



HAL
open science

énergie vibratoire : bases pour le calcul des densités d'énergie et des intensités

Waldemar Maysenhölder

► **To cite this version:**

Waldemar Maysenhölder. énergie vibratoire : bases pour le calcul des densités d'énergie et des intensités. édition originale en langue allemande : Hirzel, pp.238, 2010. hal-00533591v1

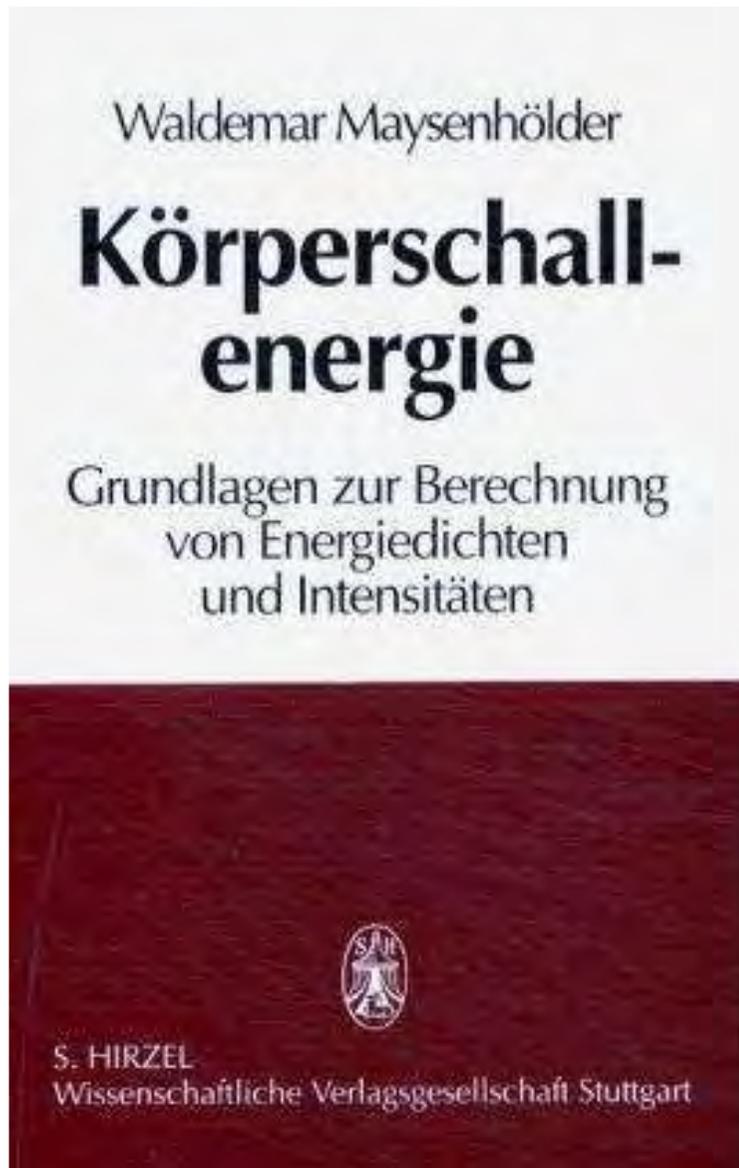
HAL Id: hal-00533591

<https://hal.science/hal-00533591v1>

Submitted on 8 Nov 2010 (v1), last revised 23 Sep 2011 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Energie vibratoire

Bases pour le calcul
des densités d'énergie
et des intensités

traduction française

Nicolas JOLY

auteur :

Dr. rer. nat. habil. Waldemar Maysenhölder
Fraunhofer-Institut für Bauphysik (IBP)
(Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. sc. techn. h.c. Dr.-Ing. E.h. Karl A. Gertis)

traducteur :

Nicolas Joly
(Dr, HDR)
Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (UMR CNRS 6613)
avenue Olivier Messiaen
F72085 Le Mans cedex 9, France
nicolas.joly@univ-lemans.fr

*merci de signaler toute erreur ou omission
pouvant figurer dans cette traduction*

Cette création est mise à disposition

<http://hal.archives-ouvertes.fr/>

selon le contrat

Dieses Werk ist unter einem Creative Commons

This work is licensed under the Creative Commons

Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported

Lizenzvertrag lizenziert.

License.

disponible en ligne

Um die Lizenz anzusehen, gehen Sie bitte zu

To view a copy of this license, visit

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

ou par courrier postal à

oder schicken Sie einen Brief an

or send a letter to

Creative Commons,
171 Second Street, Suite 300,
San Francisco, California 94105, USA.

référence de l'édition originale en langue allemande :

Maysenhölder, Waldemar :

Körperschallenergie : Grundlagen zur Berechnung von
Energiedichten und Intensitäten / Waldemar Maysenhölder.-
Stuttgart ; leipzig : Hirzel 1994

ISBN 3-7776-0607-3

Energie vibratoire

Bases pour le calcul des densités d'énergie
et des intensités

Waldemar Maysenhölder
traduction française : Nicolas Joly

Titre original :

Körperschallenergie

Grundlagen zur Berechnung
von Energiedichten
und Intensitäten

*l'édition originale comporte un index et un index des noms propres,
non repris dans cette traduction.*

*pour simplifier la typographie,
les vecteurs sont généralement notés en **gras** dans cette traduction*

Le travail théorique,
je m'en convaincs plus chaque jour,
accomplit plus dans le monde que la pratique ;
si le monde de l'imaginaire est mis en mouvement,
la réalité ne lui résistera pas.

Hegel an Niethammer
Bamberg, 28 octobre 1808

Préface

Après que deux conférences internationales (en 1990 et en 1993 à Senlis, France) aient été consacrées aux aspects énergétiques des champs vibratoires, il apparaît opportun de résumer dans une monographie les bases théoriques de cette partie de l'acoustique. Contrairement aux milieux fluides, pour lesquels la technique de mesure de l'intensité est mûre, la propagation et la dissipation de l'énergie vibratoire dans les solides posent des difficultés bien plus grandes. Cela vient du fait que les champs vibratoires ne peuvent être mesurés qu'en surface et qu'ils sont par nature plus compliqués en raison de la raideur en cisaillement (au lieu d'une simple valeur scalaire de pression, le tenseur des contraintes comporte alors six composantes indépendantes !). La description de l'intensité vibratoire nécessite plus d'informations, alors que les possibilités de mesure sont dans le même temps réduites. Toutefois, cette lacune peut souvent être comblée par des modèles et des calculs théoriques. Pour l'étude des transferts d'énergie, la théorie est non seulement essentielle pour la compréhension physique des problèmes vibratoires, mais constitue aussi un outil indispensable pour développer les méthodes de mesure de l'intensité. Ce qui peut être obtenu par une mesure simple dans les fluides exige, dans les solides, de combiner avec soin la mesure et le calcul.

Dans une approche énergétique, l'objectif est généralement de progresser dans la lutte contre le bruit généré par les vibrations en étudiant les transferts d'énergie. La présente monographie est une contribution en ce sens. Elle fait un pas, à partir de bases simples, en décrivant l'état actuel des connaissances, pour la recherche et le développement aussi bien que pour l'enseignement (même si des connaissances élémentaires en élastodynamique facilitent l'entrée en matière). On ne fait cependant pas le tour de la question ; cette présentation n'est pas exhaustive. De nombreuses questions, qui restent encore ouvertes, sont introduites dans les différents chapitres et devraient inciter à continuer et approfondir le travail initié ici.

Ce livre est issu du mémoire d'habilitation de l'auteur. Bien que celui-ci ait été présenté il y a seulement deux ans, de nombreux compléments seraient nécessaires pour prendre en compte les développements récents,

ou au moins les citer. Ceci a conduit à étendre la bibliographie aux références [Z.1-18] et à ajouter le paragraphe 5.3.

L'auteur remercie tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce livre : l'Ecole-Institut du Plâtre (M. N. K. Schunter), le comité directeur de Fraunhofer-Société (M. le Dr. D. - M. Polter), l'Institut Fraunhofer de Physique de la Construction (directeur : M. Prof. K.A. Gertis), Messieurs les professeurs F.P. Mechel, H. Ertel, M. Heckl, M. Möser, A.D. Pierce, M. Dr. H.M. Fischer, M. Dipl.- Phys. N. König, M. K. Baier, Mme A. - C. Seitz, Mme K. Heymann, et non des moindres l'éditeur original S. Hirzel-Verlag (l'indication d'erreurs d'impression ou d'autres lacunes sont les bienvenues).

Stuttgart, mars 1994

W. Maysenhölder

Table des matières

	<i>page</i>		<i>page</i>
1. Introduction.....	6	6. Milieux hétérogènes de structure non périodique.....	83
2. Formulations générales.....	9	6.1. Milieux stratifiés.....	84
2.1. Equations de base de l'élastodynamique [2.1-8].....	9	6.2. Matériaux désordonnés.....	87
2.2. Représentation complexe des champs vibratoires en régime harmonique.....	11	7. Applications.....	93
2.3. Intensité réactive de structure.....	16	8. Résumé.....	95
2.4. Principe de Rayleigh.....	22	Annexe A.....	98
2.5. Transfert énergétique et vitesse de groupe.....	24	Annexe B.....	100
2.6. Transfert de quantité de mouvement (impulsion).....	26	Annexe C.....	102
2.7. Superposition des champs vibratoires.....	28	Annexe D.....	105
3. Milieux homogènes isotropes.....	35	Annexe E.....	108
3.1. Milieux infinis.....	35	Bibliographie.....	109
3.2. Milieux délimités par une surface libre plane.....	36	Index des noms propres.....	118
3.3. Plaques.....	41		
3.3.1. Ondes de cisaillement.....	43		
3.3.2. Ondes de Lamb.....	45		
3.3.3. Intensité conventionnelle des ondes de flexion.....	52		
3.4. Poutres.....	53		
3.5. Coques.....	56		
4. Milieux homogènes anisotropes.....	58		
4.1. Milieux infinis.....	58		
4.2. Milieux finis.....	64		
5. Milieux hétérogènes de structure périodique.....	67		
5.1. Equations de base pour les milieux périodiques localement isotropes.....	67		
5.2. Approximation aux basses fréquences.....	71		
5.2.1. Solution générale pour des milieux linéaires.....	74		
5.2.2. Exemples unidimensionnels.....	75		
5.2.3. Exemple bidimensionnel.....	77		
5.3. Equations de base pour une anisotropie quelconque.....	81		

1. Introduction

En 1876, Kirchhoff déduisait des équations de l'acoustique linéaire des relations qui peuvent être comprises comme celles de la conservation d'une certaine grandeur -appelée "énergie acoustique"- [1.1, cité d'après 1.2, p.36] : au cours du temps et pour un élément de volume, l'évolution de l'énergie acoustique est identique au flux d'énergie acoustique au travers de la surface délimitant l'élément de volume, pour autant que l'intérieur de l'élément de volume ne comporte pas de sources -ni de puits- d'énergie acoustique. Traduite en langage mathématique, cette phrase porterait sur une grandeur scalaire, la "densité d'énergie acoustique", et une grandeur vectorielle, la "densité de flux acoustique" (ou "densité de courant"). Un peu plus tard (1884), Poynting et Heaviside établissaient une équation de conservation correspondante pour les champs électromagnétiques, à partir des équations de Maxwell [1.2 loc. cit. ; 1.3 p. 189].

La densité de flux d'énergie du champ électromagnétique est depuis longtemps appelée vecteur de Poynting. En conséquence, la densité de flux d'énergie acoustique, qui n'a pas jusqu'ici emprunté le nom d'un chercheur, devrait donc s'appeler vecteur de Kirchhoff. Au lieu de cela, on parle d'"intensité" ou d'"intensité instantanée" (en anglais : instantaneous intensity), le qualificatif d'"acoustique" étant omis par recherche de brièveté. Généralement, c'est moins le vecteur de Kirchhoff lui-même que sa moyenne temporelle qui présente un intérêt, que quelques auteurs appellent "intensité moyenne" (en anglais : mean intensity). Cette désignation présente l'inconvénient de ne pas préciser le type de moyenne (temporelle, spatiale, sur une bande fréquentielle ?) ; de plus, l'"intensité moyenne" est souvent réduite à "intensité" dans le déroulement d'un texte. Il faut préciser, pour l'étude de documents de la littérature, quelle grandeur est effectivement visée par l'usage du mot "intensité". Dans ce livre, l'"intensité" désigne la moyenne temporelle de la densité de flux (acoustique), ou pour faire plus court la moyenne temporelle du vecteur de Kirchhoff. Cette définition est d'une part en accord avec la notion utilisée usuellement pour les mesures de l'intensité, et d'autre part elle semble aussi de plus en plus s'imposer dans les travaux théoriques dans le domaine des vibrations. Pour exclure à l'avenir toute confusion, pour la grandeur dépendant du temps, le mot d'intensité ne devrait plus être

utilisé. Si on adopte la proposition ci-dessus, il reste le pour cela le terme précis et concis de 'vecteur de Kirchhoff'.

La conservation de l'énergie acoustique n'est pas une conséquence directe de la loi générale de conservation de l'énergie, découverte par Mayer (1842) et Helmholtz (1847), mais vient des équations linéarisées de l'acoustique. La densité d'énergie mécanique totale d'un processus acoustique est, en général, différente de la densité d'énergie acoustique ; la même chose s'applique aux moyennes temporelles de ces grandeurs. La différence vient de ce que, pour un "vrai" bilan énergétique, l'énergie mécanique est transformée en d'autres formes d'énergie, en particulier en chaleur. Dans ce cas, une analyse thermodynamique détaillée est nécessaire. Pierce traite dans son manuel [1.2 p.38] de ces questions et cite une série de références. Dans le cadre présent, consacré aux vibrations de milieux non dissipatifs, on peut se dispenser d'un bilan énergétique aussi général. Ici, comme en acoustique sur un volume fluide, l'aspect le plus important concernant l'énergie acoustique est qu'elle est une grandeur conservative. L'aspect thermodynamique est en arrière plan, et mentionné ici seulement pour attirer l'attention sur ces relations plus générales et éviter des représentations d'une simplicité excessive.

La première tentative pour mesurer le transport d'énergie acoustique dans les champs acoustiques a été entreprise par Olson en 1931 [1.4 p. 5]. Un temps considérable a passé avant que la technique de mesure dans de l'air n'ait mûri et puisse enfin rencontrer un grand succès. La percée a réussi dans les années soixante-dix en combinant l'usage de microphones capacitifs de grande précision et le traitement de signal numérique (Analyseurs FFT). Presque 60 ans après celle d'Olson est parue la monographie de Fahy, "Sound Intensity " [1.4], un travail qui a servi de fondement aux développements ultérieurs de la technique de mesure dans de l'air.

Le chapitre sur l'histoire de la technique de mesure d'intensité vibratoire commence seulement en 1970 avec un article de Noiseux [1.5]. D'autres premiers événements sont les travaux des Pavić [1.6], Verheij [1.7] et Rasmussen [1.8]. Tous les auteurs cités s'intéressent aux mesures d'intensité vibratoire dans les plaques, poutres ou tubes homogènes. Au moins deux accéléromètres, placés suivant une certaine disposition sur la surface du corps, servent de sondes. A partir des signaux mesurés, dans

certaines conditions, les intensités des ondes de flexion, de torsion ou longitudinales peuvent être déterminées. L'objectif est d'accéder à l'intensité intégrée sur l'épaisseur de la plaque ou sur une section de poutre. Contrairement à la mesure en acoustique aérienne, la mesure vibratoire est limitée à la surface du solide.

Le champ vibratoire à l'intérieur du corps doit être obtenu à partir des mesures réalisées en surface. Cela se fait soit au moyen d'hypothèses plus ou moins réalistes, soit par le calcul. Bobrovnikii [Z.2] a écrit récemment un papier à ce sujet, consacré au problème mathématique important de l'existence et de la stabilité de ces solutions, ainsi qu'une série de méthodes de résolution.

Plus les longueurs d'onde sont petites par rapport aux dimensions du milieu étudié, plus il est difficile de reconstruire le champ vibratoire interne à partir de mesures en surface. Les méthodes de mesure citées ne sont donc pas adaptées aux fréquences élevées. Seule la mesure proposée par Pavić [1.9] pour l'intensité de surface reste par conséquent fiable. Cinq grandeurs doivent être mesurées : les trois composantes du tenseur des déformations mesurables en surface, ainsi que les deux composantes de vitesse parallèles à la surface. Si l'on mesure en plus la composante normale de la vitesse en surface, la densité d'énergie cinétique peut également être déterminée, en plus de la densité d'énergie potentielle. Alors que seules, pour une mesure acoustique, la pression et la vitesse acoustiques doivent être mesurées, cinq ou six grandeurs doivent être ici mesurées en surface pour accéder à l'intensité et aux densités d'énergie. Le fait que, jusqu'ici, peu de mesures vibratoires aient été faites tient probablement surtout au coût de telles expérimentations.

L'intérêt pour la mesure et le calcul des intensités vibratoires a fortement augmenté au cours des dernières années. Cela se laisse mesurer au nombre des contributions dans ce domaine lors des conférences sur les techniques intensimétriques à Senlis (France) [1.10-12 ; Z. 1] : ce nombre était réduit pour les deux premières conférences ; les troisième (1990) et quatrième (1993) conférences étaient en revanche entièrement consacrées à ce thème. Vingt ans après la première mesure par Noiseux [1.5], on travaille dans de nombreux groupes au développement de la technique de mesure des vibrations ; de premiers appareillages pour mesurer sans contact par laser sont construits et validés, sans cependant atteindre la

précision obtenue depuis en acoustique. Les raisons sont multiples : la restriction de la mesure à la seule surface et le coût expérimental ont déjà été cités ; à cela s'ajoute l'objectif de mesurer sélectivement différents types d'ondes (ondes de flexion, ondes longitudinales, etc...), ce qui peut encore être compliqué par l'apparition de modes plus élevés ou par la contribution du champ proche. De plus, il faut constater une lacune dans l'analyse rigoureuse des erreurs de mesure. Cela est lié, entre autres, à ce que, jusqu'ici, la théorie de l'intensité vibratoire n'a pas été suffisamment développée pour être appliquée à la technique de mesure.

Malgré les imperfections de la technique de mesure, l'intensité vibratoire est devenue aujourd'hui intéressante pour certaines applications pratiques. Une série d'exemples figure dans les actes de la conférence [1.12]. Quelques applications en acoustique du bâtiment [1.13-17] doivent aussi être mentionnées : pour la localisation des ponts vibratoires dans les double-parois, la méthode développée a montré [1.14-15] ses avantages de façon illustrative : avec seulement sept points de mesure, un pont vibratoire est localisé avec une précision d'environ 10 cm. Des succès comme celui-ci sont les meilleurs arguments contre le point de vue de Ffowcs Williams [1.18] lorsqu'il doute de l'utilisation de l'intensité comme mesure acoustique : l'intensité n'aurait pas d'intérêt pour la réalisation de mesures acoustiques et ne contribuerait en rien à la compréhension des phénomènes. Il existe certainement des cas simples pour lesquels on peut facilement se dispenser d'une mesure d'intensité, et d'autres plus difficiles pour lesquels les résultats d'une mesure d'intensité ne fournissent pas l'information espérée pour le champ acoustique ou vibratoire. Mais, en réalisant une simple mesure de niveau acoustique, les solutions à apporter pour améliorer l'insonorisation ne sautent pas d'elles-mêmes à l'esprit. Elles résultent plutôt - avec ou sans mesure d'intensité - de l'intuition, de l'expérience, de la compréhension physique de l'acoustique. Il faut répondre à Ffowcs Williams : qui ne connaît pas l'aspect énergétique d'un processus acoustique n'a pas complètement compris ce processus, et passe ainsi à côté d'une source d'information qui pourrait être profitable. Considéré avec pragmatisme, le sens des mesures de l'intensité vibratoire s'exprime avec les mots des Pavić [1.9] : „The usual objective of measuring the vibratory energy propagation is to locate

the vibration sources to identify the paths of energy propagation and to discover the regions of vibration absorption".

À l'exception de quelques cas, la technique de mesure n'est pas suffisamment consacrée à cet objectif, et requiert donc encore des développements. Étant donnée la complexité considérable de la plupart des champs vibratoires, alors que la mesure est restreinte à la seule surface, le succès nécessite de bons fondements théoriques et des modèles numériques appropriés. Il ne semble pas hors de propos de penser qu'à l'avenir, la mesure et le calcul seront plus liés, pour peut-être aboutir de cette manière à des analyses vibratoires plus rapides et plus fiables. Si la mesure fournit beaucoup d'informations, le calcul peut se limiter à une simple validation ou un contrôle. Inversement, l'analyse peut reposer essentiellement sur le modèle - jusqu'à la simulation du problème vibratoire par tir de rayons ou de particules. Les valeurs mesurées sont dans ce cas des paramètres d'entrée ou des données utilisées pour le calcul.

Ce livre veut remédier au fait que, jusqu'ici, aucune représentation systématique de la théorie de l'intensité vibratoire n'est disponible. Le traitement mathématique est réalisé dans le cadre de l'élastodynamique linéaire des matériaux non-piezoelectriques ; l'absorption du matériau et les interactions avec un fluide environnant, par exemple une excitation acoustique ou le rayonnement ne sont pas traités ; les excitations vibratoires ne sont pas prises en compte dans toute leur variété. Aucune exhaustivité n'a été visée dans ce sens. La priorité est donnée à l'écriture de formulations générales et de solutions analytiques exactes pour les densités d'énergie et intensité dans des structures simples. Pour obtenir des résultats concrets et des représentations graphiques, des méthodes numériques doivent être utilisées en complément.

De nombreux développements de cet ouvrage viennent de considérations liées à l'acoustique du bâtiment :

- la partie traitant des ondes dans les plaques résulte du travail sur les erreurs systématiques de la méthode de mesure, pour localiser avec précision les ponts vibratoires [1.14-15]. Le résultat théorique exact présente enfin la possibilité d'étendre la méthode de mesure aux fréquences plus élevées,

- le calcul de la propagation du son dans les milieux périodiques a révélé des questions ouvertes sur l'isolation acoustique des parois maçonnées. L'étude théorique a permis de mettre à jour des relations importantes pour le calcul en milieux périodiques, comme le principe de Rayleigh pour des ondes propagatives, ou les relations entre l'intensité, la densité d'énergie et la vitesse de groupe,
- dans le cas limite des basses fréquences, une paroi maçonnée peut en principe être considérée comme un milieu homogène mais anisotrope ; par conséquent, il ne pouvait pas manquer un chapitre sur l'acoustique dans les milieux anisotropes.

Ces remarques doivent permettre de garder à l'esprit, à la lecture des chapitres suivants, l'utilisation pratique de ces résultats théoriques, ce qui est présenté plus en détail dans le chapitre "Applications".

2. Formulations générales

2.1. Equations de base de l'élastodynamique [2.1-8]

Un élément de volume à l'intérieur d'un solide déformable se trouve à l'équilibre statique si la somme de la divergence du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ et des forces de volume \vec{F} s'annule :

$$\nabla \cdot \underline{\sigma} + \vec{F} = 0. \quad (2.1.1)$$

Nous nous limitons ici aux milieux élastiques qui obéissent à une loi linéaire du matériau, la loi de Hooke généralisée

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\varepsilon}, \quad (2.1.2)$$

Les contraintes au point \mathbf{r} sont déterminées par les déformations $\underline{\varepsilon}$ en ce point et le tenseur de quatrième ordre $\underline{\underline{C}}$ des constantes élastiques (principe de réponse localisée). Dans des milieux hétérogènes, le tenseur $\underline{\underline{C}}$ présente une certaine structure.

Dans le cas général, le tenseur $\underline{\underline{C}}$ comporte les symétries $C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} = C_{klij}$, ce qui conduit au plus à 21 constantes élastiques indépendantes (milieu de symétrie triclinique). Deux constantes élastiques suffisent à la caractérisation d'un matériau élastique isotrope, par exemple son module de compression K et module de cisaillement μ , ou le module d'Young E et le coefficient de Poisson σ , ou encore les deux constantes de Lamé λ et μ (voir le tableau de conversion [2.3, p. 76]). Dans ce cas, (2.1.2) se simplifie comme

$$\underline{\sigma} = \lambda \text{Sp}(\underline{\varepsilon}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\varepsilon} \quad (2.1.3)$$

(où $\text{Sp}=\text{Tr}$ représente la trace du tenseur des déformations et $\underline{\underline{I}}$ représente un tenseur unitaire). Dans de nombreuses applications pratiques, le matériau peut être considéré comme isotrope, au moins localement. On a généralement affaire en vibrations et en acoustique à de petites déformations, de sorte que le tenseur des déformations peut être obtenu à partir de relations linéarisées à partir du champ de déplacement u .

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t] \quad (2.1.4)$$

(le symbole 't' supérieur signifiant la transposition du tenseur). A partir de (2.1.3) et (2.1.4), la divergence du tenseur des contraintes prend la forme :

$$\nabla \cdot \underline{\sigma} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \mu \nabla \cdot \nabla \vec{u} + (\nabla \lambda) (\nabla \cdot \vec{u}) + (\nabla \mu) [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t]. \quad (2.1.5)$$

Si l'on renonce à une description de la dissipation du matériau, le bilan de forces (2.1.1) pour l'élastostatique conduit aux équations de base de l'élastodynamique en ajoutant simplement l'inertie du volume élémentaire. Si l'on néglige des forces extérieures comme la gravité, les équations linéaires du mouvement sont, pour un milieu localement hétérogène et isotrope :

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\vec{u}} &= (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \mu \nabla \cdot \nabla \vec{u} \\ &+ (\nabla \lambda) (\nabla \cdot \vec{u}) + (\nabla \mu) \cdot (\nabla \vec{u}) + (\nabla \vec{u}) \cdot (\nabla \mu) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

(où ρ est la masse volumique). Cette équation - dans une présentation différente mais équivalente - a été probablement obtenue pour la première fois en 1916 par le physicien Karl Uller [Z.3, éq. (5)]. Dans un milieu homogène, pour lequel les propriétés ρ , λ et μ ne dépendent pas de l'espace, la deuxième ligne de (2.1.6) disparaît.

Les équations ci-dessus sont généralement obtenues en considérant un élément de volume infinitésimal. Une autre approche consiste à utiliser le formalisme de Lagrange pour un milieu continu. Celui-ci est irremplaçable, bien que moins évident, pour obtenir des relations générales. Ce formalisme est basé sur la densité Lagrangienne L et le principe de Hamilton. Dans les conditions mentionnées ci-dessus, L se présente comme la différence entre les densités d'énergie cinétique et d'énergie potentielle, qui s'expriment à partir du champ de déplacement :

$$\begin{aligned} L(\dot{u}_i, u_{i,j}, x_i) &= e_{kin} - e_{pot}, \\ e_{kin} &= \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i, \quad e_{pot} = \frac{1}{2} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} u_{i,j} C_{ijkl} u_{k,l}. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Comme habituellement pour la théorie des champs, la sommation sur les indices muets est utilisée aussi souvent qu'elle présente un intérêt. (La convention de sommation d'Einstein est utilisée ; un indice après une virgule signifie la différentiation spatiale suivant la coordonnée correspondante, la dérivation temporelle est représentée par un point ou écrite explicitement). Dans un milieu hétérogène, la densité Lagrangienne dépend du point courant \mathbf{r} de l'espace, car ρ et \underline{C} en dépendent explicitement. Les équations du mouvement sont obtenues à partir du principe de Hamilton, qui stipule que la variation de l'intégrale de la densité Lagrangienne s'annule :

$$\delta \int L \, dt dx_1 dx_2 dx_3 = 0. \quad (2.1.8)$$

Il faut considérer qu'aucune variation n'a lieu aux frontières d'intégration. Compte tenu de (2.1.7), la variation de L présente la dépendance

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \delta \dot{u}_i + \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} \delta u_{i,j} \quad (2.1.9)$$

ce qui conduit, après une intégration par parties, aux équations de Lagrange-Euler (équations du mouvement, bilan de quantité de mouvement)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) + \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} \right) = 0. \quad (2.1.10)$$

On obtient explicitement, compte tenu des symétries de C_{ijkl} ,

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} = C_{ijkl} u_{k,lj} + C_{ijkl,j} u_{k,l}, \quad (2.1.11)$$

ce qui, dans le cas isotrope, se réduit localement à la forme (2.1.6).

