

Méthode des éléments finis spectraux pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire dans un os cortical couplé avec des fluides

Vu-Hieu Nguyen, Salah Naïli

▶ **To cite this version:**

Vu-Hieu Nguyen, Salah Naïli. Méthode des éléments finis spectraux pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire dans un os cortical couplé avec des fluides. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00541373

HAL Id: hal-00541373
https://hal.science/hal-00541373

Submitted on 30 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

10ème **C**ongrès **F**rançais d'**A**coustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Méthode des éléments finis spectraux pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire dans un os cortical couplé avec des fluides

Vu-Hieu Nguyen, Salah Naili

Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Échelle, UMR 8208 CNRS

61, avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex, {vu-hieu.nguyen,naili}@univ-paris-est.fr

La technique de transmission axiale est une méthode ultrasonore qui se propose de quantifier les propriétés l'os cortical *in vivo*, par exemple, au radius (os de l'avant bras). En utilisant cette technique, les deux capteurs d'émission et de réception, mis en contact avec la peau, se placent du même coté du site à examiner. Les fréquences émises varient de 250 kHz à 2 MHz. L'évaluation des caractéristiques mécaniques et/ou géométriques de l'os cortical est basée sur l'analyse des ondes reçues aux récepteurs.
Cette technique peut être modélisée par un tri-couche qui se compose d'une couche solide (représentant l'os cortical) prise en sandwich entre deux demi-espaces de fluide (représentant les tissus mous de part et d'autre de la corticale). La couche solide est souvent considérée comme un matériau élastique anisotrope dont les propriétés mécaniques sont homogènes dans la direction axiale mais peuvent varier selon son épaisseur. Il s'agit donc d'un problème de dynamique transitoire d'un système couplé solide-fluide à résoudre. Nous présentons dans ce papier une approche numérique permettant de résoudre efficacement et avec un temps de calcul très court le problème considéré. Le système est d'abord transformé dans le domaine de Laplace-Fourier en appliquant une transformation de Laplace temporelle, puis une transformation de Fourier spatiale dans la direction longitudinale de la couche solide. On obtient ainsi un problème 1D dans le domaine Laplace-Fourier que l'on peut résoudre facilement par la méthode aux éléments finis tenant compte des conditions de radiation sur les deux fluides infinis. La solution en temps est reconstruite numériquement par une transformation inverse. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux issus de calculs basés sur la méthode aux éléments finis classiques, montrant que la méthode proposée est très efficace non seulement en terme de précision mais aussi en terme de temps de calculs.

1 Introduction

La technique de transmission axiale est une technique dédiée à l'évaluation de l'os cortical [1]. En utilisant cette technique, les capteurs d'émission et de réception, mis en contact avec la peau, se placent au même coté du site osseux. Les fréquences des ondes émises varient de 250 kHz à 2 MHz. L'évaluation des caractéristiques mécaniques et/ou géométriques de l'os cortical est basée sur l'analyse des ondes reçues au récepteur.

Cette technique peut être modélisée par un tri-couche qui se compose d'une couche solide (représentant l'os cortical) prise en sandwich entre deux demi-espaces de fluide (représentant les tissus mous de part et d'autre de la corticale). La couche solide est souvent considérée comme un matériau élastique anisotrope dont les propriétés mécaniques sont homogènes dans la direction axiale mais peuvent varier selon son épaisseur. Il s'agit donc d'un problème de dynamique transitoire d'un système couplé solide-fluide qui peut être résolu par différentes méthodes selon la complexité du problème considéré. On peut citer quelques méthodes qui ont été utilisées : les méthodes semi-analytiques en utilisant la technique de Cagniard-de Hoop [2] ; la méthode des différences finies [3] ou la méthode des éléments finis [4]. Par rapport aux méthodes analytiques qui ne permettent de traiter que des cas dont la configuration et les propriétés physiques sont relativement simples, les méthodes numériques sont plus adaptées pour considérer des anisotropies ou hétérogénéités qui se présentent pour un matériau tel que le tissu osseux [5]. Cependant, les méthodes numériques demandent souvent des calculs très coûteux afin d'obtenir la solution en temps. Les difficultés sont dues à la fois aux hautes fréquences et à la prise en compte d'un domaine infini. En supposant que l'homogénéité se présente par couche, une méthode mixte analytique-éléments finis a été proposée [6] en décrivant les équations dans le domaine des nombres d'ondes dans lequel le problème se réduit à un problème unidimensionel. Par suite, la solution temps-espace peut être obtenue très rapidement en utilisant la technique de la transformation de Fourier rapide. Cependant, cette approche ne tient pas compte des demi-espaces de fluide mais les considère comme des couches d'épaisseurs finies.

