



**HAL**  
open science

## Post-traitement et analyse énergétiques de résultats Eléments finis

Nicolas Totaro, Laurent Maxit, Jean-Louis Guyader

► **To cite this version:**

Nicolas Totaro, Laurent Maxit, Jean-Louis Guyader. Post-traitement et analyse énergétiques de résultats Eléments finis. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00539655

**HAL Id: hal-00539655**

**<https://hal.science/hal-00539655>**

Submitted on 28 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Post-traitement et analyse énergétique de résultats Eléments finis

Nicolas Totaro<sup>1</sup>, Laurent Maxit<sup>1</sup>, Jean-Louis Guyader<sup>1</sup>

<sup>1</sup>INSA Lyon, Laboratoire Vibrations Acoustique, 25bis avenue Capelle, F-69621 Villeurbanne Cedex, France  
{nicolas.totaro, laurent.maxit, jean-louis.guyader}@insa-lyon.fr

Avec les moyens de calcul actuels, les méthodes de calcul par éléments finis peuvent atteindre des fréquences de plus en plus hautes et ainsi traiter des problèmes de moyennes fréquences, laissés jusqu'à présent aux méthodes dites énergétiques comme la SEA (Statistical Energy Analysis). Toutefois, pour atteindre de telles fréquences, les calculs de type éléments finis nécessitent des maillages de plus en plus fins. Il en résulte un nombre gigantesque de résultats qu'il est difficile d'analyser et d'interpréter. Un post-traitement énergétique de résultats éléments finis comme les bases modales peut faciliter la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu et mettre en évidence les paramètres importants du système. Ce type d'approche peut s'avérer très utile lors des études préliminaires de conception de nouveaux produits. Dans cet article, l'analyse énergétique d'une portion de TGV Duplex sera présentée. Ce système complexe fait intervenir une structure et deux cavités. Les données analysées seront les cartographies d'énergies vibratoires lorsque la structure est soumise à diverses excitations mais aussi des indicateurs de couplage modaux permettant d'identifier de manière très rapide les modes principalement responsables du bruit dans les cavités. Il sera aussi montré que les données issues des éléments finis peuvent être utilisées pour construire un modèle énergétique de type SEA permettant de rapidement évaluer l'influence de l'amortissement dans les échanges énergétiques.

## 1 Introduction

Les méthodes énergétiques sont souvent opposées aux méthodes de types éléments finis dans la mesure où les unes traitent de moyennes fréquentielles et spatiales et sont destinées aux moyennes et hautes fréquences alors que les autres sont déterministes, locales et dédiées aux basses fréquences. De nombreux travaux existent pour combler la zone fréquentielle pour laquelle aucune de ces méthodes ne sont véritablement satisfaisantes. On peut citer par exemple les travaux de Shorter et Langley sur les méthodes hybrides [1] ou de Maxit et Guyader [2] permettant de combiner éléments finis et SEA (Statistical Energy Analysis).

La méthode SmEdA initialement développée par Maxit [2] pour déterminer les facteurs de perte par couplage entre sous-systèmes nécessaires pour l'application de la méthode SEA. Cette méthode, basée sur les échanges énergétiques entre modes de sous-systèmes, a été étendue [3] pour supprimer une des hypothèses de la SEA : l'équipartition des énergies modales.

Les méthodes énergétiques comme la SEA ne peuvent donner qu'une information globale sur l'énergie dans les sous-systèmes. Aucune information sur la distribution de l'énergie dans les sous-systèmes n'est accessible. C'est pourquoi, Totaro et al. [4] ont développé une extension à la méthode SmEdA permettant d'avoir une estimation rapide de la distribution d'énergie cinétiques et de déformations dans les sous-systèmes uniquement à partir des énergies modales calculées par SmEdA et des déformées modales des sous-systèmes découplés obtenues par éléments finis.

## 2 Bases modales des sous-systèmes découplés

Soit un système vibro-acoustique complexe tel que le tronçon de TGV Duplex présenté en figure 1. Les méthodes par éléments finis permettent de calculer la réponse de ce système lorsqu'il est soumis à des efforts excitateurs soit par sommation modale soit par réponse directe. Dans les deux cas, le calcul est réalisé en bandes fines, est pénalisé par un modèle couplé très conséquent et ne permet pas d'analyse sur les causes de la réponse acoustique calculée.

