



**HAL**  
open science

## Identification des sources vibratoires en utilisant un opérateur Eléments Finis localement

Cédric Renzi, Charles Pezerat, Jean-Louis Guyader

► **To cite this version:**

Cédric Renzi, Charles Pezerat, Jean-Louis Guyader. Identification des sources vibratoires en utilisant un opérateur Eléments Finis localement. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00537198

**HAL Id: hal-00537198**

**<https://hal.science/hal-00537198>**

Submitted on 17 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Identification des sources vibratoires en utilisant un opérateur Eléments Finis localement

Cédric Renzi<sup>1</sup>, Charles Pézerat<sup>2</sup>, Jean-Louis Guyader<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LVA INSA-LYON, 25bis avenue Jean Capelle bat. St Exupéry, F-69621 Villeurbanne Cedex, cedric.renzi@insa-lyon.fr

<sup>2</sup>LAUM, Université du Maine, CNRS, avenue Olivier Messiaen, F-72085 LE MANS Cedex 09, charles.pezerat@univ-lemans.fr

L'identification des sources excitatrices de structures vibrantes est une thématique importante de la vibroacoustique. Dans le cas où la mesure directe n'est pas possible, on estime les causes (forces) à travers l'observation des effets (mesures de niveaux vibratoires). Il faut alors résoudre un problème inverse qui présente une très forte sensibilité aux incertitudes de mesure. Parmi les méthodes inverses, la méthode RIFF (Résolution Inverse Fenêtrée Filtrée) consiste à calculer une distribution de forces excitatrices à partir de mesures des déplacements vibratoires que l'on injecte localement dans l'équation du mouvement de la structure. Son extension est proposée en utilisant un opérateur éléments finis plutôt qu'une équation du mouvement analytique. Le développement est réalisé sur des plaques ce qui permet une comparaison directe avec les résultats obtenus à partir de la méthode RIFF classique. Dans un premier temps, l'étude a visé à éliminer des degrés de liberté non mesurables ou difficilement mesurables comme les rotations. Ensuite, une régularisation a permis de rendre l'approche stable devant les erreurs de mesure. Enfin, des techniques de condensation de modèles permettent de réduire le nombre de mesures nécessaires ainsi que l'identification d'efforts en des lieux non accessibles à la mesure de vibrations.

### 1 Introduction

Dans la thématique de l'identification de sources acoustiques par voie solide, la méthode RIFF (Résolution Inverse Fenêtrée Filtrée) permet de remonter aux excitations vibratoires à partir de données de champ vibratoire. C'est une approche appréciée par son aspect local, sa régularisation efficace à base de filtrage passe-bas en nombres d'ondes et l'absence d'hypothèses restrictives sur la distribution d'efforts à identifier [1]. Par ailleurs, couplée à l'holographie acoustique, elle fournit un outil complémentaire assurant le passage à l'identification de sources vibratoires à partir du champ vibratoire reconstitué depuis des mesures acoustiques [2]. Cependant, elle n'est développée que pour des structures simples car elle s'appuie sur l'équation du mouvement analytique [3]. Dans l'optique de son extension aux structures complexes, il est naturel de se pencher sur l'utilisation d'un modèle éléments finis pour décrire le comportement de la structure étudiée.

Au sein des techniques de problème inverse s'appuyant sur un modèle éléments finis, Busby a développé une approche avec régularisation de Tikhonov et condensation statique des rotations, sur poutre, mais dans le domaine temporel avec prélocalisation de l'effort [4]. Ibrahim et Sestieri ont pour leur part utilisé un modèle éléments finis condensé dynamiquement aux points d'application a priori d'efforts sur un treillis de poutres [5]. Corus et Balmes ont utilisé une approche éléments finis dans un but de recalage de modèle avec prélocalisation des efforts et une projection sur la base modale de la structure complète [6]. L'approche proposée dans le présent papier s'applique à localiser l'effort à partir d'un modèle éléments finis avec un minimum d'hypothèses. Déjà développée sur des poutres en flexion pour le cas unidimensionnel sans condensation [7], elle est étendue ici aux structures 2D planes de type plaques minces en flexion. La difficulté majeure étant l'augmentation du

nombre de Degrés De Libertés, on s'intéressera particulièrement à réduire le nombre de mesures à réaliser pour les estimer.

