



**HAL**  
open science

## Focalisation bayésienne: une approche unifiée du problème inverse en acoustique

Jérôme Antoni

► **To cite this version:**

Jérôme Antoni. Focalisation bayésienne: une approche unifiée du problème inverse en acoustique. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00539764

**HAL Id: hal-00539764**

**<https://hal.science/hal-00539764v1>**

Submitted on 25 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# 10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

## Focalisation bayésienne: une approche unifiée du problème inverse en acoustique

Jérôme Antoni<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université de Technologie de Compiègne, UMR CNRS 6253, 60205 Compiègne, France, e-mail: antoni@utc.f

La localisation et/ou la reconstruction de sources acoustiques à partir des mesures fournies par une antenne discrète est un problème acoustique inverse abordé suivant de multiples approches. Les méthodes classiques (formation de voie, holographie, sources équivalentes) se ramènent toutes, implicitement ou explicitement, à interpoler les mesures de l'antenne sur une base de fonctions spatiales dont la propagation est connue, puis à reconstruire les sources par rétro-propagation (extrapolation).

Cette communication se propose de répondre de manière générale à la question du choix optimal des fonctions de base spatiales étant donné une surface source et une géométrie d'antenne, connues mais quelconques, et éventuellement des connaissances a priori sur la distribution spatiale des sources. La réponse à cette question est non seulement fondamentale pour guider l'utilisateur vers le choix d'une méthode inverse optimale, mais aussi en raison des nombreux enseignements qui en découlent sur la manière de régulariser le problème inverse, de quantifier l'erreur de reconstruction, d'optimiser la conception de l'antenne.

L'approche suivie pour étudier cette question se fonde sur l'inférence bayésienne qui permet de fusionner des informations de nature à la fois physique et probabiliste. Les principales conclusions sont les suivantes :

- étant donné une antenne de  $M$  capteurs, les fonctions de base spatiales optimales sont les fonctions propres associées au  $M$  premières valeurs singulières d'un opérateur de propagation spécifique continu-discret entre la surface source et les capteurs de l'antenne,
- la prise en compte des aprioris sur la distribution spatiale des sources se traduit par l'ajout d'une métrique spécifique sur l'opérateur précédant,
- ces aprioris permettent d'améliorer, parfois de façon considérable, la résolution spatiale du problème inverse selon un principe de "focalisation bayésienne",
- ces aprioris contribuent à régulariser le problème inverse.

## 1 Introduction

Nous considérons dans cette communication le problème acoustique inverse qui consiste à reconstruire une distribution source sur une surface donnée à partir d'un ensemble de mesures restituées par une antenne de microphones. L'opérateur de propagation qui caractérise le transfert des ondes de la surface source aux microphones est supposé connu, soit sous forme analytique, soit sous forme numérique. La distance entre la surface source et les microphones est arbitraire de manière à englober aussi bien les problèmes en champ lointain qu'en champ proche. Cette problématique est suffisamment générale pour accepter comme cas particuliers la formation de voies (beamforming), l'holographie acoustique ou la reconstruction de sources équivalentes.

De manière générale, le problème implique d'abord une phase d'interpolation qui consiste à projeter les mesures des microphones sur une base de représentation spatiale, continue et connue, puis une phase de rétro-propagation qui consiste à calculer la distribution source qui, par rayonnement, produit le champ acoustique représenté par cette base. Par exemple, la formation de voie réalise une interpolation des mesures sur des ondes planes ou sphériques selon l'hypothèse de champ lointain ou proche, l'holographie acoustique en champ proche une interpolation sur des ondes planes [1][2], des harmoniques sphériques [3] ou cylindriques [4] selon la topologie de la surface source et la méthode des sources équivalentes une interpolation sur des champs monopolaires décentralisés [5]. Ces approches soulèvent naturellement les questions du choix critique du nombre de fonctions d'ondes à utiliser, du positionnement des centres des harmoniques

sphériques ou des sources monopolaires équivalentes, de la direction et des fréquences spatiales des ondes planes, etc.

Ces questions se ramènent à celle, centrale, du "meilleur" choix possible d'une base d'interpolation pour un problème donné. Étant données une topologie de surface source et une géométrie d'antenne (impliquant un nombre  $M$  de microphones et une distance  $z_m$  à la surface source), quelle est la base d'interpolation de dimension la plus petite possible qui minimise l'erreur de reconstruction de la distribution source ? La réponse à cette question a des implications importantes pour la résolution du problème inverse :

- elle garantit d'atteindre systématiquement la plus petite erreur de reconstruction possible
- et ce avec le minimum de fonctions de base nécessaires, ce qui réalise une économie certaine en termes de temps de calcul et de capacité de stockage.

Nous proposons dans cette communication une solution qui découle d'une approche probabiliste bayésienne.

## 2 Problème directe

Bien que l'approche que nous proposons soit générale, nous la présentons ici sur le problème simplifié où la fonction de Green  $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  caractérisée par des conditions de Neumann homogènes sur la surface source  $S$  est disponible. Le problème directe dans le domaine fréquentiel (convention  $e^{-i\omega t}$ ) se formule alors

$$p_{\mathcal{M}}(\mathbf{r}_i) = \int_S s(\mathbf{r})G(\mathbf{r}_i|\mathbf{r})dS(\mathbf{r}) + \nu_i, \quad i = 1, \dots, M \quad (1)$$

avec  $p_{\mathcal{M}}(\mathbf{r}_i)$  la pression acoustique mesurée par le  $i$ ème microphone positionné en  $\mathbf{r}_i$ ,  $\nu_i$  le bruit de mesure au microphone et  $s(\mathbf{r}) = i\omega\rho_0 v_n(\mathbf{r})$  la distribution source exprimée en fonction de la composante  $v_n(\mathbf{r})$  de la vitesse particulaire normale en  $S$  (orientée de l'antenne vers la source). Après concaténation des  $M$  mesures microphones dans un vecteur colonne  $\mathbf{p}_{\mathcal{M}}$ , le problème direct se reformule

$$\mathbf{p}_{\mathcal{M}} = \int_S s(\mathbf{r})\mathbf{G}(\mathbf{r})dS(\mathbf{r}) + \mathbf{n}, \quad i = 1, \dots, M \quad (2)$$

où le  $i$ ème élément du vecteur colonne  $\mathbf{G}(\mathbf{r})$  est  $G(\mathbf{r}_i|\mathbf{r})$ .