Le tenseur d'impulsion-énergie utilisé dans la théorie de la relativité présente les composantes

$$W_{\alpha\beta} = u_{i,\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_{i,\beta}} - \delta_{\alpha\beta} L, \quad (2.1.12)$$

où l'indice grec prend les valeurs 0 à 3 et la coordonnée x_0 représente le temps et $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker. Les équations de bilan pour l'énergie et l'impulsion (la quantité de mouvement) peuvent être exprimées de façon compacte à partir de la divergence à quatre composantes de cette grandeur :

$$W_{\alpha\beta,\beta} = -L_{,\alpha}. \quad (2.1.13)$$

Puisque la densité Lagrangienne (2.1.7) ne dépend pas explicitement du temps, le second membre de (2.1.13) disparaît pour $\alpha = 0$. La conservation de l'énergie au cours du temps s'écrit donc

$$\dot{e}_{tot} + \nabla \cdot \bar{S} = 0, \quad (2.1.14)$$

où la densité d'énergie totale est donnée par

$$e_{tot} = e_{kin} + e_{pot} = v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L = W_{00} \quad (2.1.15)$$

et la densité de flux d'énergie (le vecteur de Kirchhoff) par

$$S_i = -\sigma_{ij} v_j = v_j \frac{\partial L}{\partial u_{j,i}} = W_{0i} \quad (2.1.16)$$

($v_i = \dot{u}_i$). Pour la densité d'impulsion (de quantité de mouvement), il faut distinguer la densité de quantité de mouvement canonique

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = \rho v_i \quad (2.1.17)$$

de la densité de quantité de mouvement du champ

$$\Pi_i = u_{j,i} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} = u_{j,i} \pi_j = W_{i0}. \quad (2.1.18)$$

La forme de l'équation de conservation pour la densité d'impulsion canonique est identique à l'équation du mouvement (2.1.11). La densité de flux d'impulsion (*ndt.* de quantité de mouvement) canonique est par conséquent identique à l'opposé du tenseur des contraintes. Pour obtenir l'impulsion transférée par unité de surface et par unité de temps dans une direction donnée, il faut donc prendre l'opposé du produit du tenseur des contraintes par le vecteur unitaire de la direction souhaitée. Le bilan pour la densité d'impulsion du champ suit (2.1.13) avec $\alpha = i$:

$$W_{i0,0} + W_{ij,j} = -L_{,i} = -\frac{1}{2} \rho_{,i} v_j v_j + \frac{1}{2} u_{j,k} C_{jklm,i} u_{l,m}. \quad (2.1.19)$$

Pour les milieux hétérogènes, le second membre est non nul, c'est à dire que la densité d'impulsion du champ n'est pas une grandeur conservative ; W_{ij} s'appelle la *densité de flux d'impulsion* du champ. On obtient l'équation de conservation de l'impulsion canonique (2.1.11) en introduisant les différentielles dans (2.1.19). Les deux formes de ces bilans sont, bien entendu, équivalentes. Dans le cas de champs élastodynamiques, la densité d'impulsion n'a actuellement pas d'utilisation pratique.

Le bilan d'impulsion en rotation (*ndt.* moment cinétique) n'a pas besoin d'être ici formulé ; il suffit savoir que, pour les milieux élastiques, le tenseur des contraintes est symétrique.

Par conséquent, la vitesse de transport d'énergie est introduite, par la relation

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{S}}{e_{tot}} \quad (2.1.20)$$

En d'autres termes : la densité de flux d'énergie s'exprime comme le produit d'une densité d'énergie et d'une vitesse de propagation énergétique. En utilisant des moyennes temporelles, on définit en conséquence :

$$\vec{c}_e = \frac{\vec{I}}{\omega_{tot}}. \quad (2.1.21)$$

La moyenne temporelle \mathbf{I} de la densité de flux d'énergie est nommée intensité (acoustique). Les relations entre les vitesses de groupe et de phase sont examinées en détail dans la suite du document.

2.2. Représentation complexe des champs vibratoires en régime harmonique

Les champs vibratoires dépendant sinusoidalement du temps sont décrits avec grand profit par la notation complexe, qui est composée d'une amplitude complexe dépendante de l'espace et d'un argument complexe dépendant du temps. La grandeur physique est généralement la partie réelle de ce produit complexe. Le signe de l'argument complexe décrivant l'évolution temporelle est fixé arbitrairement, et ce choix n'est malheureusement pas fait uniformément. Il en résulte que la composante imaginaire présente un signe différent suivant la convention retenue, ce qui rend plus difficile la dénomination et la compréhension physique des variables complexes issues du champ vibratoire. Le facteur temporel utilisé dans ce document est $\exp(-i\omega t)$. Celui-ci correspond à la convention la plus courante en physique théorique dans le domaine de la propagation des ondes. Des acousticiens éminents comme Pierce [1.2], Achenbach [2.6], Junker et Veit [2.10] ont adopté cette convention, alors que d'autres aussi éminents que Rayleigh [2.11], Auld [2.4], Fahy [2.12 ; 1.4], Cremer et Heckl [2.13] ou Mechel [2.14] utilisent la convention $\exp(+i\omega t)$ ou celle de l'électrotechnique $\exp(j\omega t)$. Les avantages et les inconvénients de ces deux facteurs de temps ne sont mentionnés qu'exceptionnellement dans la littérature, p. ex. par Bouwkamp [2.15]. Le choix de l'une ou l'autre de ces deux possibilités est généralement déterminé par l'habitude reçue lors de la formation initiale, et des modèles que l'on souhaite traiter. Des raisons pratiques plaident cependant en faveur du choix ici retenu : moins de signes '*moins*' ont besoin d'être écrits, en particulier si, comme c'est souvent le cas, le facteur de phase de l'onde, qui est le facteur dépendant du temps $\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]$ est omis.

L'amplitude complexe d'un champ vibratoire, dépendante de l'espace, est ici notée avec une majuscule :

$$\begin{aligned}\bar{u}(\vec{r}, t) &= \bar{U}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \\ \bar{v}(\vec{r}, t) &= \bar{V}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, & \bar{V}(\vec{r}) &= -i\omega \bar{U}(\vec{r}), \\ \underline{\varepsilon}(\vec{r}, t) &= \underline{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, & \underline{\sigma}(\vec{r}, t) &= \underline{\Sigma}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \\ p(\vec{r}, t) &= P(\vec{r}) e^{-i\omega t}, & P(\vec{r}) &= -\frac{1}{3} \text{Sp}(\underline{\Sigma}(\vec{r})).\end{aligned}\quad (2.2.1)$$

Au besoin, la contribution des modules et des phases est notée au moyen d'indices, comme par exemple

$$\Sigma_{ij} = |\Sigma_{ij}| e^{i\varphi_{ij}}, \quad \varphi_{ij} = \arg\{\Sigma_{ij}\}. \quad (2.2.2)$$

(La convention de sommation sur les indices muets ne s'applique pas à ce paragraphe). Toutes les variables du champ présentent une moyenne temporelle nulle, un mouvement temporellement uniforme du système (*ndt* : tout mouvement de corps rigide) étant ici exclu.

Le champ de déplacement d'une onde élastique de vecteur d'onde \mathbf{k} est simplement représenté par une amplitude scalaire réelle A , et un vecteur de polarisation complexe \mathbf{P} , normé unitairement (à ne pas confondre avec la pression acoustique, sous sa forme scalaire dans (2.2.1)) :

$$\bar{u}(\vec{r}, t) = A \bar{P} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (2.2.3)$$

Pour illustrer le mouvement spatial du vecteur déplacement, on considère le cas particulier $A = 1$ et $\mathbf{r} = 0$. Alors,

$$\bar{u}(t) = \text{Re}\{\bar{u}(0, t)\} = \text{Re}\{\bar{P} e^{-i\omega t}\} = \begin{pmatrix} h_1 \cos(\varphi_1 - \omega t) \\ h_2 \cos(\varphi_2 - \omega t) \\ h_3 \cos(\varphi_3 - \omega t) \end{pmatrix}; \quad h_i = |P_i|. \quad (2.2.4)$$

$\mathbf{u}(t)$ décrit une courbe dans l'espace, qui peut être décrite au moyen de la géométrie différentielle [2.16, pp. 214-216]. La direction de la binormale (perpendiculaire aux deux vecteurs)

$$\dot{\mathbf{u}} \times \ddot{\mathbf{u}} = -\omega^3 \begin{pmatrix} h_2 h_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \\ h_3 h_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) \\ h_1 h_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{pmatrix} \quad (2.2.5)$$

est indépendante du temps, c'est à dire que le mouvement a lieu dans un plan et décrit *p.o.* une ellipse. On peut aussi directement interpréter ce mouvement comme la superposition des deux vecteurs $\text{Re}\{\mathbf{P}\}$ et $\text{Im}\{\mathbf{P}\}$. Les directions et les dimensions des demi-axes sont obtenus à partir des valeurs extrêmes obtenues pour $|\mathbf{u}(t)|$ en fonction du temps t_e . Puisque ces temps t_e voisins se différencient seulement de $\pi / 2\omega$, il suffit de résoudre une fois l'équation en t_e

$$\tan(2\omega t_e) = \frac{h_1^2 \sin(2\varphi_1) + h_2^2 \sin(2\varphi_2) + h_3^2 \sin(2\varphi_3)}{h_1^2 \cos(2\varphi_1) + h_2^2 \cos(2\varphi_2) + h_3^2 \cos(2\varphi_3)}, \quad (2.2.6)$$

Le mouvement à la pulsation ω du vecteur déplacement est décrit ainsi complètement par six grandeurs scalaires réelles, ou par le vecteur complexe $A\mathbf{P}$. Dans des cas particuliers, l'ellipse dégénère en un cercle ou en un segment de droite. Si ce dernier est parallèle au vecteur d'onde, on parle de *polarisation longitudinale*, alors que si le vecteur d'onde est perpendiculaire à ce segment ou à la direction du déplacement, on parle de polarisation transversale.

Une représentation géométrique des déformations et des contraintes en fonction du temps est plus exigeant. Dans le cas des déformations, on peut représenter la déformée d'une sphère en un ellipsoïde. Cela revient à présenter le tenseur sous sa forme diagonale. L'état de déformation est alors caractérisé par l'orientation et la dimension des demi-axes de l'ellipsoïde (six nombres réels). L'évolution au cours du temps de l'ellipsoïde devrait être représentée sous forme d'une séquence d'images

(sous la forme d'un film). On peut procéder de même avec les contraintes ; à partir d'un état de référence non précontraint, l'évolution d'une sphère en ellipsoïde permet d'illustrer l'état de contraintes.

Une alternative à une séquence d'images représentant les ellipsoïdes pourrait être de suivre, comme pour le vecteur déplacement, séparément l'évolution de chaque demi-axe de l'ellipse. Une illustration de l'évolution temporelle des déformations et des contraintes peut réussir de cette manière dans des cas simples (dans des problèmes bidimensionnels). Dans les autres cas, ce type de représentation pourrait devenir rapidement incompréhensible. La représentation sous forme de séquence d'image est sûrement préférable. Une illustration sur écran, colorant différemment la surface de l'ellipsoïde selon qu'elle passe à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère de référence, serait une aide bienvenue en enseignement et pour la recherche.

Pour calculer des grandeurs énergétiques comme des densités d'énergie et des intensités, il faut effectuer des produits entre des variables du champ. Les parties imaginaires et réelles des grandeurs complexes sont associées dans ce produit, et la pensée identifie mal la partie réelle du produit avec la grandeur physique. Pour illustrer comment la notation complexe est adaptée pour manipuler des produits, nous considérons les deux variables complexes

$$a = Ae^{i(\alpha - \omega t)}, \quad b = Be^{i(\beta - \omega t)} \quad (2.2.7)$$

($A, B > 0$, α, β réels), puis le produit de leurs parties réelles

$$\operatorname{Re}\{a\} \operatorname{Re}\{b\} = \frac{1}{2} AB [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta - 2\omega t)] \quad (2.2.8)$$

et enfin le produit complexe de a et du complexe conjugué de b , qui ne dépend plus du temps :

$$ab^* = ABe^{i(\alpha - \beta)} = AB [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)]. \quad (2.2.9)$$

On voit immédiatement que la moyenne temporelle de la grandeur physique (2.2.8) s'identifie à la partie réelle du produit complexe (2.2.9) :

$$\langle \operatorname{Re}\{a\} \operatorname{Re}\{b\} \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{ab^*\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{a^*b\}. \quad (2.2.10)$$

Contrairement aux grandeurs (2.2.1) du champ vibratoire, la moyenne temporelle est ici différente de zéro. Le produit oscille autour de la moyenne avec l'amplitude $AB/2$, qui peut également être déterminée comme ab^* , à l'aide de la partie imaginaire :

$$\alpha - \beta = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{ab^*\}}{\operatorname{Re}\{ab^*\}}, \quad AB = \frac{\operatorname{Re}\{ab^*\}}{\cos(\alpha - \beta)} u \frac{\operatorname{Im}\{ab^*\}}{\sin(\alpha - \beta)}. \quad (2.2.11)$$

Toutefois, la phase $\alpha + \beta$ de l'oscillation ne peut plus être obtenue à partir du produit complexe (2.2.9). On devrait pour cela considérer par exemple le produit ab (dépendant du temps). Le produit (2.2.8) peut être exprimé complètement et explicitement à partir de ab^* , à l'exception de la relation de phase :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{a\} \operatorname{Re}\{b\} &= \frac{1}{2} [\operatorname{Re}\{ab^*\} + \operatorname{Re}\{ab^*\} \cos[2(\alpha - \omega t)]] \\ &\quad + \operatorname{Im}\{ab^*\} \sin[2(\alpha - \omega t)] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{ab^* [1 + e^{-2i(\alpha - \omega t)}]\}. \end{aligned} \quad (2.2.11a)$$

Une partie de l'information du champ se perd dans ce processus : les deux variables a et b sont déterminées, au total, par quatre paramètres (réels) (sans que ω ne soit ajouté), le produit (2.2.8) de leurs parties réelles est déterminé par trois paramètres (A et B ne peuvent plus être séparés) et le nombre complexe ab^* par seulement deux paramètres. L'utilisation du produit ab^* se justifie en ce que ce sont ces deux paramètres, à savoir (i) la moyenne temporelle et (ii) l'amplitude de modulation et/ou la différence de phase entre a et b , qui sont généralement les plus importants. La phase

absolue α ou β n'a souvent pas d'intérêt, et peut être annulée par un simple décalage de la référence de phase.

Pour calculer les grandeurs énergétiques, les produits ci-dessus entre scalaires doivent être généralisés à des produits entre vecteurs et entre tenseurs. Il en est ainsi pour la densité d'énergie cinétique

$$e_{kin} = \frac{\rho}{2} \text{Re}\{\vec{v}\} \cdot \text{Re}\{\vec{v}\} = \frac{\rho}{4} \left[|V_1|^2 + |V_2|^2 + |V_3|^2 \right] \cdot \left[1 + f_{kin} \cos(\varphi_{kin} - 2\omega t) \right],$$

$$f_{kin} = \frac{\sqrt{Z^2 + N^2}}{|V_1|^2 + |V_2|^2 + |V_3|^2}, \quad \varphi_{kin} = \arctan \frac{Z}{N}, \quad (2.2.12)$$

$$Z = |V_1|^2 \sin 2\varphi_1 + |V_2|^2 \sin 2\varphi_2 + |V_3|^2 \sin 2\varphi_3,$$

$$N = |V_1|^2 \cos 2\varphi_1 + |V_2|^2 \cos 2\varphi_2 + |V_3|^2 \cos 2\varphi_3$$

(φ_i : phase de V_i). Elle oscille autour de la valeur temporelle moyenne

$$\langle e_{kin} \rangle_t = w_{kin} = \frac{\rho}{4} \vec{v} \cdot \vec{v}^* = \frac{\rho}{4} (|V_1|^2 + |V_2|^2 + |V_3|^2) \quad (2.2.13)$$

avec une amplitude qui n'est pas plus grande que la moyenne elle-même. Avec une polarisation circulaire de l'onde (par exemple $|V_1|=|V_2|=0$, $|V_3| \neq 0$, $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$) aucune oscillation n'a lieu ($f_{kin}=0$), alors que cette oscillation est maximale avec une polarisation linéaire ($f_{kin}=1$). Il n'existe alors pas de relation correspondant à (2.2.11a). (pour une onde de polarisation circulaire, l'indépendance de e_{kin} par rapport au temps n'est pas compatible avec la forme (2.2.11a)).

Similairement, pour la densité d'énergie potentielle

$$e_{pot} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\underline{\sigma}\} \cdot \text{Re}\{\underline{\varepsilon}\} = w_{pot} \left[1 + f_{pot} \cos(\varphi_{pot} - 2\omega t) \right],$$

$$f_{pot} = \frac{\sqrt{Z^2 + N^2}}{4w_{pot}}, \quad \varphi_{pot} = \arctan \frac{Z}{N}, \quad (2.2.14)$$

$$Z = \sum_{ij} |\Sigma_{ij}| |E_{ij}| \sin(\varphi_{ij} + \psi_{ij}),$$

$$N = \sum_{ij} |\Sigma_{ij}| |E_{ij}| \cos(\varphi_{ij} + \psi_{ij}),$$

$$\langle e_{pot} \rangle_t = w_{pot} = \frac{1}{4} \text{Re}\{\underline{\Sigma} \cdot \underline{E}^*\} = \frac{1}{4} \underline{\Sigma} \cdot \underline{E}^*$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{ij} |\Sigma_{ij}| |E_{ij}| \cos(\varphi_{ij} - \psi_{ij}) \quad (2.2.15)$$

(où φ_{ij} et ψ_{ij} sont les phases de Σ_{ij} et E_{ij} , $0 \leq f_{pot} \leq 1$). Comme pour la densité d'énergie cinétique, la partie imaginaire du produit complexe s'annule

$$\frac{1}{4} \text{Im}\{\underline{\Sigma} \cdot \underline{E}^*\} = \frac{1}{4} \sum_{ij} |\Sigma_{ij}| |E_{ij}| \sin(\varphi_{ij} - \psi_{ij}) = 0, \quad (2.2.16)$$

parce que le tenseur \underline{C} des constantes élastiques de la loi de Hooke généralisée (2.1.2) est réel et symétrique.

Il s'ensuit, pour le vecteur de Kirchhoff (densité de flux d'énergie) et pour l'intensité (en moyenne temporelle ; φ_{ij} , ψ_j : phases de phases de Σ_{ij} et V_j) :

$$S_i = -\sum_j \operatorname{Re}\{\sigma_{ij}\} \operatorname{Re}\{v_j\} = I_i [1 + f_i \cos(\varphi_i - 2\omega t)],$$

$$f_i = \frac{\sqrt{Z_i^2 + N_i^2}}{2|I_i|}, \quad \varphi_i = \arctan \frac{Z_i}{N_i}, \quad (2.2.17)$$

$$Z_i = \sum_j |\Sigma_{ij}| |V_j| \sin(\varphi_{ij} + \psi_j),$$

$$N_i = \sum_j |\Sigma_{ij}| |V_j| \cos(\varphi_{ij} + \psi_j),$$

$$\langle S_i \rangle_t = I_i = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{\Sigma} \cdot \vec{V}^*\}_i$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_j |\Sigma_{ij}| |V_j| \cos(\varphi_{ij} - \psi_j). \quad (2.2.18)$$

Entre-temps, une intensité vibratoire complexe a également été définie [2.17], et ce sous la forme

$$\vec{I}_c = \vec{I} + i\vec{Q},$$

$$Q_i = -\frac{1}{2} \operatorname{Im}\{\underline{\Sigma} \cdot \vec{V}^*\}_i = -\frac{1}{2} \sum_j |\Sigma_{ij}| |V_j| \sin(\varphi_{ij} - \psi_j). \quad (2.2.19)$$

L'importance de la partie imaginaire \vec{Q} fait l'objet du paragraphe 2.3 suivant.

Les relations deviennent considérablement plus simples dans le cas de l'acoustique

$$\sigma = -pI, \quad \underline{\Sigma} = -PI,$$

$$\varepsilon = \frac{-p}{3\rho c^2} I, \quad \underline{E} = \frac{-P}{3\rho c^2} I \quad (2.2.20)$$

(Φ , ψ_i : phases de P et de V_i) :

$$e_{pot} = \frac{1}{2\rho c^2} [\operatorname{Re}\{P\}]^2 = \frac{|P|^2}{4\rho c^2} [1 + \cos[2(\Phi - \omega t)]], \quad (2.2.21)$$

$$w_{pot} = \langle e_{pot} \rangle_t = \frac{|P|^2}{4\rho c^2} = \frac{1}{4\rho c^2} \operatorname{Re}\{PP^*\}, \quad (2.2.22)$$

$$S_i = \operatorname{Re}\{P\} \operatorname{Re}\{V_i\} = I_i [1 + f_i \cos(\varphi_i - 2\omega t)],$$

$$f_i = \frac{1}{\cos(\Phi - \psi_i)}, \quad \varphi_i = \Phi + \psi_i, \quad (2.2.23)$$

$$I_i = \frac{1}{2} |P| |V_i| \cos(\Phi - \psi_i), \quad Q_i = \frac{1}{2} |P| |V_i| \sin(\Phi - \psi_i).$$

Comme un bilan de quantité de mouvement permet d'exprimer la vitesse particulière à partir de la distribution de pression,

$$\vec{V} = \frac{\nabla(|P|e^{i\Phi})}{i\omega\rho} = \frac{1}{\omega\rho} [|P|\nabla\Phi - i|\nabla|P|] e^{i\Phi}, \quad (2.2.24)$$

les parties réelle et imaginaire de l'intensité complexe s'expriment à partir des fonctions réelles $|P|$ et Φ :

$$\bar{I} = \frac{|P|^2 \nabla \Phi}{2\omega\rho}, \quad \bar{Q} = \frac{|P| |\nabla P|}{2\omega\rho}. \quad (2.2.25)$$

Conformément à (2.2.11a), \mathbf{I} et \mathbf{Q} permettent de décrire la densité de flux d'énergie acoustique et sa dépendance temporelle :

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \bar{I} + \bar{I} \cos[2(\Phi - \omega t)] + \bar{Q} \sin[2(\Phi - \omega t)] \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \bar{I}_c (1 + \exp[-2i(\Phi - \omega t)]) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

La conservation de quantité de mouvement (2.2.24) n'est pas nécessaire pour cette relation ; elle serait aussi vérifiée pour des phases arbitraires ψ , et est par conséquent applicable à un produit arbitraire entre un scalaire et une grandeur vectorielle, pour autant que les deux évoluent à la même pulsation ω . La référence [2.18] comporte la représentation graphique de la première ligne de (2.2.26).

2.3. Intensité réactive de structure

La partie imaginaire \mathbf{Q} de l'intensité complexe (2.2.19) sera appelée intensité réactive ou l'intensité 'aveugle', alors que la partie réelle sera qualifiée d'intensité active ou d'intensité réelle. Ces notions ont été probablement introduites en 1964 pour l'acoustique [2.19], par analogie aux puissances active et réactive pour les grandeurs de l'électrotechnique. Contrairement à l'électrotechnicien, pour lequel les grandeurs "réactives" (puissance réactive, courant réactif, impédance réactive, conductibilité réactive) sont aisément comprises, l'acousticien se soucie toujours de savoir ce que l'intensité réactive signifie en réalité et comment l'utiliser. Quelques citations doivent clarifier cela.

Dans le résumé en anglais de [2.20], Pascal écrit : "Analysis from complex acoustic intensity offers a complete description of acoustic fields: vectorial net (energy) flow by active intensity and transfer mechanisms by reactive intensity". Dans le cas de l'acoustique, on peut en effet déterminer complètement les grandeurs \mathbf{I} et \mathbf{Q} (voir éq. (2.2.24-25)) au moyen de la vitesse particulaire (une amplitude et une phase par composante), à partir de la connaissance de l'amplitude et de la phase du champ de pression acoustique. Comme l'intensité réactive caractérise le 'mécanisme de transfert d'énergie', nous n'avons toutefois pas progressé beaucoup.

Elko et Tichy [2.211] tentent une explication légèrement plus détaillée : "The reactive intensity has been shown to be useful in locating acoustic sources and sinks in a highly reactive environments (sic!) ... The reactive intensity is a vector quantity and its magnitude is equal to the wattless power per unit area stored in the sound field. It is useful in identifying acoustic near fields, standing wave directions, and spatial minima and maxima of the potential energy." L'étourderie est ici responsable de deux erreurs en trois phrases, et nous laisse encore à un niveau abstrait. Les mots sont ici incorrects ou mal utilisés. Ce qui est "stocké" et "circule" est l'énergie et non pas la puissance, bien que fréquemment l'expression "power flow" soit utilisée à la place de l'expression correcte de "energy flow". La citation nomme au moins deux exemples pour lesquels l'intensité réactive apparaît, à savoir le champ proche (en particulier pour les ondes de compression) et les ondes stationnaires. D'après Pascal [2.22], la localisation de sources acoustiques semble toutefois présenter des difficultés : "Reactive intensity has become a powerful tool for the understanding of acoustic field structure but its relation with the sources are complicated." Ainsi, l'utilisation de cet "outil puissant" pour la compréhension du champ acoustique reste peu claire.

Même en consultant la monographie de Fahy sur l'intensité acoustique [1.4, p. 54], on n'obtient pas de réponse complètement satisfaisante : "In all time stationary acoustic fields, except the very special case of the plane travelling (progressive) wave, the instantaneous intensity may be split into two components: (i) an active component, of which the time-average (mean) value is non-zero, corresponding to local net transport of sound energy; and (ii) a reactive component, of which the time-average value is zero, corresponding to local oscillatory transport of energy. At any one

frequency, these two intensity components are associated with the components of particle velocity which are, respectively, in phase and in quadrature with the acoustic pressure".

La qualité par laquelle la composante réactive est caractérisée, à savoir un transfert local oscillant d'énergie, s'applique aussi à la composante active (voir éq. (2.2.26)), et n'apporte par conséquent aucune caractéristique distinctive. Fahy met en doute l'utilisation de l'intensité réactive pour localiser des sources acoustiques [1.4, p.166] : "Unfortunately, it is not a very helpful indicator, because reactive intensity tends to be most strong in the close vicinity of very inefficient radiators, and relatively weak in regions of efficient radiation. It is also strong in reverberant fields in enclosures, ..., in which regions of concentration of reactive intensity in no way indicate the presence of active sources as revealed by the convergence of the reactive vectors".