Nous présentons dans ce papier une approche numérique utilisant des éléments finis spectraux pour résoudre le problème considéré. Le système est d'abord transformé dans le domaine de Laplace-Fourier en appliquant une transformation de Laplace en temps, puis une transformation de Fourier en espace dans la direc-

tion longitudinale de la couche. On obtient donc un problème 1D dans le domaine Laplace-Fourier que l'on peut résoudre facilement par la méthode aux éléments finis en tenant compte des conditions exactes de radiation pour deux domaines semi-infinis de fluide. La solution en temps est reconstruite numériquement par une transformation inverse.

2 Description du problème

2.1 Configuration géométrique

La Figure 1 présente un schéma du test de transmission axiale *in vivo* qui est constitué par : une plaque d'os d'épaisseur h constante immergée dans deux demi-espaces de fluide, un émetteur et des récepteurs ultrasonores placés dans le domaine de fluide au-dessus de la couche solide.

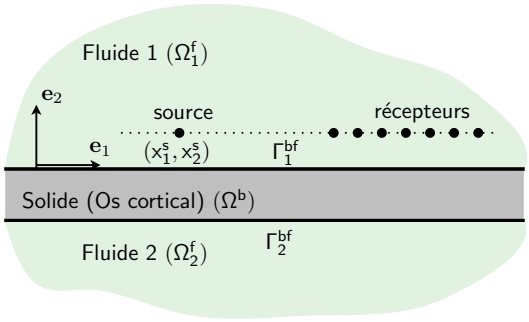


FIGURE 1 – Modèle tricouche pour modéliser le test de transmission axiale

Le système est décrit dans un trièdre orthonormé direct $\boldsymbol{R}(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Les domaines occupés par les fluides et l'os sont désignés respectivement par Ω_1^f, Ω_2^f et Ω^b. Les interfaces entre l'os et les fluides sont respectivement notées Γ_1^{bf} et Γ_2^{bf}. L'émetteur est modélisé comme une source acoustique ponctuelle qui se trouve à la position $\boldsymbol{x}^s = (x_1^s, x_2^s)$.

2.2 Équations du problème

On présente dans cette section les équations du mouvement établies pour chaque domaine ainsi que les conditions aux interface et aux limites. Dans la suite, on désigne par "$\dot{.}$" superposé la dérivée temporelle, par ∇ et $\nabla\cdot$ les opérateurs gradient et divergence respectivement.

Équations des ondes dans les fluides. On suppose que les fluides occupant les deux domaines Ω_1^f et Ω_2^f sont considérés comme des fluides acoustiques. En notant par p_1 les champs de pression dans le domaine Ω_1^f, l'équation des ondes dans ce domaine peut s'écrire :

$$\frac{1}{c_1^2}\,\ddot{p}_1 - \Delta p_1 = \dot{Q}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_1^f, \tag{1}$$

Une impulsion acoustique émise au point $\boldsymbol{x}^s = (0, x_2^s)$ s'exprime par :

$$\dot{Q} = \rho_1 F_0(t)\,\delta(x_1)\delta(x_2 - x_2^s), \tag{2}$$

où $F_0(t)$ est une fonction scalaire donnée qui ne dépend qu'au temps t et $\delta(.)$ est la fonction de Dirac.

De façon similaire, l'équation des ondes pour le champs de pression p_2 in le domaine de fluide Ω_2^f s'écrit :

$$\frac{1}{c_2^2}\,\ddot{p}_2 - \Delta p_2 = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_2^f, \tag{3}$$

où $c_2 = \sqrt{K_2/\rho_2}$ est la vitesse d'ondes dans Ω_2^f avec K_2 et ρ_2 sont respectivement le module de compressibilité et la densité de masse au repos.

Les conditions aux interfaces pour deux domaines Ω_1^f et Ω_2^f sont écrites de la même manière. Sur l'interface fluide-solide, on a la condition de continuité de la vitesse normale [7] qui nous donne :

$$\nabla p_i \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma_i}^f = -\rho_i \ddot{\boldsymbol{u}}^{\Gamma_i} \cdot \boldsymbol{n}_{\Gamma_i}^f, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_i^{bf}\ (i = 1, 2), \tag{4}$$

où $\boldsymbol{n}_{\Gamma_i}^f$ est le vecteur normal unitaire à l'interface Γ_i^{bf} orienté vers l'extérieur de Ω_i^f.

Équations dynamiques dans le solide (Ω^b) On désigne par $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \{u_1, u_2\}^T$ le vecteur déplacement en fonction du temps en un point $\boldsymbol{x}$ situé dans le domaine solide Ω^b. Les tenseur des petites déformations et des contraintes associées sont respectivement notés par $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})$ et $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})$.

Le système d'équations décrivant le mouvement en un point dans le solide Ω^b et les conditions aux limites sont donnés par :

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^b \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_{\Gamma_i}^b = -p_i \boldsymbol{n}_{\Gamma_i}^b, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_i^{bf}\ (i = 1, 2) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{\Gamma_i}, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_i^{bf},\ (i = 1, 2), \tag{7}$$

où $\boldsymbol{n}_{\Gamma_i}^b$ $(i = 1, 2)$ est le vecteur normal unitaire à l'interface Γ_i^{bf} orienté ver l'extérieur de Ω^b (Fig. 1).

