



**HAL**  
open science

## Caractérisation numérique d'un tronçon cylindrique traité avec écoulement

Mohamed Taktak, Mohamed Ali Majdoub, Mabrouk Bentahar, Jean-Michel  
Ville, Mohamed Haddar

► **To cite this version:**

Mohamed Taktak, Mohamed Ali Majdoub, Mabrouk Bentahar, Jean-Michel Ville, Mohamed Haddar. Caractérisation numérique d'un tronçon cylindrique traité avec écoulement. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00538362

**HAL Id: hal-00538362**

**<https://hal.science/hal-00538362>**

Submitted on 22 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Caractérisation numérique d'un tronçon cylindrique traité avec écoulement

Mohamed Taktak<sup>1</sup>, Mohamed Ali Majdoub<sup>1</sup>, Mabrouk Bentahar<sup>2</sup>, Jean Michel Ville<sup>2</sup>, Mohamed Haddar<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Unité de Modélisation, Mécanique et Productique (U2MP), Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, BP 1173 – 3038, Sfax, Tunisie, mohamed.taktak.tn@gmail.com

<sup>2</sup>Laboratoire Roberval UMR UTC – CNRS n°6253, Université de Technologie de Compiègne, BP 20529 F60205 Compiègne, cedex, France, mabrouk.bentahar@utc.fr

L'optimisation et le développement de nouvelles technologies visant à la réduction du bruit rayonné par les conduits ont été développés à l'Université de Technologie de Compiègne dans laquelle une caractérisation acoustique numérique d'un tronçon cylindrique traité a été effectuée en absence d'écoulement à l'aide de la matrice de diffusion multimodale qui est une caractéristique intrinsèque de ce tronçon. Dans la plus part des applications industrielles faisant intervenir des conduits traités comme les systèmes de ventilation ou les réacteurs d'avion, l'écoulement est présent et constitue un facteur influant sur la propagation acoustique dans ces conduits et qui doit être pris en compte lors de la caractérisation de ces conduits. C'est dans ce cadre que ce travail de développement d'une démarche numérique basée sur la méthode des éléments finis pour caractériser un tronçon traité par le calcul de sa matrice de diffusion en présence d'écoulement uniforme est présenté. Dans ce papier le développement d'un élément fini dont la formulation est basée sur l'équation d'Helmholtz convectée ainsi que la démarche d'obtention de la matrice de diffusion en présence d'écoulement sont détaillés. Les coefficients de la matrice de diffusion et l'atténuation de la puissance acoustique du conduit étudié calculés avec et sans écoulement sont comparés pour différentes vitesses d'écoulement pour évaluer l'effet d'écoulement sur ces paramètres.

### 1 Introduction

De nombreux travaux théoriques et expérimentaux [1-4] sur la propagation et le rayonnement dans les conduits en présence de discontinuités géométriques ou d'impédance ont été menés afin de réduire le bruit rayonné par les systèmes composés d'une source et d'un guide d'ondes, tels que les compresseurs, les moteurs d'avion et d'automobiles et les systèmes de ventilation. Les éléments de type silencieux sont complètement caractérisés par leurs matrices de transfert, de mobilité ou de diffusion dont les coefficients dépendent de la fréquence, la structure spatiale du champ sonore incident, de la géométrie du conduit, des propriétés des matériaux absorbants et de l'implantation de ces matériaux.

A l'Université de Technologie de Compiègne la notion de la matrice de diffusion multimodale d'un conduit traité a été développée afin de caractériser ces guides d'ondes en absence d'écoulement. Dans Taktak [5] cette matrice a été utilisée pour déterminer l'efficacité de ces silencieux et pour caractériser les parois du conduit par la détermination de l'impédance acoustique de ces matériaux absorbants sans écoulement. Mais dans les applications industrielles, l'écoulement est présent et constitue un facteur influant. C'est dans ce cadre que se situe le travail présenté dans ce papier. Il présente le développement d'une technique basée sur la méthode des éléments finis pour calculer la matrice de diffusion d'un conduit traité en présence d'un écoulement uniforme. Cette matrice est ensuite utilisée pour caractériser les performances du conduit étudié en calculant le bilan de la puissance acoustique de la part et d'autre du conduit étudié par le calcul de son atténuation de la puissance acoustique.

Dans ce papier on commence par présenter le problème étudié dans la section 2, la formulation numérique du

problème est présentée dans la section 3. La section 4 présente la méthode numérique de calcul de la matrice de diffusion multimodale d'un conduit traité en présence d'écoulement. La section 5 présente la méthodologie de la détermination de l'atténuation de la puissance acoustique à partir de la matrice de diffusion. Les résultats sont présentés et discutés dans la section 6 afin d'évaluer l'effet de l'écoulement.

### 2 Présentation du conduit étudié

Le conduit étudié (Figure 1) est cylindrique et axisymétrique. Il ne présente pas de changement brusque de section mais une discontinuité d'impédance causée par le matériau absorbant supposé localement réactif et présenté par son impédance acoustique  $Z$ . Ce conduit est composé de trois parties : deux parties rigides ( $\Gamma_{CR}$ ) de part et d'autre d'une partie ( $\Gamma_{CT}$ ). Dans ce conduit est présent un écoulement uniforme caractérisé par le vecteur  $\vec{M}_0(r) = (U_0/c)\vec{z} = M_0\vec{z}$  avec  $M_0$  est le nombre de Mach,  $U_0$  est la vitesse d'écoulement et  $c$  est la célérité du son.