Dans un premier temps, la démarche générale à base d'un modèle libre-libre est présentée. Le traitement des rotations est abordé par une estimation à l'aide des fonctions de forme élémentaires ainsi que par une condensation dynamique permettant de réduire le nombre de mesures. Une régularisation de Tikhonov est proposée ce qui permet de s'assurer de la robustesse vis-à-vis du bruit de mesures. Enfin, une méthode s'appuyant sur la condensation de Craig-Bampton est développée dans le but de réduire au maximum le nombre de mesures à réaliser et d'identifier soit aux points de mesures, soit dans des zones inaccessibles à la mesure.

Malgré le couplage aux techniques holographiques envisagé au début de cette introduction, cet article s'intéresse uniquement à la partie vibratoire.

### 2 Description de la méthode

#### 2.1 Calcul des efforts externes par un opérateur éléments finis

Soit une structure excitée par un certain nombre d'efforts extérieurs, en régime harmonique à la pulsation  $\omega$ .

Un modèle éléments-finis peut être utilisé afin de décrire le comportement d'une partie de cette structure dénommée sous-structure qui peut être, si nécessaire, étendue au domaine total. La modélisation nécessite une partition en un nombre fini  $N_e$  d'éléments s'appuyant sur un maillage de  $N$  nœuds préalablement défini. Le maillage sera appelé maillage de calculs : c'est sur celui-ci que seront identifiés les efforts.

Cette approche est directement utilisable dans le cas où l'ensemble des nœuds est accessible à la mesure.

Soient  $[M]$  et  $[K]$  les matrices de masse et de raideur de la sous-structure. Elles sont obtenues à partir des règles classiques d'assemblage des matrices élémentaires, résultant de la discrétisation d'un principe variationnel appliqué aux énergies cinétiques et potentielles totales de la structure [8].

La suite de cette étude se restreint au cadre des plaques minces en flexion. L'utilisation d'éléments de coques 3D restreints au mouvement de flexion transverse dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$  (théorie de Kirchhoff) conduit à un nombre de degrés de libertés (DDLs ou DOFs) égal à  $N_{DOFs} = 3N$ . Ainsi, en définissant la normale selon la direction  $+\vec{z}$  en chaque nœud d'indice  $i$ , les DDLs sont restreints à :

- la translation transverse  $w_i$  selon  $+\vec{z}$  (associée à un effort  $F_i$ ),
- la rotation  $\theta_i^x$  autour de l'axe  $+\vec{x}$  (associée à un moment  $\mathfrak{M}_i^x$ ),
- la rotation  $\theta_i^y$  autour de l'axe  $+\vec{y}$  (associée à un moment  $\mathfrak{M}_i^y$ ).

Sans prendre en compte d'éventuelles conditions aux limites, le modèle éléments finis s'écrit de manière matricielle à la pulsation  $\omega$  :

$$(-\omega^2 [M] + [K])\{V\} = [L]\{V\} = \{A\}, \quad (1)$$

Avec  $[L]$  l'opérateur éléments finis correspondant à la sous-structure,  $\{V\}$  le vecteur des  $N$  translations et  $2N$  rotations et  $\{A\}$  le vecteur des actions extérieures correspondant aux  $N$  forces et  $2N$  moments pour l'ensemble des nœuds.

Connaissant les quantités contenues dans  $\{V\}$ , il est possible par l'application directe de (1) d'accéder aux quantités contenues dans  $\{A\}$ . Ceci constitue un problème inverse avec une approche locale tout à fait analogue à la méthode RIFF.

En effet, l'équation (1) conserve l'approche locale puisque les matrices  $[M]$  et  $[K]$  sont bandes par construction et renumérotation adéquate des DDLs [5].

Ainsi, en prenant le cas le plus général d'un nœud situé à l'intérieur de la sous-structure maillée par des éléments quadrangulaires, l'identification de 3 efforts  $[F_i, \mathfrak{M}_i^x, \mathfrak{M}_i^y]^t$  au nœud  $i$  ne nécessite que les quantités  $[w_j, \theta_j^x, \theta_j^y]^t$  des nœuds  $j$  appartenant aux 4 éléments partageant le nœud  $i$ . Dans le cas présent, l'identification en un point de 3 efforts (1 force et 2 moments) à l'aide de l'équation (1) nécessite donc la mesure de 27 DDLs (9 translations et 18 rotations).