La lecture de la littérature allemande n'aide guère plus. Mechel [2.14, p.28] donne certes la définition de l'intensité réactive, mais se garde de toute interprétation. Peut-être devrait-on, comme en physique s'agissant d'énergie et de matière, ou encore de l'électron, se poser moins la question « Qu'est-ce ... ? » que « Quel est le comportement de ... ? ». Pour cela, les éléments fondamentaux sont les équations vérifiées par les parties réelle et imaginaire de l'intensité acoustique complexe. En négligeant l'absorption et en dehors des sources acoustiques, il s'agit des relations ($k = \omega / c$) :

$$\nabla \cdot \vec{I} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{Q} = 2\omega(w_{kin} - w_{pot}) = 2\omega\langle L \rangle_t, \quad (2.3.1)$$

$$\nabla \times \vec{I} = \frac{k\vec{Q} \times \vec{I}}{c w_{pot}}, \quad \nabla \times \vec{Q} = 0. \quad (2.3.2)$$

$$\vec{Q} = \frac{c}{k} \nabla w_{pot}. \quad (2.3.3)$$

L'équation (2.3.1a) est la formulation différentielle de la conservation de l'énergie, (2.3.1b) vient de la référence [2.19] et (2.3.3) de [2.24]. La dernière équation ne vaut que pour des milieux homogènes, c.-à-d. des milieux pour lesquels la vitesse du son et la densité moyenne sont constantes, et résulte directement des éq. (2.2.22) et (2.2.25b). Le champ

de l'intensité réactive présente un rotationnel nul et sa divergence est déterminée par la moyenne temporelle de la différence entre les densités d'énergie cinétique et potentielle. Il résulte de cette propriété irrotationnelle que \vec{Q} s'exprime comme le gradient d'un potentiel [2.16, p. 470]. Dans un milieu homogène, ce potentiel est proportionnel à la densité d'énergie potentielle moyenne (2.3.3). Le champ de vecteur \vec{Q} est alors orthogonal aux lignes d'amplitude de pression acoustique constante, orienté dans la direction d'amplitude de pression croissante (si l'on travaille avec la convention $\exp(+i\omega t)$ pour le facteur temporel, il pointe dans la direction opposée).

D'après (2.3.2a), le rotationnel de l'intensité active peut être obtenu sans différentiation à partir de l'intensité réactive. Ce rotationnel est différent de zéro lorsque \vec{I} et \vec{Q} sont non nuls et ne sont pas parallèles entre eux. D'après la formulation (2.2.26), on voit (la densité de flux d'énergie est toujours parallèle à la vitesse particulière acoustique) que les particules ne parcourent pas des oscillations rectilignes, mais elliptiques, si la rotation de l'intensité est non nulle [2.20 ; 2.23]. La direction de la normale de l'ellipse est donnée par le vecteur rotationnel.

Si le rotationnel de l'intensité est non nul, les lignes de champ d'intensité peuvent être fermées sur elles-mêmes. Fahy remarque que l'image selon laquelle l'énergie "circulerait en boucle fermée" peut toutefois s'avérer trompeuse [1.4, p.65]. Sans entrer plus dans le détail, il indique que le travail de la référence [2.25] analyse un tel "tourbillon" (en anglais : vortex). Il manque malheureusement une discussion éclairante sur la voie suivie par les différents "paquets d'énergie" (voir [2.25], Fig. 21).

Dans le présent ouvrage, des exemples de tourbillons d'intensité ne sont mentionnés que sur les bords ; il est donc ici renoncé à une clarification complète des relations, d'autant plus que la description au cours du temps de la densité de flux d'énergie dans le milieu solide est largement plus compliquée que dans l'air.

Ces passages n'ont pas rendu plus clair ce que l'intensité réactive est en réalité. Mais cette dernière permet toutefois de calculer des quantités physiquement bien identifiées, à savoir

- la densité de flux d'énergie en fonction du temps (2.2.26),

- la moyenne temporelle de la densité Lagrangienne,
 - le rotationnel de l'intensité active,
- et, dans les milieux homogènes,
- le gradient de la densité d'énergie potentielle moyenne.

On peut aussi considérer l'intensité réactive comme une simple variable auxiliaire, utile au calcul d'autres grandeurs, sans pour autant se casser la tête à lui donner un nom et à lui trouver un rôle intime dans la caractérisation du champ acoustique, que ce soit en terme de module et de phase de pression, de vitesse, de densités d'énergie ou d'intensité réelle. Devant la difficulté (ou l'impossibilité ?) d'une présentation claire de l'intensité réactive, on pourrait se contenter d'y voir une dimension de deuxième ordre (produit de deux grandeurs élémentaires du premier ordre), l'énergie réactive qui "s'écoule" ne participant pas même à l'absorption (*ndt.* au puits) ni aux sources acoustiques en champ libre. Elle est donc transférée, depuis les régions où la moyenne temporelle de l'énergie cinétique est plus importante que l'énergie potentielle, vers les zones où c'est l'énergie potentielle qui prédomine. Fahy commente comme suit les équations (2.3.1b) [1.4, p.67] : "one physical interpretation of eqn (...) is that a local difference between mean potential and kinetic energy densities can be likened to a 'source' of reactive intensity: I consider this interpretation to have little physical justification." Un théoricien ne peut pas adopter ce jugement subjectif, annoncé sans justification. Toujours est-il que l'intensité réactive est liée par l'éq. (2.3.1b) à la densité Lagrangienne, alors que cette dernière grandeur fondamentale décrit complètement un système dynamique d'après le principe de Hamilton. On peut probablement encore réussir à établir des relations assez fondamentales. Il est en tout cas remarquable que l'équation (2.3.1a) de conservation de l'énergie reste valable pour des champs acoustiques ou vibratoires, dans des milieux élastiques homogènes ou hétérogènes, isotropes ou anisotropes, alors que les autres équations (2.2.26), (2.3.2) et (2.3.3) ne sont valables que pour l'acoustique, et non pour un milieu solide. Cela est prouvé ci-après.

À partir de (2.2.18-19), la divergence de l'intensité complexe s'exprime comme :

$$\nabla \cdot \vec{I}_c = -\frac{i\omega}{2} \left[\underline{\Sigma} \cdot \cdot (\nabla \vec{U}^*) + (\nabla \cdot \underline{\Sigma}) \cdot \vec{U}^* \right]. \quad (2.3.4)$$

En adoptant, comme usuellement, un tenseur des contraintes symétrique, le gradient du champ de déplacement peut être remplacé par le tenseur des déformations :

$$\underline{\Sigma} \cdot \cdot (\nabla \vec{U}^*) = \underline{\Sigma} \cdot \cdot \underline{E}^* = 4w_{pot}. \quad (2.3.5)$$

Le deuxième terme de (2.3.4) s'exprime au moyen de la relation

$$i\omega\rho\vec{V} + \nabla \cdot \underline{\Sigma} = 0 \quad (2.3.6)$$

l'équation du mouvement, en l'absence de force volumique et en régime harmonique, fait apparaître la densité d'énergie cinétique :

$$\nabla \cdot \vec{I}_c = 2i\omega(w_{kin} - w_{pot}) = 2i\omega\langle L \rangle_t. \quad (2.3.7)$$

La divergence de l'intensité complexe est purement imaginaire, et cette partie imaginaire vérifie la relation (2.3.1b). Ainsi, les deux équations (2.3.1) sont vérifiées pour des champs vibratoires en solide élastique. Dans ce même milieu, les autres équations ne sont pas vérifiées, ce que prouvent les contre-exemples simples suivants :

Contre-exemple 1 : Onde de cisaillement polarisée circulaire

Pour une onde de cisaillement circulaire polarisée dans un milieu homogène et isotrope, par exemple sous la forme

$$\vec{V} = v_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikz}, \quad (2.3.8)$$

la dépendance temporelle de la densité de flux d'énergie ne peut pas être décrite par une équation du type (2.2.26), puisque le flux d'énergie est temporellement constant. A partir du tenseur des contraintes

$$\underline{\Sigma} = \rho v_0 c_t \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} e^{ikz} \quad (2.3.9)$$

(où c_t représente la célérité des ondes de cisaillement), les relations (2.2.18-19) montrent que

$$\bar{I} = \rho v_0^2 c_t \bar{e}_z, \quad \bar{Q} = 0 \quad (2.3.10)$$

(\bar{e}_z étant le vecteur unitaire dans la direction z) et la relation (2.2.17) que

$$\bar{S}(t) = \rho v_0^2 c_t \bar{e}_z [\cos^2(kz - \omega t) + \sin^2(kz - \omega t)] = \bar{I}. \quad (2.3.11)$$

Sur la base de cette orthogonalité des composantes d'ondes, les flux d'énergie partiels peuvent être additionnés, et leur moyenne temporelle s'annule en raison du décalage à 90° . Ceci n'est pas compatible avec les éq. (2.2.26), c.-à-d. que l'équation correspondante [2.17, éq.(4)] n'est, en général, pas valable. On suppose ici tacitement que les composantes du tenseur des contraintes et des vitesses sont en phase entre elles, ce qui n'est pas toujours le cas (dans (2.2.17) : tous les φ_{ij} et tous les ψ_j sont identiques ; par conséquent \mathbf{I} et \mathbf{Q} sont parallèles). Une analyse des éq. (2.2.17-19) montre qu'il suffit que les phases des composantes de vitesse soient en phase, ou à 180° en opposition de phase (polarisation linéaire), pour pouvoir écrire au cours du temps les flux d'énergie \mathbf{I} et \mathbf{Q} comme

$$\begin{aligned} S_i &= I_i + I_i \cos[2(\varphi_i - \omega t)] + Q_i \sin[2(\varphi_i - \omega t)] \\ &= I_i \{1 + f_i \cos[2(\varphi_i - \omega t) - \gamma_i]\}, \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

$$I_i f_i = \sqrt{I_i^2 + Q_i^2}, \quad \tan \gamma_i = \frac{Q_i}{I_i}$$

(sans utiliser la sommation implicite sur i !).

À la différence de (2.2.26), les phases φ_i des trois composantes du flux d'énergie peuvent être différentes. La phase en commun des composantes de vitesse peut être localement annulée par une transformation des coordonnées ou de temps. Cela permet la détermination de φ_i à partir de \mathbf{I} et \mathbf{Q} . La phase absolue de \mathbf{S} et/ou son évolution locale ne peut cependant pas être calculée par (2.2.26) comme pour \mathbf{I} et \mathbf{Q} .

Que la relation (2.3.12) ne soit pas toujours vérifiée peut aussi être montré sur un autre exemple simple : le flux d'énergie d'une onde de flexion est également constant vis-à-vis du temps [2.13, p.107] ; les composantes de la vitesse dans la direction de propagation et la direction normale à la plaque sont, comme pour les ondes de cisaillement, circulaires et polarisées entre elles à 90° , en quadrature [2.26]. Cela aurait dû être remarqué en [2.17]. Pour l'onde quasi-longitudinale, ce décalage de phase existe certes également, le flux d'énergie présente toutefois une dépendance sinusoïdale en temps et en espace, tout comme une onde longitudinale dans un milieu infini [2.13, p.84].

Contre-exemple 2 : Sphère pulsante

Le champ de déplacement

$$\bar{u}(\bar{r}, t) = \frac{A k_l^2 e^{-i\omega \left(t - \frac{r}{c_l} \right)} \bar{e}_r}{4\pi \rho c_l^2} \left\{ \frac{1}{(k_l r)^2} - \frac{i}{(k_l r)} \right\}, \quad r \geq R > 0 \quad (2.3.13)$$

(A : amplitude ; c_l : vitesse des ondes longitudinales ; $k_l = \omega/c_l$, $r = |\mathbf{r}|$, $\bar{e}_r = \mathbf{r}/r$; [2.27, pp.15-22 ; 2.6 pp. 129-135]) décrit les oscillations d'un milieu isotrope homogène excité par une sphère creuse située à l'origine du système de coordonnées, dont le rayon R évolue à la pulsation ω . Les équations sont présentées en annexe A pour les déformations, les contraintes et les grandeurs énergétiques. En raison de la symétrie sphérique du problème, toutes les grandeurs ne dépendent que de r , et tous les vecteurs pointent dans une direction radiale. \mathbf{I} aussi bien que \mathbf{Q} sont généralement non nuls ; seul \mathbf{Q} possède une valeur nulle pour une certaine distance R . En raison de la symétrie sphérique, le rotationnel de ces deux vecteurs est nul : les deux éq. (2.3.2) sont vérifiées trivialement, parce que

\mathbf{I} et \mathbf{Q} sont en outre parallèles. La validité de (2.3.1b) est également confirmée en annexe A. L'équation (2.9.12) peut également être utilisée, en raison de la une polarisation linéaire (radiale). Il s'avère toutefois que la relation (2.3.3) n'est pas vérifiée. L'intensité réactive n'est proportionnelle au gradient de la densité d'énergie potentielle que si on annule le module de cisaillement, donc aussi la vitesse des ondes transversales (cas de la sphère pulsante acoustique).

Quinlan [2.28-29] a montré qu'il existe un exemple important de milieu solide pour lequel la condition (2.3.3) est réalisée : celui d'une onde de flexion. Les variables c et k de (2.3.3) représentent la vitesse de phase et le nombre d'onde des ondes de flexion. Il est possible que la vérification générale de cette relation en présence d'un champ d'ondes de flexion puisse être trouvée dans le travail de thèse [2.30], qui n'était pas disponible.

Contre-exemple 3 : Sphère oscillante en rotation

Le champ de déplacement

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{Ak_t^2 e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c_t}\right)} \sin \vartheta \vec{e}_\varphi}{4\pi\rho c_t^2} \left\{ \frac{1}{(k_t r)^2} - \frac{i}{(k_t r)} \right\}, \quad r \geq R > 0 \quad (2.3.14)$$

(où c_t est la célérité des ondes transversales, $k_t = \omega/c_t$, (r, θ, φ) les coordonnées dans le repère sphérique, \vec{e}_φ le vecteur unitaire dans la direction φ ; [2.27, pp. 16-22 avec des erreurs d'impression ! ; 2.6, pp. 160-161 ; 2.9 pp.68-70]) est généré par des oscillations en rotation de la surface d'une sphère autour de l'axe z ($\theta = 0^\circ$; le rayon R restant constant !) ; les calculs sont présentés en annexe B. Au lieu de cette sphère creuse, on représente généralement une sphère rigide, immobile (*ndt* : en translation) qui génère des oscillations par rotation dans le milieu environnant. Le champ généré dépend non seulement du rayon r , mais aussi de l'angle θ . Cela entraîne que les rotationnels de \mathbf{I} et \mathbf{Q} ne sont plus identiquement nuls. Les deux éq. (2.3.2) ne s'appliquent plus ; (2.3.3) n'est pas non plus réalisé. En revanche la relation (2.3.1b) entre l'intensité réactive et la densité Lagrangienne est toujours valide. Puisqu'une polarisation linéaire

(azimutale) est à nouveau assurée, on peut toujours utiliser la relation (2.3.12).

La démonstration précédente peut être résumée comme suit : les sources de l'intensité réactive \mathbf{Q} sont liées à la moyenne temporelle de la densité Lagrangienne, pour l'acoustique comme pour les vibrations en milieu élastique, c'est à dire que la différence locale entre les moyennes temporelles des densités d'énergie cinétique et potentielle produit l'intensité réactive. Cela est vrai des ondes stationnaires, des champs proches, des ondes sphériques, mais également des ondes dans les milieux hétérogènes (voir Chapitre 5). Contrairement à ce qui se produit en acoustique, le champ \mathbf{Q} n'est pas irrotationnel dans un milieu solide élastique, et ne peut donc pas être calculé seulement à partir des sources. Des expressions générales simples pour $\text{rot}(\mathbf{Q})$ et $\text{rot}(\mathbf{I})$ ne sont pas connues. Dans les milieux homogènes, \mathbf{Q} n'est pas proportionnel au gradient de la densité d'énergie potentielle moyennée temporellement. Dans le cas général d'une polarisation linéaire (mouvement de particule rectiligne), l'évolution temporelle de la densité de flux d'énergie s'exprime à partir des intensités active et réactive ; ce n'est plus le cas si l'on s'écarte de cette polarisation particulière.

Ainsi, l'intensité vibratoire réactive semble être encore moins accessible à des interprétations claires que son équivalent, l'intensité acoustique. Pour une introduction à l'acoustique, quelques tentatives peuvent être citées, du genre suivant:

„The reactive intensity is defined as the standing wave power which is not able to propagate. Therefore, the reactive intensity describes that portion of the source energy which is stored within the structure.” [2.29]

Commentaire : qu'est ce que la puissance d'une onde stationnaire ? L'énergie « stockée » est décrite par la densité d'énergie, pas par l'intensité réactive !

Pavić [1.9] introduit une définition de l'intensité réactive différente de (2.2.19), qu'il ne développe pourtant pas dans ses travaux ultérieurs : "Reversible energy does not propagate; any orientation related to this quantity would not be physically justifiable. This is why the expressions for the reactive intensity components (...) are given in terms of squares. (...) The reactive intensity thus is not a vector quantity. It depends on orientation, however, as does the active intensity." Commentaire : qu'est

ce que l'énergie réversible ? Il y a les processus réversibles, par lesquels l'énergie peut être transférée de façon réversible dans un système thermodynamique. Ici, l'énergie qui est mentionnée est probablement celle qui, au cours d'une période d'oscillation, est successivement fournie puis reprise. Cela est décrit par le vecteur de Kirchhoff $\vec{S}(\vec{r}, t)$ dépendant du temps. Les contradictions apparaissant dans cette citation, relatives à l'orientation et à la nature vectorielle de l'intensité réactive, rendent inutile une définition fondamentale de ce type.

Gavrić, Carniel et Pavić [2.77] en reviennent à écrire la définition habituelle (2.2.19) : "The presence of reactive intensity characterizes reverberance in the field (*i.e.* systems with a considerable reflection of the energy injected) or the presence of the wattless nearfield. (...) The reactive intensity, influenced by the modal nature of the structure, completes the information of its dynamical behavior, although its physical meaning is not as clear and easily understandable as that of the active intensity. By comparing the absolute values of active and reactive intensities one can find the ratio between propagative and reverberant components of structural vibrations." Commentaire : ici encore, des notions floues comme "la réflexion de l'énergie" ou "la composante réverbérante des vibrations" tentent en vain de saisir le sens de l'intensité réactive. Que cette dernière parachève l'information sur le comportement dynamique de la structure exprime une mauvaise compréhension : il s'agit seulement d'une information complémentaire. Dans la conclusion de cet article [2.17], l'affirmation selon laquelle "The absolute value of the complex intensity (...) is equal to the energy which fluctuates in the structure, *i.e.* the difference between the instantaneous change of the energy and the net energy flow" est généralement même fautive, le cas pratique le plus important étant celui d'une onde de flexion.

De façon analogue à [1.9], on peut introduire un "indicateur de champ" ("field indicator", appelé "intensity factor" en [1.9])

$$0 \leq \frac{I}{\sqrt{I^2 + Q^2}} \leq 1 \quad (2.3.15)$$

($I=|I|$, $Q=|Q|$). Pour des ondes de flexion, Linjama [Z.4 ; Z.5] met en avant quatre "descripteurs de champ" : il s'agit également de grandeurs sans dimensions qui prennent une valeur unitaire dans le cas d'une onde de flexion (par analogie aux travaux de Linjama, la grandeur (2.3.15) est appelée "intensity efficiency"). De tels indicateurs peuvent être utiles pour l'analyse d'incertitudes de mesure. Des études complètes sur les incertitudes de différentes méthodes de mesure dans les structures bi- et tri-dimensionnelles sont encore en cours (pour faire un point sur l'état actuel, voir [1.12 ; Z.1]). L'importance, pour ce sujet, de l'intensité réactive doit donc encore être laissée ouverte.

Puisque plusieurs phénomènes rendent l'intensité réactive non nulle, cette dernière ne constitue pas un indicateur clair pour qualifier un champ vibratoire. En comparaison de l'intensité acoustique réactive, à l'exception peut-être de la relation (2.3.1b) pour la densité Lagrangienne, on en reste au fait qu'aucune relation générale utile n'est disponible pour les champs vibratoires. Actuellement, la raison pour laquelle l'intensité vibratoire réactive devrait être considérée de façon particulière n'est pas perceptible de manière convaincante. Par conséquent, elle est à peine prise en considération dans ce qui suit. Dans le développement, nous considérons plutôt l'intensité (réelle) et les densités d'énergie cinétique et potentielle, et au besoin la densité de flux d'énergie au cours du temps. Le travail [2.6] est mentionné en complément, où sont présentés les liens entre l'absorption et les intensités active et/ou réactive.

2.4. Principe de Rayleigh

Le principe de Rayleigh signifie que, dans certaines conditions, les moyennes de l'énergie cinétique et potentielle d'un champ d'ondes sont identiques. Il s'agit des travaux [2.31] de Rayleigh en l'année 1877 et aux enseignements reçus ensuite de multiples applications, en particulier sur une formulation basée sur un principe variationnel. Une monographie [2.32] a même été publiée en 1933 sur ce sujet. Les applications traitées sont pour la plupart des oscillations propres de milieux finis. Ce livre traite également de milieux infinis dans une dimension au moins, qui permettent de traiter le spectre continu de milieux infinis. Pour cette configuration, Pierce [2.33] désigne la formulation de ce principe comme le principe de Rayleigh pour des ondes progressives ('Rayleigh's principle for progressive waves'). Pierce remarque [2.33, paragraphe 4.3] que généralement, une forme de prise de moyenne doit être réalisée avant que l'égalité mentionnée ne se vérifie. L'exception la plus importante représente une onde plane propagative simple dans un fluide homogène. Dans ce cas, la différence entre les densités d'énergie cinétique et potentielle est nulle à tout instant et en tout point. Dans les autres cas, une moyenne temporelle est nécessaire (pour une poutre en flexion), ou encore une moyenne spatiale supplémentaire (onde gravitationnelle sur l'eau).

Une démonstration du principe de Rayleigh pour des ondes progressives en milieux homogènes figure dans le travail impressionnant de Lighthill sur la vitesse de groupe [2.34, pp. 23-25]. La preuve en est ci-dessous étendue à des milieux élastiques hétérogènes et anisotropes arbitraires. Cette inhomogénéité n'est toutefois pas quelconque, mais soumise à l'hypothèse d'une périodicité spatiale. Cette condition peut paraître très particulière ; elle est pourtant probablement nécessaire pour une validité exacte du principe. Dans les milieux quasi-périodiques ou désordonnés, l'égalité entre les énergies cinétique et potentielle ne pourrait être réalisée que sous une forme approchée, ou dans le cas limite d'une prise de moyenne sur un volume de taille infinie. Un cheminement théorique consiste à approcher ces milieux sous une forme périodique, auquel cas l'approximation devient correcte pour une dimension suffisante du volume utilisé pour réaliser la moyenne. L'utilisation de la théorie

développée pour des milieux périodiques n'est donc pas limitée à des milieux strictement périodiques. L'expérience enseigne qu'il existe de nombreux cas pour lesquels les détails de la distribution spatiale de l'inhomogénéité ne jouent qu'un rôle secondaire. On a alors la possibilité de choisir la géométrie, qui peut être prise en compte au mieux.

L'élastodynamique des milieux périodiques est examinée en détail dans le paragraphe 5. Pour la démonstration annoncée, l'essentiel est de savoir que, pour les équations du mouvement pour les ondes de Bloch, des solutions de la forme

$$\vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left\{\vec{p}_{\vec{k}}(\vec{r})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right\} \quad (2.4.1)$$

remplacent les solutions correspondantes des ondes planes dans un milieu homogène. La fonction $\vec{p}_{\vec{k}}(\vec{r})$ dépend du vecteur d'onde \vec{k} et est spatialement périodique, c'est à dire qu'elle vérifie la relation où \vec{g} est un vecteur de périodicité.

$$\vec{p}_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{g}) = \vec{p}_{\vec{k}}(\vec{r}). \quad (2.4.2)$$

Le principe de Rayleigh pour des ondes propagatives est maintenant prouvé pour de telles ondes de Bloch. Avec des mots, cela s'exprime ainsi : en moyennes spatiale et temporelle, les énergies cinétique et potentielle d'une onde de Bloch sont identiques. De manière équivalente, cela s'écrit mathématiquement

$$\langle\langle L \rangle\rangle = 0, \quad (2.4.3)$$

où L est la densité Lagrangienne (2.1.7) et les 'doubles parenthèses pointues' signifient la double prise de moyenne : temporelle sur une période $T = 2\pi / \omega$, et spatiale sur une cellule de périodicité spatiale. Une preuve élémentaire (2.4.3) en est possible, mais assez laborieuse (voir annexe C). Une preuve plus élégante doit être présentée ici, dans le cadre du formalisme de Lagrange et en utilisant une généralisation de la procédure utilisée par Lighthill [2.34]. Dans la première partie, on montre

que le principe de Hamilton (2.1.8) peut être aussi considéré sous la forme modifiée

$$\delta \int_T \frac{dt}{T} \int_{EZ} \frac{dV}{V_{EZ}} L = \langle\langle \delta L \rangle\rangle = 0 \quad (2.4.4)$$

(où EZ représente la cellule unitaire et V_{EZ} le volume de cette cellule), auquel cas on considère une onde de Bloch \mathbf{u} , et la variation $\delta \mathbf{u}$ doit également présenter la forme d'une onde de Bloch. À la différence du principe de variation original (2.7.8), cela signifie que la variation $\delta \mathbf{u}$ aux frontières d'intégration ne disparaît pas. La relation (2.4.4), écrite et intégrée par parties, donne

$$\begin{aligned} & \left\langle\left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \delta \dot{u}_i + \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} \delta u_{i,j} \right\rangle\right\rangle \\ &= \left\langle\left\langle \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \delta u_i \right] + \frac{d}{dx_j} \left[\frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} \delta u_i \right] \right\rangle\right\rangle \quad (2.4.5) \\ & - \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right] \delta u_i - \left[\frac{d}{dx_j} \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} \right] \delta u_i \Bigg\rangle = 0. \end{aligned}$$

Les deux derniers termes se compensent en raison des équations du mouvement (2.1.10), une intégration en temps est réalisée pour le premier terme, le second terme est converti par une intégration spatiale de surface au moyen de l'intégrale de Gauss ($d\mathbf{F}$: élément de surface) :

$$\int_{EZ} dV \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \delta u_i \right]_{-t}^{t+T} + \int_T dt \int_{EZ} dF_j \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} \delta u_i = 0. \quad (2.4.6)$$

L'expression entre crochets est le produit de l'impulsion et de la variation du déplacement, qui oscillent tous deux à la pulsation ω . Le produit évolue par conséquent à la pulsation 2ω , c'est à dire que son évolution temporelle se répète avec une période $T/2$. De cette manière, le premier terme de (2.4.6) disparaît. On doit intégrer le deuxième terme, produit des contraintes et de la variation des déplacements. Ce produit oscille également à la pulsation 2ω ; l'intégration en temps n'est toutefois pas encore réalisée et conduira en général à un résultat non nul. La périodicité spatiale doit être considérée pour annuler ce deuxième terme. Mais maintenant, ce produit n'est pas spatialement périodique avec la phase $\vec{k} \cdot \vec{r}$ comme les ondes de Bloch (2.4.1). D'abord, l'établissement d'une moyenne temporelle (en utilisant les équations (2.2.10)) élimine la dépendance par rapport à cette phase et fait apparaître la périodicité spatiale : la moyenne temporelle du produit présente, sur la surface de base de la cellule de la période spatiale, des 'points opposés deux à deux', ces deux points définissant un vecteur qui est le pas de la période spatiale. Les normales des éléments de surface correspondants pointent dans les directions opposées, de sorte que les contributions de points opposés se compensent. Comme chaque point a précisément un opposé, le deuxième terme disparaît également (2.4.6). Ceci apporte la démonstration du principe de Hamilton modifié (2.2.4).