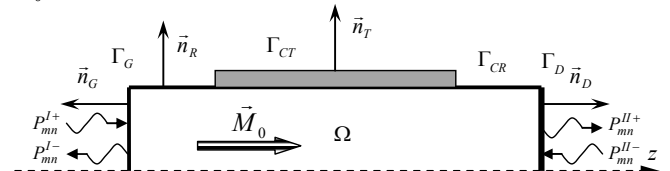


Figure 1 : Présentation du conduit étudié

$\Gamma_{CR}$  et  $\Gamma_{CT}$  sont caractérisées respectivement par ses vecteurs normaux  $\vec{n}_R$  et  $\vec{n}_T$ .  $\Gamma_G$  et  $\Gamma_D$  sont respectivement les frontières transversales à gauche et à droite du conduit et définies par les vecteurs normaux  $\vec{n}_G$  et  $\vec{n}_D$ .  $\Omega$  représente le

domaine acoustique à l'intérieur du conduit. Le conduit étudié est axisymétrique, la pression acoustique dans le conduit est la solution du système contenant l'équation d'Helmholtz convectée ainsi que les conditions aux limites sur les frontières  $\Gamma_{CR}$  et  $\Gamma_{CT}$  :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p + \frac{2i\omega}{c} (\vec{M}_0 \cdot \vec{\nabla} p) - \vec{M}_0 \cdot \overline{\text{grad}} (\vec{M}_0 \cdot \vec{\nabla} p) = 0 & (\Omega) \\ Z \frac{\partial p}{\partial n_T} = \frac{\rho_0}{i\omega} \left( -i\omega + U_0 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 (p) & (\Gamma_{CT}) \\ \frac{\partial p}{\partial n_R} = 0 & (\Gamma_{CR}) \end{cases} \quad (1)$$

$\Delta$  est l'opérateur de Laplacien et  $\vec{\nabla} = \langle \partial/\partial r \quad im/r \quad \partial/\partial z \rangle^T$  est le terme du gradient modifié pour un problème axisymétrique avec  $m$  est le nombre d'onde azimutal.

Les champs de pression au niveau des sections  $\Gamma_G$  et  $\Gamma_D$ , présentant les frontières d'entrée et de sortie du conduit étudié, sont donnés par :

$$\begin{cases} p^G = \sum_n^{N_r} \left( P_{mn}^{I+} e^{ik_{mn}^+(z-z_G)} + P_{mn}^{I-} e^{ik_{mn}^-(z-z_G)} \right) J_m(\chi_{mn} r) \\ p^D = \sum_n^{N_r} \left( P_{mn}^{II+} e^{ik_{mn}^+(z-z_D)} + P_{mn}^{II-} e^{ik_{mn}^-(z-z_D)} \right) J_m(\chi_{mn} r) \end{cases} \quad (2)$$

$N_r$  est le nombre des modes radiaux et  $P_{mn}^{I,II\pm}$  sont les pressions modales à l'entrée et la sortie du conduit.

$$k_{mn}^\pm = \frac{-M_0 k \pm \sqrt{k^2 - (1-M_0^2) \left( \frac{\chi_{mn}}{a} \right)^2}}{(1-M_0^2)} \quad (3)$$

$k_{mn}^\pm$  est le nombre d'onde axial associé au mode  $(n,m)$  : + dans le sens d'écoulement, - dans le sens opposé à l'écoulement,  $\chi_{mn}$  est le  $n^{\text{ième}}$  zéro de la dérivée de la fonction de Bessel d'ordre  $m$  et  $k = \omega/c$  est le nombre d'onde total.

### 3 Formulation numérique

Pour résoudre le problème (1), la méthode des éléments finis est utilisée. La formulation variationnelle faible de ce problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{\Omega} -(\nabla q \cdot \nabla p) r d\Omega \\ & + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left( (i\omega q + \vec{U}_0 \cdot \nabla q) \cdot (-i\omega p + \vec{U}_0 \cdot \nabla p) \right) r d\Omega \\ & + \int_{\cup \Gamma_i} \left( q \frac{\partial p}{\partial n_i} - \frac{1}{c^2} \vec{U}_0 \cdot \vec{n}_i \cdot q \left( -i\omega + U_0 \frac{\partial}{\partial n_i} \right) (p) \right) r d\Gamma_i = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$p$  et  $q$  sont respectivement la pression acoustique dans le conduit et la fonction test,  $d\Omega = dr dz$  est l'élément surfacique.  $\cup \Gamma_i$  forment l'ensemble de frontières.