### 3 Formulation du problème inverse

L'objectif du problème inverse est de reconstruire la distribution source inconnue à partir des mesures bruitées restituées par les microphones. Les solutions linéaires à ce problème, quel que soit l'approche considérée, conduisent toutes à une estimation  $\hat{s}(\mathbf{r})$  de la source sous la forme d'une combinaison linéaire des  $M$  mesures  $p_{\mathcal{M}}(\mathbf{r}_i)$  dont les coefficients dépendent du point de calcul  $\mathbf{r}$ , soit [6]

$$\hat{s}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^M a_i(\mathbf{r})p_{\mathcal{M}}(\mathbf{r}_i) \quad (3)$$

Une manière alternative de poser le problème est sous la forme

$$\hat{s}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^P c_k \phi_k(\mathbf{r}) \doteq \Phi^t \mathbf{c} \quad (4)$$

où les  $c_k$  sont des coefficients qui dépendent des mesures  $p_{\mathcal{M}}(\mathbf{r}_i)$  et où les  $\phi_k(\mathbf{r})$  sont des fonctions de base spatiales indépendantes des mesures, qui constituent une base de décomposition pour la distribution source. A ce stade il est important de noter que les inconnues sont à la fois les  $c_k$ , les  $\phi_k(\mathbf{r})$  et leur nombre  $P$ .

#### 3.1 Résolution du problème inverse

##### 3.1.1 Fonctionnelle de coût

Sur la base de l'équation (4), la résolution du problème inverse est équivalente à l'estimation des paramètres  $c_k$  et  $\phi_k(\mathbf{r})$  à partir des mesures  $\mathbf{p}_{\mathcal{M}}$ . L'inférence bayésienne offre une manière élégante de réaliser cet objectif en fournissant la distribution de probabilité des paramètres cherchés conditionnée à l'observation des mesures, soit  $[\mathbf{c}, \Phi | \mathbf{p}_{\mathcal{M}}]$  (nous utilisons la notation  $[x]$  pour exprimer la distribution de probabilité d'une variable aléatoire  $x$ ). Par application de la règle de Bayes, il s'ensuit :

$$[\mathbf{c}, \Phi | \mathbf{p}_{\mathcal{M}}] = \frac{[\mathbf{p}_{\mathcal{M}} | \mathbf{c}, \Phi][\mathbf{c}, \Phi]}{[\mathbf{p}_{\mathcal{M}}]} \quad (5)$$

où *i*) la fonction de vraisemblance  $[\mathbf{p}_{\mathcal{M}} | \mathbf{c}, \Phi]$  représente la probabilité d'observer les mesures étant donné un jeu de paramètres  $c_k$  et  $\phi_k(\mathbf{r})$ ,  $k = 1, \dots, P$ , *ii*)  $[\mathbf{c}, \Phi]$  la probabilité *a priori* des paramètres et *iii*) l'évidence  $[\mathbf{p}_{\mathcal{M}}] = \int [\mathbf{p}_{\mathcal{M}} | \mathbf{c}, \Phi][\mathbf{c}, \Phi]d\mathbf{c}d\Phi$  la probabilité d'observer les données moyennée sur tout l'espace des réalisations possibles des paramètres. A noter que l'équation (5) illustre de manière remarquablement concise comment le problème inverse (probabilité  $[\mathbf{c}, \Phi | \mathbf{p}_{\mathcal{M}}]$  d'obtenir la source étant donné les observations) s'exprime en fonction du problème direct (probabilité  $[\mathbf{p}_{\mathcal{M}} | \mathbf{c}, \Phi]$  de prédire les observations étant donnée la source).

##### a) *Vraisemblance*

En vertu du théorème de la limite centrale appliqué à la

transformation de Fourier, la vraisemblance tend asymptotiquement vers une distribution normale centrée de matrice de covariance  $\beta^2 \Omega_N = \mathcal{E}\{\mathbf{nn}^H\}$  avec  $\Omega_N$  une matrice de structure connue (bruit spatialement blanc, bruit isotropique, etc.) telle que  $\text{trace}\{\Omega_N\} = M$  et où  $\beta^2$  est la puissance moyenne inconnue du bruit.