## 2.2 Substitution des rotations

Pour avoir un intérêt pratique, les données de  $\{V\}$  doivent pouvoir être accessibles par la mesure. Or, l'obtention des rotations n'est pas aisée. Une deuxième étape consiste à définir un maillage de mesures associé à une méthode permettant d'estimer ces données [10]. Deux approches sont alors possibles.

a) Estimation des rotations par condensation [4, 8, 9], une condensation dynamique des rotations sous l'hypothèse de moments nuls aux nœuds dans l'opérateur complet [11] :

La sensibilité du problème inverse au bruit va conduire à régulariser la méthode (cf. dernier paragraphe). Cependant, cette constatation possède une conséquence immédiate pour l'estimation des rotations : les données relatives aux moments seront supprimées par effet de lissage ou de filtrage passe-bas des résultats (suppression des petites longueurs d'ondes). L'estimation des rotations par condensation dynamique s'appuie sur cette observation : puisque les moments ne seront pas reconstruits en tant que tel mais apparaîtront comme un ensemble de forces équivalentes après la régularisation utilisée dans cette étude, l'hypothèse a priori de leur nullité peut-être faite dans la formulation initiale en forces/moments (1) ce qui permet de réduire le modèle aux seuls DDLs de déplacements et de forces. En notant  $D$  l'ensemble des DDLs de déplacements transverses et  $\Theta$  l'ensemble des DDLs de rotations, le système (1) peut être écrit ainsi :

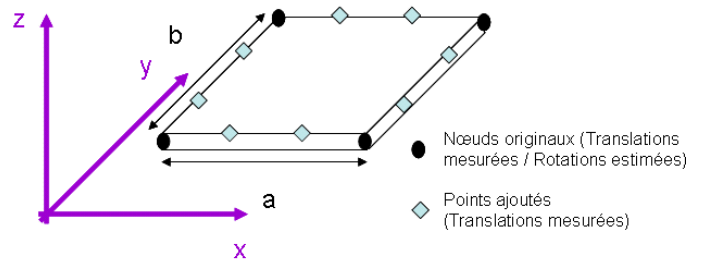
$$\begin{aligned} \{F\} &= ([L_{DD}] - [L_{D\Theta}][L_{\Theta\Theta}]^{-1}[L_{\Theta D}])\{V_D\}, \\ \{F\} &= [L_r]\{V_D\}, \end{aligned} \quad (2)$$

où  $[L_r]$  est l'opérateur réduit où  $\{V_D\}$  est le vecteur des DDLs réduit aux déplacements et  $\{F\}$  est le vecteur des actions extérieures réduit aux efforts. Ceci revient à exprimer les rotations en fonction des déplacements.

L'avantage principal de ce procédé est de réduire le nombre de DDLs à mesurer. Ainsi, pour identifier  $N$  forces, la mesure de  $N$  déplacements est suffisante. Cependant, la méthode nécessite, pour chaque fréquence de calcul, l'inversion d'une matrice qui peut avoir une taille importante si le nombre de nœuds est élevé.

b) Estimation des rotations à l'aide d'une matrice d'observation et des fonctions de forme élémentaires [9, 10] :

Dans le cas où cette condensation est impossible, l'autre méthode de substitution est l'analogue de celle utilisée dans une étude précédente sur les poutres [7], mais appliquée aux éléments de plaques en utilisant des fonctions de forme élémentaires bicubiques [9]. Le maillage de mesures s'appuie sur le maillage de calcul : les éléments de mesures sont définis en ajoutant 2 points de mesures sur chaque arête comme sur la Figure 1.



**Figure 1 - Schéma de l'élément de mesures type basé sur l'ajout de points de mesures de translation à partir d'un élément de plaque mince en flexion.**

La méthode permet d'assembler au niveau du maillage complet une matrice  $[P]$ , inverse de la matrice d'observation [10], telle que :

$$\{V\} = [P]\{V'\}, \quad (3)$$

où  $\{V\}$  est le vecteur des DDLs de calcul contenant translations ainsi que rotations et  $\{V'\}$  est le vecteur des translations mesurées.

Ainsi, avec (3), il devient possible d'estimer les rotations comprises dans  $\{V\}$  à l'aide de simples mesures de translations introduites dans  $\{V'\}$  et du modèle éléments finis. En notant  $[LP]$  le nouvel opérateur éléments finis, l'équation (1) devient :

$$\{A\} = [LP]\{V'\} = [L][P]\{V'\}. \quad (4)$$

Cette dernière méthode présente l'avantage de ne pas introduire de niveau d'approximation supplémentaire et de ne pas nécessiter d'inversion de matrices de taille importante. Cependant le nombre de points à mesurer reste élevé puisque chaque rotation est remplacée par un point de mesure de translation.

### 2.3 Réduction du nombre de DDLs par condensation Craig-Bampton

Comme dans la première partie, une partie de la structure complète est d'abord extraite. Mais la sous-structure est désormais considérée comme un super-élément dont une partition des DDLs est réalisée comme suit :

- les  $I$  DDLs d'interface (translations et rotations) sont regroupés dans l'ensemble  $\underline{I}$ ,
- les  $C$  DDLs intérieurs ou complémentaires (translations et rotations) sont regroupés dans l'ensemble  $\underline{C}$ .

