



HAL
open science

Méthode d'ondes planes pour la résolution des problèmes vibroacoustiques en moyennes et hautes fréquences

Soufiene Essahbi, Emmanuel Perrey-Debain, Mabrouk Bentahar, Lotfi Hammami, Mohamed Haddar

► **To cite this version:**

Soufiene Essahbi, Emmanuel Perrey-Debain, Mabrouk Bentahar, Lotfi Hammami, Mohamed Haddar. Méthode d'ondes planes pour la résolution des problèmes vibroacoustiques en moyennes et hautes fréquences. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00539673

HAL Id: hal-00539673

<https://hal.science/hal-00539673>

Submitted on 24 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Méthode d'ondes planes pour la résolution des problèmes vibroacoustiques en moyennes et hautes fréquences

Soufien Essahbi^{1,2}, Emmanuel Perrey-Debain², Mabrouk Ben Tahar², Lotfi Hammami¹, Mahamed Haddar¹

¹Unité de Modélisation, Mécanique et Production (U2MP), Département de Génie Mécanique, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, BP N° 1173 - 3038, Sfax, Tunisie

²Laboratoire Roberval UMR UTC-CNRS n°6253. Université de Technologie de Compiègne BP 20529 F60205 Compiègne cedex, France

La méthode des éléments finis (FEM) est encore aujourd'hui la méthode la plus utilisée pour résoudre les problèmes vibroacoustiques. Cependant la mise en œuvre de cette méthode reste difficile et coûteuse dans certain cas, notamment en moyennes et hautes fréquences dues au coût informatique exorbitant que celle-ci occasionne. En effet, une description assez précise du problème nécessite l'utilisation d'environ 10 degrés de liberté par longueur d'onde engendrant des problèmes de très grande taille difficile à résoudre. Pour surmonter ces difficultés des méthodes sont apparues qui consistent à multiplier les fonctions de forme classiques des éléments finis par des fonctions oscillantes pour construire l'espace fonctionnel. Ainsi, les ondes planes progressives sont des fonctions de choix pour l'équation de Helmholtz.

La méthode de base d'onde plane a été développée avec succès pour les éléments finis et les éléments finis de frontière pour résoudre l'équation de Helmholtz et elle est étendue pour les problèmes de dispersion des ondes élastiques. Dans ce papier, on s'intéresse à l'extension de la méthode des ondes planes aux problèmes vibroacoustiques. Une formulation couplée est développée basée sur la variable pression pour la cavité fluide et le variable déplacement pour la structure. La cavité fluide est discrétisée par des éléments finis triangulaires linéaires enrichis par base d'ondes planes et la structure est discrétisée par des éléments finis à deux nœuds de type Hermite enrichis par une base déduite de la solution homogène de l'équation dynamique.

Des problèmes vibroacoustiques sont traités, les résultats montrent l'efficacité de cette méthode qui peut être étendue pour résoudre une grande classe de problèmes des ondes de grand intérêt pratique.

1 Introduction

Avec l'augmentation du trafic aérien et les nouvelles réglementations de plus en plus strictes concernant les nuisances sonores, l'industrie aéronautique doit faire face aux problèmes de réductions sonores, soit pour améliorer le confort des passagers, mais aussi pour réduire le bruit rayonné par les moteurs. La réduction de ce bruit peut se faire par deux approches différentes : traitement à la source dès la conception ou absorption du bruit d'une manière active ou passive. Le contrôle du bruit implique la mise en œuvre de deux outils essentiels qui sont la prédiction du bruit et sa réduction. Ces deux outils sont complémentaires car pour aboutir à un contrôle efficace, soit par réduction des vibrations soit par absorption du bruit, il est nécessaire de disposer des méthodes de prédiction du bruit et des vibrations efficaces et peu coûteuses.