Afin de faciliter le développement des formulations pour la méthode des éléments finis dans la suite, il est plus simple de récrire les tenseurs des déformations et des contraintes sous une forme vectorielle : $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T$, $\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, 2\epsilon_{12}\}^T$. En utilisant cette notation, la relation déformation-déplacement peut être représentée par :

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbb{L}\ \boldsymbol{u}, \quad \mathbb{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

et la loi de comportement du solide élastique linéaire anisotrope s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}\ \bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{26} \\ c_{61} & c_{62} & c_{66} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

où $\mathbf{C}$ est le tenseur d'élasticité.

L'équation du mouvement (Eq. (5)) peut être reformulée comme :

$$\rho\ \ddot{\boldsymbol{u}} - \mathbb{L}^T\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{0}, \tag{10}$$

où autrement :

$$\rho\ \ddot{\boldsymbol{u}} - \mathbb{L}^T\mathbf{C}\ \mathbb{L}\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}. \tag{11}$$

Problème aux limites en termes de $(p_1, \boldsymbol{u}, p_2)$ Ce paragraphe rassemble toutes équations présentées précédemment sous une forme plus compacte. Notons que pour la configuration présentée dans Fig. 1, on a $\boldsymbol{n}^b_{\Gamma_1} = -\boldsymbol{n}^f_{\Gamma_1} = \{0,1\}^T$ et $\boldsymbol{n}^b_{\Gamma_2} = -\boldsymbol{n}^f_{\Gamma_2} = \{0,-1\}^T$. Les équations du problème couplé fluide-solide-fluide peuvent être représentées en termes de (p_1, $\boldsymbol{u}$, p_2) comme les suivantes :

◦ Domaine fluide Ω^f_1 :

$$\frac{1}{c_1^2}\,\ddot{p}_1 - \Delta p_1 = \rho_1 F_0(t)\,\delta(x_1)\delta(x_2 - x_2^s), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^f_1, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\rho_1}\,\frac{\partial p_1}{\partial x_2} = -\ddot{u}_2, \boldsymbol{x} \in \Gamma^{bf}_1, \tag{13}$$

$$p_1 \to 0, \boldsymbol{x} \to \Omega^\infty_1. \tag{14}$$

◦ Domaine solide Ω^b :

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} - \mathbb{L}^T\mathbf{C}\,\mathbb{L}\,\boldsymbol{u} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^b, \tag{15}$$

$$\mathbf{s} = \{0, -p_1\}^T, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma^{bf}_1, \tag{16}$$

$$\mathbf{s} = \{0, -p_2\}^T, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma^{bf}_2, \tag{17}$$

où $\mathbf{s} := \{\sigma_{12}, \sigma_{22}\}^T$.

◦ Domaine fluide Ω^f_2 :

$$\frac{1}{c_2^2}\,\ddot{p}_2 - \Delta p_2 = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^f_2, \tag{18}$$

$$\frac{1}{\rho_2}\,\frac{\partial p_2}{\partial x_2} = -\ddot{u}_2, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma^{bf}_2, \tag{19}$$

$$p_2 \to 0, \quad \boldsymbol{x} \to \Omega^\infty_2. \tag{20}$$

3 Équations dans le domaine de Laplace-Fourier $(s - k_1)$

Dans le problème défini par les Eqs. (12)-(20), il s'agit de résoudre un système d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont constants dans la direction longitudinale $\boldsymbol{e}_1$. Dans ce paragraphe, on se propose de résoudre le système par les étapes suivantes : (i) le système d'équations est d'abord transformé dans le domaine fréquenciel-nombre d'ondes $(s - k_1)$ en utilisant une transformation de Fourier pour la variable d'espace x_1 combinée avec une transformation de Laplace pour la variable de temps t ; (ii) dans le domaine de fréquenciel-nombre d'ondes $(s - k_1)$, les équations dans les deux domaines de fluide sont analytiquement analysées afin d'obtenir les conditions d'impédance aux interfaces pour la couche solide ; ensuite on peut résoudre numériquement les équations dans le solide par la méthode des éléments finis ; (iii) finalement, la solution en temps-espace peut être reconstruite par la transformation de Laplace-Fourier inverse.

La forme générale d'une transformation de Laplace-Fourier (TLF) appliquée à une fonction réelle $y(x_1, x_2, t)$ est désignée par $\tilde{y}(k_1, x_2, s)$ et est définie par :

$$\tilde{y}(k_1, x_2, s) := \mathscr{L}\{\mathscr{F}[y(x_1, x_2, t)]\} = \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(x_1, x_2, t) e^{-ik_1 x_1} dx_1\right) e^{-st} dt, \tag{21}$$

où s est la variable complexe de Laplace ; k_1 est la variable réelle de Fourier qui représente le nombre d'ondes dans la direction-$\boldsymbol{e}_1$.