La condensation de type Craig-Bampton consiste à trouver une base de représentation des DDLs de  $\underline{I} \cup \underline{C}$  [8] :

- la première partie de cette base est formée des DDLs de  $\underline{I}$ . Elle utilise donc les modes contraints pour relier les DDLs de  $\underline{C}$  à ceux de  $\underline{I}$  et est analogue à la condensation statique (de Guyan) par construction [8],
- cette base peut être complétée par les DDLs modaux correspondants aux  $C$  modes internes du super-élément à interface encadrée (vecteurs propres notés  $\phi_i^{se}$ ). Ils sont regroupés dans un ensemble noté  $\underline{\Phi}$  [8].

La condensation est appliquée au super-élément et en écrivant  $[T^{se}]$  la matrice de projection dans cette nouvelle base, on peut exprimer les DDLs de  $\underline{I} \cup \underline{C}$  en fonction de  $\underline{I} \cup \underline{\Phi}$  comme suit [8] :

$$\left\{ \begin{array}{l} [T^{se}] = \begin{bmatrix} [Id_I] & 0 \\ -[K_{CC}^{se}]^{-1}[K_{CI}^{se}] & [\phi_C^{se}] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_I = V_I^{se} \\ V_C = V_C^{se} \end{bmatrix} = [T^{se}] \begin{bmatrix} V_I^{se} \\ V_{\Phi}^{se} \end{bmatrix}, \end{array} \right. \quad (5)$$

où la notation  $se$  signifie que les quantités sont relatives au super-élément et  $[Id]$  est la matrice identité.

Dans (5),  $\underline{\Phi}$  peut être tronqué à  $N_C < C$  vecteurs, on parle alors de réduction de modèle ce qui conduit à une approximation.

Pour la suite, la matrice de passage  $[T^{se}]$  peut être formellement divisée en différents blocs de manière à faire apparaître les différents groupes de DDLs :

$$[T^{se}] = \begin{bmatrix} [T_{II}^{se}] & [T_{I\Phi}^{se}] = 0 \\ [T_{CI}^{se}] & [T_{C\Phi}^{se}] \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Par ailleurs, à partir de l'opérateur éléments finis  $[L]$  obtenu en appliquant (1) à la structure complète libre-libre, il est possible d'exprimer les efforts extérieurs à l'interface et dans le super-élément comme suit :

$$\begin{bmatrix} [L_{II_0}] & [L_{II}] & [L_{IC}] \\ 0 & [L_{CI}] & [L_{CC}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{I_0} \\ V_I \\ V_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_I \\ F_C \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

avec  $\underline{I_0}$  l'ensemble des DDLs (translation et rotations) à la fois hors du super-élément et appartenant aux éléments possédant également des DDLs dans  $\underline{I}$ . L'ajout des DDLs de  $\underline{I_0}$  permet de ne pas faire apparaître les efforts de couplage avec le reste de la plaque à l'interface.

En injectant l'approximation (5) dans (7) et en se posant comme hypothèse l'absence d'efforts extérieurs en certains lieux, ce système se développe en deux approches :

- **Variante 1** : La mesure est réalisable aux points d'identification d'efforts correspondants aux DDLs de  $\underline{I}$  et il n'y a pas d'efforts sur les DDLs complémentaires de  $\underline{C}$  ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} L_{II_0} \{V_{I_0}\} + LT_{II} \{V_I\} + LT_{I\Phi} \{V_{\Phi}\} = \{F_I\} \\ 0 + LT_{CI} \{V_I\} + LT_{C\Phi} \{V_{\Phi}\} = \{F_C\} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\Rightarrow \{F_I\} = [L_{II_0} \quad LT_{II} - LT_{I\Phi}LT_{C\Phi}^{-1}LT_{CI}] \begin{Bmatrix} V_{I_0} \\ V_I \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} LT_{II} = L_{II}T_{II}^{se} + L_{IC}T_{CI}^{se} \\ LT_{CI} = L_{CI}T_{II}^{se} + L_{CC}T_{CI}^{se} \\ LT_{I\Phi} = L_{IC}T_{C\Phi}^{se} \\ LT_{C\Phi} = L_{CC}T_{C\Phi}^{se} \end{cases} \quad (9)$$