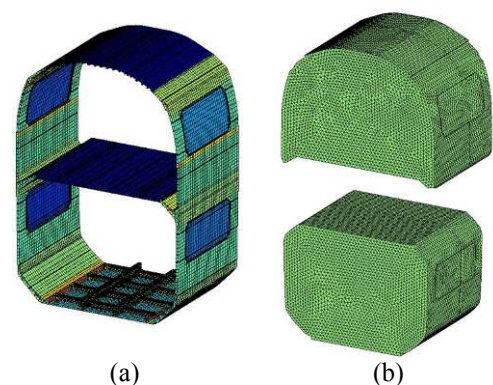


Figure 1 : Exemple de système vibro-acoustique complexe : un tronçon de TGV Duplex composé d'une structure (a) et de deux volumes acoustiques (b)

Dans le présent article, les bases modales des sous-systèmes découplés seront utilisées pour faire une analyse des échanges énergétiques entre les sous-systèmes tant au niveau global (énergies globales des sous-systèmes), modal (énergies modales des sous-systèmes et facteurs de pertes par couplage modaux) que local (distribution d'énergie dans les sous-systèmes).

A partir de ces informations énergétiques moyennées par bandes de fréquences (sommation des énergies modales), il est possible d'établir un modèle énergétique modal et analyser l'influence de l'amortissement des sous-systèmes sur les échanges énergétiques.

Les bases modales des sous-systèmes découplés utilisées sont décrites dans le tableau 1 :

Sous-système	Structure	Cavité Supérieure	Cavité inférieure
Nombre de ddl	272137	158628	170097
Nombre de modes propres jusqu'à 800Hz	690	598	634
Nombre de modes propres dans le 1/3 d'octave 315Hz	72	25	25

Tableau 1 : Caractéristiques des bases modales découplées des sous-systèmes.

### 3 Facteur de pertes par couplage modaux

Le facteur de perte par couplage modal [2] est à la base de la méthode énergétique SmEdA (Statistical modal Energy distribution Analysis). Ce facteur de couplage permet de calculer les échanges d'énergies entre deux modes de deux sous-systèmes couplés. L'expression du facteur de perte par couplage modal est donné par l'équation 1 :

$$\beta_{pq}^{ij} = \Gamma_{pq}^{ij} \Psi_{pq}^{ij} \quad (1)$$

où  $\Gamma_{pq}^{ij}$  et  $\Psi_{pq}^{ij}$  sont respectivement des indicateurs de coïncidence spatiale et de coïncidence fréquentielle entre le mode  $p$  du sous-système  $i$  et le mode  $q$  du sous-système  $j$ . Ces deux indicateurs sont respectivement donnés par les équations (2) et (3) :

$$\Gamma_{pq}^{ij} = \frac{(W_{pq}^{ij})^2}{M_p M_q^2 (\omega_q^2)^2} \quad (2)$$

$$\Psi_{pq}^{ij} = \left[ \frac{\eta_p^i \omega_p^i (\omega_q^i)^2 + \eta_q^j \omega_q^j (\omega_p^j)^2}{((\omega_q^i)^2 - (\omega_p^j)^2)^2 + (\eta_p^i \omega_p^i + \eta_q^j \omega_q^j) (\eta_p^i \omega_p^i (\omega_q^i)^2 + \eta_q^j \omega_q^j (\omega_p^j)^2)} \right] \quad (3)$$

où  $\eta_p^i$ ,  $\omega_p^i$  et  $M_p^i$  sont respectivement l'amortissement et pulsation propre et la masse généralisée du mode  $p$  du sous-système  $i$ .  $W_{pq}^{ij}$  est le travail intermodal entre un mode  $p$  du sous-système  $i$  exprimé en déplacement (ici la structure) et un mode  $q$  du sous-système  $j$  exprimé en contrainte (ici les cavités).