3.1 Problème transformé dans le domaine $(s - k_1)$ pour les fluides

Équations et solution de $\tilde{p}_1$ dans le domaine Ω^f_1 En appliquant la TLF (Eq. (21)) aux Eqs. (12)-(14), le problème (Eqs. (12)-(14)) est réduit à un système d'équations aux dérivées partielles en $\tilde{p}_1$ par rapport à une seule variable x_2 :

$$\left(\frac{s^2}{c_1^2} + k_1^2\right)\tilde{p}_1 - \frac{\partial^2 \tilde{p}_1}{\partial x_2^2} = \rho_1 \tilde{F}_0(s)\delta(x_2 - x_2^s), \tag{22}$$

$$\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial \tilde{p}_1(k_1, x_2, s)}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} = -s^2 \tilde{u}_2(k_1, 0, s), \tag{23}$$

$$\tilde{p}_1(x_2 \to +\infty) \to 0. \tag{24}$$

En résolvant cette équation, on peut écrire l'expression de $\tilde{p}_1$ sous la forme semi-explicite suivante :

$$\tilde{p}_1 = -\frac{\rho_1 \tilde{F}_0}{2\alpha_1}\left(e^{-\alpha_1(x_2^s - x_2)} + e^{-\alpha_1(x_2^s + x_2)}\right) + \frac{\rho_1 s^2 \tilde{U}_{21}}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 x_2}, \quad \text{pour } 0 \le x_2 \le x_2^s, \tag{25}$$

$$\tilde{p}_1 = -\frac{\rho_1 \tilde{F}_0}{2\alpha_1}\left(e^{\alpha_1(x_2^s - x_2)} + e^{-\alpha_1(x_2^s + x_2)}\right) + \frac{\rho_1 s^2 \tilde{U}_{21}}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 x_2}, \quad \text{pour } x_2 \ge x_2^s, \tag{26}$$

où $\alpha_1 := \sqrt{\frac{s^2}{c_1^2} + k_1^2}$; $\tilde{U}_{21}$ est la TLF de la composante verticale du déplacement de la couche solide au niveau de l'interface supérieure Γ^{bf}_1 : $\tilde{U}_{21} := \tilde{u}_2(k_1, 0, s)$.

Équations et solution de $\tilde{p}_2$ dans le domaine Ω^f_2 . De façon similaire, on applique la TLF aux Eqs. (18)-(20) et on peut établir les équations pour $\tilde{p}_2$ dans le domaine $(s - k_1)$ comme suivant :

$$\left(\frac{s^2}{c_2^2} + k_1^2\right)\tilde{p}_2 - \frac{\partial^2 \tilde{p}_2}{\partial x_2^2} = 0, \tag{27}$$

$$\frac{1}{\rho_2}\left(\frac{\partial \tilde{p}_2(k_1, x_2, s)}{\partial x_2}\right)_{x_2=-h} = -s^2 \tilde{u}_2(k_1, -h, s) \tag{28}$$

$$\tilde{p}_2(x_2 \to -\infty) \to 0, \tag{29}$$

ceux qui donne :

$$\tilde{p}_2 = -\frac{\rho_2 s^2 \tilde{U}_{22}}{\alpha_2} e^{\alpha_2(x_2 + h)}, \quad \text{pour } x_2 \le -h, \tag{30}$$

où $\alpha_2 = \sqrt{\frac{s^2}{c_2^2} + k_1^2}$ et $\tilde{U}_{22} := \tilde{u}_2(k_1, -h, s)$.

3.2 Problème transformé dans le domaine $(s - k_1)$ pour le solide (Ω^b)

On applique la transformation de Laplace-Fourier (voir Eq. (21)) au système d'équations établi dans le domaine solide (Eqs. (15)-(17)) et on obtient :

$$\rho s^2 \tilde{\boldsymbol{u}} - \tilde{\mathbb{L}}^T \mathbf{C}\,\tilde{\mathbb{L}}\,\tilde{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}, \tag{31}$$

où

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbb{L}} = \begin{bmatrix} ik_1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & ik_1 \end{bmatrix} \tag{32}$$

En plus, la relation de comportement de la phase solide (Eq. (9)) peut être récrite dans le domaine $(s-k_1)$ comme :

$$\tilde{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{C}\,\tilde{\mathbb{L}}\,\tilde{\mathbf{u}}. \tag{33}$$