- **Variante 2** : Il n'est pas possible de mesurer aux points d'identification d'efforts cependant il est possible de mesurer en des lieux où il n'y a pas d'efforts extérieurs correspondants aux DDLs de  $\underline{I}$ . La recherche d'efforts sera alors menée sur les DDLs de  $\underline{C}$  comme suit :

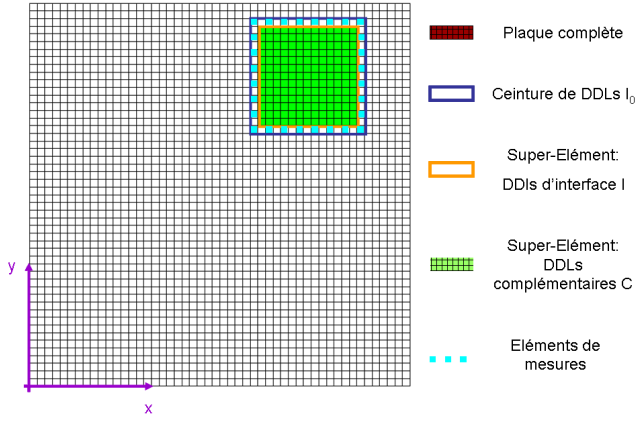
$$\begin{cases} L_{II_0} \{V_{I_0}\} + LT_{II} \{V_I\} + LT_{I\Phi} \{V_{\Phi}\} = \{F_I\} = 0 \\ 0 + LT_{CI} \{V_I\} + LT_{C\Phi} \{V_{\Phi}\} = \{F_C\} \end{cases} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \{F_C\} = \begin{bmatrix} -LT_{C\Phi}LT_{I\Phi}^{-1}LT_{II_0} & LT_{CI} - LT_{C\Phi}LT_{I\Phi}^{-1}LT_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{I_0} \\ V_I \end{Bmatrix}.$$

Dans les deux cas, les efforts à identifier sont exprimés en fonctions des DDLs de  $\underline{I_0} \cup \underline{I}$ . Ces derniers comportant des rotations, afin de ne pas trop pénaliser la qualité des données d'entrées et de ne pas alourdir les calculs, celles-ci seront estimées avec la méthode de la matrice d'observation présentée précédemment :

$$\begin{Bmatrix} V_{I_0} \\ V_I \end{Bmatrix} = [P]\{V'\}. \quad (11)$$

Au final, un maillage conforme à la Figure 2 est utilisé.



**Figure 2 - Schéma du maillage utilisé pour la méthode avec condensation Craig-Bampton.**

Enfin, les expressions (8) et (10) contiennent des inversions de matrices : lorsque celles-ci sont mal conditionnées et/ou rectangulaires, la pseudo-inverse est utilisée. Le choix du nombre de modes dans  $\underline{\Phi}$  sera fait de manière à optimiser le conditionnement de ces matrices.

En injectant l'équation (11) dans (8) et (10), les deux formulations finales des deux variantes sont :

Mesures à l'interface et sur la ceinture – Identification Efforts à l'interface – Efforts intérieurs supposés nuls
$\{F_I\} = [L_{II_0} \quad LT_{II} - LT_{I\Phi}LT_{C\Phi}^{-1}LT_{CI}] [P]\{V'\}, \quad (12)$ $\Rightarrow \{F_I\} = [LT_I P]\{V'\}.$
Mesures à l'interface et sur la ceinture – Identification Efforts intérieurs – Efforts à l'interface supposés nuls
$\{F_C\} =$ $[-LT_{C\Phi}LT_{I\Phi}^{-1}LT_{II_0} \quad LT_{CI} - LT_{C\Phi}LT_{I\Phi}^{-1}LT_{II}] [P]\{V'\},$ $\Rightarrow \{F_C\} = [LT_C P]\{V'\}.$ <p style="text-align: center;">(13)</p>

## 2.4 Régularisation

Comme déjà énoncé précédemment, la technique est instable devant le bruit présent dans les mesures de déplacements. Il est donc nécessaire de développer une méthode de régularisation pour assurer sa robustesse.

Comme dans le cas des poutres, une méthode de Tikhonov est proposée [4, 7, 12]. Sans être développée plus en avant, elle consiste à minimiser la quantité  $\|[L_r]^{-1}\{F_{Tikh}\} - \{V_D\}\| + \beta^2 \|\{F_{Tikh}\}\|$  en définissant le paramètre  $\beta$  pour obtenir la solution régularisée  $\{F_{Tikh}\}$  à partir des mesures  $\{V_D\}$  et de l'opérateur réduit  $[L_r]^{-1}$ .