##### b) *Distribution a priori*

La distribution *a priori* des paramètres se déduit de l'*a priori* que l'expérimentateur possède sur la distribution source. Dans la plupart des cas, celui ci pourra se réduire à une information spatiale sur la zone d'où est susceptible de provenir (ou de ne pas provenir) le champ acoustique mesuré, ainsi qu'à une information statistique sur le fait que la corrélation spatiale des sources est *a priori* nulle (champ stochastique blanc) de manière à forcer l'obtention d'une solution avec la résolution spatiale la plus fine possible. Il s'en déduit que la distribution *a priori* de  $\hat{s}(\mathbf{r})$  peut par exemple être représentée par une loi normale, telle que

$$[\mathbf{c}, \Phi] \propto \frac{1}{\alpha^2} \exp \left\{ \alpha^{-2} \int_S \left| \sum_{k=1}^P c_k \phi_k(\mathbf{r}) \right|^2 \sigma_s^{-2}(\mathbf{r}) dS(\mathbf{r}) \right\} \quad (6)$$

où  $\alpha^2 \sigma_s^2(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mathcal{E}\{s(\mathbf{r})s^*(\mathbf{r}')\}$  avec  $\sigma_s^2(\mathbf{r})$  une fonction d'ouverture spatiale telle que  $\int_S \sigma_s^2(\mathbf{r})dS(\mathbf{r}) = 1$ ,  $\alpha^2$  est la puissance moyenne inconnue des sources et  $\mathcal{E}$  l'espérance mathématique sur toutes les réalisations possible de la source.

##### c) *Distribution a posteriori*

Le problème inverse se résume finalement à trouver la distribution *a posteriori* de toutes les inconnues du problème, soit

$$\begin{aligned} J_{AP}(\mathbf{c}, \Phi, \beta^2, \alpha^2) &= [\mathbf{c}, \Phi, \beta^2, \alpha^2 | \mathbf{p}_{\mathcal{M}}] \quad (7) \\ &\propto \exp \left\{ \beta^{-2} \left\| \mathbf{p}_{\mathcal{M}} - \sum_{k=1}^P c_k \int_S \phi_k(\mathbf{r})\mathbf{G}(\mathbf{r})dS(\mathbf{r}) \right\|_{\Omega_N}^2 \right\} \\ &\times \exp \left\{ \alpha^{-2} \|u\|_{\sigma_s^2}^2 \right\} \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \end{aligned}$$

avec comme convention d'écriture  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}}^2 \doteq \mathbf{x}^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}$  pour le carré de la norme d'un vecteur  $\mathbf{x}$  avec la métrique  $\mathbf{A}^{-1}$  et  $\|u\|_{\sigma_s^2}^2 \doteq \int_S |u(\mathbf{r})|^2 \sigma_s^{-2}(\mathbf{r})dS(\mathbf{r})$  pour le carré de la norme d'une fonction  $u(\mathbf{r})$  avec la métrique  $\sigma_s^{-2}(\mathbf{r})$ . Notons que cette formulation peut encore être généralisée en rajoutant des aprioris sur les puissances  $\beta^2$  et  $\alpha^2$  dans le cas où ceux-ci seraient disponibles.

##### 3.1.2 Maximum *a posteriori*

Intéressons-nous ici à l'évaluation des paramètres  $c_k$  et  $\phi_k(\mathbf{r})$ , celle des paramètres  $\beta^2$  et  $\alpha^2$  étant traitée au paragraphe 3.3.2. Une manière simple d'obtenir des estimations ponctuelles des paramètres est de chercher les valeurs qui maximisent la probabilité (7) de réalisation de ces derniers étant donné l'observation des mesures – estimateurs du maximum *a posteriori* (MAP). Ceci conduit à un calcul variationnel dont nous ne donnons pas les détails, mais seulement les résultats. Posons pour cela

$$\sigma_s^2(\mathbf{r})\mathbf{G}(\mathbf{r})^H \Omega_N^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^M s_k \phi_k(\mathbf{r}) \mathbf{U}_k^H \quad (8)$$

la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur de propagation continu-discret  $\mathbf{G}(\mathbf{r})$   $1 \times M$  au travers de l'ouverture  $\sigma_s^2(\mathbf{r})$  et blanchi par rapport à la matrice de covariance  $\Omega_N$  (l'opérateur est continu à gauche par rapport à la variable  $(\mathbf{r})$  et discret à droite par rapport aux éléments d'un vecteur

de dimension  $M$ ), telle que

$$\begin{cases} s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_M \geq 0 \\ \int_S \phi_k(\mathbf{r}) \phi_l(\mathbf{r})^* \sigma_s^{-2}(\mathbf{r}) dS(\mathbf{r}) = \delta_{kl} \\ \mathbf{U}_k^H \mathbf{U}_l = \delta_{kl} \end{cases} \quad (9)$$

avec  $\phi_k(\mathbf{r})$  des fonctions scalaires de la variable  $\mathbf{r}$  sur  $S$  et  $\mathbf{U}_k$  des vecteurs  $1 \times M$ . On vérifie alors que

1. les fonctions de base spatiales inconnues dans (4) s'identifie avec les fonctions propres de la décomposition (8);
2. elles sont donc orthogonales au sens de (9) et au nombre de  $P = M$ ;
3. les coefficients de la combinaison linéaire (4) sont donnés par

$$\hat{c}_k = \frac{s_k}{s_k^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}} \mathbf{U}_k^H \Omega_N^{-\frac{1}{2}} \mathbf{p}_{\mathcal{M}} \quad (10)$$

4. d'où la distribution source reconstruite

$$\hat{s}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^P \frac{s_k}{s_k^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}} \phi_k(\mathbf{r}) \mathbf{U}_k^H \Omega_N^{-\frac{1}{2}} \mathbf{p}_{\mathcal{M}} \quad (11)$$

à mettre en relief avec l'équation (3) où  $a_i(\mathbf{r})$  s'identifie avec le  $i$ ème élément du vecteur ligne  $s_k / (s_k^2 + \beta^2 / \alpha^2) \phi_k(\mathbf{r}) \mathbf{U}_k^H \Omega_N^{-1/2}$ .