Afin d'avoir une expression plus simple, on récrit les Eq. (31) sous la forme matricielle suivante :

$$\left(s^2\mathbf{A}_1 + k_1^2\mathbf{A}_2\right)\tilde{\mathbf{u}} - ik_1\left(\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3^T\right)\frac{\partial\tilde{\mathbf{u}}}{\partial x_2} - \mathbf{A}_4\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{u}}}{\partial x_2^2} = \mathbf{0}, \tag{34}$$

où les matrices $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ dépendent uniquement des paramètres physiques :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{16} \\ c_{16} & c_{66} \end{bmatrix}; \tag{35}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} c_{16} & c_{66} \\ c_{12} & c_{26} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} c_{66} & c_{26} \\ c_{26} & c_{22} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Par ailleurs, les conditions aux limites (Eqs. (16)-(17)) dans le domaine $(s-k_1)$ deviennent :

$$\tilde{\mathbf{s}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tilde{p}_1(0) \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{s}}(-h) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tilde{p}_2(-h) \end{Bmatrix}, \tag{37}$$

Notons que les solutions $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_2$, respectivement aux interfaces fluide-solide Γ_1^{bf} et Γ_2^{bf}, peuvent être déterminées à partir des Eqs. (26) et (30) :

$$\tilde{p}_1(0) = -\frac{\rho_1}{\alpha_1}\left(\tilde{F}_0 e^{-\alpha_1 x_2^s} - s^2\tilde{U}_{21}\right). \tag{38}$$

$$\tilde{p}_2(-h) = -\frac{\rho_2 s^2 \tilde{U}_{22}}{\alpha_2} \tag{39}$$

En conséquence, les conditions aux limites (Eq. (37)) peuvent être récrites comme :

$$\tilde{\mathbf{s}}(0) = \mathbf{F_0} - \mathbf{P}_1\tilde{\mathbf{u}}(0)\,;\ \tilde{\mathbf{s}}(-h) = \mathbf{P}_2\tilde{\mathbf{u}}(-h) \tag{40}$$

où

$$\mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho_1\tilde{F}_0 e^{-\alpha_1 x_2^s}}{\alpha_1} \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_1 s^2}{\alpha_1} \end{bmatrix}, \tag{41}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_2 s^2}{\alpha_2} \end{bmatrix}. \tag{42}$$

On note aussi que le vecteur $\tilde{\mathbf{s}}$ peut être calculé par :

$$\tilde{\mathbf{s}} = ik_1\mathbf{A}_3\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{A}_4\frac{\partial\tilde{\mathbf{u}}}{\partial x_2} \tag{43}$$

4 Formulation des éléments finis spectraux et solution en temps-espace

4.1 Formulation faible

On désigne par $\mathscr{C}^{ad}$ l'espace des fonctions admissibles constituées par toutes fonctions complexes qui sont suffisamment régulières $x_2 \to \delta\tilde{\mathbf{u}}(x_2) :]-h,0[\to \mathbb{C}^2$ où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes. La transposée conjuguée de $\delta\tilde{\mathbf{u}}$ est notée par $\delta\tilde{\mathbf{u}}^*$.

On applique ensuite la procédure classique pour établir les formulations faibles du problème aux limites décrit par Eqs. (34)-(40) que l'on ne présente ici que l'expression obtenu après calcul.

La formulation faible du problème aux limites en 1D (Eqs. (34)) s'écrit : pour tout k_1 fixé dans $\mathbb{R}$ et pour tout s fixé dans $\mathbb{C}$, chercher $\tilde{\mathbf{u}}(k_1,x_2,s) \in \mathscr{C}^{ad}$ tel que :

$$\begin{aligned} &\int_{-h}^{0} \delta\tilde{\mathbf{u}}^*\left(s^2\mathbf{A}_1 + k_1^2\mathbf{A}_2 - ik_1\mathbf{A}_3^T\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\tilde{\mathbf{u}}\,dx_2 \\ &\quad + \int_{-h}^{0}\frac{\partial\delta\tilde{\mathbf{u}}^*}{\partial x_2}\left(ik_1\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\tilde{\mathbf{u}}\,dx_2 \\ &\quad + \delta\tilde{\mathbf{u}}^*(0)\ \mathbf{P}_1\,\tilde{\mathbf{u}}(0) + \delta\tilde{\mathbf{u}}^*(0)\ \mathbf{P}_2\,\tilde{\mathbf{u}}(-h) \\ &\quad = \delta\tilde{\mathbf{u}}^*(0)\ \mathbf{F}_0, \quad \forall\delta\tilde{\mathbf{u}} \in \mathscr{C}^{ad}. \end{aligned} \tag{44}$$