Ainsi, le facteur de perte par couplage modal peut être un outil intéressant dans l'analyse des échanges énergétiques entre les sous-systèmes. En effet, pour que deux modes s'échangent de l'énergie il faut que :

- l'indicateur de coïncidence spatiale  $\Gamma_{pq}^{ij}$  ne soit pas nul, c'est-à-dire que les modes soient spatialement « compatibles »

- l'indicateur de coïncidence fréquentielle  $\Psi_{pq}^{ij}$  ne soit pas trop faible, c'est-à-dire que les modes soient assez proches en fréquence

Ainsi, le couple de mode qui maximisera le facteur  $\beta_{pq}^{ij}$  sera celui qui sera le plus susceptible de transmettre de l'énergie. Ainsi, dans une phase industrielle de pre-design, ce genre d'information peut être très utile pour savoir sur quels modes intervenir pour minimiser la pression dans un habitacle par exemple.

Il est important de remarquer ici que des modes en forte coïncidence fréquentielle peuvent ne pas transmettre d'énergie si la coïncidence spatiale est nulle (travail intermodal nul).

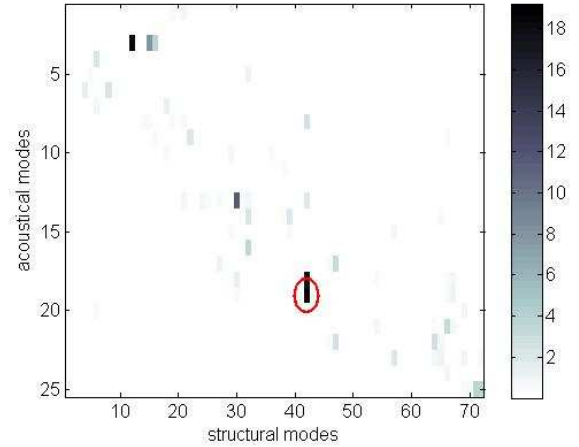


Figure 2 : matrice des facteurs de perte par couplage modaux entre les modes de la structure et les modes de la cavité supérieure. Tiers d'octave 315Hz.

La figure 2 présente la matrice des facteurs de perte par couplage modaux entre les modes en déplacement de la structure et les modes en pression de la cavité supérieure dans le tiers d'octave 315Hz. Il est clair sur cette figure que seuls 3 ou 4 couples de modes structure/cavité ont des valeurs de facteurs de perte très forte. Ces couples de modes sont donc susceptibles de transmettre de l'énergie entre la structure et la cavité supérieure.

Prenons le couple de modes identifié par le rond rouge sur la figure 2 (mode 42 de structure et mode 19 de cavité). Ces deux modes ont non seulement des fréquences propres très proches (332.3Hz pour la structure et 337Hz pour la cavité supérieure) mais aussi une très bonne coïncidence spatiale comme en témoigne la figure 3.

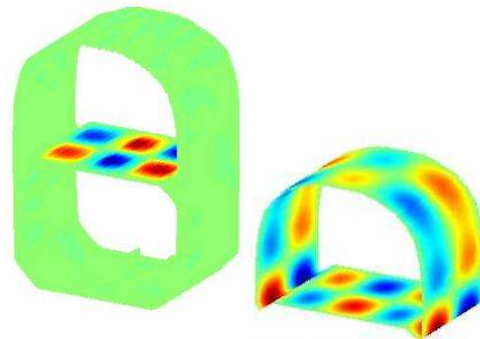


Figure 3 : déformées modales des sous-systèmes. (a) : déformées en déplacement du mode 42 de la structure; (b) déformée en pression du mode 19 de la cavité supérieure

Ainsi, il est logique de voir que ce couple de modes est très susceptible de participer à l'échange d'énergie entre ces

deux sous-systèmes si un des deux modes reçoit une puissance modale non nulle.

Cet exemple démontre que les matrices de facteurs de perte par couplage modaux peuvent être utilisées comme outils d'analyse dans des phases de recherche et développement industrielles.