L'intégrale sur les frontières inclut les conditions aux limites. Cette intégrale est décomposée en trois parties :

- Paroi traitée  $\Gamma_{CT}$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{CT}} \left( q \frac{\partial p}{\partial n_T} - \frac{1}{c^2} \vec{U}_0 \cdot \vec{n}_T \cdot q \left( -i\omega + U_0 \frac{\partial}{\partial n_T} \right) (p) \right) r d\Gamma_{CT} \\ & = -\rho_0 \omega^2 \int_{\Gamma_{CT}} q \frac{p}{i\omega Z} r d\Gamma_{CT} - 2i\omega \rho_0 U_0 \int_{\Gamma_{CT}} q \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{i\omega Z} \right) r d\Gamma_{CT} \\ & \quad - \rho_0 U_0^2 \int_{\Gamma_{CT}} \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{i\omega Z} \right) r d\Gamma_{CT} + \rho_0 U_0^2 \left[ r q \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{i\omega Z} \right) \right]^{L_{CT}} \end{aligned} \quad (5)$$

Avec  $L_{CT}$  est la longueur axiale de la partie traitée.

- Frontière gauche  $\Gamma_G$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_G} \left( q \frac{\partial p}{\partial n_G} - \frac{1}{c^2} \vec{U}_0 \cdot \vec{n}_G \cdot q \left( -i\omega + U_0 \frac{\partial}{\partial n_G} \right) (p) \right) r d\Gamma_G = \\ & \int_{\Gamma_G} -q (1-M_0^2) \sum_n^{N_r} \left( ik_{mn}^+ P_{mn}^{I+} + ik_{mn}^- P_{mn}^{I-} \right) J_m(\chi_{mn} r) r d\Gamma_G \\ & \quad - \int_{\Gamma_G} i M_0 k q \sum_n^{N_r} \left( P_{mn}^{I+} + P_{mn}^{I-} \right) J_m(\chi_{mn} r) r d\Gamma_G \end{aligned} \quad (6)$$

- Frontière droite  $\Gamma_D$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_D} \left( q \frac{\partial p}{\partial n_D} - \frac{1}{c^2} \vec{U}_0 \cdot \vec{n}_D \cdot q \left( -i\omega + U_0 \frac{\partial}{\partial n_D} \right) (p) \right) r d\Gamma_D = \\ & \int_{\Gamma_D} q (1-M_0^2) \sum_n^{N_r} \left( ik_{mn}^+ P_{mn}^{II+} + ik_{mn}^- P_{mn}^{II-} \right) J_m(\chi_{mn} r) r d\Gamma_D \\ & \quad + \int_{\Gamma_D} i M_0 k q \sum_n^{N_r} \left( P_{mn}^{II+} + P_{mn}^{II-} \right) J_m(\chi_{mn} r) r d\Gamma_D \end{aligned} \quad (7)$$

L'usage des décompositions modales aux frontières  $\Gamma_G$  et  $\Gamma_D$  introduit les amplitudes modales comme des degrés de liberté supplémentaires au modèle. Il est nécessaire de compléter les équations (5), (6) et (7) avec d'avantage d'équations pour obtenir un problème bien posé. Cela est fait par l'hypothèse que les amplitudes à  $\Gamma_G$  et  $\Gamma_D$  peuvent être obtenues par la projection du champ de pression sur les fonctions propres :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_G} p J_m \left( \frac{\chi_{mn}}{a} r \right) d\Gamma_G = \left( P_{mn}^{I+} + P_{mn}^{I-} \right) \int_{\Gamma_G} J_m \left( \frac{\chi_{mn}}{a} r \right)^2 r dr \\ & \int_{\Gamma_D} p J_m \left( \frac{\chi_{mn}}{a} r \right) d\Gamma_D = \left( P_{mn}^{II+} + P_{mn}^{II-} \right) \int_{\Gamma_D} J_m \left( \frac{\chi_{mn}}{a} r \right)^2 r dr \end{aligned} \quad (8)$$

Pour résoudre l'équation (4) avec l'équation (8), le domaine  $\Omega$  est discrétisé avec des éléments finis triangulaires à trois nœuds alors que les bords sont discrétisés par des éléments à deux nœuds [6] approximés par une interpolation linéaire lors de l'intégration.

## 4 Calcul de la matrice de diffusion

L'arrangement du système (4) en tenant compte des pressions modales entrantes et sortantes au niveau des frontières  $\Gamma_G$  et  $\Gamma_D$ , aboutit au système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} [K] & [E_1] & [E_2] & [F_1] & [F_2] \\ [G_1] & [G_2] & [G_3] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [H_1] & [0] & [0] & [H_2] & [H_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_M \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} P_{mn}^{I-} \\ \vdots \\ P_{mn}^{I+} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} P_{mn}^{II-} \\ \vdots \\ P_{mn}^{II+} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (9)$$

$M$  est le nombre de nœuds du maillage. Le premier ensemble d'équations contenant les matrices  $[K]_{M \times M}$ ,  $[E_1]_{M \times N_r}$ ,  $[E_2]_{M \times N_r}$ ,  $[F_1]_{M \times N_r}$  et  $[F_2]_{M \times N_r}$  a comme origine l'équation (4). Le second et le cinquième ensemble d'équations contenant les matrices  $[G_1]_{N_r \times N_r}$ ,  $[G_2]_{N_r \times N_r}$ ,  $[G_3]_{N_r \times N_r}$ ,  $[H_1]_{N_r \times N_r}$ ,  $[H_2]_{N_r \times N_r}$ ,  $[H_3]_{N_r \times N_r}$  dérivent des équations (8). La matrice de diffusion pour un ordre azimutal  $m$  est définie comme la relation linéaire entre les modes entrants et sortants :

$$\begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{mn}^{I-} \\ \vdots \\ P_{mn}^{I+} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} P_{mn}^{II-} \\ \vdots \\ P_{mn}^{II+} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}_{2N_r} = [\Delta]_{2N_r \times 2N_r} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{mn}^{I-} \\ \vdots \\ P_{mn}^{I+} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} P_{mn}^{II-} \\ \vdots \\ P_{mn}^{II+} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}_{2N_r} \quad (10)$$