Il est bien connu que les méthodes de discrétisation conventionnelles, telles que la méthode des éléments finis (FEM) [1] ou celle des éléments finis de frontière (BEM) [2] se trouvent très vite limitées pour traiter des problèmes à moyenne ou haute fréquence dû au coût informatique exorbitant que ceux-ci occasionnent. En effet, une description assez précise du problème nécessite l'utilisation environ 10 degrés de liberté (ddl) par longueur d'onde [3,4]. Ce nombre de ddl engendre des problèmes de très grande taille difficile à résoudre et la croissance quasiment exponentielle du temps de calcul avec la fréquence. Au problème de la croissance du temps de calcul s'ajoute celui de la détérioration de la qualité de la solution numérique lorsque la fréquence augmente. De nombreuses recherches

ont en effet montré la présence de phénomène de dispersion [5, 6, 7]. De plus, l'effet de pollution réduit la robustesse de la FEM quand le nombre d'ondes augmente [8]. Pour surmonter ces difficultés, des méthodes sont apparues dans les années 90 du 20ème siècle, parmi les quelles, on peut citer l'application de la PUFEM (Partition of Unity Finite Element Method) [9, 10] pour la résolution de l'équation de Helmholtz [11]. Dans cette méthode, l'espace fonctionnel est construit en multipliant les fonctions de forme classique pour les éléments finis par des fonctions oscillantes, solutions particulières du problème homogène (Trefftz approach) [12]. Ainsi, les ondes planes progressives sont des fonctions de choix pour l'équation de Helmholtz. La méthode a été étendue avec succès à la résolution des équations intégrales pour les ondes acoustiques et élastiques [13, 14, 15, 16].

Les études menées durant les dernières années concernent notamment les comportements vibroacoustiques sont basés sur les techniques des éléments finis, les éléments infinis et les éléments finis de frontière [1, 17, 18, 19]. Dans ce papier, on s'intéresse à l'extension de la méthode des ondes planes aux problèmes vibroacoustiques. Une formulation couplée est développée basée sur la variable pression pour la cavité fluide et le variable déplacement pour la structure.

2 Couplage vibroacoustique

On étudie les petits mouvements harmoniques stationnaires d'une structure mince Σ , initialement au

repos, remplie avec un fluide Ω_f parfait compressible, non visqueux et au repos.

2.1 Formulation en variable pression du fluide

Le fluide est supposé parfait, compressible, isentropique et initialement au repos. L'équation de propagation des ondes et les conditions aux limites associées pour un problème harmonique en temps sont données par :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (1)$$

$$(1+Q) \frac{\partial p}{\partial n} + (Q-1) i k p = g \quad \text{sur } \partial\Omega_f \quad (2)$$

Avec

$$k = \frac{\omega_f}{c_0} : \text{Nombre d'onde acoustique}$$

c_0 : Célérité du son dans le fluide

g : La valeur à la frontière

$Q \in \square$ et $\partial\Omega_f$ la frontière du domaine Ω_f .

Pour le domaine acoustique intérieur on associe, trois différents types de conditions aux limites ainsi la condition de couplage fluide-structure.

La condition de type Dirichlet est obtenue pour $Q = -1$, celle de Neumann pour $Q = 1$ et la condition mixte pour $Q \neq \pm 1$.

- *Pression imposée : condition aux limites de type Dirichlet*

$$p(M) = \bar{p}(M) \quad M \in \Gamma_p \quad (3)$$

Où $\bar{p}(M)$ est la valeur de la pression imposée.

- *Vitesse normale imposée : condition aux limites de type Neumann*

$$v_n(M) = \frac{j}{\rho_f \omega} \frac{\partial p(M)}{\partial n} \cdot \bar{n} = \bar{v}_n(M) \quad M \in \Gamma_v \quad (4)$$

Où $\bar{v}_n(M)$ est la valeur de la vitesse normale imposée.

- *Impédance normale imposée : condition mixte*

$$p(M) = Z(M) v_n(M) \\ = \frac{j}{\rho_f \omega} \frac{\partial p(M)}{\partial n} \cdot \bar{n} \cdot \bar{Z}(M) \quad M \in \Gamma_Z \quad (5)$$

Où $\bar{Z}(M)$ est la valeur de l'impédance normale imposée.

- *Continuité du déplacement normal à l'interface fluide-structure*

$$\frac{\partial p(M)}{\partial n} \cdot \bar{n} = \rho_f \omega^2 \mathfrak{A}_n^f(M) \quad M \in \Sigma \quad (6)$$

Où \mathfrak{A}_n^f est le déplacement acoustique normal.

La frontière $\partial\Omega_f$ est la réunion de trois domaines Γ_p, Γ_v et Γ_Z qui vérifient respectivement les conditions aux limites de type Dirichlet, de type Neumann et la condition mixte.