## 4 Post-traitement énergétique

Le concept de facteurs de perte par couplage modaux intervient dans la méthode SmEdA. La méthode SmEdA fait intervenir le même type d'équations (bilan de puissance) que la méthode SEA (Statistical Energy Analysis) mais pour représenter des échanges d'énergie entre modes des sous-systèmes sous la forme d'un système d'équations linéaires :

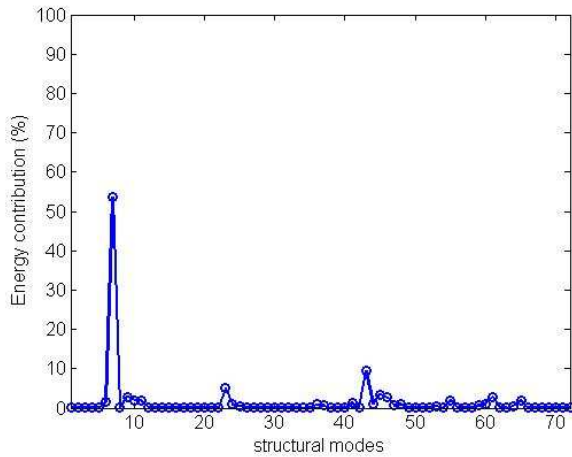
$$\{\Pi\} = [F]\{E\}, \quad (4)$$

où  $\{\Pi\}$  est le vecteur des puissances injectées dans chaque modes de chaque sous-système et  $\{E\}$  est le vecteur des énergies modales de chaque sous-système. La matrice  $[F]$  fait intervenir les facteurs de perte par couplage modaux et les amortissements modaux.

Ce dernier point est un des avantages de la méthode SmEdA puisqu'il permet, comme avec la méthode SEA, de faire varier facilement et avec un coût en temps de calcul très faible l'amortissement des sous-systèmes. Il est possible ainsi d'évaluer l'influence de l'amortissement sur les échanges d'énergie entre les sous-systèmes.

Le système d'équation (4) permet de calculer les énergies modales en connaissant les puissances modales injectées par les efforts qui sollicitent le système.

Même s'il est possible de calculer les énergies globales des sous-systèmes (celles obtenues par SEA classique) en sommant les énergies des modes résonnants dans la bande de fréquence, la connaissance des énergies modales permet une analyse plus fine des échanges d'énergie.



**Figure 4 : contribution des modes de structures dans l'énergie de la cavité supérieure. Tiers d'octave 315Hz.**

Grâce à la description modale des échanges énergétiques, il est par exemple possible d'identifier clairement quels sont les contributions de chaque modes de structure à la transmission d'énergie dans la cavité supérieure (pour une sollicitation donnée). Dans le cas d'une sollicitation par 8 forces ponctuelles réparties sur les longerons du plancher inférieur, un mode de structure

contribue à plus de 50% de l'énergie transmise à la cavité supérieure comme le montre la figure 4.

Cette information peut être particulièrement intéressante dans une phase de dimensionnement et de pre-design industriel.

## 5 Distribution d'énergie dans les sous-systèmes

En sommant les énergies modales de modes résonnants dans une bande de fréquence, il est possible d'obtenir les énergies globales des sous-systèmes pour cette bande de fréquence.

Toutefois, quand les sous-systèmes sont de taille importante - comme c'est le cas pour le tronçon de TGV Duplex présenté dans la figure 1 - cette information ne présente que peu d'intérêt pratique. Ainsi, une information locale sur la distribution d'énergie dans les sous-systèmes serait beaucoup plus valorisable.

### 5.1 Energies modales globales

Soit  $\{u\}^i$  le vecteur des déplacements aux nœuds d'un modèle éléments finis et  $[M]^i$  et  $[K]^i$  les matrices de masses et raideurs assemblées du sous-système  $i$ .

Les énergies cinétique et de déformation du sous-système complet sont données par les équations (5) et (6) :

$$E_c = \frac{1}{2} \Re \left( \frac{1}{2} \{ \dot{u} \}^T [M] \{ \dot{u} \} \right) \quad (5)$$

$$E_d = \frac{1}{2} \Re \left( \frac{1}{2} \{ u \}^T [K] \{ u \} \right) \quad (6)$$

Dans le cas d'une excitation harmonique et en décomposant sur la base des modes, on obtient l'énergie globale de chaque mode du sous-système :

$$E_c^n(\omega) = \frac{1}{4} \omega^2 a_n^2(\omega) \{ \phi_n \}^T [M] \{ \phi_n \} = \frac{1}{4} \omega^2 a_n^2(\omega) M_n \quad (7)$$

$$E_d^n(\omega) = \frac{1}{4} a_n^2(\omega) \{ \phi_n \}^T [K] \{ \phi_n \} = \frac{1}{4} a_n^2(\omega) K_n \quad (8)$$

où  $a_n(\omega)$  est l'amplitude modale à la pulsation  $\omega$ ,  $\{ \phi_n \}$  est le vecteur propre du mode  $n$ ,  $M_n$  et  $K_n$  sont les masses et raideurs généralisées.