Dans la deuxième partie de la démonstration de (2.4.3), une variation particulière est considérée, à savoir la modification d'amplitude simple des ondes de Bloch

$$\delta u_i = \alpha u_i, \quad 0 < \alpha \ll 1. \quad (2.4.7)$$

Puisque la densité Lagrangienne (2.1.7) est une fonction homogène de deuxième degré des variables \dot{u}_i et $u_{i,j}$, il s'ensuit

$$\delta L = (1 + \alpha)^2 L - L \approx 2\alpha L \quad (2.4.8)$$

et avec (2.4.4)

$$\langle\langle L \rangle\rangle = 0 \quad \text{ou encore} \quad \langle\langle e_{kin} \rangle\rangle = \langle\langle e_{pot} \rangle\rangle. \quad (2.4.9)$$

De cette façon, le principe de Rayleigh est démontré pour des ondes de Bloch dans un milieu anisotrope arbitraire et d'inhomogénéité spatiale périodique. La preuve a été conduite pour un milieu infini dans toutes ses directions. On peut imaginer que ce milieu forme une disposition périodique de plaques parallèles, de barres, ou encore de milieux finis, en considérant que les constantes d'élasticité et la masse volumique sont nuls dans l'espace qui sépare ces éléments. Par raison de symétrie, le principe de Rayleigh doit s'appliquer seulement pour chaque plaque, chaque barre, chaque structure. Des ondes propagatives ne sont toutefois possibles que dans les directions infinies de ces structures. Dans les autres directions, la solution monofréquentielle de l'équation des ondes fournira une onde stationnaire ou un mode propre (c'est à dire que le vecteur d'onde du facteur de phase des ondes de Bloch (2.4.1) est nul), pour lesquels les énergies cinétique et potentielle se répartissent à égalité. Le transfert énergétique, sans pertes d'absorption, pour un milieu fini dans toutes ses dimensions, n'est pas traité dans ce livre. En revanche la validité de (2.4.9) s'avérera particulièrement utile pour étudier des plaques et des barres par la suite. Certaines conditions particulières de symétrie peuvent apporter des simplifications particulières claires : lorsque la plaque ou la barre est homogène dans la direction de propagation, l'application de la moyenne spatiale à l'équation (2.4.9) n'a pas lieu d'être dans cette direction. Lorsque la plaque est homogène dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation, le calcul de la moyenne correspondante n'a pas non plus besoin d'être mis en œuvre. Toutefois, la prise de moyenne sur l'épaisseur de la plaque ou sur la section de la poutre est toujours nécessaire pour la validité du principe de Rayleigh, même si la plaque ou la poutre sont homogènes sur leur section.

2.5. Transfert énergétique et vitesse de groupe

Le lien entre le transport d'énergie et la vitesse de groupe a, comme principe de Rayleigh, une longue histoire. Comme on peut le lire chez Sommerfeld [2.1, pp.168-170], les premiers travaux se trouvent chez Stokes (pour la mise en évidence et la définition de la vitesse de groupe, en 1876), Reynolds et Rayleigh (pour le lien avec le transport d'énergie,

tous deux en 1877). Il a été observé dans de nombreux cas que la vitesse de groupe C et la vitesse de transport d'énergie c_e (2.1.21) se correspondent pour une onde propagative :

$$\nabla_{\vec{k}} \omega = \vec{C} = \vec{c}_e = \frac{\vec{I}}{\omega_{tot}}. \quad (2.5.1)$$

En étudiant en détails ce sujet [2.35], Biot a confirmé en 1957 l'identité (2.5.1), pour différents systèmes : dans les systèmes électromagnétiques, dans les liquides compressibles, dans les solides élastiques isotropes ou anisotropes avec et sans précontrainte, et même dans les solides hétérogènes, en étant homogènes uniquement dans la direction de propagation de l'onde. La démonstration manque pourtant parfois de la rigueur et de la clarté nécessaires pour convaincre définitivement de sa pertinence. Cela est particulièrement irritant s'agissant des ondes stationnaires ("standing wave pattern"). Une analyse complète de la procédure suivie par Biot ne peut pas être conduite ici, et nous renvoyons le lecteur, comme dans le paragraphe précédent 2.4, au travail de Lighthill [2.34] paru en 1965 (et dans lequel, d'ailleurs, Biot n'est pas cité !). La relation (2.5.1) y est prouvée pour l'onde plane dans un système homogène conservatif, dans lequel même des équations d'ondes non-linéaires sont permises. Le traitement du cas non-linéaire incombe à Whitham [2.36] et n'est pas ici poursuivi plus avant. Dans le manuel écrit par Achenbach [2.6, pp. 211-215], la démonstration de Lighthill est appliquée à un guide d'ondes homogène et isotrope de section constante.

Lighthill fait remarquer (et Achenbach avec lui) le comportement étrange des relations (2.5.1) : pour une fréquence et un nombre d'onde constants et fixés, le transport d'énergie d'une onde se fait à une vitesse qui résulte des variations de la fréquence et du nombre d'onde pour une solution de l'équation d'onde dans des conditions voisines. Ce lien est effectivement surprenant et ne se laisse clairement comprendre que difficilement. L'approche la plus éclairante consiste peut-être à considérer d'un point de vue énergétique, les réflexions cinématiques à la vitesse de groupe.

L'identité correspondante à (2.5.1) n'a jusqu'ici pas été prouvée pour une onde de Bloch dans un milieu d'anisotropie arbitraire et une inhomogénéité spatiale périodique quelconque. Pour des ondes de Bloch, cette lacune est maintenant comblée, en suivant une démarche similaire à celle de Lighthill ; le principe variationnel (2.4.4) et le principe de Rayleigh appliqué aux ondes de Bloch (2.4.9) jouent un rôle important.

Contrairement à la variation "modeste" des ondes de Bloch démontrée par le principe de Rayleigh (en considérant une augmentation de l'amplitude), les variations de la fréquence et du vecteur d'onde sont maintenant envisagées. L'onde de Bloch (2.4.1) est comparée à une onde de Bloch modifiée

$$\bar{u}_{\bar{k}}(\bar{r}, t') = \text{Re}\left\{\bar{p}_{\bar{k}}(\bar{r}) e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\Omega t')}\right\}, \quad (2.5.2)$$

$$\delta\bar{p} = \bar{p}_{\bar{K}} - \bar{p}_{\bar{k}}, \quad \delta\bar{k} = \bar{K} - \bar{k}, \quad \delta\omega = \Omega - \omega.$$

Puisque les deux définitions des ondes de Bloch sont, par définition, solutions des équations de mouvement, la modification de fréquence $\delta\omega$ est fonction de la variation $\delta\bar{k}$. Ils sont liés par la vitesse de groupe :

$$\delta\omega = \bar{C} \cdot \delta\bar{k}. \quad (2.5.3)$$

La période temporelle, sur laquelle on doit intégrer pour calculer une moyenne temporelle est, sur la base de la variation de fréquence, également différente. Par l'introduction des grandeurs temporelles

$$\tau = \omega t, \quad \tau' = \Omega t' \quad (2.5.4)$$

le calcul d'une moyenne de temporelle pour les deux ondes de Bloch peut être formulé plus généralement :

$$\int_{T^{(1)}} \frac{dt^{(1)}}{T^{(1)}} \dots = \int_{2\pi} \frac{d\tau^{(1)}}{2\pi} \dots \quad (2.5.5)$$

Le calcul de la variation de la densité Lagrangienne suivant (2.1.9) nécessite les dérivées temporelles et spatiales

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}}_{\bar{k}} &= +\omega \text{Im}\left\{\bar{p}_{\bar{k}} e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\tau)}\right\}, \\ \dot{\bar{u}}_{\bar{K}} &= +\Omega \text{Im}\left\{\bar{p}_{\bar{K}} e^{i(\bar{K}\cdot\bar{r}-\tau')}\right\}, \\ \nabla\bar{u}_{\bar{k}} &= -\bar{k} \text{Im}\left\{\bar{p}_{\bar{k}} e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\tau)}\right\}, \\ \nabla\bar{u}_{\bar{K}} &= -\bar{K} \text{Im}\left\{\bar{p}_{\bar{K}} e^{i(\bar{K}\cdot\bar{r}-\tau')}\right\}, \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

($d/dt = d/dt'$ conduit à $\dot{\tau} = \omega$ et $\dot{\tau}' = \Omega$). Pour l'établissement, ensuite, d'une moyenne temporelle en chaque point \mathbf{r} , la variable temporelle t' ou τ' peut être choisie de telle sorte que les facteurs exponentiels des deux ondes de Bloch soient identiques. Les variations s'écrivent

$$\delta\dot{\bar{u}} = \text{Im}\left\{(\bar{p}_{\bar{k}}\delta\omega + \omega\delta\bar{p})e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\tau)}\right\}, \quad (2.5.7)$$

$$\delta(\nabla\bar{u}) = -\text{Im}\left\{(\bar{p}_{\bar{k}}\delta\bar{k} + \bar{k}\delta\bar{p})e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\tau)}\right\}.$$

(Si l'on avait considéré deux ondes de Bloch avec la même caractéristique temporelle $\tau = \tau'$, un terme supplémentaire proportionnel à $\bar{k}\cdot\bar{r}$ serait apparu en plus, qui aurait rendu la démonstration plus laborieuse). Maintenant, le principe de Hamilton sous la forme (2.4.4) signifie que la variation de la densité Lagrangienne disparaît en moyenne, si le vecteur d'onde et la fréquence sont maintenus inchangés lors de la variation des ondes de Bloch. Les deuxièmes sommes de (2.5.7) peuvent par conséquent être supprimées.

Après l'application de (2.5.6a), il reste à prendre en considération :

$$\delta \dot{\vec{u}} = \dot{\vec{u}}_{\vec{k}} \frac{\delta \omega}{\omega}, \quad \delta(\nabla \vec{u}) = -\dot{\vec{u}}_{\vec{k}} \frac{\delta \vec{k}}{\omega} \quad (2.5.8)$$

D'après (2.1.9), on obtient

$$\omega \delta L = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i \delta \omega - \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} \dot{u}_i \delta k_j, \quad (2.5.9)$$

qui conduit, d'après (2.1.15) et (2.1.16), à :

$$\omega \delta L = (e_{tot} + L) \delta \omega - S_j \delta k_j \quad (2.5.10)$$

Pour achever la démonstration, il reste à réaliser une moyenne en espace et en temps. En raison du principe de Rayleigh (2.4.9), la densité Lagrangienne disparaît au second membre de (2.5.10). Ceci vaut non seulement pour la première onde de Bloch, mais aussi pour la seconde, c'est à dire que l'équation (2.4.4) s'applique aussi pour la variation considérée ici, pour laquelle le vecteur d'onde et la fréquence ont été modifiés. On obtient

$$\langle \langle e_{tot} \rangle \rangle \delta \omega = \langle \langle \vec{S} \rangle \rangle \cdot \delta \vec{k} \quad (2.5.11)$$

ou

$$\nabla_{\vec{k}} \omega = \vec{C} = \frac{\langle \langle \vec{S} \rangle \rangle}{\langle \langle e_{tot} \rangle \rangle} = \frac{\langle \langle \vec{I} \rangle \rangle}{\langle \langle w_{tot} \rangle \rangle}. \quad (2.5.12)$$

En comparant avec (2.5.1), l'établissement d'une moyenne spatiale supplémentaire est nécessaire pour trouver la relation entre la vitesse de groupe, le flux énergétique et la densité d'énergie. En cela, cette démonstration se différencie de celle réalisée pour des milieux homogènes, par ce calcul d'une moyenne sur une cellule spatiale, sans laquelle le principe de Rayleigh ne s'applique pas pour des milieux périodiquement hétérogènes. On peut donc supposer qu'une généralisation de (2.5.12) aux

milieux non-linéaires, comme celle pour des milieux homogènes de Whitham et de Lighthill, est aussi possible pour des milieux hétérogènes périodiques.

Par conséquent, ce qui a été dit dans le paragraphe 2.4 précédent pour des plaques et des poutres s'applique à (2.5.12). Le principe de Rayleigh et ces relations de transfert d'énergie constituent des relations précieuses pour le calcul des grandeurs énergétiques, mais permettent également de valider des études analytiques et numériques, ainsi que de définir le domaine de validité pour de méthodes approchées.

2.6. Transfert de quantité de mouvement (impulsion)

Après l'étude du transfert d'énergie, le transport d'impulsion est aussi brièvement présenté. D'après (2.1.17), la densité d'impulsion associée à une onde de Bloch est

$$\rho \dot{\vec{u}} = \omega \text{Im} \left\{ \vec{p}_{\vec{k}}(\vec{r}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\} \quad (2.6.1)$$

Comme pour le déplacement et la vitesse, la densité d'impulsion est nulle, en moyenne temporelle, en tout point. Si on représente deux images instantanées des vecteurs locaux de densité d'impulsion à l'intervalle d'une demi-période temporelle d'oscillation, ces deux images montrent des vecteurs de directions opposées. De même, à un instant donné, la moyenne spatiale est nulle si la longueur d'onde correspond à la période spatiale. Autrement, le même résultat est obtenu en réalisant une moyenne sur la surface totale. Pour un milieu homogène (\mathbf{p}_k spatialement constant) des zones d'extension, d'une demi longueur d'onde, se déplacent à la vitesse de phase ω/k , avec une impulsion "positive" dans la direction k . Ils sont suivis par des zones d'impulsion "négative" (*ndt.* zones de compression). En milieu périodique inhomogène, bien que de façon plus compliquée, le processus est similaire, la direction de la fonction d'impulsion \mathbf{p}_k étant alors non constante. En tout cas, aucune impulsion n'est transférée en moyenne temporelle et spatiale.

Cela résulte aussi du bilan d'impulsion, qui est identique à l'équation du mouvement (2.1.11) : dans le paragraphe 2.1, on a fait remarquer que la densité de flux pulsé est identique, au signe près, au tenseur de contraintes. La dépendance temporelle de cette grandeur est également décrite par le facteur exponentiel (2.6.1) ; par conséquent, aucun transfert d'impulsion n'a lieu en moyenne temporelle.

En moyenne, une onde de Bloch transfère bien une énergie, mais en revanche aucune impulsion. La cause physique en est que l'impulsion est associée (attachée) à la masse, donc aux points matériels du milieu solide : En moyenne dans le temps, si ces points ne se déplacent pas, aucune impulsion n'est transférée. Ce n'est qu'après qu'un point soit revenu à sa position initiale, par un mouvement de retour, que l'impulsion a été transférée. Cela peut s'illustrer par l'enfoncement d'un clou au moyen d'un coup de marteau dans un morceau de bois. L'impulsion du marteau est d'abord transférée sur la tête du clou et se déplace jusqu'à la pointe du clou à la vitesse du son. Le temps de vol, pour un clou de 5 cm de longueur, dure environ 10 μ s (vitesse des ondes quasi-longitudinales de 5000 m/s). Les processus suivants (répartis entre la réflexion de l'onde et le transfert d'impulsion et d'énergie au bois) sont dans le détail compliqués et ne sont pas plus examinés ici. Les premiers instants se modélisent toutefois facilement comme un impact sur une demi-poutre infinie. L'équation des ondes est, dans ce milieu mono-dimensionnel ($x \geq 0$)

$$\ddot{u} - c^2 u'' = 0 \quad (2.6.2)$$

(où c est la célérité du son) et a pour solution des ondes progressive dans la direction x

$$u = A \sin(kx - \omega t + \varphi). \quad (2.6.3)$$

Lors d'une excitation à l'extrémité ($x = 0$) de la barre avec la force $F(t)$, on peut obtenir la vitesse à l'origine $x = 0$ à l'aide de l'impédance d'entrée [2.13, p. 275]

$$\frac{F(t)}{\dot{u}(0, t)} = \rho c \quad (2.6.4)$$

(où ρ est la densité linéique de masse [kg/m]). La solution complète sur la poutre résulte de la combinaison de solutions du type (2.6.3) pour les ondes. Une force sinusoïdale

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \quad (2.6.5)$$

présente la solution

$$u(x, t) = -\frac{F_0}{\rho c \omega} \cos(kx - \omega t), \quad (2.6.6)$$

qui ne transfère pas d'impulsion en moyenne temporelle. Un impact sur la poutre est simulé avec une impulsion de Dirac

$$F(t) = F_0 T_0 \delta(t) = \frac{F_0 T_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) d\omega \quad (2.6.7)$$

($F_0 T_0$: "impact de force") superposant la solution correspondant à la solution du saut θ de Heaviside

$$u(x, t) = \frac{F_0 T_0}{\rho c} \theta(ct - x). \quad (2.6.8)$$

À un instant $t > 0$, les points de la barre situés entre $x = 0$ et $x = ct$ sont déplacés vers la droite de $F_0 T_0 / (\rho c)$, tandis que le reste de la poutre n'a encore rien perçu de l'impact. La densité d'impulsion

$$\rho \dot{u}(x, t) = F_0 T_0 \delta(ct - x) \quad (2.6.9)$$

n'est non nulle qu'au point d'abscisse mobile $x = ct$. L'impulsion totale $F_0 T_0$ de la poutre est obtenue par une intégration spatiale autour de ce point ; elle est concentrée en ce point et se déplace à la vitesse c dans la direction x . L'intégration temporelle de (2.6.9) donne $F_0 T_0 / c$ en chaque point, lorsque intégré seulement entre $t = 0$ et $t > x/c$. Ces moyennes différentes de zéro viennent naturellement du fait que la force excitatrice ne possède qu'une valeur positive.

Le coup de marteau peut être représenté de façon légèrement plus réaliste par une poutre frappée par une masse m avec la vitesse v_0 .

Après l'impact (à $t = 0$), la masse est freinée

$$-m\ddot{u}(0, t) = \rho c \dot{u}(0, t). \quad (2.6.10)$$

Compte tenu de la condition initiale $u(0,0) = 0$ la solution

$$u(x, t) = \frac{v_0 m}{\rho c} \left[1 - e^{-\frac{\rho}{m}(ct-x)} \right] \theta(ct - x) \quad (2.6.11)$$

est trouvée, avec la densité d'impulsion

$$\rho \dot{u}(x, t) = \rho v_0 e^{-\frac{\rho}{m}(ct-x)} \theta(ct - x). \quad (2.6.12)$$

À partir des déformations $u'(x, t) = -\dot{u}(x, t)/c$ et de la constante d'élasticité $\xi = \rho c^2$, la contrainte

$$\sigma_{xx}(x, t) = -\frac{v_0 \xi}{c} e^{-\frac{\rho}{m}(ct-x)} \theta(ct - x), \quad (2.6.13)$$

est obtenue, qui représente en même temps la densité de flux d'impulsion négative. Une intégration en temps de $t = 0$ à $t = \infty$ donne l'impulsion totale transférée à travers l'abscisse x . En divisant la densité de flux pulsé par la densité d'impulsion, on voit que le transfert d'impulsion se fait à la vitesse du son c , comme cela est attendu de la dépendance $(ct-x)$. Les grandeurs du second ordre sont rapidement écrites :

$$e_{kin} = e_{pot} = \frac{1}{2} \rho v_0^2 e^{-\frac{2\rho}{m}(ct-x)} \theta(ct - x). \quad (2.6.14)$$

Le principe de Rayleigh est appliqué ici à un milieu linéaire, à un instant et localement. De même, la relation (2.5.12) entre la densité d'énergie et la densité de flux d'énergie est utilisée instantanément et localement :

$$S_x = -\sigma_{xx} \dot{u} = e_{tot} c. \quad (2.6.15)$$

Au total, l'énergie $mv_0^2/2$, énergie fournie par la masse m impactant la barre, est transférée. Dans le cas limite $m \rightarrow 0$, $v_0 \rightarrow \infty$ pour lequel $m v_0 = F_0 T_0$, on retrouve le cas traité précédemment d'un impact – impulsion de Dirac. La fonction

$$\delta(z) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha e^{-\alpha z} \theta(z) \quad (2.6.16)$$

peut évidemment être considérée comme une représentation spéciale de la fonction δ .

Par analyse de Fourier, les processus décrits peuvent être attribués à une somme et/ou une intégrale pour une onde mono-fréquentielle. Si le flux d'impulsion ne disparaît pas dans une moyenne temporelle, cela représente une amplitude finie pour une "onde" de pulsation nulle $\omega = 0$, c'est à dire un déplacement d'ensemble du milieu. Ce cas est caractéristique de processus transitoires sous l'effet de forces excitatrices dont la moyenne de temporelle est non nulle.

2.7. Superposition des champs vibratoires

Dans le cadre de l'élastodynamique linéaire, la superposition de deux solutions de l'équation mouvement est elle-même solution de cette équation. La densité de flux d'impulsion "de la solution totale" s'obtient, comme toutes les autres grandeurs du premier ordre, par la superposition linéaire des grandeurs "des solutions séparées". Cette superposition n'est en général pas vérifiée pour les grandeurs du deuxième ordre. Un exemple simple en est que lors de la superposition de deux solutions identiques, les grandeurs énergétiques ne doublent pas, mais quadruplent. Il y a, toutefois, des cas importants pour lesquels des grandeurs énergétiques sont additionnelles en moyenne temporelle. La superposition de deux solutions avec une forme temporelle sinusoïdale de fréquences différentes en fait partie. Les termes croisés disparaissent en effet lors de l'intégration sur une période de temps d'une période d'oscillation commune et/ou sur un temps infiniment long, dans le cas d'un rapport irrationnel des fréquences. Nous excluons l'étude, généralement compliquée, de la superposition de processus variables, et nous limitons à la superposition de solutions à une même fréquence. La présentation complexe (voir paragraphe 2.2) est utilisée à nouveau avec avantage.

En superposant deux solutions (d'indices 1 et 2), on peut montrer les expressions suivantes pour les densités d'énergie et l'intensité moyennes:

$$w_{kin} = \frac{\rho}{4} [\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1^* + \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2^* + 2 \operatorname{Re}\{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2^*\}], \quad (2.7.1)$$

$$w_{pot} = \frac{1}{4} [\underline{\Sigma}_1 \cdot \underline{E}_1^* + \underline{\Sigma}_2 \cdot \underline{E}_2^*] + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{\Sigma}_1 \cdot \underline{E}_2^*\}, \quad (2.7.2)$$

$$\bar{I} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{\Sigma}_1 \cdot \vec{V}_1^* + \underline{\Sigma}_2 \cdot \vec{V}_2^* + \underline{\Sigma}_1 \cdot \vec{V}_2^* + \underline{\Sigma}_2 \cdot \vec{V}_1^*\}. \quad (2.7.3)$$

Les conditions d'additivité de ces grandeurs sont donc :

$$\operatorname{Re}\{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2^*\} = 0, \quad (2.7.4)$$

$$\operatorname{Re}\{\underline{\Sigma}_1 \cdot \underline{E}_2^*\} = 0, \quad (2.7.5)$$

$$\operatorname{Re}\{\underline{\Sigma}_1 \cdot \vec{V}_2^* + \underline{\Sigma}_2 \cdot \vec{V}_1^*\} = 0. \quad (2.7.6)$$

Elles ne doivent pas seulement être vérifiées localement, mais sur l'ensemble du milieu. Pour exclure les cas triviaux, on suppose que chaque amplitude de tenseur et/ou de vecteur complexe possède au moins une composante non nulle.

En milieu unidimensionnel homogène, l'additivité des grandeurs énergétiques permet de résoudre facilement la question. On considère la solution générale pour un milieu sans force excitatrice extérieure : la superposition de deux ondes progressives, l'une vers la droite et l'autre vers la gauche.

$$V_1 = A_1 e^{ikx}, \quad V_2 = A_2 e^{-i(kx+\varphi)}, \quad A_1, A_2 > 0. \quad (2.7.7)$$

Avec un module élastique $\zeta = \rho c^2$, on obtient pour chaque onde séparée ($i = 1, 2$)

$$w_{kin}^{(i)} = \frac{\rho}{4} A_i^2, \quad w_{pot}^{(i)} = \frac{\zeta}{4c^2} A_i^2 = w_{kin}^{(i)}, \quad (2.7.8)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \rho c A_1^2, \quad I_2 = -\frac{1}{2} \rho c A_2^2 \quad (2.7.9)$$

et pour leur superposition

$$w_{kin} = w_{kin}^{(1)} + w_{kin}^{(2)} + \frac{\rho}{2} A_1 A_2 \cos(2kx + \varphi), \quad (2.7.10)$$

$$w_{pot} = w_{pot}^{(1)} + w_{pot}^{(2)} - \frac{\rho}{2} A_1 A_2 \cos(2kx + \varphi),$$

$$I = I_1 + I_2. \quad (2.7.11)$$

Les moyennes temporelles des densités d'énergie cinétique et potentielle ne sont donc pas additives, alors que celles de la densité d'énergie totale et de l'intensité le sont toutes deux. Les moyennes temporelles de la densité Lagrangienne et de l'intensité réactive ne sont pas additives non plus.

$$Q_1 = Q_2 = 0 \quad Q = \rho c A_1 A_2 \sin(2kx + \varphi). \quad (2.7.12)$$

C'est seulement si une moyenne spatiale supplémentaire est réalisée, sur au moins une demi longueur d'onde, que ces grandeurs sont additives.

Pour l'ensemble de ces deux ondes, le principe de Rayleigh n'est pas vérifié localement, mais seulement après l'établissement d'une moyenne spatiale. La vitesse de propagation de l'énergie

$$c_e = \frac{I}{w_{tot}} = c \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}, \quad 0 < \frac{A_2}{A_1} = \beta < \infty \quad (2.7.13)$$

est toujours inférieure aux vitesses de groupe et de phase des deux ondes séparées. La relation (2.5.1) ne s'applique pas, puisqu'on ne peut plus parler de 'groupe d'ondes', au sens habituel, pour la superposition d'ondes contre-propagatives ; il n'y a donc pas de vitesse de groupe.

On ne peut pas, juste sur la base de ces constatations, en déduire uniformément que la densité d'énergie w_{tot} et l'intensité soient additives lors de la superposition d'ondes quelconques. La superposition d'ondes stationnaires

$$V_1 = A_1 \cos(kx), \quad V_2 = iA_2 \cos(kx + \varphi) \quad A_1, A_2 > 0 \quad (2.7.14)$$

vérifie certes séparément l'additivité de w_{kin} et w_{pot} ,

$$w_{kin} = \frac{\rho}{4} A_1^2 \cos^2(kx) + \frac{\rho}{4} A_2^2 \cos^2(kx + \varphi), \quad (2.7.15)$$

$$w_{pot} = \frac{\rho}{4} A_1^2 \sin^2(kx) + \frac{\rho}{4} A_2^2 \sin^2(kx + \varphi),$$

mais l'intensité ne s'avère pas additive si le déphasage spatial φ n'est pas de 0° ou de 180° :

$$I_1 = I_2 = 0, \quad I = -\frac{1}{2} \rho c A_1 A_2 \sin \varphi. \quad (2.7.16)$$

En revanche, l'intensité réactive est dans ce cas additive :

$$Q = \frac{1}{4} \rho c \{ A_1^2 \sin(2kx) + A_2^2 \sin(2kx + 2\varphi) \} \quad (2.7.17)$$

La relation (2.3.7), universellement valable, se laisse facilement vérifier pour ces deux exemples de superposition.

Encore serait-il déraisonnable de croire, sur la base de l'additivité pour des d'ondes contre-propagatives, que l'additivité de w_{tot} et de I soit acquise. Pour illustrer cela, on considère deux ondes, non dans la même direction de propagation, mais à 90° entre elles

$$V_1 = A_1 e^{ikx}, \quad V_2 = A_2 e^{i(kx + \frac{\pi}{2})}, \quad A_1, A_2 > 0, \quad (2.7.18)$$

qui se combinent en une onde de phase Γ et d'amplitude totale B , dont le carré de l'amplitude est la somme des carrés des amplitudes des composantes :

$$V = V_1 + V_2 = (A_1 + iA_2)e^{ikx} = Be^{i(kx + \Gamma)}, \quad (2.7.19)$$

$$B^2 = A_1^2 + A_2^2, \quad \Gamma = \arctan\left(\frac{A_2}{A_1}\right).$$

Il en résulte que toutes les moyennes temporelles des grandeurs énergétiques sont additives. A la superposition (2.7.19) de deux composantes, on peut ajouter une onde supplémentaire, de nombre d'onde $+k$ et de phase $\pm\pi/2$, sans que cette additivité ne se perde. Ce jeu peut être poursuivi à l'infini ; l'onde, résultant d'une série sur les $(N-1)$ composantes d'ondes, possède un carré d'amplitude

$$B_N^2 = \sum_{j=1}^N A_j^2 \quad (2.7.20)$$

et une phase

$$\Gamma_N = \arctan\left(\frac{A_N}{B_{N-1}}\right). \quad (2.7.21)$$

Si les composantes d'ondes sont superposées dans une série différente, l'additivité s'avérera toujours vérifiée, si les N ondes partielles sont toutes bien contenues dans la somme.