Soit $\bar{p}(M)$, une fonction scalaire arbitraire de l'espace des fonctions continues et une fois dérivable à l'intérieur de Ω_f . La pondération de l'équation de propagation par cette fonction test et l'intégration sur le domaine Ω_f nous donne :

$$\int_{\Omega_f} \bar{p} (\Delta p + k^2 p) d\Omega = 0 \quad (7)$$

L'intégration par partie de cette équation et l'application des conditions aux limites sur le contour de Ω_f conduit à la forme intégrale faible suivante :

$$\int_{\Omega_f} \nabla \bar{p}(M) \nabla p(M) d\Omega - k^2 \int_{\Omega_f} \bar{p}(M) p(M) d\Omega \\ - \int_{\Sigma} \bar{p}(M) \rho_f \omega^2 \mathfrak{A}_n^f(M) d\Sigma \\ + j \rho_f \omega \int_{\Gamma_v} \bar{p}(M) \bar{v}_n(M) d\Omega_v \\ + \frac{j \rho_f \omega}{Z(M)} \int_{\Gamma_Z} \bar{p}(M) p(M) d\Omega_Z = 0 \quad (8)$$

$\forall \bar{p}$, une fonction arbitraire de l'espace des fonctions continues et une fois dérivable à l'intérieur de Ω_f .

La solution de cette forme variationnelle se ramène à la recherche de la stationnarité de la fonctionnelle du fluide interne suivante :

$$F(p) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega_f} \nabla p \nabla p d\Omega - k^2 \int_{\Omega_f} p p d\Omega \right] \\ - \rho_f \omega^2 \int_{\Sigma} p \mathfrak{A}_n^f d\Sigma \\ - \rho_f \omega \int_{\Omega_v} p \cdot \bar{v}_n d\Omega_v + \frac{j \rho_f \omega}{Z(r)} \int_{\Omega_Z} p p d\Omega_Z \quad (9)$$

2.2 Formulation en variable déplacement de la structure

Soit une poutre simplement appuyée de deux cotés en contact avec la cavité fluide Ω_f à l'interface Σ .

L'équation dynamique de la structure et les conditions aux limites sont données par les équations suivantes :

- *Equation de la structure*

$$\frac{d^4 w(x)}{d^4 x} - k_b^4 w(x) = \frac{q(x)}{D} - \frac{p(x, y)}{D} \quad \text{sur } \Sigma \quad (10)$$

- *Conditions aux limites*

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w(L) = 0 \\ \frac{dw}{dx}(0) = 0 \\ \frac{dw}{dx}(L) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Avec

$D = E.I$: Rigidité à la flexion

E : Module d'Young

I : Moment d'inertie

$$k_b^4 = \frac{\rho_s \omega^2}{E.I}$$

Le terme $p(x, y)$ traduit l'action des forces de pression exercée par le fluide sur la structure.

Soit le champ de déplacement virtuel $v(M)$ arbitraire et régulier dans le domaine Σ , la pondération de l'équation d'équilibre (10) de la structure par v conduit après intégration :

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{d^4 w(x)}{d^4 x} - k_b^4 w(x) \right) v(x) d\Sigma - \int_{\Sigma} \left(\frac{q(x)}{D} - \frac{p(x,0)}{D} \right) v(x) d\Sigma = 0 \quad (12)$$

$\forall v$ cinématiquement admissible.

L'intégration par parties de cette équation donne, en tenant compte des conditions aux limites, l'équation variationnelle de la structure élastique :

$$\int_{\Sigma} \frac{d^2 w(x)}{d^2 x} \frac{d^2 v(x)}{d^2 x} d\Sigma - \int_{\Sigma} k_b^4 w(x) v(x) d\Sigma - \int_{\Sigma} \frac{q(x)}{D} v(x) d\Sigma + \int_{\Sigma} \frac{p(x,0)}{D} v(x) d\Sigma = 0 \quad (13)$$

2.3 Formulation du problème couplé

La structure obéit aux lois de l'élasticité linéaire, en absence des forces volumiques autre que les forces d'inertie. Le fluide supposé non visqueux n'adhère pas à la surface d'interaction, les conditions de couplage à l'interface fluide-structure Σ se traduisent par :

- La continuité de la composante normale du déplacement.
- La continuité des vecteurs contraints.