On vérifie par ailleurs que ces solutions sont aussi celles qui réalisent le minimum du critère de l'erreur quadratique moyenne

$$J_{EQM}(\mathbf{c}, \Phi) = \mathcal{E} \left\{ \left\| s - \sum_{k=1}^P c_k \phi_k \right\|_{\sigma_s^2}^2 \right\} \quad (12)$$

sous la contrainte d'avoir les fonctions de base  $\phi_k(\mathbf{r})$  orthogonales par rapport à la métrique  $\sigma_s^{-2}(\mathbf{r})$  et où l'espérance mathématique  $\mathcal{E}$  est prise sur toutes les réalisations possible de la source et du bruit de mesure.

Ce résultat est remarquable, car il fournit les fonctions de base optimales – au sens de l'extrémisation de deux critères distincts,  $J_{AP}$  et  $J_{EQM}$  – sur lesquelles doit être développée la distribution source inconnue. Celles-ci sont indépendantes des mesures, ne dépendent que de la topologie de la surface source, d'une géométrie d'antenne, de la structure spatiale du bruit de mesure et d'une fonction d'ouverture qui traduit l'a priori spatial sur la localisation des sources. Elles fournissent une base de décomposition de dimension minimale égale au nombre de microphones de l'antenne.

## 3.2 Questions d'interprétation

L'interprétation des fonctions de base spatiales  $\phi_k(\mathbf{r})$  et des valeurs singulières  $s_k$  associées est à la fois physique et probabiliste.

### 3.2.1 Principe de réciprocité

Remarquons que d'après l'équation (8),

$$\phi_k(\mathbf{r}) = \sigma_s^2(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^M \frac{U_{ki}}{s_k} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i)^* \quad (13)$$

Etant donné la symétrie de la fonction de Green, ce résultat indique que les fonctions de base optimales se déduisent de la superposition des  $M$  champ d'ondes produits par des sources ponctuelles de distributions  $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i)$  positionnées à la place des microphones. Il s'agit d'une illustration du principe de réciprocité.

Il faut remarquer par ailleurs que, en raison de la pondération des fonctions de Green dans l'équation (13) par la fonction d'ouverture  $\sigma_s^2(\mathbf{r})$ , les fonctions de base  $\phi_k(\mathbf{r})$  ne vérifient pas en général l'équation des ondes sur  $S$ ; elles la vérifient cependant approximativement lorsque l'ouverture  $\sigma_s^2(\mathbf{r})$  est grande devant les longueurs d'ondes de  $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i)$ , d'où une interprétation possible dans ce cas des  $\phi_k(\mathbf{r})$  en termes de fonctions d'ondes.

Enfin, il résulte de l'équation (13) que la distribution source reconstruite s'exprime comme une superposition des champs d'ondes tels qu'ils seraient rayonnés sur  $S$  par des sources ponctuelles positionnées à la place des microphones :

$$\hat{s}(\mathbf{r}) = \sigma_s^2(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^M m_i G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i)^* \quad (14)$$

avec  $m_i = \sum_{k=1}^M U_{ki} c_i / s_i$  qui s'interprètent comme des débits généralisés. Il s'agit d'une illustration du principe du retournement temporel (la conjugaison de phase \* correspondant à un retournement de l'axe temporel) où le problème inverse s'interprète explicitement comme un rayonnement des microphones vers la source.

### 3.2.2 Coefficients de rayonnement

Une autre interprétation possible des fonctions de base  $\phi_k(\mathbf{r})$  permet de les identifier avec les distributions source de rayonnement le plus efficace possible sur l'antenne. Soit  $u(\mathbf{r})$  une distribution source quelconque dont la puissance est normalisée par rapport à la fonction d'ouverture  $\sigma_s^2(\mathbf{r})$  de sorte que  $\|u\|_{\sigma_s^2}^2 = 1$ . Elle produit aux microphones un vecteur de mesures  $\mathbf{p}_{\mathcal{M}} = s_k \Omega_N^{-1/2} \mathbf{U}_k$  dont la puissance est  $\|\mathbf{p}_{\mathcal{M}}\|_{\Omega_N}^2 = s_k^2$ . Il s'ensuit que parmi toutes les distributions source possibles,  $u(\mathbf{r}) = \phi_1(\mathbf{r})$  (associée à la plus grande valeur singulière  $s_1$ ) est celle qui maximise la puissance rayonnée au travers de la fonction d'ouverture sur l'antenne. De même,  $u(\mathbf{r}) = \phi_2(\mathbf{r})$  est la distribution source, orthogonale à la précédente au travers de l'ouverture, qui maximise l'énergie rayonnée sur l'antenne et ainsi de suite. Ce résultat confère aux carrés des valeurs singulières  $s_k^2$  une interprétation en tant que "coefficients énergétiques de rayonnement" : les fortes valeurs de  $s_k^2$  caractérisent des ondes qui se propagent facilement jusqu'à l'antenne, tandis que les valeurs proches de zéro caractérisent un comportement d'ondes évanescentes qui se propagent plus difficilement.