L'analyse de ces trois exemples enseigne qu'on ne peut pas répondre une fois pour toutes à la question de l'additivité des grandeurs énergétiques lors de la superposition des solutions.

Parfois, l'additivité est seulement vérifiée après l'établissement d'une moyenne spatiale, parfois pas du tout comme en (2.7.16). Pour un milieu homogène unidimensionnel, le plus remarquable est que, pour un champ composé d'une onde se propageant vers la droite et l'autre vers la gauche (2.7.7), l'intensité et la densité d'énergie totale moyennées temporellement sont additives.

Pour discuter de milieux bidimensionnels et tridimensionnels, nous revenons aux conditions (2.7.4-6). La moyenne temporelle de la densité d'énergie cinétique est additive lorsque les amplitudes de vitesse des composantes sont orthogonales entre elles. Cette orthogonalité est une condition suffisante, mais pas nécessaire. Elle n'exige pas seulement d'annuler la partie réelle du produit $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2^*$, mais aussi sa partie imaginaire. L'additivité est vérifiée dans l'exemple unidimensionnel (2.7.18-19) parce que ce produit est purement imaginaire. De tels cas particuliers ne sont plus considérés ci-dessous. Ces conditions sont réalisées lorsque les différences de phase entre les composantes vérifient les relations (2.7.4-6). Par une modification de cette différence de phase, un produit peut être rendu, à volonté, réel ou imaginaire. Pour les densités d'énergie, la partie imaginaire des produits doit par conséquent également disparaître :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2^* = 0, \quad \underline{\Sigma}_1 \cdot \underline{E}_2^* = 0. \quad (2.7.22)$$

Pour l'intensité, la disparition de la partie imaginaire de la résultante (2.7.6) est synonyme d'une intensité réactive minimale. Il s'agit alors d'une condition supplémentaire, qui ne doit pas être confondue avec la condition d'additivité de l'intensité active. La variation φ de la différence de phase entre deux composantes (2.7.6) se présente comme suit :

$$\text{Re}\{\underline{\Sigma}_1 \cdot \vec{V}_2^* e^{i\varphi} + \underline{\Sigma}_2 \cdot \vec{V}_1^* e^{-i\varphi}\} = 0. \quad (2.7.23)$$

Pour un φ arbitraire, ce n'est vérifié que si les parties réelles des deux produits (2.7.6) se compensent et si les parties imaginaires sont identiques. Cette condition peut avantageusement être écrite sous la forme

$$\underline{\Sigma}_1 \cdot \vec{V}_2^* + \underline{\Sigma}_2 \cdot \vec{V}_1^* = 0 \quad (2.7.24)$$

La condition correspondante pour l'intensité réactive s'obtient en remplaçant le signe plus par un signe moins.

Combien de composantes, avec des différences de phase arbitraires, peut-on au plus superposer pour calculer une grandeur énergétique comme la somme des valeurs de ces composantes ? La réponse est simple pour la

moyenne de temporelle de la densité d'énergie cinétique : dans un milieu à n -dimensions, tout au plus n composantes, puisque au plus n vecteurs de composantes complexes y sont orthogonaux entre eux. Pour la densité d'énergie potentielle, les relations sont plus difficiles. Si les amplitudes des composantes du tenseur associé sont présentées par leurs valeurs et vecteurs propres (*ndt.* suivant leurs valeurs & directions principales), la condition (2.7.22b) se présente comme

$$\underline{\Sigma}_1 \cdot \underline{E}_2^* = \left(\sum_{\alpha=1}^n \sigma \vec{\eta} \vec{\eta} \right) \cdot \left(\sum_{\beta=1}^n \varepsilon \vec{\zeta} \vec{\zeta} \right)^* = \sum_{\alpha,\beta} \sigma \varepsilon \left(\vec{\eta} \cdot \vec{\zeta}^* \right)^2 = 0, \quad (2.7.25)$$

ce qui laisse plus de liberté à leur réalisation que (2.7.22a). Ainsi, des termes de la somme peuvent se compenser, et chaque terme particulier peut s'annuler, tandis que le produit scalaire des vecteurs propres ou le produit des valeurs propres disparaît. La forme générale (2.7.25) n'est cependant pas propice à répondre à la question posée plus haut, car tous les tenseurs symétriques complexes ne se laissent pas représenter par leurs valeurs et vecteurs propres (voir annexe D). Pour cette raison, le changement de base est présenté pour une représentation cartésienne des tenseurs symétriques \underline{t} [annexe D, d'après (D.24) pour $n = 3$] :

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}_1 \cdot \underline{E}_2^* &= \left(\sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha} \underline{t}_{\alpha} \right) \cdot \left(\sum_{\beta=1}^N b_{\beta}^* \underline{t}_{\beta} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha} b_{\alpha}^* = 0; \quad N = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned} \quad (2.7.26)$$

Le produit scalaire de deux vecteurs à N -dimensions doit s'annuler. Conformément au fait que tout au plus N des vecteurs à N -dimensions sont orthogonaux deux à deux, tout au plus N composantes peuvent être superposées pour que la densité d'énergie potentielle soit additive en moyenne temporelle.

Cette limite haute peut-elle effectivement être atteinte ? Aucun doute n'existe pour des milieux unidimensionnels ($N = 1$) ; pour des milieux bi- et tridimensionnels, cela donne respectivement $N = 3$ et $N = 6$ composantes. Cela ne semble pas être possible. Pour $n=2$ en milieu homogène et isotrope, une onde de compression et une onde de cisaillement de même direction peuvent se superposer de telle sorte que w_{pot} soit additive. Mais toute autre onde provoque l'apparition de termes croisés. Pour $n = 3$, w_{pot} et w_{kin} sont additifs lors de la combinaison d'une onde de compression et de deux ondes de cisaillement de même direction

$$\vec{V}_1 = v_0 \vec{e}_x e^{ik_1 x}, \quad \vec{V}_2 = v_0 \vec{e}_y e^{ik_1 x}, \quad \vec{V}_3 = v_0 \vec{e}_z e^{ik_1 x}, \quad (2.7.27)$$

mais aussi la combinaison de trois ondes de cisaillement dans les trois directions l'espace

$$\vec{V}_1 = v_0 \vec{e}_y e^{ik_1 x}, \quad \vec{V}_2 = v_0 \vec{e}_z e^{ik_1 y}, \quad \vec{V}_3 = v_0 \vec{e}_x e^{ik_1 z} \quad (2.7.28)$$

(\vec{e}_i : vecteur unitaire de la direction i). Une onde peut encore être ajoutée à ces deux combinaisons, de sorte que w_{pot} reste encore additive, w_{kin} présentant toutefois un terme de produit croisé. On ajoute par exemple à la première combinaison l'onde de cisaillement

$$\vec{V}_4 = v_0 \vec{e}_z e^{ik_1 y}, \quad (2.7.29)$$

à la seconde par exemple l'onde de compression

$$\vec{V}_4 = v_0 \vec{e}_x e^{ik_1 x}. \quad (2.7.30)$$

Le cas $n = 2$ peut être considéré dans les éq. (2.7.27-30), en supprimant par exemple tous les termes en z .

Lors de la construction de ces exemples, on a supposé que la constante de Lamé λ et le coefficient de Poisson σ sont non nuls, comme il se trouve avec les matériaux usuels. Cela entraîne que pour une onde de compression, toutes les composantes diagonales du tenseur des contraintes sont non nulles, même si une seule composante diagonale du tenseur des déformations est non nulle (voir la loi de Hooke (2.1.3)). Les ondes de compression ne peuvent donc pas être superposées sans que des termes

croisés n'apparaissent. C'est seulement dans des cas exotiques que la contraction transversale peut disparaître, si les directions de propagation sont orthogonales entre elles. La limite supérieure de N peut maintenant effectivement être atteinte : on ajoute à la combinaison (2.7.28) les trois ondes de compression

$$\vec{V}_4 = v_0 \vec{e}_x e^{ik_1 x}, \quad \vec{V}_5 = v_0 \vec{e}_y e^{ik_1 y}, \quad \vec{V}_6 = v_0 \vec{e}_z e^{ik_1 z}. \quad (2.7.31)$$

L'exemple correspondant pour $n = 2$ fait à nouveau ressortir l'absence d'ondes qui contiennent par exemple les coordonnées en z : il reste deux ondes de compression et une onde de cisaillement.

Passons maintenant à l'intensité : la condition (2.7.24) constitue – pour $V_1=V$ et $\underline{\Sigma}_1=\underline{S}$ donnés – un système homogène d'équations pour n ($n+3$) /2 composantes inconnues de $V_2^*=\underline{W}$ et $\underline{\Sigma}_2^*=\underline{T}$. Puisque au moins une composante de \underline{S} doit être différente de zéro, la matrice rectangulaire du système d'équations a pour rang n . Cela s'écrit clairement dans le cas $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & V_1 & V_2 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 & V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ T_{11} \\ T_{12} \\ T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7.32)$$

Dans chaque ligne, les composantes de V apparaissent dans des colonnes différentes, de sorte qu'apparaît au moins un sous-déterminant $n \times n$ différent de zéro, ce dont se dérive le rang $r = n$. Par conséquent, il y a $n(n+1)/2$ solutions linéairement indépendantes (\underline{W} , \underline{T}). Le décompte (V , \underline{S}) donne

n	$M = n(n+1)/2 + 1$	$2n$
1	2	2
2	4	4
3	7	6

Pour $n = 1$ et $n = 2$, M prend la valeur $2n$. Dans un système à une seule dimension, la limite $M = 2$ peut être atteinte (voir (2.7.7-11)). Dans le cas exotique $\sigma = 0$ obtenu avec les couples orthogonaux d'ondes de compression se propageant en directions opposées, les valeurs $M = 4$ et $M = 6$ se laissent atteindre, donc $M = 2n$. $M = 7$ ne peut probablement pas être réalisé. Avec les six ondes de compression superposées, la septième solution "manquante" (23.24) ne représente pas une onde élastodynamique, parce que de ses neuf composantes, seulement une composante non diagonale du tenseur des contraintes est non nulle. Le fait que les composantes de contrainte et de vitesse ne sont pas complètement indépendantes l'une de l'autre, mais sont liées par la loi de Hooke généralisée et l'équation du mouvement, peut avoir pour conséquence qu'une solution du système d'équations ne soit pas une composante d'onde. Des arguments de symétrie donnent à penser que c'est le cas, en principe, pour au moins une des sept solutions : intuitivement, on attend des conditions de symétrie aussi nombreuses que possible pour "la superposition maximale". Puisque chaque composante d'onde possède une direction privilégiée suivant sa polarisation ou sa direction de propagation, une symétrie plus élevée est possible avec six composantes d'onde qu'avec sept [composantes]. Dans le cas général avec $\sigma \neq 0$, la configuration maximale pour que l'intensité soit additive est, pour $n = 2$ d'un couple d'ondes de compression ou d'ondes de cisaillement de directions opposées, et pour $n = 3$ de deux couples parallèles d'ondes de cisaillement de directions opposées, avec des polarisations orthogonales entre elles.

On renonce ici à analyser d'autres exemples particuliers (la superposition de deux ondes planes en réflexion sur une surface libre est encore traitée au paragraphe 3.2). Pour résumer, on peut dire que si l'additivité des grandeurs énergétiques est recherchée, les possibilités de superposition sont en tout cas très limitées. Suivant les circonstances, la densité d'énergie totale se prête parfois mieux à cette superposition que chacune des densités d'énergie cinétique et potentielle considérées séparément. La formation de moyennes spatiales pourrait être la méthode la plus prometteuse pour étendre cette possibilité. Cela peut être illustré par l'exemple unidimensionnel (2.7.7), pour lequel on doit intégrer sur une demi longueur d'onde. Dans le cas multidimensionnel, différents types

d'ondes et donc différentes longueurs d'onde peuvent apparaître et rendre une intégration nécessaire à une plus grande échelle spatiale. Dans d'autres cas, une intégration n'apportera rien, même appliquée au domaine entier (voir (2.7.16)). Lors de la superposition d'ondes, qu'une certaine grandeur énergétique soit additionnelle ne signifie nullement que les autres grandeurs énergétiques le sont également.

En principe, l'utilisation pratique de l'additivité lors d'applications théoriques ou expérimentales par une intégration spatiale à l'échelle souhaitée rencontre des limites. Avec des poutres et des plaques, seules les grandeurs énergétiques intégrées sur une section présentent souvent un intérêt. L'additivité lors de la superposition de modes de plaque ou de poutre mérite donc une étude détaillée. Pavić [2.37] démontre que pour représenter précisément le flux d'énergie entre deux sources ponctuelles sur une poutre mince, beaucoup de modes vibratoires doivent être pris en compte.

Des efforts ont été faits pour décrire les transferts énergétiques d'un système élastique par une équation du type conduction de la chaleur ou de diffusion. A cet égard, les travaux russes [2.38-40] méritent une considération particulière, ainsi que les travaux américains [2.41] (pour lesquels la contradiction entre les eq. (1) de [2.40] et eq. (38) de [2.41] requiert encore une clarification). Pour appliquer ces méthodes, une condition est de considérer l'absorption de matériau. Généralement, l'établissement d'une moyenne spatiale sur une longueur d'onde est nécessaire ; le champ d'application concerne donc particulièrement les moyennes et hautes fréquences. L'objectif est une description locale du champ, plutôt que globale, comme le fait l'analyse statistique énergétique (SEA).

Les deux travaux de Carcaterra et Sestieri [Z.7 ; Z.8], qui montrent que l'analogie thermique n'est en général pas vérifiée, présentent un intérêt particulier. Plutôt que sur la densité d'énergie totale, ils fixent alors leur attention sur la densité d'énergie cinétique, qui - au moins pour des structures unidimensionnelles - est lissée spatialement au moyen de la transformation de Hilbert. Des équations sont dérivées pour cette "énergie enveloppe", qui présentent un intérêt. (Une description plus précise conduirait ici trop loin). Si cette formulation est généralisée à des

structures bi- et tridimensionnelles, on peut s'attendre à des progrès considérables en comparaison de la SEA.

D'autres recherches pour décrire élégamment ou effectivement un système dynamique par des "formulations énergétiques" sont entachées d'erreurs, ou d'exactitude douteuse [2.42-43]. Le premier travail pose par exemple, de façon erronée, l'additivité de l'intensité réactive et de la densité Lagrangienne pour le cas (2.7.7-12) traité plus haut. Une discussion détaillée en est ici exclue.

3. Milieux homogènes isotropes

3.1. Milieux infinis

Les ondes élastiques dans un milieu homogène isotrope d'extension infinie en toutes directions doivent être décrites, et elles sont présentées dans tout manuel sérieux sur l'acoustique solide. Les relations énergétiques sont aussi occasionnellement traitées [2.13, pp.75-90]. Il suffit donc de présenter les équations fondamentales sans plus d'explications détaillées.

Dans un milieu élastique isotrope il y a deux sortes d'ondes planes

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{U} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}, \quad (3.1.1)$$

qui se différencient par leurs polarisations. Les ondes de dilatation ou de compression sont polarisées longitudinalement ($\vec{U} \parallel \vec{k}$), les ondes de cisaillement sont polarisées transversalement ($\vec{U} \perp \vec{k}$). Leurs vitesses de phase

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.1.2)$$

et vecteurs d'onde sont indicés en conséquence, avec un l et un t . Le champ de déplacement (3.1.1) est irrotationnel pour les ondes longitudinales ($\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0}$, déformations de volume et sans rotations), indivergent pour les ondes transversales ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$; déformations à volume constant). La direction de propagation d'une onde peut être définie suivant x sans perte de généralité. Les amplitudes de vitesse sont données par

$$\vec{V}_l = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

Tandis que la direction du vecteur vitesse est définie pour une polarisation longitudinale, il y a une infinité de directions possibles pour une

polarisation transversale. D'après la convention (3.1.3), les amplitudes des tenseurs de déformation et de contraintes prennent la forme

$$\begin{aligned} \underline{E}_l &= -\frac{v_0}{c_l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \underline{E}_t &= -\frac{v_0}{2c_t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \underline{\Sigma}_l &= -\rho c_l v_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, & \underline{\Sigma}_t &= -\frac{1}{2} \rho c_t v_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Les densités d'énergie et densités de flux et leurs moyennes temporelles possèdent la même forme pour les deux types d'ondes

$$\begin{aligned} e_{kin} &= e_{pot} = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \cos^2(kx - \omega t), & \vec{S} &= \rho v_0^2 c \vec{e}_x \cos^2(kx - \omega t), \\ w_{kin} &= w_{pot} = \frac{1}{4} \rho v_0^2, & \vec{I} &= \frac{1}{2} \rho v_0^2 c \vec{e}_x = (w_{kin} + w_{pot}) c \vec{e}_x. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Le nombre d'onde k et la vitesse c ne doivent être fournis qu'avec l'indice adapté l ou t . Les équations montrent que la vitesse de groupe et de propagation énergétique est identique à la vitesse de phase, instantanément et en moyenne temporelle. L'intensité réactive d'une onde particulière est nulle, indépendamment du temps et en tout point.

Les équations de ces ondes planes sont présentées dans les paragraphes 2.3 (voir les éq. (2.3.8-11)) et 2.7, et sont à la base de l'analyse de ce qui suit traitant des réflexions sur une surface libre. Des ondes cylindriques ou sphériques peuvent également être comprises comme la superposition d'ondes planes; cependant, ce n'est possible qu'à condition d'y associer une inhomogénéité du milieu près du centre, afin d'éviter la singularité que présentent les ondes au voisinage de l'origine (voir annexes A et B).

3.2. Milieux délimités par une surface libre plane

Le milieu solide élastique semi-infini (occupant un demi-espace) est également fréquemment étudié dans les manuels. En élastodynamique, le sujet principal est celui de la réflexion d'ondes planes sur une surface libre. Le cas général peut être représenté comme la combinaison linéaire de trois cas particuliers :

- onde incidente longitudinale (onde L),
- onde incidente transversale de polarisation dans le plan d'étude (onde T1),
- onde incidente transversale de polarisation perpendiculaire au plan d'étude (onde T2).

Le plan de l'étude est défini par le vecteur d'onde de l'onde incidente et le vecteur normal à la surface libre. La loi fondamentale de réflexion s'applique : angle d'incidence = angle de réflexion. Des ondes supplémentaires peuvent apparaître dans les cas *a)* et *b)* :

- onde - T1 sous un plus petit angle de réflexion,
- onde - T2 sous un plus grand angle de réflexion.

L'amplitude des ondes réfléchies relativement à celle de l'onde incidente peuvent être obtenues facilement d'après Landau-Lifschitz [2.5, p.116] ou encore par la représentation graphique en fonction du coefficient de Poisson d'après Pollard [2.8, pp.60-63] et Achenbach [2.6, pp.171-181]. Il existe aussi, dans les cas *a)* et *b)*, des incidences particulières pour lesquelles une seule onde est réfléchie, par exemple sous incidence normale, avec une "conversion de mode" complète (aussi appelée "conversion d'onde") de $L \rightarrow T1$ ou $T1 \rightarrow L$, ou encore dans le cas *b)* si l'angle de réflexion pour les ondes-L devenait plus grand que 90° . Dans ce dernier cas se forme en plus une onde de surface forcée, dont l'amplitude décroît exponentiellement avec la distance à la surface [2.13 pp. 147-150, 2.6 pp.179-180].

Des considérations énergétiques se trouvent dans les travaux de Cremer & Heckl [2.13, p.146, p.149] et Achenbach [2.6, pp. 181-182].

Dans ces deux ouvrages, un bilan énergétique est établi sur une zone spatiale en forme de bande parallèlement au vecteur d'onde. À l'extérieur de ces bandes, le milieu doit se trouver au repos. Il est tacitement négligé que les équations du mouvement ne sont pas satisfaites sur les frontières de cette bande. Si on s'éloigne maintenant suffisamment de la zone de réflexion de l'onde incidente dans la direction de ces bandes, ces bandes ne se chevauchent plus, et le bilan énergétique est simplement composé des contributions des ondes particulières indépendantes. Cette procédure n'est pas rigoureuse, et le résultat du bilan énergétique est en contradiction avec les conditions aux limites sur la surface pour les amplitudes des ondes.

On montre ci-après comment la superposition des ondes incidente et réfléchie affecte les densités d'énergie et l'intensité. L'additivité habituelle des grandeurs énergétiques est obtenue après l'établissement d'une simple moyenne spatiale, sans user de la notion contestable de bande.

Outre les ondes de surface forcées qui ne sont pas analysées ici plus loin, toutes les ondes réfléchies sur la surface $y=0$ se laissent décrire comme

$$\begin{aligned} \vec{u}_n &= A_n \vec{P}_n e^{i(\vec{k}_n \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ \vec{k}_n &= k_n \vec{e}_n; \quad \vec{e}_n \cdot \vec{e}_z = 0, \\ \vec{P}_n &= \begin{cases} \vec{e}_n & \text{L - Wellen} \\ \vec{e}_n \times \vec{e}_z & \text{für T1 - Wellen} \\ \vec{e}_z & \text{T2 - Wellen} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

(où \vec{e}_n est le vecteur unitaire dans la direction de propagation, \vec{e}_z le vecteur unitaire dans la direction z ; k_n représente k_l ou k_t). Il s'agit d'ondes planes polarisées linéairement, dont les amplitudes peuvent être considérées comme réelles. On superpose maintenant ces deux ondes :

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad (3.2.2)$$

Les grandeurs énergétiques résultant de cette superposition sont obtenues à partir des contributions des ondes partielles, d'après les équations (3.1.5) et les termes croisés :

$$\begin{aligned} w_{kin} &= w_{kin1} + w_{kin2} + w_{kin12}, \\ w_{pot} &= w_{pot1} + w_{pot2} + w_{pot12}, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_{12}.$$

Les termes croisés sont donnés par

$$\begin{aligned} w_{kin12} &= \frac{1}{2} A_1 A_2 \rho \omega^2 \Gamma_{12} \cos\left[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} \right], \\ w_{pot12} &= \frac{1}{2} A_1 A_2 k_1 k_2 \Pi_{12} \cos\left[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} \right], \\ \vec{I}_{12} &= \frac{1}{2} A_1 A_2 \omega \vec{\Lambda}_{12} \cos\left[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} \right] \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= \vec{P} \cdot \vec{P}, \\ \Pi_{12} &= \lambda (\vec{e}_1 \cdot \vec{P}_1) (\vec{e}_2 \cdot \vec{P}_2) + \mu \left[(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) (\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2) + (\vec{e}_1 \cdot \vec{P}_2) (\vec{e}_2 \cdot \vec{P}_1) \right], \\ \vec{\Lambda}_{12} &= \lambda \left[(\vec{k}_1 \cdot \vec{P}_1) \vec{P}_2 + (\vec{k}_2 \cdot \vec{P}_2) \vec{P}_1 \right] + \mu \left[(\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2) (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) + \right. \\ &\quad \left. (\vec{k}_1 \cdot \vec{P}_2) \vec{P}_1 + (\vec{k}_2 \cdot \vec{P}_1) \vec{P}_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Etant donné que les nombres d'onde de ces deux types d'onde ne sont pas identiques, l'établissement d'une moyenne spatiale conduit à la disparition des termes croisés. Cet établissement d'une moyenne est superflu dans certains cas, en particulier quand les variables auxiliaires (3.2.5) s'annulent. Parmi les directions de propagation, pour un angle α conforme à

$$\cos \alpha = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2, \quad \sin \alpha = (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_z \quad (3.2.6)$$

s'obtiennent les six combinaisons suivantes entre différents types d'onde, prises deux à deux :

onde L + onde L

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 &= \vec{e}_1, & \vec{P}_2 &= \vec{e}_2, \\ \Gamma_{12} &= \cos \alpha, & \Pi_{12} &= \lambda + 2\mu \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$$\vec{\Lambda}_{12} = k_i (\lambda + 2\mu \cos \alpha) (\vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

onde TI + onde TI

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 &= \vec{e}_1 \times \vec{e}_z, & \vec{P}_2 &= \vec{e}_2 \times \vec{e}_z, \\ \Gamma_{12} &= \cos \alpha, & \Pi_{12} &= \mu \cos(2\alpha), \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$\vec{\Lambda}_{12} = k_i \mu (2 \cos \alpha - 1) (\vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

onde $T2$ + onde $T2$

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 &= \vec{P}_2 = \vec{e}_z, \\ \Gamma_{12} &= 1, & \Pi_{12} &= \mu \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$\vec{\Lambda}_{12} = k_i \mu (\vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

onde L + onde $T1$

$$\begin{aligned}\vec{P}_1 &= \vec{e}_1, & \vec{P}_2 &= \vec{e}_2 \times \vec{e}_z, \\ \Gamma_{12} &= \sin \alpha, & \Pi_{12} &= \mu \sin 2\alpha,\end{aligned}\quad (3.2.10)$$

$$\vec{\Lambda}_{12} = (k_l \lambda + k_t \mu \cos \alpha)(\vec{e}_2 \times \vec{e}_z) + (2\vec{k}_1 + \vec{k}_2)\mu \sin \alpha.$$

onde L + onde $T2$

$$\begin{aligned}\vec{P}_1 &= \vec{e}_1, & \vec{P}_2 &= \vec{e}_z, \\ \Gamma_{12} &= 0, & \Pi_{12} &= 0,\end{aligned}\quad (3.2.11)$$

$$\vec{\Lambda}_{12} = (k_l \lambda + k_t \mu \cos \alpha)\vec{e}_z.$$

onde $T1$ + onde $T2$

$$\begin{aligned}\vec{P}_1 &= \vec{e}_1 \times \vec{e}_z, & \vec{P}_2 &= \vec{e}_z, \\ \Gamma_{12} &= 0, & \Pi_{12} &= 0,\end{aligned}\quad (3.2.12)$$

$$\vec{\Lambda}_{12} = -k_t \mu \vec{e}_z \sin \alpha.$$

Les conditions sous lesquelles les variables auxiliaires disparaissent sont rassemblées dans le tableau 3.1. Il y a des combinaisons pour lesquelles une ou deux de ces variables auxiliaires sont toujours, ou jamais nulles. Quelques conditions ne concernent que l'angle entre les directions de propagation, d'autres comportent des conditions sur le coefficient de Poisson.