Le problème de couplage interne entre le fluide parfait, compressible et non visqueux et la structure mince élastique se résume au problème aux limites suivant :

– Equation du fluide :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{dans } \Omega_f$$

– Equation de la structure :

$$\frac{d^4 w(x)}{d^4 x} - k_b^4 w(x) = \frac{q(x)}{D} \quad \text{sur } \Sigma \quad (14)$$

– Equation du couplage :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho_f \omega^2 w_n \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\sigma_{ij} n_j = p \quad \text{sur } \Sigma$$

– Conditions aux limites :

$$p(M) = \bar{p}(M) \quad M \in \Gamma_p$$

$$\frac{j}{\rho_f \omega} \frac{\partial p(M)}{\partial n} = \bar{v}_n(M) \quad M \in \Gamma_v \quad (15)$$

$$p(M) = \frac{j}{\rho_f \omega} \frac{\partial p(M)}{\partial n} \bar{Z}(M) \quad M \in \Gamma_z$$

Les deux formulations obtenues (8) et (13) sont couplées à travers l'intégrale sur l'interface fluide-structure Σ . Cela peut être directement vérifié à partir des conditions aux limites appliquées de part et d'autre de l'interface fluide-structure selon les relations (14).

L'équation variationnelle du système couplé est la somme de deux équations variationnelles (8) et (13) respectivement du fluide et de la structure.

Le champ de déplacement w de la structure Σ et le champ de pression p dans Ω_f rendent stationnaire le fonctionnelle mixte suivante :

$$F(p, w) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \nabla p d\Omega - k^2 \int_{\Omega_f} p \cdot p d\Omega \right] - \rho_f \omega^2 \int_{\Sigma} p w_n d\Sigma - \rho_f \omega \int_{\Gamma_v} p \bar{v}_n d\Gamma + \frac{j \rho_f \omega}{Z(r)} \int_{\Gamma_z} p p d\Gamma + \frac{1}{2} \left(\int_{\Sigma} \frac{d^2 w(x)}{d^2 x} \frac{d^2 w(x)}{d^2 x} d\Sigma - \int_{\Sigma} k_b^4 w(x) w(x) d\Sigma \right) \quad (16)$$

3 Eléments finis enrichis

3.1 Elément fini fluide enrichi

L'idée est d'enrichir les fonctions de base des éléments finis utilisés par une base d'ondes planes progressives. La figure 1 montre la géométrie de l'élément fini fluide enrichi.

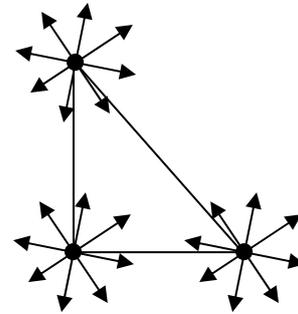


Figure 1 : élément triangulaire linéaire enrichi

La pression s'écrit comme pour l'élément fini standard sous la forme de somme des valeurs nodales interpolées par les fonctions d'interpolation standard de l'élément fini. Mais les valeurs aux nœuds maintenant sont approximées sous la forme d'une somme discrète des ondes planes progressives propageant dans des différentes directions dans le plan.

La pression acoustique est donnée par :

$$p_m = \sum_{q=1}^{N_Onde_Plane} \exp(ik \chi_m^q \cdot R) p_m^q \quad (17)$$

Où : N_Onde_Plane est le nombre des directions des ondes planes, χ_m^q sont les directions des ondes planes progressives et R est le vecteur position.

Les directions des ondes planes attachées à chaque nœud sont données par :

$$\chi_m^q = \left(\cos \left(\frac{2\pi q}{N_Onde_Plane} \right), \sin \left(\frac{2\pi q}{N_Onde_Plane} \right) \right) \quad (18)$$

Les fonctions d'interpolations pour l'élément fini enrichi sont donc la combinaison des fonctions d'interpolations de l'élément fini standard et les directions des ondes planes ce qui implique qu'à chaque nœud on trouve N_Onde_Plane degré de liberté au lieu d'un seul. Les inconnues du problème deviennent les amplitudes des ondes planes progressives au lieu des valeurs nodales de la pression.

3.2 Élément fini structure enrichis

L'idée est d'enrichir la base des éléments finis standard, par une base déduite de la solution homogène de l'équation dynamique de la structure. La figure 2 montre la géométrie de l'élément fini structure enrichi.