La méthode nécessite deux inversions :

- une première inversion de l'opérateur qui peut être effectuée par une simple inversion dans le cas où la matrice est carrée et bien conditionnée ou par une pseudo-inverse à l'aide d'une SVD sans troncature dans le cas général,
- une seconde inversion, de  $[L_r]^{-1}$ , avec régularisation cette fois.

La détermination du paramètre  $\beta$  repose dans cette étude sur le principe de la courbe en L consistant à tracer la norme de la solution  $\|\{F_{Tikh}\}\|$  en fonction du résidu  $\|[L_r]^{-1}\{F_{Tikh}\} - \{V_D\}\|$  pour différentes valeurs de  $\beta$ ,

avec  $\|\cdot\|$  la norme 2 vectorielle [4, 7, 12, 13]. On choisit alors la meilleure valeur de  $\beta$  correspondant au point d'inflexion de cette courbe en L.

## 3 Validation numérique

### 3.1 Descriptif de l'expérience numérique

Afin de valider les méthodes décrites à la section précédente, une étude de cas a été réalisée sur une plaque carrée, en acier et de dimensions  $(a = 1m) \times (b = 1m)$ . Ses autres caractéristiques sont données dans la Table 1.

$E$ (GPa)	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	$\eta$ (%)	$h$ (mm)
210	7800	0.1%	1

**Table 1 : Caractéristiques du matériau de la plaque simulée.  $E$  est le module d'Young,  $\rho$  la densité,  $\eta$  le facteur de pertes et  $h$  l'épaisseur de la plaque.**

L'excitation est modélisée par un effort ponctuel unitaire harmonique aux coordonnées  $x = 0.72m$  et  $y = 0.86m$  et de fréquence 190 Hz (le premier mode de la plaque se situe à environ 2.5 Hz). Les conditions aux limites sont choisies comme suit :

- Appuyée-Appuyée à ses extrémités  $x = 0$  et  $x = a$ ,
- Libre-Libre à ses extrémités  $y = 0$  et  $y = b$ .

La validation de la méthode d'identification d'efforts nécessite de simuler un champ de déplacements  $\forall (x, y) \in [0; a] \times [0; b], w(x, y)$ . Pour cela, on utilise un modèle analytique de décomposition semi-modale en s'appuyant sur une méthode d'ondes forcées dans la direction  $\vec{y}$  et sur la décomposition modale du schéma appuyé-appuyé dans la direction  $\vec{x}$  [14, 15].

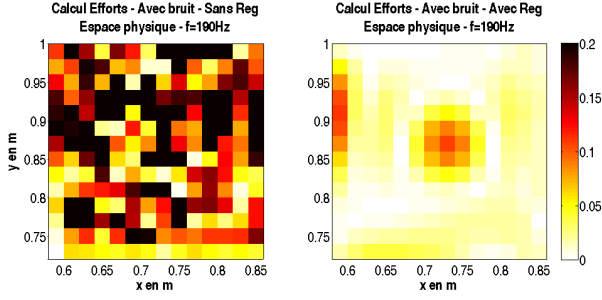
Ces données sont directement utilisées avec la méthode incluant une condensation de Craig-Bampton non régularisée.

Cependant, pour montrer l'efficacité de la régularisation couplée à la méthode générale sans condensation Craig-Bampton, ces valeurs sont bruitées à l'aide de deux variables aléatoires Gaussiennes  $\Delta w$  et  $\Delta \phi$  permettant d'introduire un bruit multiplicatif en amplitude et additif en phase [1]. Les moyennes de chacune des deux variables aléatoires sont choisies égales à  $m_{\Delta w} = 1$  et  $m_{\Delta \phi} = 0$ , leurs écarts-types sont définis en fonction d'un pourcentage  $p = 1\%$  de sorte que le bruitage représente 1% du module de la valeur complexe à bruite.

### 3.2 Résultats sans condensation Craig-Bampton

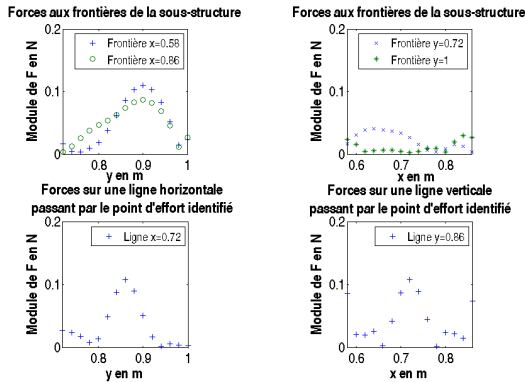
Les résultats sont présentés avec une sous-structure rectangulaire s'étendant du point  $[0.58; 0.72]$  au point  $[0.86; 1]$ . Le maillage est régulier avec une taille d'éléments constante de  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_e = 0.02$ .