Un exemple concret, décrit en fig. 3.1, illustre la superposition de deux ondes-L et d'une onde-T : une onde-L incidente est appliquée sous 40° sur

un milieu de coefficient de Poisson $\sigma = 0,3$. L'angle de réflexion de l'onde $T1$ s'élève à $20,1^\circ$ environ. Son amplitude est presque double de celle de l'onde-L réfléchie.

$$\vec{u} = \vec{u}_L + \vec{u}_{L'} + \vec{u}_{T1}. \quad (3.2.13)$$

L'intensité se compose comme suit :

$$\vec{I} = \vec{I}_L + \vec{I}_{L'} + \vec{I}_{T1} + \vec{I}_{LL'} + \vec{I}_{LT1} + \vec{I}_{L'T1}. \quad (3.2.14)$$

combinaison	Conditions		
	$\Gamma_{12} = 0$	$\Pi_{12} = 0$	$\vec{\Lambda}_{12} = 0$
L + L	$\alpha = \pm 90^\circ$	$\cos^2 \alpha = \frac{-\sigma}{1 - 2\sigma}$	$\alpha = 180^\circ$ oder $\cos \alpha = \frac{-\sigma}{1 - 2\sigma}$
T1 + T1	$\alpha = \pm 90^\circ$	$\alpha = \pm 45^\circ, \alpha = \pm 135^\circ$	$\alpha = \pm 60^\circ, 180^\circ$
T2 + T2	jamais	$\alpha = \pm 90^\circ$	$\alpha = 180^\circ$
L + T1	$\alpha = 0^\circ, 180^\circ$	$\alpha = 0^\circ, \pm 90^\circ, 180^\circ$	$\sigma = \frac{1}{3}$ et $\alpha = 180^\circ$
L + T2	toujours	toujours	$\cos \alpha = \sqrt{\frac{2\sigma^2}{(1 - \sigma)(1 - 2\sigma)}}$
T1 + T2	toujours	toujours	$\alpha = 0^\circ, 180^\circ$

Tab. 3.1 : Conditions pour la disparition des termes croisés (3.2.5) lors de la superposition de deux ondes du type (3.2.1). α est l'angle entre les directions de propagation, σ est le coefficient de Poisson

Il s'avère que la différence entre les nombres d'onde, qui détermine la dépendance de l'intensité totale suivant le cosinus de (3.2.4c), ne possède qu'une composante en y ; par conséquent

$$\begin{aligned}\bar{k}_L - \bar{k}_{L'} &= 2k_l \cos \Theta_L \bar{e}_y, \\ \bar{k}_L - \bar{k}_{T1} &= k_l \left(+\cos \Theta_L + \sqrt{\beta^{-2} - \sin^2 \Theta_L} \right) \bar{e}_y,\end{aligned}\quad (3.2.15)$$

$$\bar{k}_{L'} - \bar{k}_{T1} = k_l \left(-\cos \Theta_L + \sqrt{\beta^{-2} - \sin^2 \Theta_L} \right) \bar{e}_y;$$

$$\beta = \frac{c_t}{c_l} = \frac{k_l}{k_t} = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2-2\sigma}}.$$

θ_L est l'angle d'incidence des ondes L (Fig. 3.1). L'intensité totale n'est dépendante que de la distance à la surface y . Cela est une conséquence de la symétrie du problème (invariance par translation dans la direction x). De plus, on constate que l'intensité totale ne montre qu'une composante en x , bien que, sur la base de la symétrie, une composante en y soit tout à fait admise et ne doit disparaître, à cause des conditions aux limites, que sur la surface.

Sous l'incidence d'une onde $T1$ et/ou d'une onde $T2$, les relations sont similaires, avec les différences de vecteur d'onde

$$\begin{aligned}\bar{k}_{T1} - \bar{k}_{T1'} &= 2k_t \cos \Theta_{T1} \bar{e}_y, \\ \bar{k}_{T1} - \bar{k}_L &= k_t \left(+\cos \Theta_{T1} + \sqrt{\beta^2 - \sin^2 \Theta_{T1}} \right) \bar{e}_y,\end{aligned}\quad (3.2.16)$$

$$\bar{k}_{T1'} - \bar{k}_L = k_t \left(-\cos \Theta_{T1} + \sqrt{\beta^2 - \sin^2 \Theta_{T1}} \right) \bar{e}_y.$$

et

$$\bar{k}_{T2} - \bar{k}_{T2'} = 2k_t \cos \Theta_{T2} \bar{e}_y$$

(3.2.17)

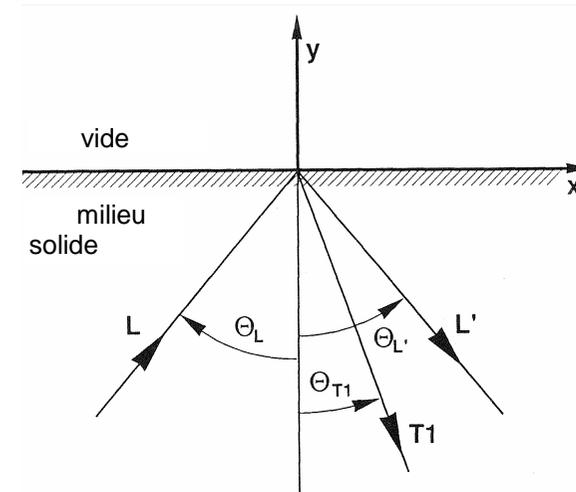


Fig. 3.1 : Réflexion d'une onde incidente longitudinale sous $\theta_L = 40^\circ$ sur une surface libre $y = 0$ pour un milieu isotrope de coefficient de Poisson $\sigma = 0,3$.

Alors qu'une seule période spatiale,

$$\frac{\lambda_t}{2 \cos \Theta_{T2}} \quad (3.2.18)$$

apparaît pour une onde incidente $T2$, dans les deux autres cas, trois périodes spatiales se superposent, qui sont en général sans dimension commune. La variation de l'intensité totale avec la distance à la surface montre alors un comportement quasi périodique [3.1 p. 24 ; 3.2], et les termes croisés (3.2.14) disparaissent seulement après une prise de moyenne sur une "profondeur" infinie. Apparemment, ce phénomène n'a pas été décrit jusqu'ici dans la littérature. C'est pourquoi quelques "profils d'intensité" sont illustrés par les tracés de la figure 3.2.

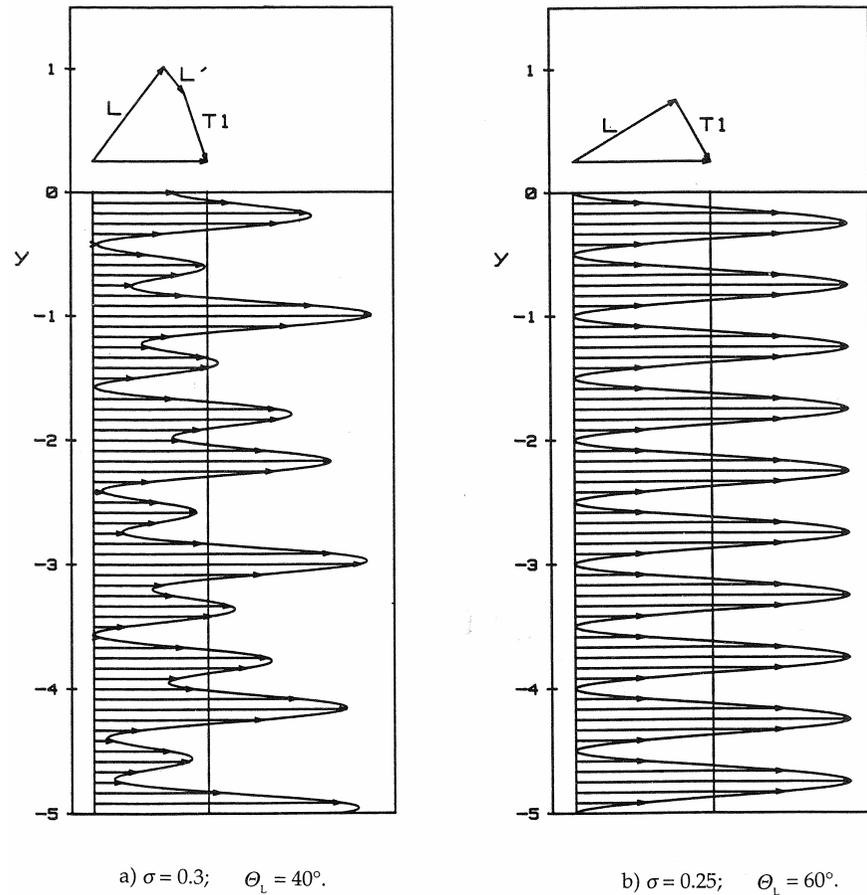
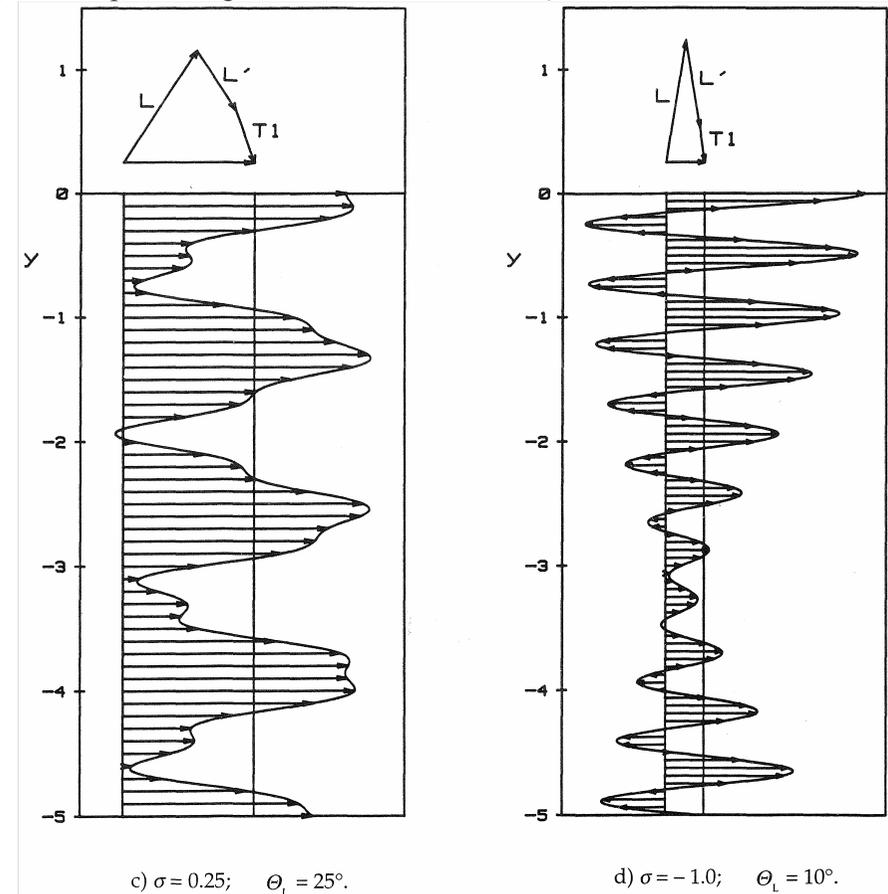


Fig. 3.2 : Profil d'intensité pour la réflexion d'une onde L longitudinale (angles d'incidence θ_L , à la surface $y = 0$ d'un milieu isotrope de coefficient de Poisson σ).

La longueur d'onde longitudinale a été choisie comme unité de longueur ; l'échelle des intensités est arbitraire. Au-dessus de $y = 0$, en haut de la figure, est schématisé comment se compose l'intensité, en moyenne spatiale, à partir des contributions des ondes partielles (désignations

identiques à celles de la fig. 3.1). La moyenne spatiale de l'intensité est représentée par une ligne verticale au-dessous de $y = 0$.



Suite de la fig. 3.2.

La figure 3.2a correspond à la situation décrite en fig. 3.1 ; trois structures périodiques se superposent (de périodes spatiales de 0,6527 ; 0,3964 et 7,0092 exprimées en unités de longueur d'onde longitudinale). Il est montré que l'intensité est localement négative dans la direction x , en particulier sur la figure 3.2c et surtout dans le cas limite $\sigma = -1$ en figure 3.2d. Les trois profils cités donnent l'impression d'un comportement quasi périodique. Dans le cas de la figure 3.2b, une conversion complète de mode est rencontrée, qui conduit à un profil d'intensité périodique.

Les ondes de Rayleigh en surface sont traitées dans le paragraphe suivant (3.3) sur des plaques ; le milieu semi-infini envisagé jusqu'ici correspondait au cas limite d'une plaque d'épaisseur infinie. Il faut cependant garder à l'esprit que la plaque présente toujours deux surfaces ; pour une même amplitude, l'intensité de l'onde de surface sur le demi-espace n'est par conséquent que moitié moins grande que pour une plaque d'épaisseur infinie.

3.3. Plaques

La discussion de l'intensité des ondes de plaque se place principalement dans le cadre de la théorie des ondes de flexion simple, les ondes de flexion des plaques minces pouvant être décrites pour les basses fréquences. Les références [1.5-8] de la littérature sur ce sujet ont déjà été évoquées dans l'introduction. Les ondes de cisaillement pur sont traitées par Achenbach [2.6, pp. 209-211]. Les résultats pour des ondes de Rayleigh sont également disponibles depuis un certain temps [3.3-5], mais sont toutefois probablement peu connus. Le cas général des autres ondes de plaque, pour des fréquence et épaisseur de plaque arbitraires a seulement été représenté pleinement dans le travail [3.6] de l'auteur. Les présents développements suivent essentiellement ce travail.

Le choix du système de coordonnées est présenté en figure 3.3. Nous considérons des ondes de la forme

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} u_x(y) \\ u_y(y) \\ u_z(y) \end{pmatrix} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.3.1)$$

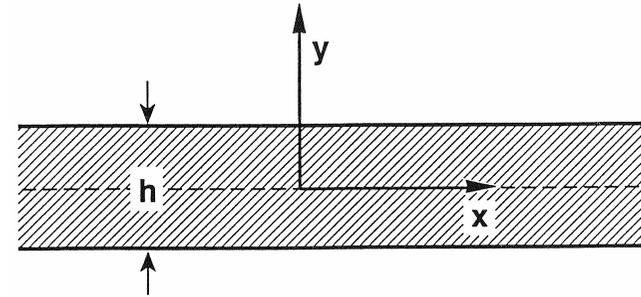


Fig. 3.3 : Système de coordonnées associé à une plaque d'épaisseur h . La direction z est normale au plan de cette figure.

se propageant dans la direction x . Les ondes de plaque sont divisées en quatre familles correspondant à différents modes. Les modes des deux premières familles sont des ondes de cisaillement pur, dont le déplacement est parallèle aux surfaces et perpendiculaire à la direction de propagation, c'est à dire dans la direction z . Ils sont aussi appelés ondes SH ("Shear-Horizontal", une expression issue de la sismique) et composent en cela les ondes T2 du paragraphe précédent. Ces ondes sont réparties selon la symétrie de leur champ de déplacement, sur une famille symétrique

$$u_z = A \cos(n\pi y/h), \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (3.3.2)$$

et une antisymétrique

$$u_z = A \sin(n\pi y/h), \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.3.3)$$

(A : amplitude). Pour ces deux familles, la vitesse de phase c est décrite par la formule

$$c^2 = c_t^2 \left[1 + \left(\frac{n\pi}{kh} \right)^2 \right] = \frac{c_t^2}{\left[1 - \left(\frac{nc_t}{2fh} \right)^2 \right]}, \quad (3.3.4)$$

et à la vitesse de groupe C liée, pour ces deux familles, par la relation :

$$Cc = c_i^2 \quad (3.3.5)$$

Les deux familles restantes ne possèdent aucune composante de déplacement suivant z et sont volontiers rassemblées sous le nom d'ondes de Lamb [2.4]. Comme vu plus haut, ce ne sont pas des ondes de cisaillement pur, mais elles sont cependant obtenues sans complexité particulière. Avec les variables

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{1 - (c/c_1)^2}, & \alpha_2 &= \sqrt{1 - (c/c_1)^2}, \\ \alpha_x &= \frac{2\alpha_1\alpha_2}{1 + \alpha_2^2}, & \alpha_y &= \frac{2}{1 + \alpha_2^2}, \\ R_s &= \frac{\sinh(\alpha_1 kh/2)}{\sinh(\alpha_2 kh/2)}, & R_a &= \frac{\cosh(\alpha_1 kh/2)}{\cosh(\alpha_2 kh/2)}, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

les composantes x et y du champ de déplacement sont, pour la famille symétrique

$$u_x = iA \left[\cosh(\alpha_1 ky) - \alpha_x R_s \cosh(\alpha_2 ky) \right], \quad (3.3.7)$$

$$u_y = \alpha_1 A \left[\sinh(\alpha_1 ky) - \alpha_y R_s \sinh(\alpha_2 ky) \right],$$

et pour la famille antisymétrique

$$u_x = iA \left[\sinh(\alpha_1 ky) - \alpha_x R_a \sinh(\alpha_2 ky) \right], \quad (3.3.8)$$

$$u_y = \alpha_1 A \left[\cosh(\alpha_1 ky) - \alpha_y R_a \cosh(\alpha_2 ky) \right].$$

(la symétrie se réfère à celle du vecteur de déplacement par rapport au plan $y=0$). Les vitesses de groupe et de phase des ondes de Lamb sont

obtenues en résolvant (numériquement) les équations transcendantes de Rayleigh et Lamb

$$\frac{4\alpha_1\alpha_2}{(1 + \alpha_2^2)^2} = \left[\frac{\tanh(\alpha_2 kh/2)}{\tanh(\alpha_1 kh/2)} \right]^{\pm 1} \quad (3.3.9)$$

("Rayleigh-Lamb frequency equations"). Le signe 'plus' se réfère aux ondes de Lamb symétriques, le signe 'moins' aux ondes antisymétriques. Les premiers modes de base de chaque famille de Lamb, c'est à dire les modes de plus faible vitesse de phase, présentent un intérêt pratique particulier et sont, d'après leurs caractéristiques aux basses fréquences, souvent désignés comme le mode quasi-longitudinal (symétrique) et le mode de flexion (antisymétrique). Dans le cas limite des hautes fréquences, ces deux modes tendent vers les ondes de surface que sont les modes de Rayleigh.

Comme pour la réflexion des ondes sur une surface, nous nous limitons aussi, pour les ondes de plaque, à considérer la moyenne temporelle des grandeurs énergétiques. Il reste une dépendance en y , variable sur laquelle on réalise une dernière intégration. L'établissement d'une moyenne spatiale est noté avec des 'parenthèses pointues', par exemple

$$\langle w_{kin} \rangle = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} w_{kin}(y) dy. \quad (3.3.10)$$

Cette densité d'énergie cinétique moyennée spatialement et temporellement est calculée analytiquement ci-après pour tous les modes de plaque. Les moyennes spatio-temporelles peuvent être dérivées à l'aide du principe de Rayleigh (voir paragraphe 2.4)

$$\langle w_{kin} \rangle = \langle w_{pot} \rangle \quad (3.3.11)$$

ainsi que les relations entre le transfert énergétique et la vitesse de groupe (voir paragraphe 2.5). Cette dernière ne s'applique qu'à la seule composante d'intensité non nulle

$$\langle I_x \rangle = C \langle w \rangle = C \langle w_{kin} + w_{pot} \rangle. \quad (3.3.12)$$

Les relations (3.3.11-12) permettent d'éviter les intégrations de $w_{pot}(y)$ et de $I_x(y)$, très laborieuses en comparaison de (3.3.10).

Pour réduire le nombre de variables indépendantes et obtenir une représentation graphique aussi générale que possible, nous utilisons une présentation normée. La célérité c_t sert d'unité de vitesse, l'épaisseur de plaque h d'unité de longueur, le "module des ondes longitudinales" $\lambda + 2\mu$ d'unité pour les constantes élastiques. Les unités de toutes les autres grandeurs mécaniques sont ainsi fixées. L'illustration concerne une plaque en fer de 1 cm d'épaisseur $\sigma = 0,3$, $E = 200$ GPa, $\rho = 7800$ kg/m³ :

$$\begin{aligned} c_t &= 3140 \text{ ms}^{-1}, \\ c_t/h &= 314 \text{ kHz}, \\ h/c_t &= 3.18 \text{ } \mu\text{s}, \\ (\lambda + 2\mu)/c_t^2 &= 27300 \text{ kg m}^{-3}, \\ \lambda + 2\mu &= 269 \text{ GPa} = 269 \text{ GJ m}^{-3}, \\ (\lambda + 2\mu)h^3 &= 269 \text{ kJ}, \\ (\lambda + 2\mu)c_t &= 845 \text{ TW m}^{-2} = 8.45 \cdot 10^{14} \text{ W m}^{-2}. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

À première vue, le dernier nombre apparaît astronomiquement élevé et inappropriée à la mesure de l'intensité d'ondes élastodynamiques. Toutefois, pour obtenir une valeur numérique, une valeur est attribuée à l'amplitude de l'onde, et ce en correspondance avec l'unité de longueur

retenue, ce qui permet de comprendre ces intensités élevées pour les modes. Pour les dimensions normalisées, comme souhaité pour la représentation graphique, des valeurs apparaissent toutefois de l'ordre de l'unité. Pour éviter l'introduction de nouvelles notations, les grandeurs normalisées utilisées ci-dessous sont nommées avec les mêmes lettres que précédemment. Cela peut être exprimé formellement par

$$c_t = h = \lambda + 2\mu = 1 \quad (3.3.14)$$

Quelques relations utiles entre les grandeurs ainsi normalisées sont :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\sigma}{1-\sigma}, & \mu &= \frac{1-2\sigma}{2-2\sigma}, \\ c_t^2 &= \frac{2-2\sigma}{1-2\sigma}, & \mu &= c_t^{-2}, & \rho &= \mu. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Les représentations graphiques ont toutes été réalisées pour un matériau dont le coefficient de Poisson est $\sigma = 0,3$.

3.3.1. Ondes de cisaillement

L'amplitude d'un mode de cisaillement est normalisée à une valeur unitaire sur la face supérieure :

$$u_z \left(y = \frac{1}{2} \right) = 1. \quad (3.3.16)$$

La moyenne temporelle de la densité d'énergie cinétique

$$w_{kin}(y) = \pi^2 \mu f^2 |u_z|^2, \quad (3.3.17)$$

est conforme à la forme potentielle

$$w_{pot}(y) = \frac{1}{4} \mu \left[k^2 |u_z|^2 + |u'_z|^2 \right], \quad (3.3.18)$$

où l'apostrophe symbolise la dérivation suivant y . On constate d'après (3.3.2-3) qu'à la fréquence $f = n/\sqrt{2}$, la moyenne temporelle de w_{pot} est constante sur une section transversale de plaque. En général, les densités w_{kin} et w_{pot} sont localement différentes (excepté pour le mode de base $n = 0$, pour lequel toutes les grandeurs sont indépendantes de y) ; tout d'abord l'établissement d'une moyenne spatiale conduit à l'égalité

$$\langle w_{kin} \rangle = \langle w_{pot} \rangle = \frac{\pi^2}{2} \mu f^2, \quad (3.3.19)$$

qui est indépendante de l'indice n du mode (!). Au contraire, l'intensité moyenne

$$\langle I_x \rangle = \pi^2 \mu C f^2 = \pi^2 \mu \sqrt{1 - \frac{n^2}{4f^2}} f^2 \quad (3.3.20)$$

dépend de n , car les modes présentent des vitesses de groupe différentes. Les relations (3.3.12) peuvent être vérifiées par une intégration

$$I_x(y) = 2\pi^2 \mu |u_z|^2 \sqrt{1 - \frac{n^2}{4f^2}} \quad (3.3.21)$$

Comme attendu, seul le module de cisaillement apparaît comme constante d'élasticité dans toutes ces expressions.

Les figures 3.4-5 montrent, pour deux fréquences différentes, la dépendance en y des grandeurs énergétiques du mode $n = 3$. Les densités d'énergie w_{kin} et w_{pot} , mais également l'intensité et la densité d'énergie totale se rapprochent lors d'un accroissement de la fréquence. Dans le cas limite d'une fréquence infinie, la moyenne spatiale de l'intensité est la même pour tous les modes (fig. 3.6) :

$$\langle I_x \rangle = \pi^2 \mu f^2. \quad (3.3.22)$$

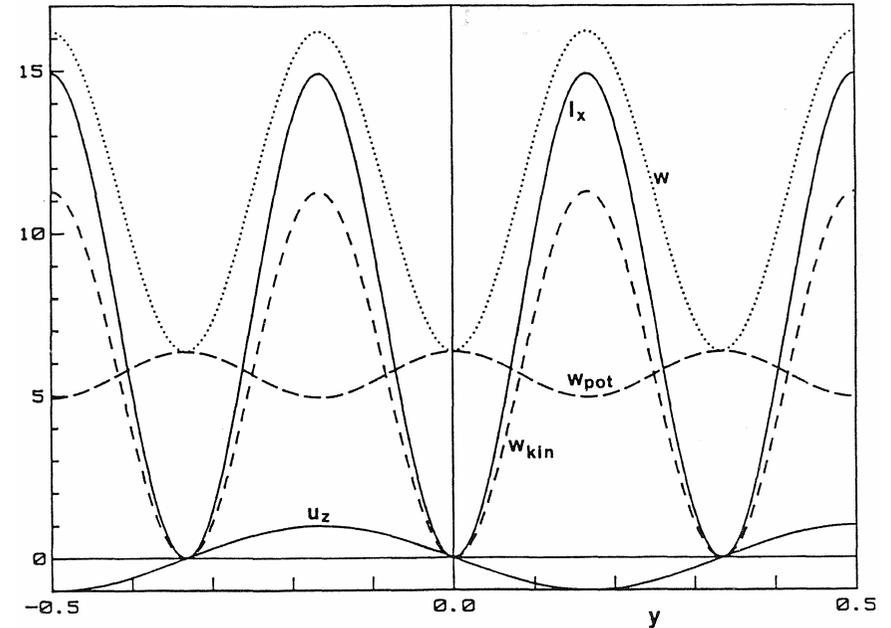


Fig. 3.4 : Composantes de déplacement $u_z(y)$, densités d'énergie $w_{kin}(y) + w_{pot}(y) = w(y)$ et intensité $I_x(y)$ pour le mode de cisaillement $n = 3$ à la fréquence $f = 2$ ($\sigma = 0,3$).

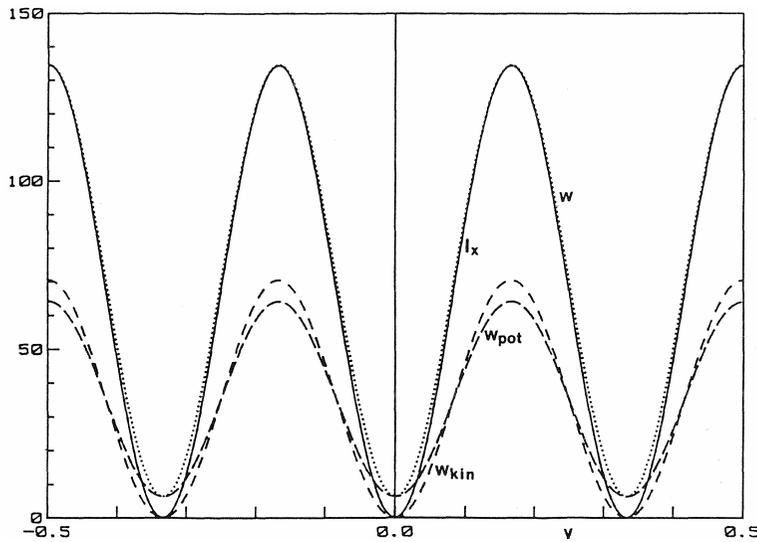


Fig. 3.5 : Identique à la fig. 3.4, pour la fréquence $f=5$ et sans $u_z(y)$.

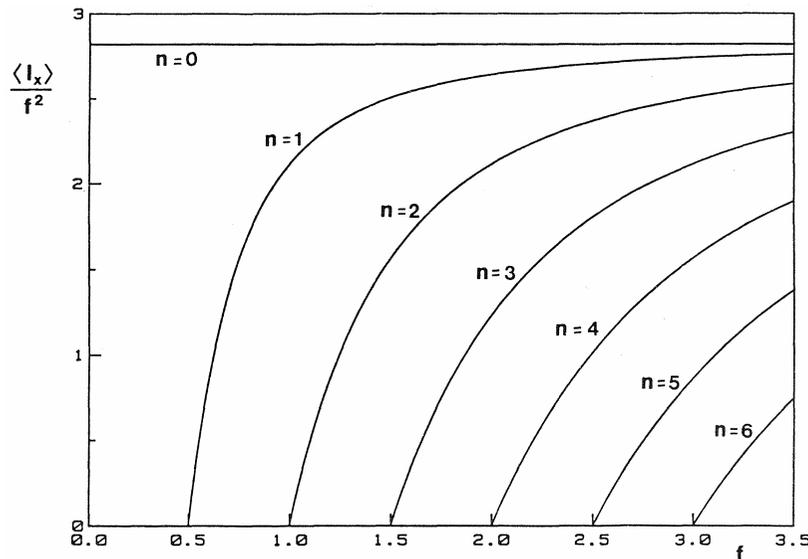


Fig. 3.6 : Intensité moyenne $\langle I_x \rangle$ divisée par le carré de la fréquence f pour les modes de cisaillement $n=0 \dots 6$ en fonction de la fréquence ($\sigma=0,3$).