### 3.2.3 Probabilité de bonne reconstruction

L'interprétation physique précédente suggère la reformulation probabiliste suivante : quelle est la distribution source  $u(\mathbf{r})$ , parmi toutes celles possibles qui produisent une puissance constante  $\|\mathbf{p}_{\mathcal{M}}\|_{\Omega_N}^2$  sur l'antenne, qui maximise la probabilité

$$\Pr \left\{ \hat{s} = u | \mathbf{p}_{\mathcal{M}} = \int_S \mathbf{G}(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) dS(\mathbf{r}) \right\} \quad (15)$$

d'être correctement reconstruite après l'observation de son rayonnement sur l'antenne? On montre que la solution est fournie par la fonction d'onde  $u(\mathbf{r}) = \phi_1(\mathbf{r})$ . De même la distribution source, orthogonale à  $\phi_1(\mathbf{r})$  au travers de l'ouverture, qui maximise le critère (15) est  $u(\mathbf{r}) = \phi_2(\mathbf{r})$  et ainsi de suite. On vérifie que ce résultat reste valable quelle que soit la puissance  $\beta^2$  du bruit de mesure  $\mathbf{n}$ , la probabilité maximisée par les  $\phi_k(\mathbf{r})$  étant alors  $\mathcal{E}\{\Pr\{\hat{s} = u | \mathbf{p}_{\mathcal{M}} = \int_S \mathbf{G} u dS + \mathbf{n}\}\}$  avec  $\mathcal{E}$  l'espérance mathématique sur le bruit de mesure.

### 3.2.4 Variance d'estimation et transfert d'information

Sur la base des résultats trouvés, on vérifie que la distribution de probabilité *a posteriori* de la distribution source  $[s|\mathbf{p}_{\mathcal{M}}] = [\mathbf{c}, \Phi|\mathbf{p}_{\mathcal{M}}]$  est normale, de moyenne  $\hat{\mathbf{c}}$  telle que donnée dans l'équation (12) et de matrice de covariance diagonale de terme générique  $1/(1 + s_k^2 \alpha^2/\beta^2)$ . Il s'ensuit que la variance d'estimation du coefficient  $\hat{c}_k$  est d'autant plus faible que le coefficient de rayonnement  $s_k^2$  est grand devant le rapport bruit-à-signal  $\alpha^2/\beta^2$ . Une manière de mesurer la qualité de reconstruction de la distribution source est donc via la variance totale donnée par la trace

$$\mathcal{P} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{1 + s_k^2 \alpha^2/\beta^2} \quad (16)$$

En particulier, on vérifie que le coût du critère de l'erreur quadratique moyenne (12) lorsque  $\mathbf{c}$  et  $\Phi$  sont remplacés par les solutions du paragraphe 3.1.2 devient

$$J_{EQM} = C - M + \mathcal{P} \quad (17)$$

où  $C = \mathcal{E}\{|s(\mathbf{r})|_{\sigma_s^2}^2\}$  est une constante et  $M$  le nombre de microphones. De manière similaire, la quantité d'information en nats (1.443 bits) qu'apportent les mesures  $\mathbf{p}_{\mathcal{M}}$  réalisées sur l'antenne pour reconstruire la distribution source s'exprime à partir de l'information mutuelle

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{E} \left\{ [s, \mathbf{p}_{\mathcal{M}}] \ln \left( \frac{[s, \mathbf{p}_{\mathcal{M}}]}{[s|\mathbf{p}_{\mathcal{M}}]} \right) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^M \ln \left( 1 + s_k^2 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

où  $s = (\mathbf{c}, \Phi)$  et  $\mathcal{E}$  est l'espérance mathématique sur toutes les réalisations de la distribution source et des mesures aux microphones. L'information mutuelle  $\mathcal{I}$  donne une mesure du taux de transmission de l'information de l'antenne à la surface de rétro-propagation  $S$  et, par conséquent, permet de caractériser le caractère plus ou moins bien (ou mal) posé du problème inverse.

Les indicateurs  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{I}$  définis dans ce paragraphe se trouvent être particulièrement utiles pour optimiser la conception d'une antenne de microphones (géométrie et positionnement) étant donnée une surface source et un a priori spatial sur son rayonnement.

## 3.3 Régularisation

### 3.3.1 Mécanisme de régularisation

C'est une des particularités de l'approche bayésienne que de fournir, par construction, un mécanisme de régularisation interne. La solution (11) au problème inverse (6) réalise le meilleur compromis entre l'ajustement aux données expérimentales par rapport au carré de la norme  $\|\mathbf{p}_{\mathcal{M}} - \sum_{k=1}^M c_k \int_S \phi_k(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}) dS(\mathbf{r})\|_{\Omega_N}^2$  et l'obtention d'une solution physiquement admissible par rapport au carré de la norme  $\|u\|_{\sigma_s^2}^2$ . Ce compromis dépend du rapport bruit-à-signal  $\beta^2/\alpha^2$ . Ceci peut être constaté à plusieurs niveaux.

Dans le cas où la distribution source est une fonction d'onde,  $s(\mathbf{r}) = \phi_k(\mathbf{r})$ , on vérifie que sa reconstruction sur la surface de rétro-propagation  $S$  est

$$\hat{s}(\mathbf{r}) = \frac{s_k^2}{s_k^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}} \phi_k(\mathbf{r}) \quad (19)$$

Par conséquent, la source sera d'autant mieux reconstruite que son coefficient de rayonnement  $s_k^2$  est grand devant le

rapport bruit-à-signal ( $\hat{s}(\mathbf{r}) \rightarrow s(\mathbf{r})$ ). A l'autre extrême, les ondes évanescentes qui n'atteignent pas l'antenne ( $s_k^2 = 0$ ) ou l'atteignent avec une amplitude faible devant l'écart-type du bruit de fond ( $\beta^2 \ll \alpha^2$ ) ne seront pas reconstruites ( $\hat{s}(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ ) [1].

Dans le cas plus général où la distribution source se développe selon l'expression (4), on vérifie que les coefficients estimés sont reliés aux coefficients réels selon

$$\hat{c}_k = \frac{s_k^2}{s_k^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}} c_k \quad (20)$$

ce qui permet de généraliser l'interprétation précédente à chaque composante  $\phi_k(\mathbf{r})$  du spectre de la source.