Dans un premier temps, l'efficacité de la régularisation de Tikhonov, et sa nécessité, sont montrées sur la Figure 3.



**Figure 3 - Forces reconstruites sans condensation Craig-Bampton à partir de déplacements simulés bruités. Résultats régularisés par Tikhonov (colonne de droite) comparés aux résultats non régularisés (colonne de gauche).**

Après régularisation, l'effort extérieur est clairement identifiable. Il est clair aussi que la répartition d'effort est lissée après régularisation. Les forces identifiant le couplage avec le reste de la plaque apparaissent en bordure du domaine de la sous-structure libre-libre de même que les forces aux limites de la plaque. Plus en détail, les résultats aux 4 frontières ainsi que l'évolution de la force extérieure identifiée à l'intérieur du domaine sont présentés sur les coupes correspondantes dans la Figure 4. Enfin l'effort reconstitué quasiment nul correspond bien au bord libre en  $y = 1$ , comme attendu.



**Figure 4 Forces reconstruites sans condensation Craig-Bampton à partir de données de déplacements simulés bruités.**

### 3.3 Résultats avec condensation Craig-Bampton

#### a) Identification des efforts extérieurs à la plaque, à la frontière du super-élément :

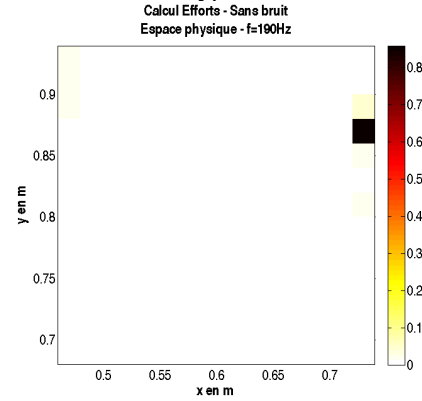
Il s'agit d'identifier les efforts aux points de mesures à l'interface. On utilise un super-élément s'étendant du point  $[0.46;0.68]$  au point  $[0.72;0.94]$  de manière à ce que l'effort coïncide avec un nœud d'interface. Le maillage est régulier avec  $\Delta_e = 0.02$ .

Les nombres de DDLs utilisés sont indiqués dans la Table 2.

Nombres de DDLs par sous ensemble			
$I_0$	$I$	$C$	$\Phi$
180	156	432	216

**Table 2 : Nombre de DDLs utilisés pour l'identification des efforts extérieurs à la plaque à l'interface du super-élément.**

Les résultats de l'effort reconstitué sans bruit sont donnés Figure 5. L'effort situé à l'interface est clairement identifié avec un faible effet de troncature modal, les efforts nuls intérieurs résultent de l'hypothèse de calcul.



**Figure 5 - Forces reconstruites à l'interface du super-élément avec condensation Craig-Bampton à partir de données de déplacements simulés non bruités.**

#### b) Identification des efforts extérieurs à la plaque, au sein du super-élément :

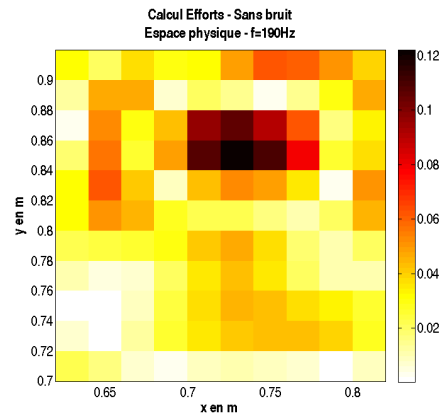
Il s'agit, à partir des mesures à l'interface, de reconstituer les efforts à l'intérieur du super-élément. Celui-ci est choisi comme s'étendant du point  $[0.60;0.68]$  au point  $[0.86;0.94]$ .

Les nombres de DDLs sont résumés dans la Table 3.

Nombres de DDLs par sous ensemble			
$I_0$	$I$	$C$	$\Phi$
180	156	432	19

**Table 3 : Nombre de DDLs utilisés pour l'identification des efforts extérieurs à la plaque au sein du super-élément.**

Les résultats spatiaux de l'effort reconstitué sans bruit sont donnés en Figure 6. L'effort est identifié et l'effet de la troncature de la base modale du super-élément est également visible.



