega)$  est le rapport de la force de friction visqueuse moyenne  $T_{moy}(\omega)$  par la vitesse de filtration moyennée sur une section  $U_{moy}(\omega)$  :

$$G(\omega) = \frac{T_{moy}(\omega)}{U_{moy}(\omega)}. \quad (33)$$

La force de friction visqueuse  $T_{moy}(\omega)$  qui s'exerce sur les parois du capillaire est de la forme :

$$T_{moy}(\omega) = \phi \int_0^r \frac{e(r)\tau(\omega, r)}{r} dr \quad (34)$$

où la contrainte  $\tau(\omega, r)$  créée par une onde sinusoïdale d'amplitude  $A$  et de pulsation  $\omega$  est donnée par :

$$\tau(\omega, r) = (X\eta/\omega)\sqrt{\omega\rho_f/\eta}K(\epsilon). \quad (35)$$

La vitesse moyenne de filtration est quant à elle :

$$U_{moy}(\omega) = \int_0^r e(r)U_{moy}(\omega, r)dr, \quad (36)$$

avec :

$$U_{moy}(\omega, r) = (X/\omega)\left(1 - (2/\epsilon)K(\epsilon)\right). \quad (37)$$

## 4.2 Résultats de simulations

Les valeurs du facteur de correction de la viscosité  $F(\omega)$  sont très fortement dépendantes de la variance de la distribution des rayons des pores. Ceci montre l'importance de la prise en compte de dispersion des rayons autour de la valeur moyenne qui modifie considérablement la viscosité effective du fluide saturant. Les figures 3 et 4 montrent les valeurs des parties réelles et imaginaires du facteur de correction de la viscosité pour différentes valeurs de la variance  $\sigma$ .

## 5 Conclusion

La théorie de Biot initialement développée pour des milieux poreux homogènes nécessite d'être adaptée en vue de son application à l'étude de la propagation des ultrasons dans l'os trabéculaire. La non observation de l'onde lente est due en partie au confinement du milieu poreux dans un volume dont les frontières sont imperméables et en partie à la forte valeur de la viscosité de

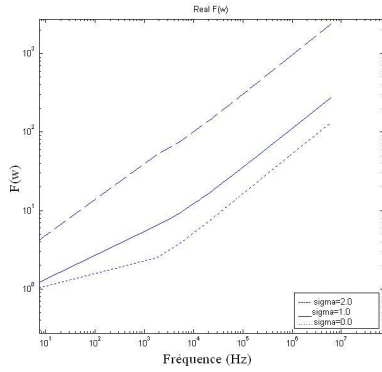


FIG. 3 – Partie réelle de  $F(\omega)$  pour 3 valeurs de la variance

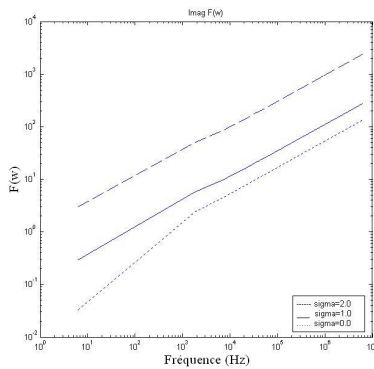


FIG. 4 – Partie imaginaire de  $F(\omega)$  pour 3 valeurs de la variance

la moelle osseuse qui augmente d'autant la fréquence critique de Biot. Toutefois, bien que non propagative l'onde lente participe au phénomène de conversion de modes aux interfaces des inhomogénéités. De ce fait elle contribue de manière importante à l'atténuation de l'onde rapide. L'excès d'atténuation de l'onde rapide peut être expliqué d'une part par les conversions de modes et d'autre part par la présence des inhomogénéités qui contribuent à l'allongement du trajet des ondes dans les milieux.

## Références

- [1] W. Lauriks, J. Thoen, I. Van Asbroeck, G. Lorewet and G. Vanderperre "Propagation of ultrasonic pulses through trabecular bone", *J. Phys* **4** (1994) 1255-1258.
- [2] A.Hosokawa and T. Otani "Ultrasonic wave propagation in bovine cancellous bone", *J. Acoust. Soc. Am* **101**,(1997) 558-562.
- [3] M.A. Biot "Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid : I Low-Frequency Range", *J. Acoust. Soc. Am* **28**,(1956) : 168-178.
- [4] M.A. Biot "Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid : II Higher-Frequency Range", *J. Acoust. Soc. Am* **28**,(1956) : 179-191.
- [5] T.J. Plona, "Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic fre-

quencies ", *Appl. Phys. Lett.*, **36**, (1980) 259-261

- [6] T.J. Haire and C.M.Langton , "Biot theory : a review of its application to ultrasound propagation through cancellous bone", *Bone* **24**,(1999), 291-295 .
- [7] D.L.Johnson, in *Proceedings of Enrico Fermi school, Frontiers of physical Acoustics*, edited by T.Sette(North-Holland, Amsterdam, 1986), course XCII
- [8] J.M. Carcione, "Wave Fields in Real Media : Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic and Porous Media", *Pergamon 2001, Amsterdam* .
- [9] T.M. Müller and B. Gurevich, "A first-order statistical smoothing approximation for the coherent wave field in random porous media", *J. Acoust. Soc. Am* **117**,(2005), 1796-1805 .
- [10] J.B. Keller "Stochastic equations and wave propagation in random media", *Proc. 17th Symp. App. Math. XVI, American Mathematical Soc.* 145-170 (1964).
- [11] C. Zwicker and C.W. Kosten, "Sound absorbing materials" *Elsevier, New York* (1949).
- [12] T. Yamamoto and A. Turgut "Acoustic wave propagation through porous media with arbitrary pore size distributions", *J. Acoust. Soc. Am* **83**,(1988) : 1744-1751.
- [13] K.V. Horoshenkov and M.J. Swift "The acoustic properties of granular materials with pore size distribution close to log-normal", *J. Acoust. Soc. Am* **110**,(2001) : 2371-2378.