4.2 Formulation des éléments finis

On discrétise le domaine $[-h,0]$ par un maillage qui consiste en n^{el} éléments Ω_e : $[-h,0] = \bigcup_e \Omega_e$ $(e = 1..n^{el})$. En utilisant la méthode de Galerkin, les deux fonctions $\tilde{\mathbf{u}}$ et $\delta\tilde{\mathbf{u}}$ dans chaque élément e peuvent être approchées par la même fonction d'interpolation $\mathbf{N}_e$:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x_2) = \mathbf{N}_e\mathbf{U}_e, \quad \delta\tilde{\mathbf{u}}(x_2) = \mathbf{N}_e\delta\mathbf{U}_e, \quad x_2 \in \Omega_e \tag{45}$$

où $\mathbf{U}_e$ et $\delta\mathbf{U}_e$ sont respectivement les vecteurs des solutions nodales de $\tilde{\mathbf{u}}$ et $\delta\tilde{\mathbf{u}}$ dans l'élément Ω_e. En remplaçant (45) dans (44) et en effectuant l'assemblage des matrices élémentaires, on obtient un système d'équations linéaires aux variables complexes comme dans le cas statique :

$$\left(\mathbf{K} + \mathbf{K}^{\Gamma}\right)\mathbf{U} = \mathbf{F} \tag{46}$$

où $\mathbf{U}$ est le vecteur global de déplacements nodaux ; $\mathbf{K}$ est la "matrice de rigidité" globale associée au solide ; $\mathbf{K}^{\Gamma}$ représente l'opérateur couplé entre le fluide et le solide ; $\mathbf{F}$ est le vecteur des forces extérieures. Pour tous (s,k_1) fixés dans $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$, ces quantités sont exprimées par :

$$\mathbf{K} = s^2\mathbf{K}_{A_1} + k_1^2\mathbf{K}_{A_2} + ik_1\mathbf{K}_{A_3} + \mathbf{K}_{A_4}, \tag{47}$$

$$\mathbf{K}^{\Gamma} = \mathrm{Diag}\left\{0, \frac{\rho_1 s^2}{\alpha_1}, 0, ..., 0, \frac{\rho_2 s^2}{\alpha_2}\right\}, \tag{48}$$

$$\mathbf{F} = \left\{0, \frac{\rho_1}{\alpha_1}\tilde{F}_0 e^{-\alpha_1 x_2^s}, 0, ..., 0\right\}^T, \tag{49}$$

où les matrices $\mathbf{K}_{A_1}$, $\mathbf{K}_{A_2}$, $\mathbf{K}_{A_3}$, $\mathbf{K}_{A_4}$ sont définies indépendamment du couple (s,k_1) :

$$\mathbf{K}_{A_1} = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T\mathbf{A}_1\mathbf{N}_e\,dx_2, \tag{50}$$

$$\mathbf{K}_{A_2} = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T\mathbf{A}_2\mathbf{N}_e\,dx_2, \tag{51}$$

$$\mathbf{K}_{A_3} = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \left\{\mathbf{N'}_e^T\mathbf{A}_3\mathbf{N}_e\right\}_a\,dx_2, \tag{52}$$

$$\mathbf{K}_{A_4} = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \mathbf{N'}_e^T\mathbf{A}_4\mathbf{N'}_e\,dx_2, \tag{53}$$

dans lesquelles la notation $\{.\}_a$ est dédiée à la partie anti-symétrique de $\{.\}$ et $\{.\}'$ est la dérivée par rapport à x_2.

Rappelons que la couche solide peut être hétérogène suivant la direction verticale, et en conséquence, les paramètres physiques dans les matrices élémentaires $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ et $\mathbf{A}_4$ (Eqs. (35)-(36)) ne sont pas constantes mais peuvent varier par rapport à la coordonnée x_2. Pour cette étude, les matrices élémentaires (Eqs. (50)-(52)) sont calculées numériquement en utilisant la technique des points de Gauss. Quand les propriétés mécaniques dans la couche solide sont homogènes, les expressions analytiques de ces matrices élémentaires peuvent être explicitement déterminées.

4.3 Solution en temps-espace

Pour chaque couple de valeurs de (s, k_1) fixées dans le domaine Laplace-Fourier, la solution $\tilde{\mathbf{u}}$ peut être déterminée en résolvant le système d'équations linéaires complexes (voir Eq. (46)). Les solutions en pressions $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_2$ dans les deux domaines Ω_1^f et Ω_2^f peuvent respectivement être déterminées à partir des Eqs. (25) et (26). Afin de reconstruire la solution dans les domaines temporel et spatial, on doit calculer numériquement les transformations de Laplace et de Fourier.

Pour le problème présent, la transformation inverse de Fourier est effectuée en utilisant la technique FFT (Fast Fourier Transform). On désigne respectivement par N_1 et Δk_1 le nombre d'échantillons et l'intervalle d'échantillonnage du domaine de nombre d'ondes k_1 utilisés pour la procédure FFT. La solution en espace (x_1) est reconstruite sur une bande spectrale $[-k_1^{max}, k_1^{max}]$ où $k_1^{max} = N_1\Delta k_1/2$. L'intervalle associée en espace est donc calculée par $\Delta x_1 = 2\pi/(N_1\Delta k_1)$ qui correspond à largeur du domaine de x_1 définie par : $[-x_1^{max}, x_1^{max}]$ avec $x_1^{max} = \pi/\Delta k_1$.