Cette matrice est obtenue par l'écriture du système d'équation (9) comme suit :

$$\begin{cases} [K]\{p\} + [A] \begin{Bmatrix} P_{mn}^{I+} \\ \vdots \\ P_{mn}^{II-} \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} P_{mn}^{I-} \\ \vdots \\ P_{mn}^{II+} \end{Bmatrix} = \{0\} \\ [C]\{p\} + [U] \begin{Bmatrix} P_{mn}^{I+} \\ \vdots \\ P_{mn}^{II-} \end{Bmatrix} + [V] \begin{Bmatrix} P_{mn}^{I-} \\ \vdots \\ P_{mn}^{II+} \end{Bmatrix} = \{0\} \end{cases} \quad (11)$$

$\{p\}$  est le vecteur des pressions nodales, et on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} [A] &= [[E_1] \quad [F_2]]; [B] = [[E_2] \quad [F_1]] \\ [C] &= [G_1] + [H_1]; [U] = [[G_2] \quad [H_3]] \\ [V] &= [[G_3] \quad [H_2]] \end{aligned} \quad (12)$$

La matrice de diffusion azimutale pour un nombre  $m$  s'écrit à la fin sous la forme :

$$[\Delta]_{2N_r \times 2N_r} = ([V] - [C][K]^{-1}[B]^{-1})([U] - [C][K]^{-1}[A]^{-1}) \quad (13)$$

La répétition de ce calcul pour chaque  $m$  permet d'obtenir la matrice de diffusion  $[D]_{2N \times 2N}$  par l'assemblage des matrices  $[\Delta]_{2N_r \times 2N_r}$  obtenues séparément pour chaque  $m$ .

## 5 Atténuation de la puissance acoustique

L'intensité acoustique axiale en un point M ( $r, \theta, z$ ) situé dans une section droite localisée à  $z$  est donnée par [7] :

$$\begin{aligned} I_z(r, \theta, z) &= \frac{1}{2} (1 + M_0^2) \operatorname{Re}(P V_z^*) \\ &+ \frac{\rho_0 V_0}{2} \operatorname{Re}(V_z \cdot V_z^*) + \frac{V_0}{2 \rho_0 c_0^2} (P \cdot P^*) \end{aligned} \quad (14)$$

La puissance acoustique est donnée par :

$$W(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} I_{z,mn}(z) N_{mn} \quad (15)$$

$S = \pi a^2$  est la section droite du conduit,  $N_{mn}$  est le coefficient de normalisation associé au mode  $(m, n)$   $\left( N_{mn} = S J_m^2(\chi_{mn}) \left[ 1 - \frac{m^2}{\chi_{mn}^2} \right] \right)$  et  $I_{z,mn}$  est l'intensité acoustique axiale associée au mode  $(m, n)$  :

$$\begin{aligned} I_{z,mn}(z) &= \frac{1}{2} (1 + M_0^2) \operatorname{Re}(P_{mn} V_{z,mn}^*) \\ &+ \frac{\rho_0 V_0}{2} \operatorname{Re}(V_{z,mn} V_{z,mn}^*) + \frac{V_0}{2 \rho_0 c_0^2} \operatorname{Re}(P_{mn} P_{mn}^*) \end{aligned} \quad (16)$$

Les intensités incidente, réfléchie, transmise et retrograde sont données par :

$$\begin{aligned} I_{z,mn}^{I+} &= \left[ \frac{(1 + M_0^2) N_{mn}}{2} \cdot \frac{k_{mn}^+}{\rho_0 c_0 (k - M_0 k_{mn}^+)} \right] \cdot |P_{mn}^{I+}|^2 \\ I_{z,mn}^{I-} &= \left[ \frac{(1 + M_0^2) N_{mn}}{2} \cdot \frac{k_{mn}^-}{\rho_0 c_0 (k - M_0 k_{mn}^-)} \right] \cdot |P_{mn}^{I-}|^2 \\ I_{z,mn}^{II+} &= \left[ \frac{(1 + M_0^2) N_{mn}}{2} \cdot \frac{k_{mn}^+}{\rho_0 c_0 (k - M_0 k_{mn}^+)} \right] \cdot |P_{mn}^{II+}|^2 \\ I_{z,mn}^{II-} &= \left[ \frac{(1 + M_0^2) N_{mn}}{2} \cdot \frac{k_{mn}^-}{\rho_0 c_0 (k - M_0 k_{mn}^-)} \right] \cdot |P_{mn}^{II-}|^2 \end{aligned} \quad (17)$$