### 3.3.2 Réglage du paramètre de régularisation

Dans les approches classiques le réglage du paramètre de régularisation procède selon diverses approches ad hoc. Le cadre bayésien offre une solution optimale et unifiée dans le sens où le paramètre de régularisation peut être estimé à partir de la même fonctionnelle de coût (7). Il est intéressant de constater que, contrairement à la méthode de la courbe en L ou de la validation croisée, le réglage du rapport  $\lambda^2 = \beta^2/\alpha^2$  nécessite ici l'estimation de deux paramètres : la puissance moyenne des sources  $\alpha^2$  et la puissance moyenne du bruit de mesure  $\beta^2$ . Ceci peut se faire selon différentes stratégies.

#### a) MAP conjoint

Il s'agit de trouver les valeurs de  $\alpha^2$  et  $\beta^2$  qui maximisent la fonctionnelle  $[\mathbf{c}, \Phi, \beta^2, \alpha^2|\mathbf{p}_{\mathcal{M}}]$  de l'équation (7) dans laquelle  $\mathbf{c}$  et  $\Phi$  sont substitués par les estimateurs MAP du paragraphe 3.1.2. Ceci conduit à minimiser la fonctionnelle

$$J_1(\alpha^2, \beta^2) = M \ln \beta^2 + M \ln \alpha^2 + \sum_{k=1}^M \frac{|y_k|^2}{\alpha^2 s_k^2 + \beta^2} \quad (21)$$

où  $y_k$  est le kème élément du vecteur ligne  $\mathbf{p}_{\mathcal{M}}^H \Omega_N^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}$ .

#### b) MAP marginalisé

Une autre approche consiste à maximiser la probabilité de réalisation des paramètres  $\alpha^2$  et  $\beta^2$  étant donné l'observation des mesures aux microphones, soit

$$[\beta^2, \alpha^2|\mathbf{p}_{\mathcal{M}}] = \int [\beta^2, \alpha^2|\mathbf{p}_{\mathcal{M}}][\mathbf{c}, \Phi] d\mathbf{c} d\Phi \quad (22)$$

Deux choix possibles s'offrent pour la distribution conjointe  $[\mathbf{c}, \Phi]$  des paramètres  $\mathbf{c}$  et  $\Phi$ . Soit la distribution *a priori* du paragraphe 3.1.1 qui force la reconstruction d'une distribution source la plus spatialement décorrélée possible, soit la distribution *a posteriori* (en fait  $[\mathbf{c}, \Phi|\mathbf{p}_{\mathcal{M}}]$ ) de l'équation (5) qui force la reconstruction d'une distribution source plus structurée. Le premier choix donne lieu à la minimisation du critère

$$J_2(\alpha^2, \beta^2) = M \ln \beta^2 + \mathcal{I} + \sum_{k=1}^M \frac{|y_k|^2}{\alpha^2 s_k^2 + \beta^2} \quad (23)$$

avec  $\mathcal{I}$  l'information mutuelle (18), et le second à la minimisation du critère

$$\begin{aligned} J_3(\alpha^2, \beta^2) &= M \ln \beta^2 + \mathcal{I} + \sum_{k=1}^M \ln \left( 1 + 2s_k^2 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \\ &+ \sum_{k=1}^M \frac{\alpha^2 |y_k|^2}{(\alpha^2 s_k^2 + \beta^2) (2\alpha^2 s_k^2 + \beta^2)} \end{aligned} \quad (24)$$

#### c) Estimation empirique

Lorsque la matrice de covariance  $\beta^2 \Omega_N$  du bruit sur l'antenne est connue ou peut être mesurée et sous l'hypothèse

d'une distribution source spatialement blanche, le paramètre de régularisation peut être estimé selon l'expression

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\sum_{k=1}^M s_k^2}{M \cdot RSB} \quad (25)$$

où  $RSB = \|\mathbf{p}_M\|_{\beta^2 \Omega_N}^2 - 1$  est le rapport signal-à-bruit sur l'antenne. Cette valeur empirique peut servir à initialiser la minimisation des critères  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$ .

Nous pensons que le fait d'avoir trois nouveaux critères en plus des critères classiques comme la courbe en L et la validation croisée [5] est un avantage déterminant de l'approche bayésienne dans la résolution, souvent délicate, du réglage du paramètre de régularisation.

## 4 Focalisation bayésienne

### 4.1 Mécanisme de super-résolution

Le rôle de l'*a priori* dans la formulation bayésienne du problème acoustique inverse ne se limite pas seulement à fournir un mécanisme de régularisation interne. Il permet aussi, et c'est là un autre résultat majeur de l'approche proposée, d'atteindre une super-résolution spatiale.

Afin de s'en rendre compte, considérons le cas particulier d'une distribution source spatialement blanche dans une largeur de bande  $B$  (fréquences spatiales) supposée finie. La puissance de la distribution au travers de l'ouverture  $\sigma_s^2(\mathbf{r})$  est

$$\mathcal{E}\{\|s\|_{\sigma_s^2}^2\} \approx B^2 A_s \quad (26)$$

où  $A_s$  représente l'aire du domaine de la surface  $S$  où la fonction d'ouverture  $\sigma_s^2(\mathbf{r})$  est non-nulle. On vérifie par ailleurs que la puissance de la distribution reconstruite est

$$\mathcal{E}\{\|\hat{s}\|_{\sigma_s^2}^2\} = \mathcal{P} \quad (27)$$

avec  $\mathcal{P}$  la variance totale définie dans l'équation (16). Puisque  $\mathcal{P}$  est homogène en unités à  $B^2 A_s$  (voir aussi l'équation (17)), il s'ensuit que la résolution surfacique de la distribution reconstruite est de l'ordre de  $A_s/\mathcal{P}$ . Le minimum atteint en l'absence de bruit de mesure ( $\mathcal{P} = M$ ) est de l'ordre de l'aire d'ouverture  $A_s$  divisée par le nombre de degrés de liberté  $M$  apportés par les microphones. Il s'en déduit qu'un rétrécissement de l'ouverture  $\sigma_s^2(\mathbf{r})$  va dans le sens d'un affinement de la résolution spatiale.