L'inversion de la transformation de Laplace est effectuée en utilisant la méthode "Quadrature Convolution Method" ; l'efficacité de cette méthode pour la recherche de solutions transitoires de plusieurs problèmes a été discutée par [8] .

5 Résultats numériques

On étudie une configuration qui correspond au dispositif de transmission axiale pour l'évaluation ultrasonore de l'os cortical *in vivo*. Dans ce cas, les deux domaines fluides sont supposées être identiques dont les caractéristiques physiques sont données par $\rho_1 = \rho_2 = 1000$ kg.m^{-3} et $c_1 = c_2 = 1500$ m.s^{-1}. La plaque d'os a une épaisseur $h = 4$ mm et est décrite comme un matériau élastique et isotrope transverse ($c_{16} = c_{26} = 0$). La source acoustique se trouve en $(x_1^s, x_2^s) = (0, 2)$ (mm) et son amplitude est définie par :

$$f_0(t) = F_0 e^{-4(f_c t-1)^2} \sin(2\pi f_c t) \qquad (54)$$

où $F_0 = 100$ m.s^{-2} et la fréquence centrale d'impulsion $f_c = 1$ MHz. La durée totale de la simulation est $T = 2 \times 10^{-5}$ s.

Cas d'un os cortical homogène. Les propriétés mécaniques de l'os sont supposées être constantes dans le domaine solide (Ω^b) et sont données dans Tab. 1. Le

ρ (kg.m^{-3})	c_{11} (GPa)	c_{22} (GPa)	c_{12} (GPa)	c_{66} (GPa)
1722	23.55	15.33	9.145	4.7

TABLE 1 – Caractéristiques physiques de l'os cortical - Cas homogène

domaine solide (Ω^b) est discrétisé en 8 éléments identiques qui sont les éléments isoparamétriques à 3 noeuds. Les paramètres utilisés pour la transformation de Fourier en x_1 sont $\Delta x_1 = 0.75 \times 10^{-4}$ m et $N_1 = 2048$. Le nombre de pas de temps utilisé pour la transformation de Laplace est $N_t = 2048$. On note que ces paramètres ont été déterminés de la même manière que lorsqu'on réalise des calculs dynamiques par la méthode des éléments finis classique.

On s'intéresse aux solutions de la pression p_1 aux 2 récepteurs R_1 et R_2 positionnés respectivement à (2,2) (mm) et à (20,2) (mm). La figure 2 présente les variations en temps de ces quantités obtenues par la méthode d'éléments finis spectraux (MEFS) proposée.

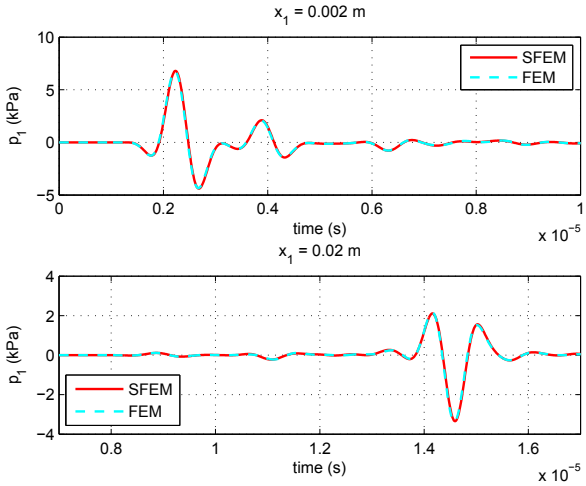


FIGURE 2 – Comparaison des solutions de p_1 obtenus par SFEM et FEM aux récepteurs R_1 (2,2) (mm) (en haut) et R_2 (20,2) (mm) (en bas)

Dans la Fig. 2, les résultats obtenus par MEFS sont aussi comparés à ceux obtenus par un calcul d'éléments finis classique (MEF). Ce dernier est effectué en utilisant le code COMSOL Multiphysics. On peut vérifier que les solutions obtenues par les deux méthodes sont en très bons accords. Le temps de calcul avec la MEFS est seulement environ 300 s, tandis qu'avec la MEF environ 6 heures de calcul sont nécessaires. De plus, puisque la MEFS ne résout que le problème 1D dans le domaine Laplace-Fourier, la mémoire requise par cette méthode est faible.