L'atténuation de la puissance acoustique,  $W_{att}$ , d'un conduit à deux ports est définie comme le rapport entre la puissance des ondes entrantes de deux côtés  $W^{en}$  et la puissance acoustique des ondes sortantes de deux côtés  $W^{so}$ :

$$W_{att} (dB) = 10 \log_{10} \left( \frac{W^{en}}{W^{so}} \right) \quad (18)$$

$$W^{en} = \sum_{m=-P}^P \sum_{n=0}^Q \frac{(1+M_0^2)N_{mn}}{2\rho_0 c_0} \left( \frac{k_{mn}^+}{k-M_0 k_{mn}^+} |P_{mn}^{I+}|^2 + \frac{k_{mn}^-}{k-M_0 k_{mn}^-} |P_{mn}^{II-}|^2 \right) \quad (19)$$

$$W^{so} = \sum_{m=-P}^P \sum_{n=0}^Q \frac{(1+M_0^2)N_{mn}}{2\rho_0 c_0} \left( \frac{k_{mn}^-}{k-M_0 k_{mn}^-} |P_{mn}^{I-}|^2 + \frac{k_{mn}^+}{k-M_0 k_{mn}^+} |P_{mn}^{II+}|^2 \right)$$

Ces puissances peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$W^{en} = \left\{ \Pi^{en} \right\}_{2N}^{T*} \cdot \left\{ \Pi^{en} \right\}_{2N} \quad (20)$$

$$W^{so} = \left\{ \Pi^{so} \right\}_{2N}^{T*} \cdot \left\{ \Pi^{so} \right\}_{2N}$$

$$\left\{ \Pi^{en} \right\} = \begin{bmatrix} \left[ \text{diag}(XE_{mn}) \right] & [0] \\ [0] & \left[ \text{diag}(XE_{mn}) \right] \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \cdot \left\{ P^{en} \right\}_{2N} \quad (21)$$

$$\left\{ \Pi^{so} \right\} = \begin{bmatrix} \left[ \text{diag}(XS_{mn}) \right] & [0] \\ [0] & \left[ \text{diag}(XS_{mn}) \right] \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \cdot \left\{ P^{so} \right\}_{2N}$$

$$XE_{mn} = \sqrt{\left( \frac{N_{mn}}{2\rho_0 c_0} \right) \left[ \frac{(1+M_0^2)k_{mn}^+}{(k-M_0 k_{mn}^+)} + \frac{k_{mn}^+ M_0}{(k-M_0 k_{mn}^+)^2} + M_0 \right]} \quad (22)$$

$$XS_{mn} = \sqrt{\left( \frac{N_{mn}}{2\rho_0 c_0} \right) \left[ \frac{(1+M_0^2)k_{mn}^-}{(k-M_0 k_{mn}^-)} + \frac{k_{mn}^- M_0}{(k-M_0 k_{mn}^-)^2} + M_0 \right]}$$

L'atténuation de la puissance acoustique peut s'écrire sous la forme suivante [8]:

$$W_{att} (dB) = 10 \log_{10} \left( \frac{W^{en}}{W^{so}} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{\sum_{i=1}^{2N} |d_i|^2}{\sum_{i=1}^{2N} \lambda_i |d_i|^2} \right) \quad (23)$$

$\lambda_i$  sont les valeurs propres de la matrice  $[H]$  définie par:

$$[H]_{2N \times 2N} = [D']_{2N \times 2N}^{T*} \cdot [D']_{2N \times 2N} \quad (24)$$

$$[D']_{2N \times 2N} = [XS]_{2N \times 2N} \cdot [D]_{2N \times 2N} \cdot [XE]_{2N \times 2N}^{-1} \quad (25)$$

$$\{d\}_{2N} = [U]_{2N \times 2N}^{T*} \cdot \left\{ \Pi^{en} \right\}_{2N} \quad (26)$$

$[U]$  est la matrice des vecteurs propres de  $[H]$

## 6 Résultats Numériques

### 6.1 Conduit étudié

L'élément de conduit à caractériser dans ce papier est un conduit de longueur de 1m composé de 3 parties : 0.35 m conduit rigide, 0.3 conduit traité et 0.35 m conduit rigide. Le calcul de la matrice de diffusion et de l'atténuation de la puissance acoustique est effectué en utilisant un matériau absorbant de type résonateur d'Helmholtz composé d'une plaque perforée d'épaisseur  $e = 0.8$  mm avec des trous de diamètre  $D = 1$ mm avec un taux de perforation  $\sigma = 5\%$ ,

d'une structure de nid d'abeille d'épaisseur de 20 mm et d'une plaque rigide. Ce matériau est caractérisé par son impédance acoustique  $Z$ . Dans ce travail, le modèle d'impédance acoustique d'Elnady [9] est utilisé comme entrée pour le calcul numérique de la matrice de diffusion et l'atténuation de la puissance acoustique du conduit étudié. Ce modèle donne une fréquence d'accord au nombre d'onde adimensionnel  $ka = 2.22$ . Les calculs sont effectués sur la bande de fréquence  $ka = [0 - 3.8]$ . Afin d'évaluer l'effet de l'écoulement, les calculs sont effectués pour différents nombres de Mach ( $M_0 = 0, 0.1$  et  $0.2$ ).