Intuitivement, ce résultat peut aussi se comprendre par le fait qu'un rétrécissement de l'ouverture  $\sigma_s^2(\mathbf{r})$  entraîne une focalisation des ondes sur la surface de reconstruction  $S$  lors de la rétro-propagation des mesures comme indiqué dans l'équation (14), la fonction d'ouverture  $\sigma_s^2(\mathbf{r})$  jouant le rôle d'une "lentille" dans l'inversion. Collatéralement, le transfert d'information  $\mathcal{I}$  s'en trouve accru, ce qui se traduit d'après l'équation (18) par une augmentation des coefficients énergétiques de rayonnement  $s_k^2$  et, d'une manière générale, par une amélioration de la qualité de l'inversion (capacité à mieux reconstruire les ondes évanescentes d'après (19) et à diminuer les variances d'estimation d'après (16)).

### 4.2 Lien avec la formation de voie

Il est intéressant de constater que la méthode inverse proposée accepte la formation de voie comme cas limite lorsque l'aire d'ouverture tend vers zéro,  $\sigma_s^2(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ , que l'antenne se situe en champ lointain à la distance  $R$  de la surface source et que le bruit de mesure est spatialement blanc ( $\Omega_N = \mathbf{I}$ ). Sous ces hypothèses, il vient

$$\hat{s}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \frac{4\pi R}{M + \frac{\beta^2}{\alpha^2} (4\pi R)^2} \sum_{i=1}^M p_{\mathcal{M}}(\mathbf{r}_i) e^{-ik\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0\|} \quad (28)$$

la source étant cherchée sous la forme d'un monopole dont le débit est estimé par projection des pressions sur les fonctions d'ondes  $\exp\{ik\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0\|\}$ , sphériques ou plane selon le degré d'approximation en champ lointain.

## 5 Aspects pratiques

La décomposition en valeurs singulières (8) et la reconstruction (11) de la distribution source qui en résulte peuvent être calculées assez simplement de la manière suivante :

1. calculer les corrélations spatiales

$$C_{ij} = \int_S G(\mathbf{r}_i|\mathbf{r}) G(\mathbf{r}_j|\mathbf{r})^* \sigma_s^2(\mathbf{r}) dS(\mathbf{r}) \quad (29)$$

2. calculer la décomposition en valeurs propres

$$\Omega_N^{-1/2} \mathbf{C} \Omega_N^{-1/2} = \sum_{k=1}^M s_k^2 \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H \quad (30)$$

avec  $\mathbf{C}$  la matrice  $M \times M$  construite à l'étape précédente,

3. évaluer l'équation (14).

La principale charge de calcul se situe au niveau des intégrales  $C_{ij}$  qui doivent être évaluées numériquement. On prendra avantageusement en compte le fait que la fonction d'ouverture  $\sigma_s^2(\mathbf{r})$  permet de restreindre ce calcul à une surface d'aire limitée (contrairement à d'autres méthodes, par exemple basées sur les ondes planes, qui impliquent une surface d'intégration théoriquement infinie). Enfin, il faut insister sur le fait que la reconstruction de la distribution source ne nécessite pas le calcul explicite des fonctions de base spatiales  $\phi_k(\mathbf{r})$  ce qui constitue une économie substantielle d'allocation mémoire par rapport à d'autres méthodes où la projection sur une base de fonctions prédéterminée se réalise explicitement.

### 5.1 Résultats de simulation

Ce paragraphe présente quelques résultats de simulation pour la reconstruction de deux sources ponctuelles espacées de  $10\sqrt{2} \simeq 14$  cm à différentes fréquences de travail et à différentes distances de la surface source. L'antenne est plane et circulaire, d'un rayon de 1 m, composée de 84 microphones répartis aléatoirement, et positionnée parallèlement au plan qui contient les sources à une distance  $z$  de ce dernier. Un bruit gaussien spatialement blanc est ajouté sur les mesures avec un rapport signal-à-bruit de 30dB. Les cas extrêmes suivants sont étudiés : reconstruction à  $z = 10$  cm et  $z = 1$  m et aux fréquences  $f = 100$  Hz et  $f = 5$  kHz. La fonction d'ouverture utilisée est une fonction de Hanning à symétrie axiale dont le rayon du support est noté  $R$ . Les reconstructions sont systématiquement comparées avec une méthode d'holographie acoustique en champ proche basée sur une décomposition en ondes planes (notée NAH-OP) [2][6] et avec la formation de voie en ondes sphériques (notée FV).

La figure 1 présente les résultats de reconstruction (module de la distribution source) dans le cas  $z = 10$  cm,  $f = 100$  Hz,  $R = 50$  cm et 20 cm, c'est-à-dire en champ proche et en basses-fréquences. Il s'agit, comme on peut le constater, du domaine d'applicabilité de NAH-OP, mais pas de FV. La focalisation bayésienne avec  $R = 50$  cm donne un résultat comparable à NAH-OP. Avec  $R = 20$  cm la résolution s'en trouve encore améliorée et les amplitudes estimées des sources sont plus proches des valeurs réelles.