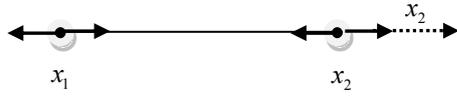


Figure 2 : Élément triangulaire structure enrichi

On enrichi les fonctions d'interpolation par la base des modes structure, en utilisant que les modes propagatifs ($\psi_1 = e^{-ik_b x}$, $\psi_2 = e^{ik_b x}$), on note $\Psi = \langle \psi_1 \ \psi_2 \rangle$.

D'où les fonctions d'interpolation sont données par :

$$\mathbf{N} = \frac{1}{4} \left\langle \begin{aligned} &(1-\xi)^2 (2+\xi) \Psi \quad \frac{1}{2} (1-\xi^2) (1-\xi) \Psi \\ &(1+\xi)^2 (2-\xi) \Psi \quad \frac{1}{2} (-1+\xi^2) (1+\xi) \Psi \end{aligned} \right\rangle \quad (19)$$

$$= \langle N_1 \Psi \ N_2 \Psi \ N_3 \Psi \ N_4 \Psi \rangle$$

4 Résultats numériques

Il s'agit de déterminer la distribution de la pression dans l'espace limité par une conduite rectangulaire, rigide en $y=1$ couplée avec une poutre en $y=0$ et en imposant un chargement réparti sur la poutre et une pression nulle sur les deux cotés de la cavité en $x=0$ et $x=2$

La figure 3 représente le domaine d'étude, une conduite rectangulaire couplée avec une poutre élastique.

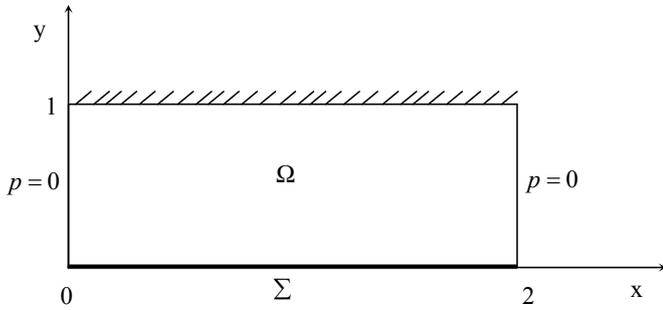


Figure 3 : conduite rectangulaire 2D couplée avec une poutre 1D

La cavité fluide est remplie par l'air de masse volumique $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ et de célérité de son $c_0 = 340 \text{ m/s}$

La poutre est en aluminium dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\rho_s = 2790 \text{ kg/m}^3$$

$$E = 70 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$I = 0.25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

La structure est excitée par un chargement réparti $F = 1000 \text{ N}$ à différentes fréquences d'excitation.

Le problème de couplage interne entre le fluide parfait, compressible et non visqueux et la structure mince élastique se résume au problème aux limites suivant :

- équation de Helmholtz

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (20)$$

- équation de la structure

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - k_b^4 w(x) = \frac{q(x)}{D} - \frac{p(x,0)}{D} \quad \text{sur } \Sigma \quad (21)$$

- équation du couplage

$$\frac{\partial p(x,0)}{\partial y} = -\rho_f \omega^2 w(x) \quad (22)$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = p \quad \text{sur } \Sigma$$

- conditions aux limites

$$p(x, y) = 0 \quad x = 0 \text{ et } x = 2$$

$$\frac{\partial p(x, 1)}{\partial y} = 0$$

$$w(0) = 0$$

$$w(L) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{dw}{dx}(0) = 0$$

$$\frac{dw}{dx}(L) = 0$$

La distribution de la pression acoustique calculée en utilisant la méthode des éléments finis enrichis par base d'onde plane est comparée à la pression acoustique calculée analytiquement. Le déplacement de la structure calculé en utilisant des éléments finis structure enrichis est comparé au déplacement analytique.

Le déplacement analytique et la pression acoustique calculée analytiquement sont donnés par :

$$w(x) = \sum_j A_j w_j(x) \quad (24)$$

$$p(x, y) = \sum_k Y_k(y) w_k(x) \quad (25)$$

Avec :

$$w_j(x) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin(k_{xj} x) \quad (26)$$

$$k_{xj} = \frac{j\pi}{L_x} \quad (27)$$

$$Y_k(y) = \alpha_k e^{-ik_{yk} y} + \beta_k e^{ik_{yk} y} \quad (28)$$

$$k_{yk}^2 = k^2 - k_{xk}^2 \quad (29)$$

$$A_j = \frac{\int_0^{L_x} w_j(x) q dx}{D} \frac{1}{k_{xj}^4 - k_b^4 + \frac{\text{cst}_j}{D}} \quad (30)$$