### 6.2 Coefficients de la matrice de diffusion en présence d'écoulement

Les figures 2 et 3 présentent les modules des coefficients de diffusion en transmission  $T_{00,00}^+$  et  $T_{10,10}^+$  dans le même sens de l'écoulement en fonction du nombre d'onde adimensionnel  $ka$  pour différentes vitesses d'écoulement. La courbe du module du coefficient  $T_{00,00}^+$  montre que ce module est proche de 1 dans l'intervalle  $ka = [0 - 0.8]$ ; à partir de  $ka = 0.8$ , ce module décroît en fonction de la fréquence jusqu'à devenir nul dans l'intervalle  $ka = [2.4 - 2.8]$  proche de la fréquence d'accord théorique du traitement. Ensuite, une croissance du module est observée sur le reste de la bande de fréquence jusqu'à atteindre 0.4 en  $ka = 3.8$ . Pour le module du coefficient  $T_{10,10}^+$ , une croissance en fonction de la fréquence est observée à partir de  $ka = 2.8$  jusqu'à atteindre 0.4 en  $ka=3.8$ .

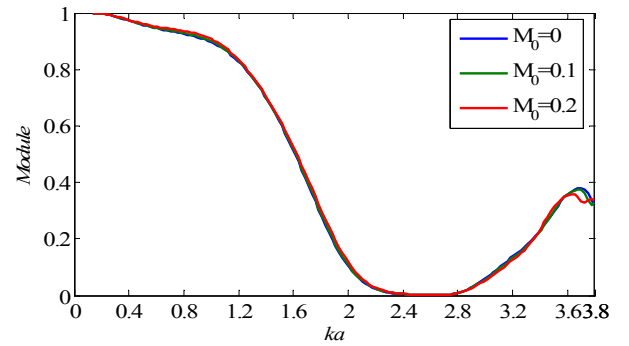


Figure 2 : Modules du coefficient de diffusion  $T_{00,00}^+$  en fonction de  $ka$  pour les vitesses d'écoulement étudiées

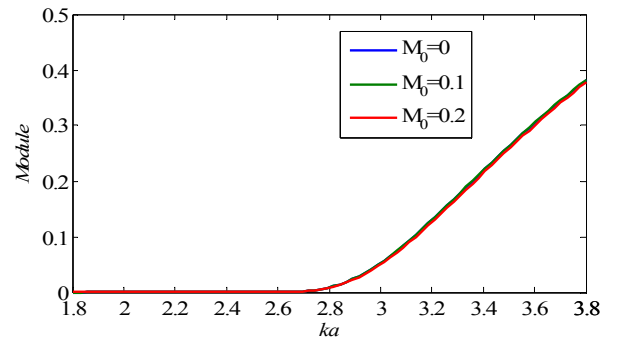


Figure 3 : Modules du coefficient de diffusion  $T_{10,10}^+$  en fonction de  $ka$  pour les vitesses d'écoulement étudiées

Les figures 2 et 3 montrent que l'effet de l'écoulement sur les coefficients de transmission est faible : pas de grandes influences ont été observées sur les modules de ces coefficients.

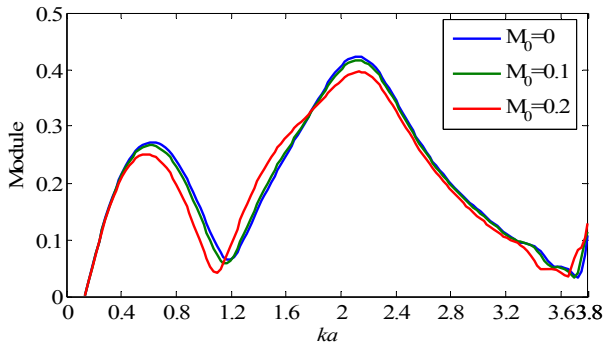


Figure 4 : Modules du coefficient de diffusion  $R_{00,00}^+$  en fonction de  $ka$  pour les vitesses d'écoulement étudiées

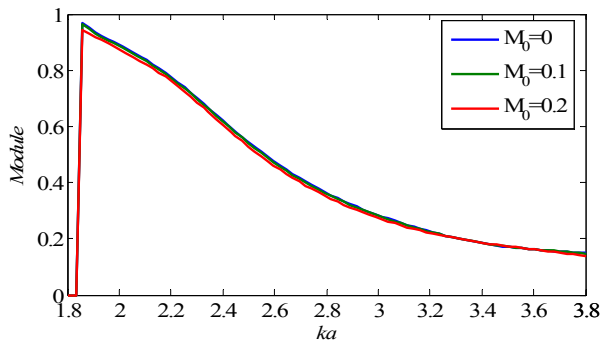


Figure 5 : Modules du coefficient de diffusion  $R_{10,10}^+$  en fonction de  $ka$  pour les vitesses d'écoulement étudiées

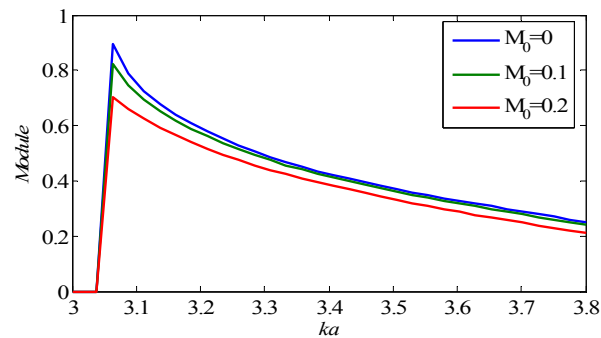


Figure 6 : Modules du coefficient de diffusion  $R_{20,20}^+$  en fonction de  $ka$  pour les vitesses d'écoulement étudiées

Les figures 4, 5 et 6 présentent respectivement les modules des coefficients de diffusion en réflexion du conduit étudié  $R_{00,00}^+$ ,  $R_{10,10}^+$  et  $R_{20,20}^+$ . Sur le coefficient de diffusion  $R_{00,00}^+$ , des oscillations sont observées alors que les modules des coefficients de diffusion des modes élevés sont proches de 1 près des fréquences de coupure de chaque mode, ensuite une décroissance en fonction de la fréquence est observée.