La figure 2 présente les résultats relatifs à la même fréquence  $f = 100$  Hz, mais à une distance  $z = 1$  m de l'antenne qui sort du domaine d'applicabilité de NAH-OP.

Avec  $R = 50$  cm, la focalisation bayésienne ne parvient pas à distinguer les deux sources. La super-résolution spatiale est forcée avec  $R = 13$  cm qui donne un résultat satisfaisant dans un domaine où à la fois NAH-OP et FV sont inopérantes.

La figure 3 présente les résultats de reconstruction dans le cas  $z = 10$  cm,  $f = 5$  kHz et  $R = 50$  cm, c'est-à-dire dans un domaine fréquentiel où NAH-OP devient instable, mais où FV offre une très bonne résolution spatiale. On vérifie que la focalisation bayésienne donne des résultats comparables à FV, mais avec en plus une reconstruction des amplitudes en absolue, ce que la formation de voie qui est essentiellement une méthode de localisation n'est pas capable de faire.

Enfin la figure 3 présente les résultats de reconstruction dans le cas  $z = 1$  m,  $f = 5$  kHz, c'est-à-dire en champ lointain et en hautes-fréquences. Ici encore la focalisation bayésienne présente des résultats comparables à FV, avec cependant une estimation des amplitudes des sources qui s'améliore en fermant progressivement la surface d'ouverture ( $R = 50$  cm et  $R = 20$  cm).

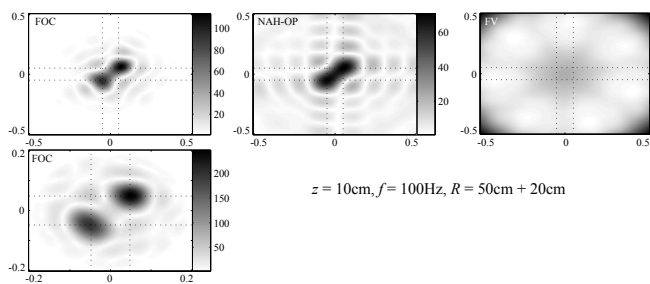


FIGURE 1 –  $z = 10$  cm,  $f = 100$  Hz,  $R = 50$  cm et 20 cm.

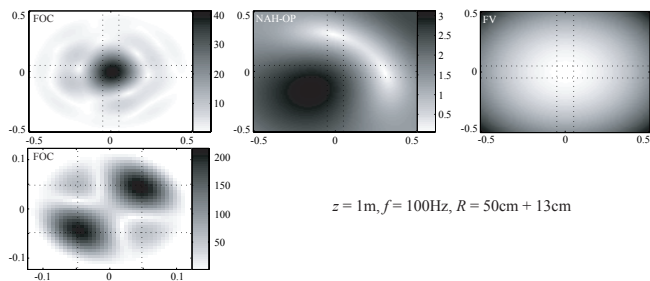


FIGURE 2 –  $z = 1$  m,  $f = 100$  Hz,  $R = 50$  cm et 13 cm.

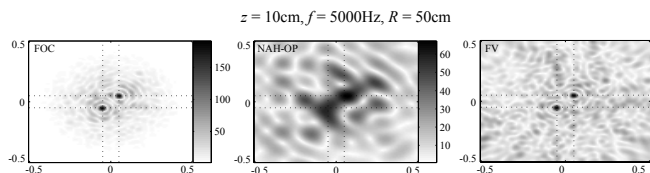


FIGURE 3 –  $z = 1$  m,  $f = 5$  kHz,  $R = 50$  cm.

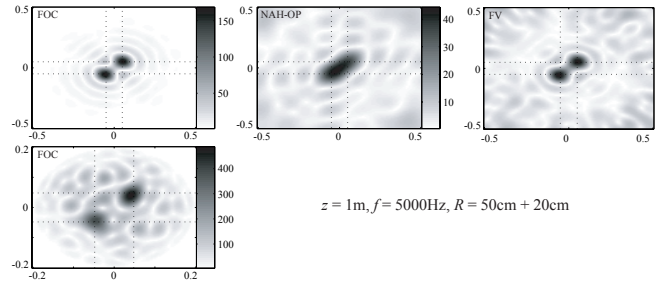


FIGURE 4 –  $z = 1$  m,  $f = 5$  kHz,  $R = 50$  cm et 20 cm.

- [3] Wu S.F., “On reconstruction of acoustic pressure fields using the Helmholtz equation least squares method”, *J. Acoust. Soc. Am.* 107 (5), 2511-2522 (2000).
- [4] Cho Y.T., Bolton J.S. and Hald J., “Source Visualization by using Statistically Optimized Near-Field Acoustical Holography in Cylindrical Coordinates”, *J. Acoust. Soc. Am.* 118 (4), 2355-2364 (2005).
- [5] Lecclère Q. “Acoustic Imaging using Under-Determined Inverse Approaches : Frequency Limitations and Optimal Regularization”, *J. Sound Vib.* 321, 605-619 (2008).
- [6] Hald J. “Basic theory and properties of statistically optimized near-field acoustical holography”, *J. Acoust. Soc. Am.* 125 (1), 2105-2120 (2009).

## Références

- [1] Williams E.G., “Fourier Acoustics : Sound Radiation And Nearfield Acoustical Holography”, Academic Press (1999).
- [2] Steiner R., Hald J., “Near-Field Acoustical Holography Without the Errors and Limitations Caused by the Use of Spatial DFT”, *Int. J. Acoust. Vib.* 6, 83-89 (2001).