La méthode SmEdA comme la méthode SEA traite de moyennes fréquentielles des énergies des sous-systèmes. Ainsi les moyennes fréquentielles des énergies cinétique et de déformation sur une bande de fréquence  $\Delta\omega$  sont données par les équations (9) et (10).

$$\langle E_c^n(\omega) \rangle_{\Delta\omega} = \frac{1}{4} \langle \omega^2 a_n^2(\omega) \rangle_{\Delta\omega} M_n \quad (9)$$

$$\langle E_d^n(\omega) \rangle_{\Delta\omega} = \frac{1}{4} \langle a_n^2(\omega) \rangle_{\Delta\omega} K_n \quad (10)$$

Par la suite, il sera supposé que  $\langle \omega^2 a_n^2(\omega) \rangle_{\Delta\omega} M_n = \langle a_n^2(\omega) \rangle_{\Delta\omega} K_n$ . Cette hypothèse est raisonnable dans la mesure où elle porte sur l'énergie globale sur le système moyenné en fréquence. Elle serait évidemment fautive localement.



En utilisant les équations (9) et (10) et cette hypothèse, on peut écrire la moyenne fréquentielle de l'énergie totale d'un mode n du sous-système sous la forme (11) :

$$\langle E_t^n(\omega) \rangle_{\Delta\omega} = \frac{1}{2} \langle \omega^2 a_n^2(\omega) \rangle_{\Delta\omega} M_n = \frac{1}{2} \langle a_n^2(\omega) \rangle_{\Delta\omega} K_n \quad (11)$$

Il est important de remarquer ici que  $\langle E_t^n(\omega) \rangle_{\Delta\omega}$  sont les énergies modales obtenues par la méthode SmEdA en inversant le système d'équations (4).

## 5.2 Distribution d'énergies cinétique et de déformation

La distribution d'énergie en un point Q du sous-système i peut-être écrit comme la somme des contributions énergétiques entre deux modes n et p du sous-système i, comme exprimé dans l'équation (12) :

$$e^i(Q, \omega) = \sum_n \sum_{p \neq n} e_{np}^i(Q, \omega) = \sum_n e_{nn}^i(Q, \omega) + \sum_{p \neq n} e_{np}^i(Q, \omega) \quad (12)$$

Dans la plupart des cas, la contribution intermodale ( $n \neq p$ ) est négligeable devant l'autre terme (somme sur n). Dans une première approximation, il sera considéré que négliger cette contribution intermodale n'entraîne pas d'erreur significative sur l'estimation de la distribution d'énergie. Ainsi, dans la suite, la distribution d'énergie cinétique ou de déformation au point Q, moyennées sur une bande de fréquence  $\Delta\omega$ , sont données par les équations (13) et (14) :

$$\langle e_c(Q, \omega) \rangle_{\Delta\omega} \approx \sum_n \langle e_c^n(Q, \omega) \rangle_{\Delta\omega} \quad (13)$$

$$\langle e_d(Q, \omega) \rangle_{\Delta\omega} \approx \sum_n \langle e_d^n(Q, \omega) \rangle_{\Delta\omega} \quad (14)$$

Les distributions d'énergies cinétique et de déformation modales peuvent être exprimées en fonction des déformées modales comme cela a été fait dans les équations (7) et (8). Ainsi, la distribution d'énergie cinétique du mode n s'écrit :

$$\langle e_c^n(Q, \omega) \rangle_{\Delta\omega} = \frac{1}{4} \langle \omega^2 a_n^2(\omega) \rangle_{\Delta\omega} \{\phi_n\}_Q^T [M] \{\phi_n\} \quad (15)$$