3.3.2. Ondes de Lamb

Avec le champ de déplacement (3.3.7-8), les relations générales pour les ondes de Lamb sont :

$$w_{kin}(y) = \pi^2 \mu f^2 \left[|u_x|^2 + |u_y|^2 \right], \quad (3.3.23)$$

$$w_{pot}(y) = \frac{1}{4} \left[k^2 |u_x|^2 + |\mu'_y|^2 + 2\lambda k \operatorname{Im}\{u_x^* \mu'_y\} + \mu |u'_x + i k u_y|^2 \right], \quad (3.3.24)$$

$$I_x(y) = \pi f \left[\left(|u_x|^2 + \mu |u_y|^2 \right) k + \lambda \operatorname{Im}\{u_x^* u'_y\} + \mu \operatorname{Im}\{u'_x u_y^*\} \right]. \quad (3.3.25)$$

Comme pour la réflexion sur la surface libre d'un demi-espace, la composante y de l'intensité s'annule en tout point de la plaque. Nous renvoyons à [3.6] pour la démonstration, où l'on trouve en outre les indications sur les champs de déplacement, de déformation et de contrainte. Les trois grandeurs énergétiques peuvent en principe être moyennées analytiquement sur la section de la plaque, puisque seules des fonctions hyperboliques y figurent. Il suffit, avec avantage et au moyen de (3.3.11-12), de mettre seulement en œuvre l'intégration la plus simple de $w_{kin}(y)$. On obtient ainsi, pour des modes symétriques

$$\begin{aligned} \langle w_{kin} \rangle &= \frac{\pi^2}{2} \mu f^2 |A|^2 \left\{ (S_1 + 1) + |\alpha_x|^2 |R_s|^2 (S_2 + 1) \right. \\ &\quad \left. + |\alpha_1|^2 \left[|S_1 - 1| + |\alpha_y|^2 |R_s|^2 |S_2 - 1| \right] - 4\alpha_1^2 \alpha_y S_1 \right\} \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

et pour des modes antisymétriques

$$\begin{aligned} \langle w_{kin} \rangle &= \frac{\pi^2}{2} \mu f^2 |A|^2 \left\{ |S_1 - 1| + |\alpha_x|^2 |R_a|^2 |S_2 - 1| \right. \\ &\quad \left. + |\alpha_1|^2 \left[(S_1 + 1) + |\alpha_y|^2 |R_a|^2 (S_2 + 1) \right] - 4|\alpha_1|^2 \alpha_y S_1 \right\} \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

où

$$S_m = \frac{\sinh(\alpha_m k)}{\alpha_m k} \quad (m = 1, 2). \quad (3.3.28)$$

On constate une petite différence dans les derniers termes de (3.3.26) et (3.3.27), qui est essentielle lorsque α_1 est imaginaire, c'est à dire lorsque $c > c_l$. L'intensité moyenne de tout mode de Lamb peut ainsi être calculée au moyen de (3.3.11-12), sans aucune approximation et quelle que soit la fréquence. Pour appliquer ces formules, seules les vitesses de groupe et de phase doivent être obtenues, généralement par des méthodes numériques. Les deux modes de base sont examinés en détail ci-dessous.

Mode quasi longitudinal

La figure 3.7 représente les vitesses de groupe et de phase du premier mode symétrique dans le cas $\sigma=0,3$ (le comportement reste très semblable pour d'autres valeurs du coefficient de Poisson à l'intérieur de l'intervalle typique de $\sigma=0,2$ à $\sigma=0,3$).

Similairement à la normalisation (3.3.16), l'amplitude du mode quasi-longitudinal est choisie de telle sorte que, aux basses fréquences, la composante de déplacement soit unitaire en face supérieure :

$$u_x\left(y = \frac{1}{2}\right) = 1. \quad (3.3.29)$$

Le champ de déplacement change considérablement entre les basses et les hautes fréquences (Fig. 3.8). Alors que la composante longitudinale u_x garde le même profil entre $f=0,5$ et le cas limite $f \rightarrow 0$ (u_x d'amplitude uniforme et faible, u_y linéaire), la composante longitudinale u_x montre, aux fréquences moyennes, des directions opposées sur la surface et au milieu de la plaque. À $f=10$, le profil paraît typique d'une onde de surface. En surface, la composante de déplacement longitudinal associé au mode quasi-longitudinal n'est dominant qu'aux basses fréquences !

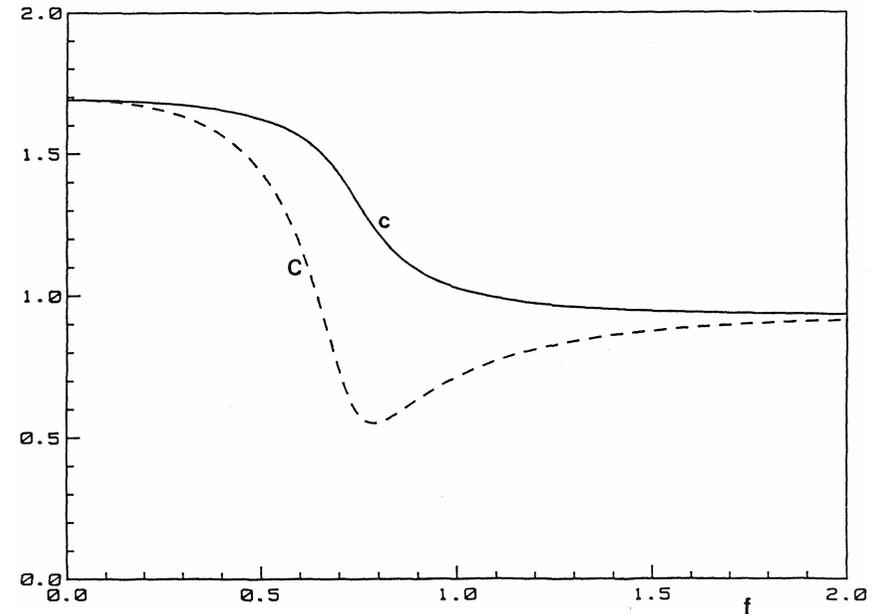


Fig.3.7 : Vitesse de phase c et vitesse de groupe C en fonction de la fréquence pour le mode quasi-longitudinal ($\sigma=0,3$).

La dépendance en y des grandeurs énergétiques pour les quatre fréquences de la figure 3.8 peut être étudiée au moyen de la figure 3.9. Excepté aux basses fréquences, pour lesquelles la variation est faible sur une section, il apparaît un minimum local de w_{pot} près de la surface ; w et I_x atteignent leur maximum sur la surface.

La figure 3.10 présente les valeurs en surface. Aux basses comme aux hautes fréquences, ces valeurs en surface sont évidemment proportionnelles au carré de la fréquence. En raison de la convention (3.3.29), w_{kin} présente une singularité pour $f=1/\sqrt{2}$. À cette fréquence, les vitesses de groupe et de phase sont indépendantes de σ (!) et s'obtiennent analytiquement :

$$c = \sqrt{2}, \quad C = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad (3.3.30)$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} u_x(y) &= -A \cos(\pi y), & u_y(y) &= iA \sin(\pi y), \\ w_{kin}(y) &= \frac{\pi^2}{2} |A|^2 \mu, & w_{pot}(y) &= \pi^2 |A|^2 \mu \cos^2(\pi y), \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

$$I_x(y) = \sqrt{2} \pi^2 |A|^2 \mu \cos^2(\pi y),$$

$$\langle w_{kin} \rangle = \langle w_{pot} \rangle = \frac{\pi^2}{2} |A|^2 \mu, \quad \langle I_x \rangle = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} |A|^2 \mu$$

La condition (3.3.29) conduit à une amplitude A infinie et donc à une valeur $w_{kin}(1/2)$ infinie, tandis que w_{pot} et I_x restent finis en surface. Il est remarquable que seulement le module de cisaillement apparaisse en (3.3.31), et en effet les déformations et les contraintes

$$\underline{\varepsilon} = i\pi A \cos(\pi y) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma} = 2\mu \underline{\varepsilon} \quad (3.3.32)$$

décrivent un cisaillement pur ! La singularité que présente la fig. 3.10 reflète le fait que le mode quasilongitudinal ne peut pas être mesuré par des jauges d'extensomètre, en surface de la plaque, à la fréquence $f = 1/\sqrt{2}$.

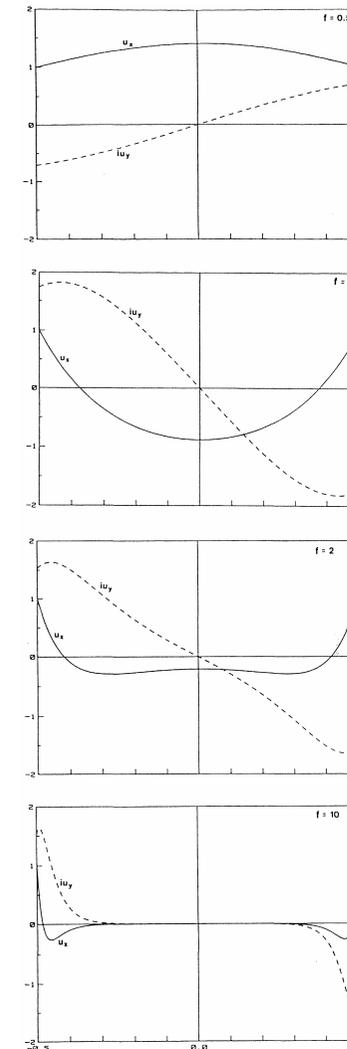


Fig. 3.8 : Composantes de déplacement $u_x(y)$ et $u_y(y)$ du mode quasilongitudinal pour différentes fréquences f ($\sigma = 0,3$).

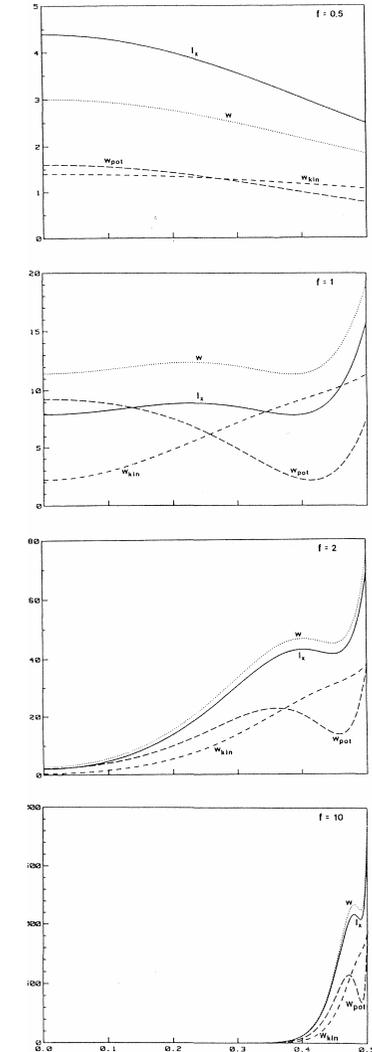


Fig. 3.9 : Densités d'énergie $w_{kin}(y) + w_{pot}(y) = w(y)$ et intensité $I_x(y)$ du mode quasilongitudinal pour différentes fréquences f ($\sigma = 0,3$).

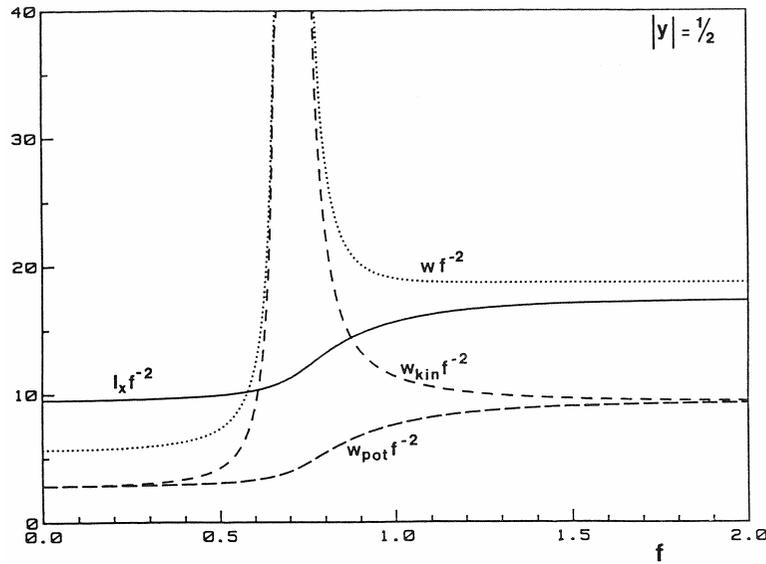


Fig. 3.10 : Valeurs en surface de la densité d'énergie $w_{kin} + w_{pot} = w$ et de la composante I_x de l'intensité du mode quasilongitudinal, divisés par le carré de la fréquence, en fonction de la fréquence ($\sigma=0,3$).

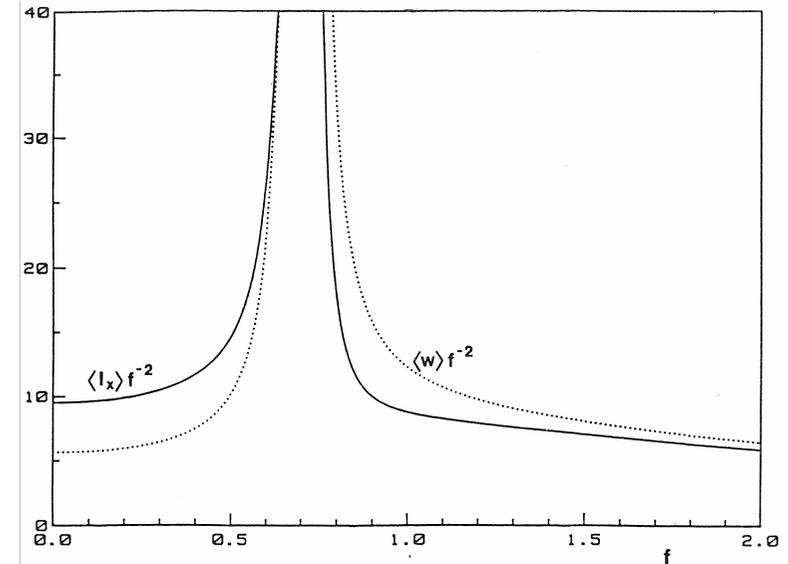


Fig. 3.11 : Densité d'énergie moyenne $\langle w \rangle$ et intensité moyenne $\langle I_x \rangle$ du mode quasilongitudinal divisées par le carré de la fréquence, en fonction de la fréquence ($\sigma=0,3$).

Aux basses fréquences, les moyennes spatiales $\langle w \rangle$ et $\langle I_x \rangle$ (fig. 3.11) se comportent comme les valeurs correspondantes à la surface, car leur variation est faible sur la section. Aux fréquences élevées, la croissance avec f^2 des valeurs en surface est accompagnée d'une localisation de l'onde à une zone de plus en plus petite au voisinage de la surface, de sorte que la hausse des moyennes sur la section n'est proportionnelle qu'à la première puissance de la fréquence. Les approximations pour les basses fréquences sont :

$$c = C = \sqrt{\frac{2}{1-\sigma}}, \quad \alpha_1 = \frac{\sigma}{1-\sigma}, \quad \alpha_2 = i\sqrt{\frac{1+\sigma}{1-\sigma}} \quad (3.3.33)$$

$$u_x = 1, \quad u_y = -i\alpha_1 k y,$$

$$\langle w \rangle = 2w_{kin} = 2w_{pot} = 2\pi^2 \mu f^2, \quad \langle I_x \rangle = \langle w \rangle C.$$

Aux fréquences élevées, on obtient les approximations

$$R_s = R_a = e^{(\alpha_1 - \alpha_2)k/2},$$

$$u_x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{i}{2} A (1 - \alpha_x) e^{\alpha_1 k/2}, \quad u_y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha_1}{2} A (1 - \alpha_y) e^{\alpha_1 k/2},$$

$$\langle w_{kin} \rangle = \frac{\pi}{8} \mu c_R f |A|^2 e^{\alpha_1 k} \left\{ \frac{1}{\alpha_1} + \alpha_1 (1 - 4\alpha_y) + (\alpha_1 \alpha_y)^2 \left(\frac{1}{\alpha_2} + \alpha_2 \right) \right\}, \quad (3.3.34)$$

$$\langle I_x \rangle = 2 \langle w_{kin} \rangle c_R$$

où $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ et c_R est la vitesse de Rayleigh. La convention d'amplitude (3.3.29) conduit dans ce dernier cas à

$$|A|^2 = \frac{4e^{-\alpha_1 k}}{(1 - \alpha_x)^2} \quad (3.3.35)$$

et donc à une dépendance fréquentielle linéaire de $\langle w \rangle$ et $\langle I_x \rangle$.

Ces champs et les approximations associées sont présentés en fig. 3.12. En dehors de la zone présentant une singularité, le comportement asymptotique constitue une bonne approximation. Les erreurs sont en effet inférieures à 20% pour $f \leq 0,4$ et $f \geq 1,5$. Les zones d'erreurs inférieures à 10% (5%) sont $f \leq 0,3$ (0,1) et $f \geq 1,9$ (3,0).

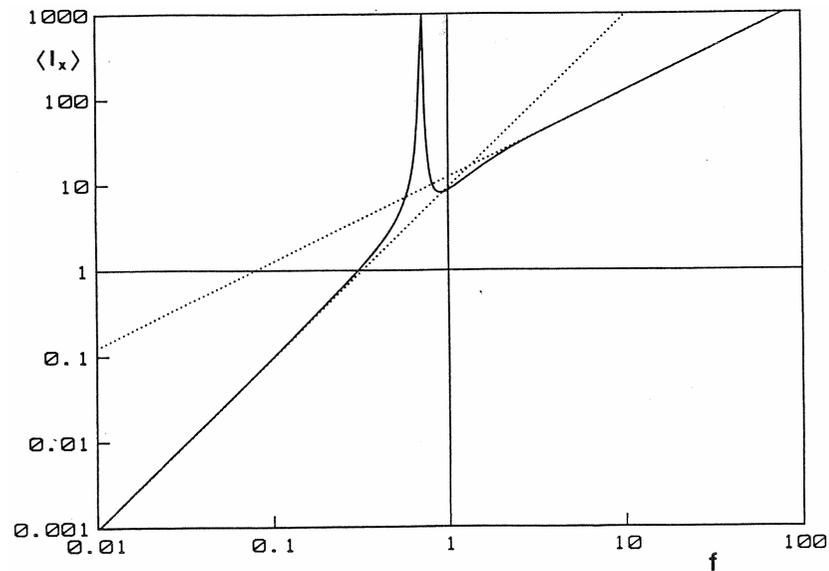


Fig. 3.12 : Intensité moyenne $\langle I_x \rangle$ du mode quasilongitudinal et son comportement asymptotique aux basses et hautes fréquences (lignes pointillées ; $\sigma = 0,3$).

Mode de flexion

Les vitesses de groupe et de phase du premier mode antisymétrique sont représentées fig. 3.13. Leur amplitude est choisie de telle sorte que la composante y du vecteur déplacement soit unitaire sur la face supérieure :

$$u_y \left(y = \frac{1}{2} \right) = 1. \quad (3.3.36)$$

Le champ de déplacement est présenté fig. 3.14 pour différentes fréquences. Son comportement aux basses fréquences (u_y constant, u_x de faible amplitude et linéaire) s'étend sur une plage fréquentielle plus petite que le mode quasilongitudinal. La transition vers une onde de surface se passe plus "douceusement" que pour le premier mode symétrique, du fait que ni u_y ni u_x ne s'annulent en surface.

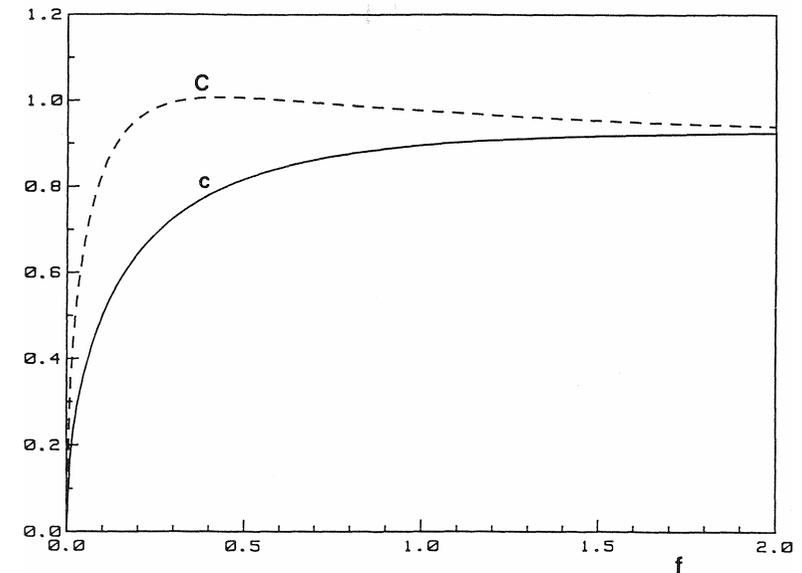


Fig. 3.13 : Vitesses de phase c et vitesse de groupe C du mode de flexion en fonction de la fréquence ($\sigma = 0,3$).

La dépendance en y des différentes grandeurs énergétiques est représentée sur la figure 3.15 pour les quatre fréquences de la figure 3.14. À la fréquence $f=0,1$, les densités d'énergie et l'intensité augmentent du centre vers la surface de la plaque (la figure 3.9 pour $f=0,5$ montre le comportement opposé !). Comme attendu, les profils des deux modes de base évoluent de façon similaire avec l'accroissement de la fréquence.

Aux fréquences élevées, les densités d'énergie et l'intensité en surface sont proportionnelles au carré de la fréquence (fig. 3.16). Aux basses fréquences, ces grandeurs se comportent différemment, puisque la vitesse de groupe des ondes de flexion est proportionnelle à \sqrt{f} . Cela est vrai aussi bien en surface qu'en moyenne spatiale (fig. 3.17), car I_x et w sont en première approximation indépendants de y dans le cas limite $f \rightarrow 0$.

Aux basses fréquences, on obtient d'après une approximation au premier ordre (théorie des ondes de flexion simple) :

$$c_B = \frac{\sqrt{2\pi f}}{\sqrt[4]{6(1-\sigma)}}, \quad C_B = 2c_B, \quad k_B = \sqrt[4]{6(1-\sigma)}\sqrt{2\pi f},$$

$$u_x = -iky, \quad u_y = 1, \quad (3.3.37)$$

$$\langle w \rangle = 2w_{kin} = 2\pi^2 \mu f^2, \quad \langle I_x \rangle = \langle w \rangle C_B.$$

La moyenne en temps et en espace de la densité d'énergie des deux modes de base prend évidemment une grande amplitude lorsque la fréquence s'approche de zéro et que les amplitudes sont conformes à (3.3.29) et (3.3.36). On constate que $\langle w \rangle$ dépend seulement du module de cisaillement, et non pas du module de compression (sous forme normalisée : $(1+\sigma)/[3(1-\sigma)]$), tandis que $\langle I_x \rangle$ et la vitesse de groupe dépendent des deux modules. Dans l'approximation (3.3.37), l'intensité moyenne du mode de flexion est proportionnelle à $f^{5/2}$.

Les expressions pour l'approximation aux fréquences élevées sont identiques à (3.3.34). Les résultats pour les deux modes de base sont malgré tout différents, parce que les amplitudes ont été choisies

différemment. En raison de la normalisation (3.3.36), l'amplitude vérifie la relation

$$|A|^2 = \frac{4e^{-\alpha_1 k}}{\alpha_1^2 (1 - \alpha_y)^2}. \quad (3.3.38)$$

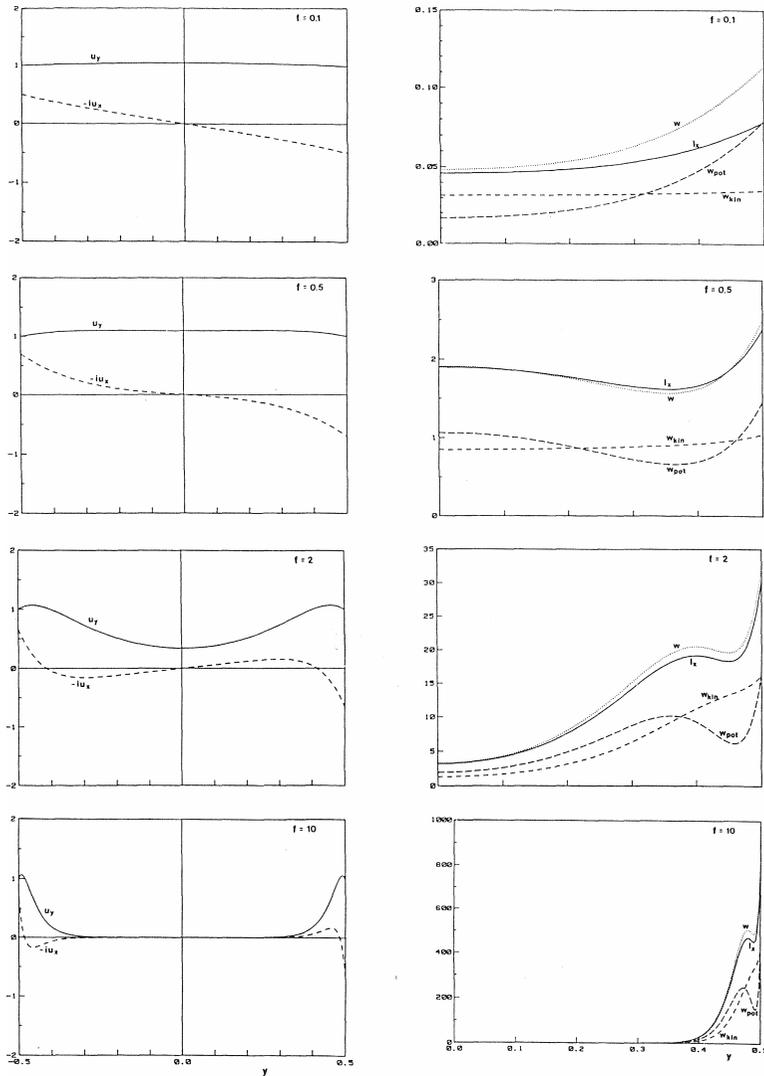


Fig. 3.14 : Composantes de déplacement $u_x(y)$ et $u_y(y)$ pour le mode de flexion aux différentes fréquences f ($\sigma=0,3$).

Fig. 3.15 : Densités d'énergie $w_{kin}(y) + w_{pot}(y) = w(y)$ et intensité $I_x(y)$ pour le mode de flexion aux différentes fréquences f ($\sigma=0,3$).

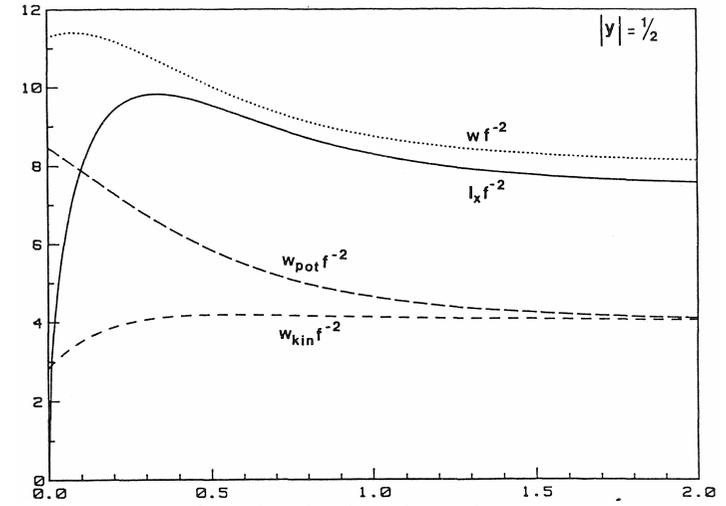


Fig. 3.16 : Valeurs en surface des densités d'énergie $w_{kin} + w_{pot} = w$ et de la composante d'intensité I_x pour le mode de flexion, divisées par le carré de la fréquence, en fonction de la fréquence ($\sigma=0,3$).