Cas d'un os cortical avec gradient de propriétés. Les observations expérimentales montrent que la densité ainsi la rigidité de l'os cortical varient considérablement dans une section quelconque de l'os, surtout suivant la direction radiale [9]. Afin de tenir en compte de cet effet,

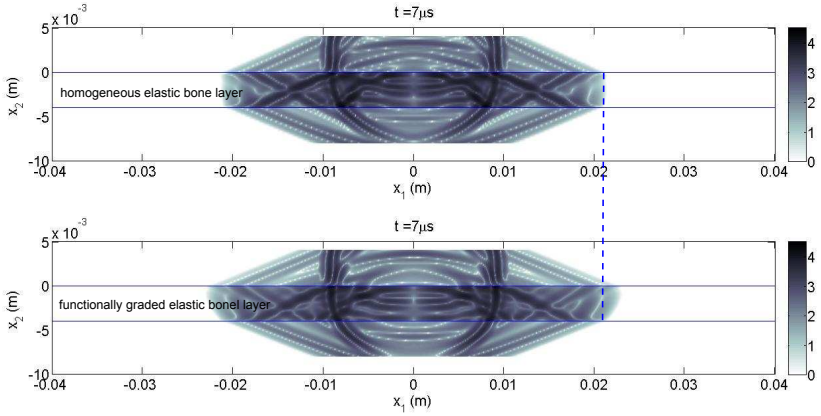


FIGURE 3 – Effet du gradient de propriétés de la couche osseuse

dans cet exemple, la plaque d'os n'est plus supposée homogène mais hétérogène dans la direction $\boldsymbol{e}_2$. On peut supposer que les propriétés mécaniques de l'os varient linéairement en fonction de x_2 [4]. Le Tableau 2 présente les valeurs maximales (correspondant à celles de $x_2 = 0$) et minimales (correspondant à celles de $x_2 = -h$) des propriétés physiques de l'os.

	ρ (kg.m^{-3})	c_{11} (GPa)	c_{22} (GPa)	c_{12} (GPa)	c_{66} (GPa)
Min.	1660	17.6	11.8	5.1	3.3
Max.	1753	29.6	25.9	11.1	5.5

TABLE 2 – Variation des propriétés mécaniques d'un os cortical

On présente dans la Fig. 3 deux instantanés du champ de pression à l'instant $t = 7$ μs : le premier correspond au cas d'un os homogène et le deuxième correspond au cas d'un os avec un gradient de propriétés. On peut constater que le profil du front d'ondes dans la couche solide est nettement changé à cause de la variation de la rigidité et de la densité. Dans le premier cas, le profil du front d'ondes dans la couche solide est quasiment vertical. Cependant, dans le deuxième cas, comme la vitesse d'ondes élastiques est plus importante dans la partie supérieure de la couche de l'os, le front d'ondes devient incliner par rapport à l'axe vertical.

6 Conclusion

On a présenté dans ce papier une approche pour traiter le problème de la propagation d'ondes transitoire dans un os cortical couplé avec des fluides. En appliquant la transformation Laplace-Fourier, la solution complexe du problème est d'abord résolue par la méthode des éléments finis dans le domaine spectral avant d'être reconstruite dans le domaine temporel. Les exemples numériques montrent que la méthode proposée est très efficace non seulement en terme de la qualité de la solution mais aussi en temps de calcul.

L'approche présentée dans ce papier est proposée pour traiter le problème du couplage fluide-solide élastique linéaire en deux dimensions, mais elle peut également être développée pour traiter d'autres problèmes comme : le problème tridimensionnel et/ou d'autres comportements (viscoélastique avec ou sans mémoire).

Références

[1] G. Lowet, G. Van der Perre, Ultrasound velocity measurements in long bones : measurement method and simulation of ultrasound wave propagation, *Journal of Biomechanics* 29, 1255–1262 (1996).

[2] Q. Grimal, S. Naïli, A theoretical analysis in the time-domain of wave reflection on a bone plate, *J. Sound Vib.* 298, 12–29 (2006).

[3] E. Bossy, M. Talmant, P. Laugier, Effect of bone cortical thickness on velocity measurements using ultrasonic axial transmission : A 2d simulation study, *J. Acoust. Soc. Am.* 112, 297–307 (2002).

[4] G. Haïat, S. Naili, Q. Grimal, M. Talmant, C. Desceliers, C. Soize, Influence of a gradient of material properties on ultrasonic wave propagation in cortical bone : Application to axial transmission, *J. Acoust. Soc. Am.* 125 (6), 4043-4052 (2009).

[5] N. X. Dong, E. X. Guo, The dependence of transverse isotropic elasticity of human femoral cortical boneon porosity, *J. Biomechanics* 37 (8), 1281–1287 (2004).

[6] C. Desceliers, C. Soize, Q. Grimal, G. Haïat, S. Naili, A time-domain method to solve transient elastic wave propagation in a multilayer medium with a hybrid spectral-finite element space approximation, *Wave Motion* 45 (4), 383 – 399 (2008).

[7] J. Carcione, *Wave Fields in Real Media : Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic and Porous Media*, Elsevier, 2001.

[8] M. Schanz, H. Antes, Application of "Operational Quadrature Methods" in time domain boundary element methods, *Meccanica* 32, 179-186 (1997).

[9] C. Thomas, S. A. Feik, J. Clement, Regional variation of intracortical porosity in the midshaft of the human femur : age and sex differences, *J. Anat.* 206, 115–125 (2005).