Et la distribution d'énergie de déformation du mode n s'écrit :

$$\langle e_d^n(Q, \omega) \rangle_{\Delta\omega} = \frac{1}{4} \langle a_n^2(\omega) \rangle_{\Delta\omega} \{\phi_n\}_Q^T [K] \{\phi_n\} \quad (16)$$

En remplaçant l'équation (11) dans les équations (15) et (16), il vient finalement :

$$\langle e_c(Q, \omega) \rangle_{\Delta\omega} \approx \sum_n \frac{1}{2} \frac{\langle E_t^n(\omega) \rangle_{\Delta\omega}}{M_n} \{\phi_n\}_Q^T [M] \{\phi_n\} \quad (17)$$

$$\langle e_d(Q, \omega) \rangle_{\Delta\omega} \approx \sum_n \frac{1}{2} \frac{\langle E_t^n(\omega) \rangle_{\Delta\omega}}{K_n} \{\phi_n\}_Q^T [K] \{\phi_n\} \quad (18)$$

Ainsi, les distributions d'énergies cinétique (16) et de déformation (17) peuvent être calculées à partir des énergies modales obtenues par SmEdA et des déformées modales des sous-systèmes découplés.

## 5.3 Application au TGV Duplex

Le tronçon de TGV Duplex est sollicité par 8 forces ponctuelles réparties sur les longerons du plancher

inférieur. Ces efforts produisent des puissances modales injectées qui constituent le vecteur d'entrée du système d'équations (4). En inversant le système, les énergies modales des sous-systèmes (la structure et les deux cavités) des modes résonnants dans le 1/3 d'octave 315Hz sont obtenues.

Finalement, les équations (17) et (18) sont utilisées pour obtenir la distribution d'énergies cinétique et de déformation pour la structure.

Les figures 5 et 6 démontrent que les énergies cinétiques et de déformation n'ont pas une distribution sur le sous-système rigoureusement identique. Par exemple, les panneaux latéraux inférieurs possèdent une énergie cinétique plus importante que l'énergie de déformation alors que c'est l'inverse pour les longerons du plancher inférieur.

Pour les sous-systèmes acoustiques, seule l'énergie de déformation est calculée. Dans ce cas, la distribution d'énergie dans les cavités est présentée par la figure 7 et est comparée aux résultats de calculs directs effectués à l'aide d'un logiciel éléments finis du commerce. Pour obtenir la cartographie 7(b), les énergies des cavités ont été moyennées sur 75 points en fréquence sur le tiers d'octave 315Hz.

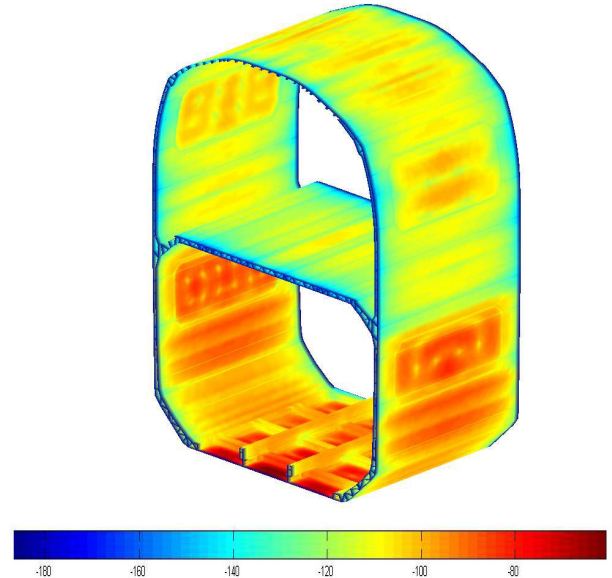
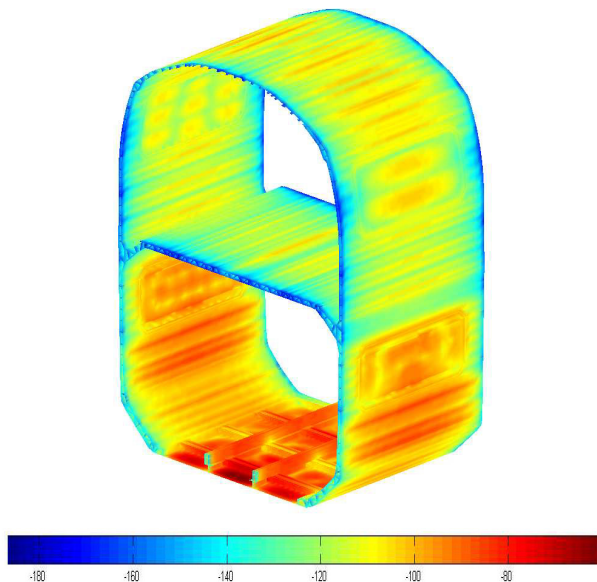
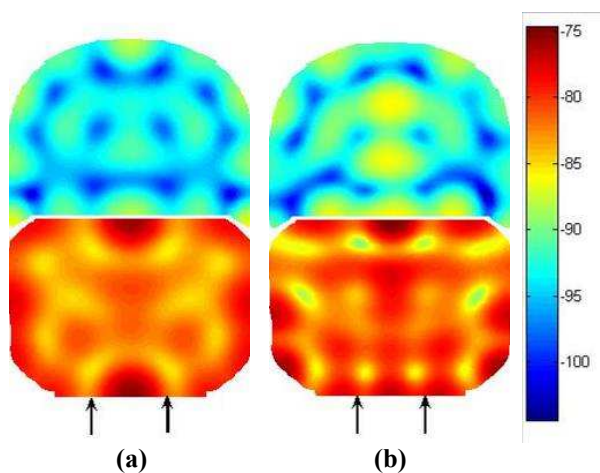