$$\text{cst}_j = \frac{\rho_0 \omega^2 (e^{-ik_{yj} L_y} + e^{ik_{yj} L_y})}{ik_{yj} (e^{ik_{yj} L_y} - e^{-ik_{yj} L_y})} \quad (31)$$

$$\alpha_j = \frac{\rho_0 \omega^2 e^{ik_{yj} L_y}}{ik_{yj} (e^{-ik_{yj} L_y} - e^{ik_{yj} L_y})} A_j \quad (32)$$

$$\beta_j = \frac{\rho_0 \omega^2 e^{-ik_{yj} L_y}}{ik_{yj} (e^{-ik_{yj} L_y} - e^{ik_{yj} L_y})} A_j \quad (33)$$

Les distributions de la pression acoustique calculée en utilisant la méthode des éléments finis enrichis et calculée analytiquement sont données respectivement sur les figures 4 et 5 pour $ka = 37$. Le déplacement de la structure calculé

par les deux méthodes et pour le même ka est donné par la figure 6.

En se référant aux figures 4 et 5 on note clairement la concordance entre la pression acoustique développée analytiquement et celle calculée numériquement.

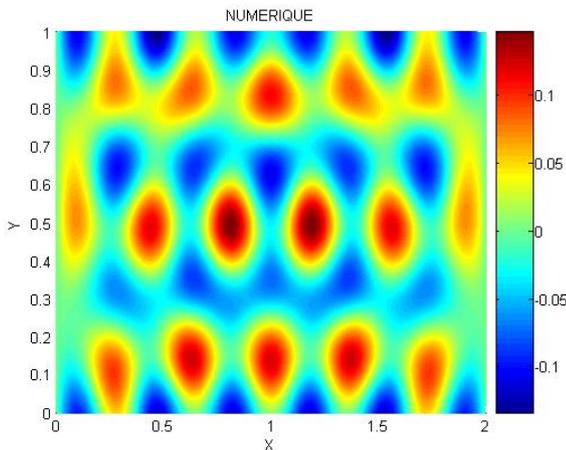


Figure 4 : distribution de la pression acoustique (Éléments finis enrichis)

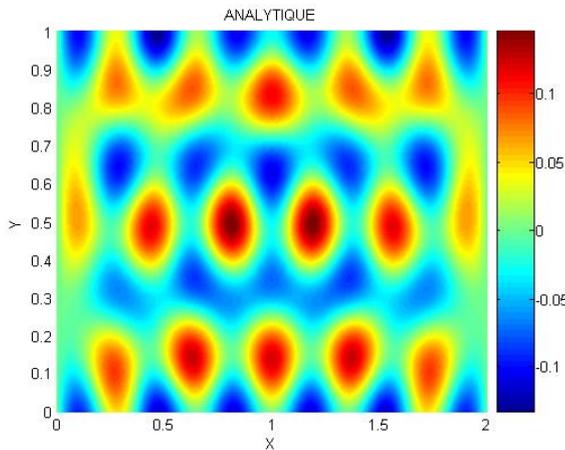


Figure 5 : distribution de la pression acoustique (Analytique)

Concernant le déplacement de la structure, la figure 6 prouve bien la bonne similitude de résultat numérique avec celle analytique.

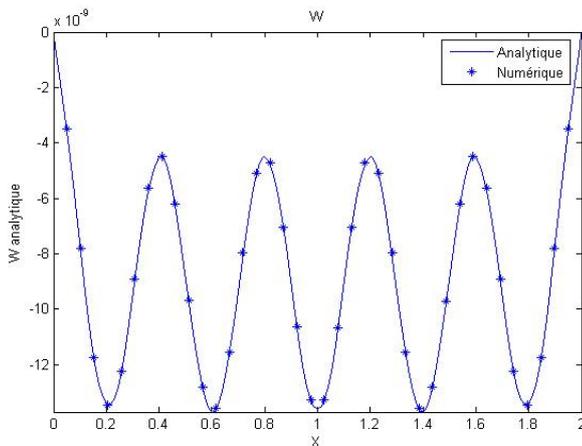


Figure 6 : déplacement de la structure (Numérique/Analytique)

D'après ce qui précède on peut confirmer que les éléments finis enrichis par base d'ondes planes peuvent être applicable pour la modélisation des problèmes vibroacoustiques.