Les figures 4, 5 et 6 montrent l'effet de l'écoulement sur les coefficients de réflexion : lorsque la vitesse d'écoulement augmente les modules des coefficients de réflexion diminuent. Cette diminution est plus apparente sur

le coefficient de réflexion du mode plan ( $\approx 0.05$ ) et (2,0) ( $\approx 0.1$ ) et moins importante sur le mode (1,0).

Afin d'évaluer l'influence du sens de l'écoulement, une comparaison entre les modules des coefficients de diffusion en transmission du mode plan sur lui-même correspondants au sens  $T_{00,00}^+$  et au sens inverse  $T_{00,00}^-$  de l'écoulement a été représentée sur la figure 7 pour  $M_0=0.2$ .

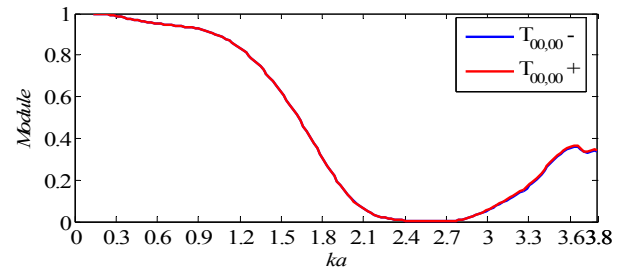


Figure 7 : Modules du coefficient de diffusion  $T_{00,00}^+$  et  $T_{00,00}^-$  en fonction de  $ka$  pour  $M_0=0.2$ .

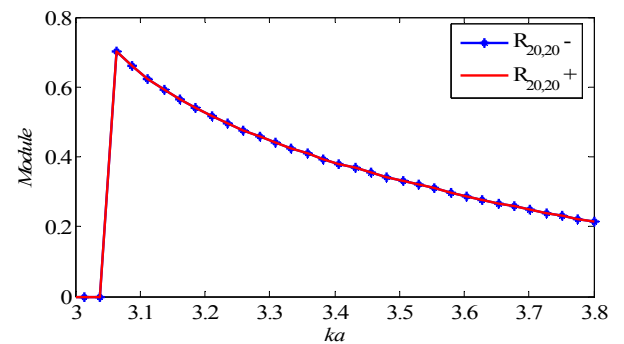


Figure 8 : Modules du coefficient de diffusion  $R_{20,20}^+$  et  $R_{20,20}^-$  en fonction de  $ka$  pour  $M_0=0.2$ .

Pour la même valeur de vitesse d'écoulement, la figure 8 présente une comparaison entre les modules des coefficients de diffusion en réflexion du mode (1,0) sur lui-même correspondants au sens  $R_{10,10}^+$  et au sens inverse  $R_{10,10}^-$  de l'écoulement. Les figures 7 et 8 montrent que le sens de l'écoulement n'a pas une grande influence sur les coefficients de la matrice de diffusion du conduit étudié.

### 6.3 Atténuation de la puissance acoustique

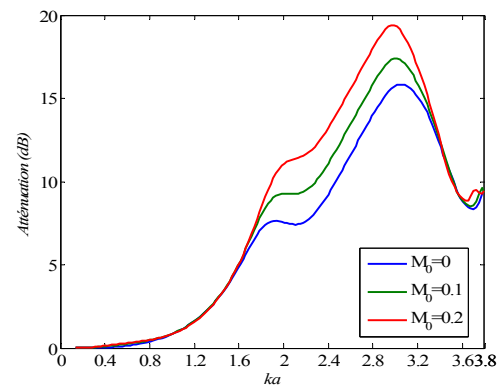


Figure 9 : Atténuation de la puissance acoustique du conduit étudié en présence du mode plan en fonction de  $ka$  et des vitesses d'écoulement

Les atténuations de la puissance acoustique sont calculées pour une configuration de vecteurs de pressions modales unitaires et en phase entrantes d'un seul côté (gauche) du conduit traité et dans le même sens de l'écoulement [8] :

$$\{P^{en}\} = \langle 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \rangle^T \quad (27)$$

avec ce vecteur, les atténuations sont calculées en présence d'un ou de plusieurs modes.

Les figures 9, 10 et 11 présentent l'atténuation de la puissance acoustique du conduit étudié en fonction de  $ka$  respectivement en présence des modes plan, (1,0) et (2,0) pour les différentes vitesses d'écoulement étudiés.