**Figure 6 - Forces reconstruites à l'intérieur du super-élément avec condensation Craig-Bampton à partir de données de déplacements simulés non bruités.**

## 4 Conclusion

L'objectif de la méthode développée dans cet article est de remonter aux sources vibratoires à partir de données de déplacements obtenues sur une structure. C'est l'idée même de la méthode RIFF mais on cherche ici à l'adapter aux

structures complexes par l'utilisation d'un modèle éléments finis.

La démarche présentée est basée en synthèse sur :

- l'utilisation d'un opérateur éléments finis standard,
- la substitution des DDLs de rotations par des DDLs de translations (par condensation dynamique ou estimation à l'aide des fonctions de forme élémentaires),
- la possibilité d'une condensation Craig-Bampton dans un double objectif de limiter le nombre de DDLs à identifier expérimentalement et/ou de pouvoir accéder à des points non accessibles,
- une régularisation développée pour la méthode sans condensation Craig-Bampton.

Parmi les perspectives actuelles, la première sera la validation expérimentale de la méthode. Sur poutre, celle-ci a été réalisée et présentée sans condensation Craig-Bampton [7]. Il reste donc à valider sur structures 2D planes et courbes dans un premier temps puis sur géométrie complexe dans un contexte industriel dans un deuxième temps. Ceci nécessitera d'étendre la régularisation aux cas où la condensation Craig-Bampton est employée. L'effet de troncature modale de cette condensation, qui peut amener un effet régularisant par projection sur la base modale tronquée, sera tout particulièrement étudié.

Enfin, le couplage à l'holographie pourra être envisagé. Tout comme dans l'article [2], cette association peut en effet être un outil particulièrement intéressant pour une analyse plus approfondie des champs vibratoires identifiés par rétropropagation acoustique tels que ceux obtenus en holographie acoustique, par BEM inverse, etc.

## Remerciements

Cette étude est financée par le Fond Unique Interministériel MACOVAM (MAîtrise du Comportement Vibratoire des Auxiliaires Moteur) dans le cadre du pôle de compétitivité LUTB.

## Références

- [1] Pézerat, C., Méthode d'identification des efforts appliqués sur une structure vibrante, par résolution et régularisation du problème inverse, thèse INSA de Lyon, n° d'ordre 96 ISAL 0109, 1996, 138 p.
- [2] Pézerat C., Leclère Q., Totaro N., Pachebat M., Identification of vibration excitations from acoustic measurements using near field acoustic holography and the force analysis technique, JSV 2009, 326, pp. 540-556
- [3] Pézerat, C. & Guyader, J.-L., Force Analysis Technique: Reconstruction of Force Distribution on Plates, Acta Acustica 2000, Vol. 86, pp. 322-332
- [4] Busby, H.-R. & Trujillo, D.-M., Optimal regularization of an inverse dynamics problem, Computers & structures, 1997, Vol. 63(2), pp. 243-248
- [5] Ibrahim, S., Fregolent, A. & Sestieri, A., Structural force identification at unmeasured locations, IMAC 14 1996, Dearborn (Michigan)
- [6] Corus, M. & Balmès, E., A priori verification of local FE model based on force identification, ISMA 2004, Leuven, Belgium
- [7] Renzi, C. & Pézerat, C., Identification of dynamic excitations on a structure using displacement measurements injected in a finite element model, NOVEM 2009, Oxford, UK
- [8] Imbert, J.-F., Analyse des structures par éléments finis, CEPADUES ed., 1979, 480 p.
- [9] Zienkiewicz, O.-C. & Taylor, R.-L., The Finite Element Method, vol2, 2000 5<sup>th</sup> ed. Elsevier, 495 p.
- [10] Balmès, E., Sensors, degrees of freedom, and generalized modeshape expansion methods, IMAC 1999, S.E.M. - Society for Experimental Mechanics, Inc, Bethel, Connecticut, U.S.A.
- [11] Gallagher R., Introduction aux éléments finis, éd. Pluralis., 1976, 433 p.
- [12] Leclère, Q., Etude et développement de la mesure indirecte d'efforts. Application à l'identification de sources internes d'un moteur Diesel, thèse INSA de Lyon, n° d'ordre 83 ISAL 0085, 2003, 204 p.
- [13] Hansen, P. & O'Leary, D., The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems, SIAM Journal of Scientific Computing 1993, v.14, pp. 1487-1503
- [14] Guyader, J.-L., Vibrations des milieux continus, Lavoisier, 2002, 445 p.
- [15] Rébillard Eric, Vibro-acoustique des réseaux de plaques : modélisation, hypersensibilité et populations de structures, thèse INSA de Lyon, n° d'ordre 95 ISAL 0085, 1995, 184 p.