Figure 5 : distribution d'énergie cinétique pour une sollicitation selon 8 efforts ponctuels répartis sur les longerons du plancher inférieur. Tiers d'octave 315Hz.



**Figure 6 : distribution d'énergie de déformation pour une sollicitation selon 8 efforts ponctuels répartis sur les longerons du plancher inférieur. Tiers d'octave 315Hz.**



**Figure 7 : distribution d'énergie totale dans les cavités pour une sollicitation selon 8 efforts ponctuels répartis sur les longerons du plancher inférieur. Tiers d'octave 315Hz. (a) SmEdA; (b) Calcul direct FEM.**

La corrélation entre l'estimation de la distribution d'énergie donnée par SmEdA et le calcul direct exacte est nette même si des écarts apparaissent, notamment dans la cavité inférieure.

Il est important aussi de noter la symétrie presque exacte présente dans l'estimation SmEdA qu'on ne retrouve que partiellement sur le calcul exact. Cette symétrie est due à la non prise en compte des contributions intermodales qui a permis d'obtenir l'équation (13).

## 6 Conclusion

Les concepts énergétiques développés dans le cadre de la méthode Statistical modal Energy distribution Analysis (SmEdA) peuvent être utilisés comme outils de post-traitements des calculs obtenus par méthodes éléments finis.

Ainsi, les facteurs de perte par couplage modaux permettent d'identifier, à partir des bases modales des sous-

systèmes découplés, les couples de modes qui sont principalement responsables des échanges énergétiques entre sous-systèmes. Ceci peut être un outil de diagnostic intéressant pour la résolution de problèmes vibro-acoustiques.

De même, l'analyse de l'influence de l'amortissement des sous-systèmes est aisée avec la méthode SmEdA puisqu'il suffit de faire varier ce paramètre dans un système d'équations linéaires.

Enfin, il est possible, à partir des énergies modales calculées par SmEdA, d'estimer la distribution d'énergies cinétique et de déformation dans les sous-systèmes.

## Références

- [1] Shorter P.J, Langley R.S, "Vibro-acoustic analysis of complex systems", *Journal of Sound and Vibration*, 288, 669-699 (2005).
- [2] Maxit L., Guyader J-L., "Estimation of SEA coupling loss factors using a dual formulation and FEM modal information, part I : theory", *Journal of sound and vibration*. 239 (5), 907-930 (2001).
- [3] Maxit L., Guyader J-L., "Extension of SEA model to subsystems with non-uniform modal energy distribution", *Journal of sound and vibration*. 265 (2), 337-9358 (2003).
- [4] Totaro N., Guyader J-L., "Energy resolution of complex vibro-acoustic problems", *Proceedings DAGA 2009*.