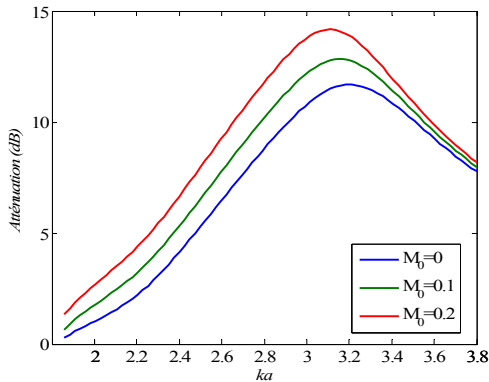


Figure 10 : Atténuation de la puissance acoustique du conduit étudié en présence du mode (1,0) en fonction de  $ka$  et des vitesses d'écoulement

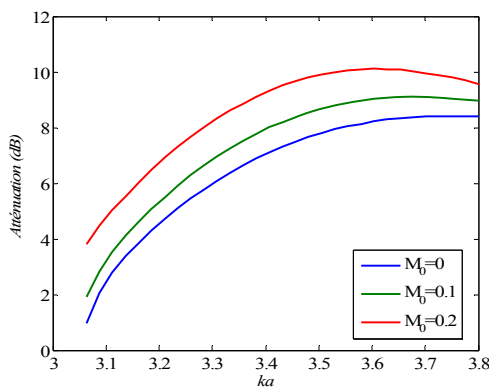


Figure 11 : Atténuation de la puissance acoustique du conduit étudié en présence du mode (1,0) en fonction de  $ka$  et des vitesses d'écoulement

Les figures 9, 10, 11 et montrent que les atténuations dépendent du mode incident et un maximum d'atténuation est observé. L'amplitude et la fréquence de ce maximum dépendent de la vitesse d'écoulement : La figure 9 montre que le maximum d'atténuation est de l'ordre de 15 dB sans écoulement en  $ka=2.9$ , de 18 dB pour  $M_0 = 0.1$  en  $ka = 3$  et 20 dB pour  $M_0 = 0.2$  en  $ka=3.1$ . La même remarque est constatée en présence du mode (1,0) : sans écoulement, le maximum d'atténuation est de 12 dB en  $ka=3.2$ , de 13 dB en  $ka = 3.05$  pour  $M_0=0.1$  et de 15 dB en  $ka=3.2$  pour  $M_0=0.2$ . De même pour les atténuations calculées en présence du mode (2,0). Ces figures permettent de conclure que l'augmentation de la vitesse de l'écoulement engendre l'augmentation de l'atténuation de la puissance acoustique

du conduit étudié et la diminution de la fréquence de ce maximum.

## 7 Conclusion

Dans cette étude, une méthode de caractérisation d'un conduit traité en présence d'écoulement a été développée. Cette méthode est basée sur le calcul numérique de la matrice de diffusion ainsi que l'atténuation de la puissance acoustique. En variant le vitesse d'écoulement, l'effet de ce paramètre a été évalué : il est montré que l'augmentation de la vitesse d'écoulement diminue les coefficients de réflexion alors que l'effet sur les coefficients de transmission est négligeable. Pour l'atténuation, l'augmentation de la vitesse d'écoulement engendre l'augmentation de la valeur de l'atténuation acoustique et fait diminuer la fréquence de maximum d'atténuation.

## Références

- [1] Elnady T., Bodèn H., Mode scattering by hard strips in lined ducts, *10<sup>th</sup> ICSV*, Stockholm, Sweden, (2003).
- [2] Watson W.R., Nark D.M., Nguyen D.T., Tungkahotara S., On the development of an efficient parallel hybrid solver with application to acoustically treated aero-engine nacelles, *INTER-NOISE 2006*, Honolulu, USA, (2006)
- [3] Bi W.P., Pagneux V., Lafarge D., Aurégon Y., Modelling of sound propagation in non uniform lined duct using multi-modal propagation method. *J. S. Vib.* 289, 1091-1111 (2006).
- [4] Sittel A., Ville J.M., Foucart F., Multimodal procedure to measure the acoustic scattering matrix of a duct discontinuity for higher mode propagation conditions, *J. Acoust. Soc. Am.* 120(5), 2478 – 2490 (2006).
- [5] Taktak M., Mesure de la matrice de diffusion d'un tronçon traité cylindrique: applications à la mesure de son efficacité et à la détermination de son impédance homogénéisée, *Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne* (2008).
- [6] Taktak M., Mejdoub M., Bentahar M., Karra C., Haddar M., Modélisation numérique de la propagation acoustique dans les conduits axisymétriques en présence d'écoulement, *IMPACT 2010*, Djerba, Tunisie, (2010).
- [7] Ville J.M., Foucart F., Experimental set up for measurement of acoustic power dissipation in lined ducts for higher order modes propagation with air mean flow conditions, *J. Acoust. Soc. Am.* 114(4), 1742 – 1748 (2003).
- [8] Taktak M., Ville J.M., Haddar M., Foucart F., Etude de l'influence du champ des pressions incidentes sur la dissipation et l'atténuation de la puissance acoustique d'un conduit cylindrique traité, *CFM 2009*, Marseille, France, (2009).
- [9] Elnady T., Bodèn H., On semi-empirical liner impedance modeling with grazing flow, *9<sup>th</sup> AIAA/CEAS*, South Carolina, USA, (2003).