5 Conclusion

Dans ce papier, on a montré que la méthode des ondes planes peut être étendue pour traiter des problèmes vibroacoustiques. Une formulation couplée a été développée basée sur la variable pression pour la cavité fluide et le variable déplacement pour la structure.

Des éléments poutre ont été développés qui sont des éléments finis linéaires de type Hermite enrichis par une base déduite de la solution homogène de l'équation dynamique.

Dans les prochaines études, cette méthode sera validée sur des autres applications, y compris les problèmes 3D.

Références

- [1] Zienkiewicz Taylor R. L., "La méthode des éléments finis : formulation de base et problèmes linéaires", trad. par Jacques-Hervé Saïac, Jérôme Jaffré, Michel Kern... [et al.] - [4e éd.] - Paris-La Défense : AFNOR, 1991 (Paris), Impr. Jouve - XVIII-620 p : ill., couv. ill : 24 cm - AFNOR technique - ISBN 2-12-301111-8 (rel.)
- [2] Hsiao George C., "Boundary element methods—An overview", *Applied Numerical Mathematics* ,56, 1356–1369 (2006).
- [3] Perrey-Debain E., Trevelyan J., Bettess P., "Wave boundary elements: a theoretical overview presenting applications in scattering of short waves", *Engineering Analysis with Boundary Elements* ,28, 131–141 (2004).
- [4] Ihlenburg F., "Finite Element Analysis of Acoustic Scattering", *Springer-Verlag, New York* (1998).
- [5] Ihlenburg F., Babuska I., "Dispersion analysis and error estimation of Galerkin finite element methods for the Helmholtz equation", *Int. J. Numer. Methods Engrg.* ,38, 3745–3774 (1995).
- [6] Babuska I., Ihlenburg F., Strouboulis T., Gangaraj S., "A posteriori error estimation for finite element solutions of Helmholtz equation. Part I. The quality of local indicators and estimators", *Int. J. Numer. Methods Engrg.* ,40, 3443–3462 (1997).
- [7] Babuska I., Ihlenburg F., Strouboulis T., Gangaraj S., "A posteriori error estimation for finite element solutions of Helmholtz equation. Part II. Estimation of pollution error", *Int. J. Numer. Methods Engrg.* ,40, 3883–3900 (1997).
- [8] Ihlenburg F., Babuska I., sauter "Reliability of finite element methods for the numerical computation of waves", *Advances in Engineering Software* ,28, 417-424 (1997).
- [9] Bettess P., "Short-wave scattering: problems and techniques", *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* ,362, 421–443 (2004).
- [10] Babuska I. Melenk J.M., "The partition of unity method", *International journal for numerical methods in engineering* ,40, 727-758 (1997).
- [11] Ortiz P., Sanchez E., "An improved partition of unity finite element model for diffraction problems", *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* ,50, 2727-2740 (2001).

- [12] Pluymers B., Desmet W., Vandepitte D., Sas P., “Feasibility study of the wave based method for high-frequency steady-state acoustic analysis”, *Proceedings of ISMA* , 1555-1573 (2004).
- [13] Perrey-Debain E., Trevelyan J., Bettess P., “Wave boundary elements: an overview presenting applications in scattering of short waves”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28, 131 – 141 (2004).
- [14] Laghrouche O., Bettess P., Perrey-Debain E., Trevelyan J., “Plane wave basis for wave scattering in three dimensions”, *Commun. Numer. Methods Engrg.* ,19, 715–723(2003).
- [15] Perrey-Debain E., Laghrouche O., Bettess P., Trevelyan J.,” Plane wave basis finite elements and boundary elements for three dimensional wave scattering”, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* ,362, 561–577 (2004).
- [16] Perrey-Debain E., Trevelyan J., Bettess P., “P-wave and S-wave decomposition in boundary integral equation for plane elastodynamic problems”, *Commun. Numer. Meth. Engrg.*; 00:1-18 (2000).
- [17] Atalla N., Bernhard R.J., “Review of numerical solutions for low-frequency structural-acoustic problems”, *Applied Acoustics* ,43, 271-294 (1994).
- [18] Astley R.J., “Infinite elements for wave problems: a review of current formulations and an assessment of accuracy”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* ,49, 951-976 (2000).
- [19] Astley R.J., Coyette J.P., “The performance of spheroidal infinite elements”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52, 1379-1396 (2001).