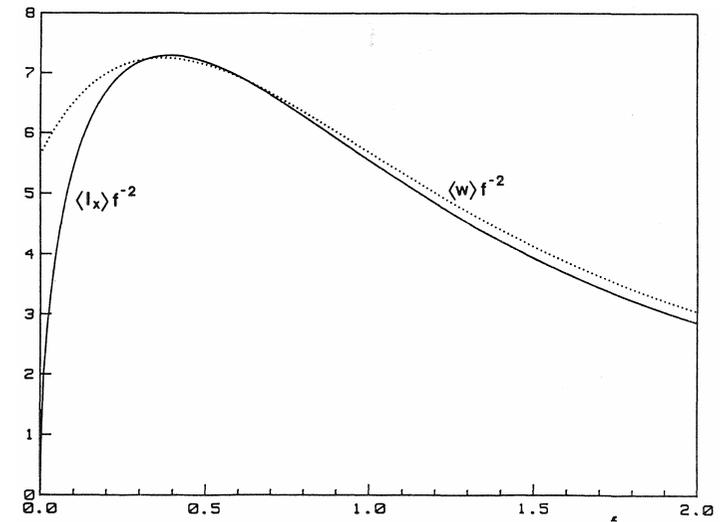


Fig. 3.17 : Densité d'énergie moyenne $\langle w \rangle$ et intensité moyenne $\langle I_x \rangle$ du mode de flexion divisé par le carré de la fréquence, en fonction de la fréquence ($\sigma=0,3$).

La représentation doublement logarithmique de la figure 3.18 donne l'impression d'une grande précision des approximations aux basses et hautes fréquences. La gamme de fréquence dans laquelle ces approximations ne sont plus valables est pourtant plus large que dans le cas quasi-longitudinal, en particulier si l'on ne s'autorise que de petits écarts. L'erreur est inférieure à 20% pour $f \leq 0,13$ et $f \geq 0,67$. La zone d'erreur inférieure à 10% (5%) est plus petite $f \leq 0,065$ (0,007) et $f \geq 0,77$ (3,0).

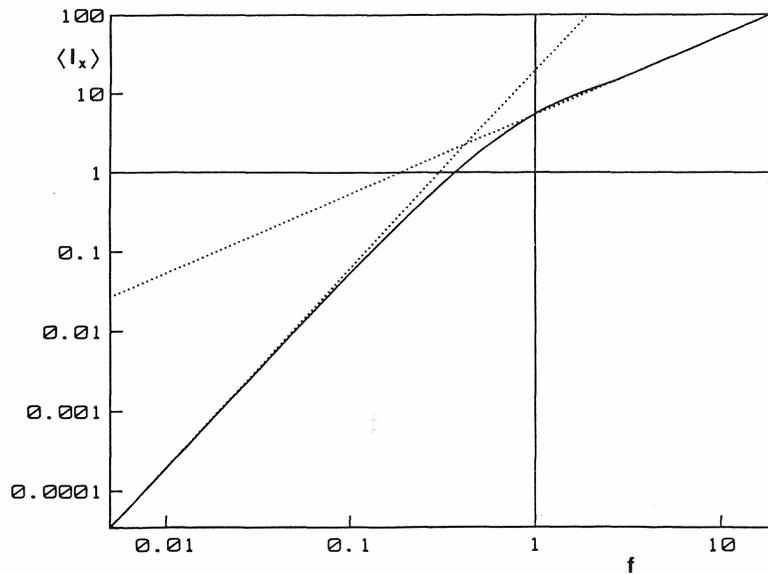


Fig. 3.18 : Intensité moyenne $\langle I_x \rangle$ du mode de flexion et approximations pour les basses et hautes fréquences (lignes pointillées ; $\sigma = 0,3$).

3.3.3. Intensité conventionnelle des ondes de flexion

L'intensité d'une onde de flexion est généralement mesurée au moyen de deux accéléromètres disposés sur la plaque dans la direction de propagation. La distance entre eux devrait être petite devant la longueur d'onde de flexion pour obtenir une bonne détermination de l'accélération,

ce qui est nécessaire dans la formule exprimant l'intensité de l'onde de flexion :

$$I_B = -\frac{\sqrt{B\rho h}}{\omega h} \operatorname{Re} \left\{ a_y \int \frac{a_y^*}{x} dt \right\}. \quad (3.3.39)$$

où $B = Eh^3 / [12(1 - \sigma^2)]$ représente la rigidité en flexion et a_y la composante normale de l'accélération sur la surface $y = 1/2$ (l'intensité d'une onde de flexion est souvent exprimée comme le produit $h I_x$, homogène à une puissance par unité de longueur ; nous préférons la définition (3.3.39) qui est cohérente avec la définition générale de l'intensité (2.2.18)). L'équation (3.3.39) s'applique à une onde de flexion monofréquentielle, auquel cas elle peut être transformée sous la forme

$$I_B = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{E\rho}{3(1-\sigma)^2}} \omega^2 k \left| u_y \left(y = \frac{1}{2} \right) \right|^2 \quad (3.3.40)$$

où

$$\left| u_y \left(y = \frac{1}{2} \right) \right|^2 = |A|^2 \alpha_1^2 (1 - \alpha_y)^2 \cosh^2(\alpha_1 kh/2). \quad (3.3.41)$$

Avec la convention d'amplitude (3.3.36) et la normalisation utilisée jusqu'ici, (3.3.40) se réduit à

$$I_B = \frac{1 - 2\sigma}{2\sqrt{6(1-\sigma)^3}} \omega^2 k. \quad (3.3.42)$$

Dans le cas limite des basses fréquences, cela correspond à (3.3.37). Si on compare l'intensité I_B obtenue au moyen d'une mesure conventionnelle à l'intensité moyenne exacte $\langle I_x \rangle$, on constate que I_B est toujours plus grande que la valeur exacte. L'erreur relative

$$\delta = \frac{I_B - \langle I_x \rangle}{\langle I_x \rangle} \quad (3.3.43)$$

est ainsi toujours positive. Dans le cas limite $f \rightarrow 0$, elle est proportionnelle à la fréquence et atteint déjà quelques pour cent à $f = 0,01$ (fig. 3.19). Pour un nombre de Poisson $\sigma = 0,3$, les limites supérieures pour des erreurs relatives inférieures à 20%, 10% et 1% sont $f \leq 0,073$, 0,037 et 0,004.

La théorie des ondes de flexion simple est considérée comme valable si la longueur d'onde est six fois plus grande que l'épaisseur de la plaque, c'est à dire pour $k < \pi/3 \approx 1,05$, ce qui correspond à des fréquences au-dessous de $f = 0,073$ (pour $\sigma = 0,3$). Au-delà de cette fréquence, l'erreur dans l'approximation atteint 10% pour la vitesse et dépasse 20% pour l'intensité (3.3.42). Pour de nombreuses applications, une erreur de cet ordre de grandeur peut être facilement supportée. Si une précision plus élevée est souhaitée ou nécessaire, l'erreur dans la mesure conventionnelle de l'intensité d'une onde de flexion sur la base de (3.3.43) peut maintenant être corrigée. L'erreur peut être soit estimée d'après la fig. 3.19, soit calculée sur la base de (3.3.27) et (3.3.66). De cette manière, l'intensité du mode de flexion peut en principe être mesurée avec la méthode conventionnelle pour des fréquences quelconques. En pratique, une telle application devrait au moins réussir au-dessous de l'apparition des modes plus élevées, c.-à-d. au-dessous de $f = 0,5$, où seul le mode quasi-longitudinal peut être excité. La contribution de la composante en y de l'accélération peut être éliminée en mesurant sur les deux côtés de la plaque, puisque les champs de déplacement des deux modes de base possèdent une symétrie différente.

Les densités d'énergie et les intensités présentées ci-dessus pour les modes de Lamb peuvent être étudiées avec les équations générales (3.3.26-27). Le calcul n'est pas plus coûteux qu'avec les deux modes de base, si seulement les vitesses de groupe et de phase sont connues. Des indications visant au calcul numérique de ces vitesses pour les deux modes de base sont données en annexe [3.6]. Pour les modes supérieurs, il peut parfois arriver que la vitesse de groupe devienne négative. Tolstoy et Usdin ont découvert cela en 1957 [Z.9]. Le transport énergétique et le mouvement des surfaces avec une même phase ont alors lieu dans les directions opposées.

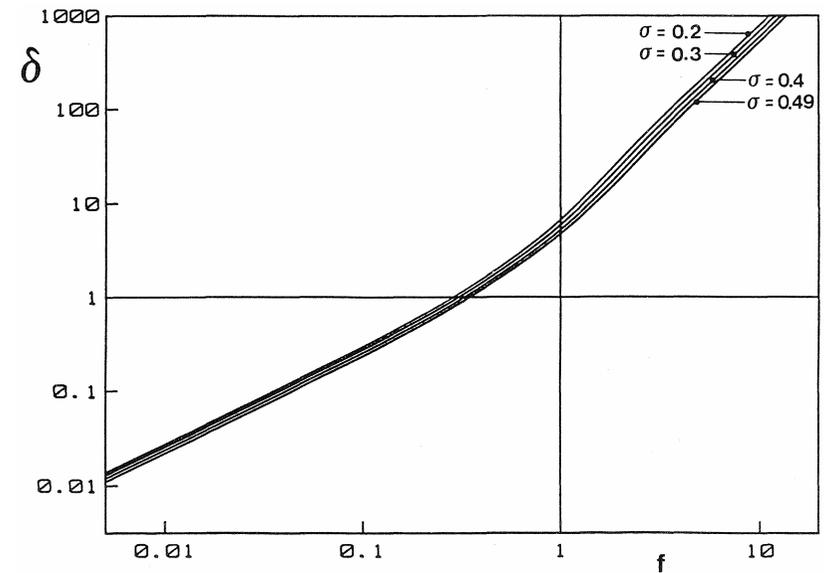


Fig. 3.19 : Erreur relative (3.3.43) de l'intensité d'une onde de flexion (3.3.42) en fonction de la fréquence, pour différents coefficients de Poisson.

3.4. Poutres

Les modes dans une poutre infinie, d'élasticité homogène et isotrope, peuvent être traités analytiquement -de manière semblable à ce qui a été fait dans le paragraphe précédent pour les modes de plaque-, pour autant que la section soit constante le long de l'axe de la barre circulaire. Il est montré dans l'article du manuel de Meeker et Meitzler [3.7, pp. 130-141] et les livres de Achenbach [2.6, pp. 236-249] et de Beltzer [2.9, pp. 147-152] comment on obtient le champ de déplacement et les relations de dispersion, au moyen des potentiels scalaire et vectoriel. Des coordonnées cylindriques sont utilisées de façon appropriée (fig. 3.20).

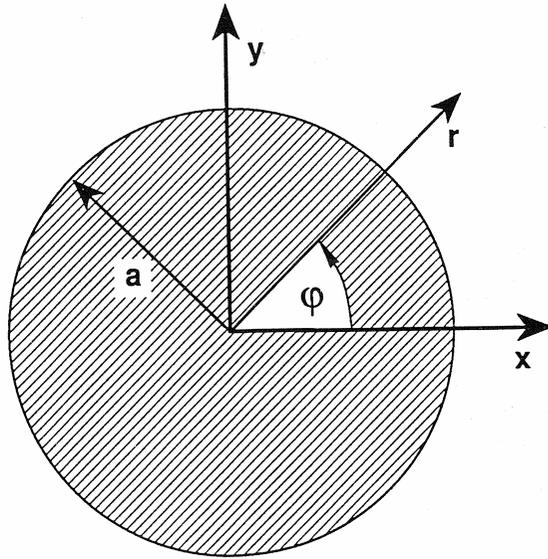


Fig. 3.20 : Coordonnées utilisées pour la description d'un cylindre de section circulaire de rayon a ; l'axe z est normal au plan de la section.

Les composantes du champ de déplacement relatif, exprimées dans une base orthonormée, sont :

$$\begin{aligned} u_r &= \left[+f_1' + \frac{nf_3}{r} + ikf_2 \right] \cos(n\varphi) e^{i(kz - \omega t)}, \\ u_\varphi &= \left[-f_3' - \frac{nf_1}{r} + ikf_2 \right] \sin(n\varphi) e^{i(kz - \omega t)}, \\ u_z &= \left[-f_2' - \frac{(n+1)f_2}{r} + ikf_1 \right] \cos(n\varphi) e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

avec les variables

$$f_1 = AJ_n(pr), \quad f_2 = BJ_{n+1}(qr), \quad f_3 = CJ_n(qr); \quad f_i' = \frac{\partial f_i}{\partial r}, \quad (3.4.2)$$

qui comportent les amplitudes A , B , C et des fonctions de Bessel du premier type. Les variables p et q de l'argument sont déterminées à partir de la pulsation ω , des vitesses c_l et c_t des ondes longitudinales et transversales dans un milieu infini, et du nombre d'onde k :

$$p^2 = \left(\frac{\omega}{c_l} \right)^2 - k^2, \quad q^2 = \left(\frac{\omega}{c_t} \right)^2 - k^2. \quad (3.4.3)$$

(il manque, dans l'ouvrage de Meeker et Meitzler, les trois composantes imaginaires [3.7, p. 132] des équations correspondant à (3.4.1) ; un signe est en outre aussi changé). La solution concernant φ étant 2π périodique, n doit être un nombre entier. Pour décrire toutes les formes d'oscillation possibles pour $n = 0$, il faut également considérer la solution qui résulte de l'échange entre les sinus et les cosinus (3.4.1). Alternativement, on peut ajouter un angle φ_0 constant à l'argument $n\varphi$ dans (3.4.1) et ajuster cet angle pour obtenir le champ de déplacement souhaité.

La vitesse de phase $c = \omega / k$ et les relations entre A , B et C sont déterminés par les conditions aux limites (surface libre). Pour tout $n \geq 0$, il existe une infinité de modes, regroupés en familles. On différencie pour $n = 0$ une "famille de torsion" et une "famille longitudinale", pour $n = 1$ les modes de la "famille des ondes de flexion", et pour $n > 1$ des familles d'ondes de flexion d'ordre plus élevé. La famille des modes de torsion correspond aux modes de cisaillement pur dans la plaque. La famille longitudinale et la famille des ondes de flexion correspondent aux ondes de Lamb symétriques et/ou antisymétriques. Ainsi, contrairement aux modes présentés par une plaque, pour laquelle le paramètre n n'apparaît pas et les modes se répartissent en quatre familles, une barre infinie présente un nombre plus important de familles de modes.

Pour un mode, le calcul analytique de l'intensité moyenne sur une section s'effectue comme dans le paragraphe précédent, à partir de la moyenne temporelle de la densité d'énergie cinétique :

$$w_{kin} = \frac{\rho}{4} |\dot{\mathbf{u}}|^2 = \frac{\rho\omega^2}{4} \left\{ |u_r|^2 + |u_\varphi|^2 + |u_z|^2 \right\}. \quad (3.4.4)$$

Pour le calcul de la moyenne spatiale, l'intégration spatiale en φ fait apparaître un facteur π (cela s'applique aussi à l'équation suivante pour $n > 0$; pour $n = 0$ les termes avec un sinus s'annulent, ceux avec des cosinus donnent 2π) ; l'intégration radiale nécessite un calcul :

$$\langle w_{kin} \rangle = \frac{\rho\omega^2}{4a^2} \int_0^a r dr \left\{ k^2 (f_1^2 + f_2^2) + f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2 + \frac{2n}{r} (f_1' f_3 + f_1 f_3') \right. \\ \left. + \frac{2(n+1)}{r} f_2' f_2 + \left(\frac{n}{r}\right)^2 (f_1^2 + f_3^2) + \left(\frac{n+1}{r}\right)^2 f_2^2 \right\}. \quad (3.4.5)$$

En raison de

$$\int (f_1' f_3 + f_1 f_3') dr = f_1 f_3, \quad \int f_2' f_2 dr = \frac{1}{2} f_2^2 \quad (3.4.6)$$

l'intégration des termes correspondants ne pose pas de difficulté. Le calcul est effectué en remplaçant les fonctions auxiliaires f_i par leurs expressions (3.4.2), en effectuant des conversions de fonctions de Bessel, et en reconnaissant que dans le cas général (qui comprend le cas $n = 0$), trois différentes intégrales de produits de fonctions de Bessel. Cela est possible analytiquement. Pour exprimer cette intégrale et les formules suivantes, la normalisation utilisée pour les plaques (3.3.19) est reprise, où l'épaisseur de plaque h est naturellement remplacée par le rayon a de la barre :

$$c_t = a = \lambda + 2\mu = 1. \quad (3.4.7)$$

On trouve la première intégrale ($n \geq 0$) chez Spanier et Oldham [3.8, 52:14:1 avec $\beta = \alpha$ en p. 520] :

$$\int_0^1 r J_n^2(\alpha r) dr = \frac{1}{2\alpha^2} \left\{ [\alpha J_n'(\alpha)]^2 - (\alpha^2 - n^2) J_n^2(\alpha) \right\}. \quad (3.4.8)$$

α est remplacé soit par p , soit par q . La deuxième intégrale ($n > 0$) est un cas particulier de l'intégrale 11.3.36 chez Abramowitz et Stegun [3.9, p. 485],

$$\int_0^1 r^{-1} J_n^2(\alpha r) dr = \frac{1}{2n} \left\{ 1 - J_0^2(\alpha) - 2 \sum_{m=1}^{n-1} J_m^2(\alpha) - J_n^2(\alpha) \right\},$$

(3.4.9) tandis que la troisième ($n > 0$) en est directement extraite (N° 11.3.36) et figure également sous une forme légèrement différente chez Gradshteyn et Ryzhik [3.10, p. 667] sous le numéro 6.152.7 :

$$\int_0^1 J_n(\alpha) J_{n+1}(\alpha r) dr = \frac{1}{2\alpha} \left\{ 1 - J_0^2(\alpha) - 2 \sum_{m=1}^n J_m^2(\alpha) \right\}. \quad (3.4.10)$$

Ceci démontre que l'intensité totale se calcule analytiquement pour un mode quelconque de poutre comme pour un mode de plaque, si les vitesses de groupe et de phase du mode sont connues. En conséquence des équations (3.3.11-12), les relations suivantes sont vérifiées :

$$\langle w_{pot} \rangle = \langle w_{kin} \rangle, \quad (3.4.11)$$

$$\langle I_z \rangle = C \langle w_{kin} + w_{pot} \rangle. \quad (3.4.12)$$

Des évaluations numériques ne sont pas disponibles jusqu'ici. Le cas simple du mode de torsion du plus faible ordre, pour lequel chaque section tourne autour de l'axe de la barre sans déformation, peut être traité complètement analytiquement. Seule la composante φ du déplacement

$$u_\varphi = r e^{i(kz - \omega t)}, \quad (3.4.13)$$

est différente de zéro ; elle est normalisée conformément à (3.3.16) de telle sorte que l'amplitude de l'oscillation en surface ($r = 1$) soit unitaire. Les vitesses de groupe aussi bien que de phase ne sont pas identiques à la vitesse des ondes transversales c_t . Cette onde de torsion présente ainsi de la dispersion. Il en résulte

$$\langle w_{kin} \rangle = \frac{\rho\omega^2}{8} = \frac{\pi^2}{2} \mu f^2 = \frac{1}{2} \langle I_z \rangle. \quad (3.4.14)$$

Cela est le même résultat que pour le premier mode de cisaillement d'une onde de plaque (3.3.20).

Aucune forme analytique universelle du champ de déplacement n'est connue pour une poutre qui ne possède pas une section transversale circulaire ou elliptique. Des solutions exactes se trouvent seulement à certaines fréquences pour une section transversale rectangulaire [3.7, pp.142-144]. Pour cette raison, des solutions approchées ont été développées, en particulier pour les modes fondamentaux des familles de torsion et longitudinale, ainsi que de flexion, aux basses fréquences. Les plus importants sont brièvement décrits par Achenbach [2.6, pp. 249-254] et peu cités. On suppose principalement que la section de la barre ne se déforme pas, mais reste droite, bien que cela ne soit pas strictement réalisé pour une section non circulaire. Les premiers modes de flexion, de torsion et quasi-longitudinaux d'une barre de section partiellement rectangulaire et partiellement arbitraire, mais toutefois uniforme le long de l'axe, sont examinés en détail par Cremer et Heckl [2.13, pp.81-115], où les densités d'énergie et les intensités sont également considérées. Aux basses fréquences, la poutre se comporte qualitativement comme un cylindre de section circulaire ou comme une plaque ; le mouvement de la section du cercle ne conduit qu'à des valeurs différentes des rigidités de torsion et de flexion, ainsi que des moments d'inertie, et par conséquent à une modification de la célérité des ondes.

3.5. Coques

En architecture comme dans la construction automobile ou de machines, les coques jouent, avec les plaques et les poutres, un rôle dominant. On peut comprendre les coques comme des plaques de surface gauches ; le perçage d'une poutre circulaire par un trou cylindrique suivant son axe donne également une coque. Ce deuxième point de vue est ici considéré en premier. Comme pour la poutre ronde, des expressions analytiques exactes existent pour le champ de déplacement des modes du cylindre creux [3.11]. En comparaison du cas de la poutre, ces expressions font apparaître un paramètre géométrique supplémentaire, le rayon interne, et sont plus développées, parce qu'aux fonctions de Bessel du premier type, il faut ajouter celles du second type pour assurer toutes les conditions de compatibilité. Cela ne représente pas une complication fondamentale pour

le calcul analytique des densités d'énergie et de l'intensité d'un mode dont les vitesses de groupe et de phase sont connues. Ce calcul, d'un coût important, est confié avec intérêt à un ordinateur. Comme pour la poutre, on obtient les grandeurs énergétiques moyennes sur la section par des intégrations analytiques simples en φ puis en r , généralement numériquement. Manifestement, ce travail n'a pas été fait jusqu'ici. Un programme informatique adapté serait toutefois une aide bienvenue, par exemple pour examiner quantitativement la transition entre une coque mince et une coque épaisse, ou pour créer une référence qui puisse être consultée à l'évaluation de méthodes approximatives.

En raison de la difficulté et du coût de calcul analytique, l'étude en élastodynamique linéaire des coques minces n'est généralement pas réalisée de façon exacte. En remplacement, de nombreuses théories de coques sont appliquées, qui ont été développées sur des bases plus ou moins plausibles, ou à l'aide d'approximations justifiées avec rigueur. Malgré ces simplifications, les formules obtenues sont nombreuses, en général assez longues, la comparaison entre différentes théories étant laborieuse. Ce n'est pas l'objectif de ce livre que de présenter plus de détails ; une analyse de la littérature pertinente (d'après Pierce [3.12] : "...vast, scattered, in many languages, and formidable reading") dépasserait le présent cadre. Il paraît cependant opportun d'attirer l'attention sur quelques publications récentes de ce champ.

Une introduction moderne est disponible dans le manuel de Niordson "Shell Theory" [3.13]. Il utilise, pour la description mathématique, la "langue" de la théorie de la relativité générale qu'est l'analyse tensorielle. De cette façon, des coques de forme quelconque peuvent être étudiées de manière élégante et sans restriction, sur un système de coordonnées spécial. Niordson examine presque exclusivement la déformation statique d'une coque ; les vibrations ne sont considérées que pour des coques sphériques et cylindriques. Pierce [3.12] adopte la représentation mathématique de Niordson pour les coques et dérive des équations fondamentales du mouvement une formulation tensorielle (et donc indépendante du système de coordonnées) de la loi de conservation de l'énergie. Les équations ainsi obtenues pour l'intensité dans les coques contiennent trois termes. Pavić [3.14] et Williams [3.15] calculent explicitement le vecteur intensité pour des coques. Chez Pavić, l'intensité

se compose de trois termes, chez Williams de cinq. Une comparaison de ces deux travaux appellerait l'écriture d'un troisième travail. Cela tient à la différence des théories de coques considérées, ou à une différence dans leur interprétation, car les deux utilisent certes un système de coordonnées cylindrique, mais la "traduction" de l'un à l'autre serait nécessaire (comme le dernier travail a été soumis à publication avant la parution du plus précoce, le deuxième auteur ne pouvait pas lui-même réaliser la comparaison).

Les manipulations de formule nécessaires au calcul des vibrations de coque sont généralement simples, mais menacent toutefois de devenir rapidement volumineuses. Il faut donc prévoir d'utiliser de plus en plus les possibilités du calcul symbolique sur ordinateur. Un bel exemple de la pertinence de cette approche est fourni par formules déduites "automatiquement" avec MACSYMA pour les vibrations propres de coques de différentes formes [3.16]. L'effort supplémentaire pour obtenir les profils de densités d'énergie et d'intensité serait peu coûteux.

Outre les représentations qui peuvent être obtenues pour l'étude de la densité de flux d'énergie, des formulations analytiques en milieux volumiques présentent aussi un intérêt pour l'étude des coques, eu égard au développement d'une théorie de rayon acoustique pour les vibrations de coque (voir [3.12] et ses références). Quelques-uns disent que sur une telle base, des méthodes de calcul peuvent être développées pour l'analyse des problèmes vibratoires dans le domaine des moyennes fréquences.

4. Milieux homogènes anisotropes

La description des propriétés élastiques d'un milieu anisotrope nécessite jusqu'à 21 constantes élastiques. Le nombre de constantes nécessaires est d'autant plus faible que la symétrie du milieu est élevée. On trouve p. ex. les tableaux correspondants dans [2.8 p. 10 ; 4.1 p. 67]. Avec trois coefficients élastiques, les matériaux de symétrie cubique ne possèdent qu'une constante de plus qu'un matériau isotrope ; cependant la dépendance des propriétés élastiques avec la direction présente déjà une telle complication que, pour beaucoup de systèmes élastodynamiques et contrairement au cas isotrope, une solution analytique n'existe pas, ou n'a jusqu'ici pas été obtenue. Les difficultés ne sont cependant pas de nature exclusivement mathématique. Ainsi certaines relations qui étaient vérifiées en milieu isotrope ne le sont plus, ou seulement dans des conditions particulières. Pour cette raison, de nombreux phénomènes apparaissent, dont la compréhension nécessite un effort supplémentaire, tant par la réflexion que sur le papier.

Dans la littérature, l'étude de milieux anisotropes présentant une certaine symétrie se limite habituellement aux symétries les plus simples, cubique et hexagonale. Cette dernière correspond à une isotropie transversale, et présente cinq constantes élastiques. Pour une description aussi claire que possible, la loi de Hooke (2.1.2) est représentée mathématiquement sur la base des valeurs propres et tenseurs propres du tenseur d'élasticité C . La démonstration en a été faite pour la symétrie cubique [4.2 p. 121] et pour une isotropie transverse [4.3 ; 4.2 p.132] (on peut consulter [4.4] pour la représentation mathématique des tenseurs).

Les solutions analytiques de l'élastodynamique anisotrope sont régulièrement longues et compliquées. De nos jours, leur calcul numérique et leur représentation graphique seront traités informatiquement. Cela est aussi vrai de la recherche de solutions analytiques, pour lesquelles les logiciels de calcul symbolique disponibles sont devenus une aide précieuse. Une fois obtenue la solution des champs de déplacement, de déformation et de contraintes, il est facile de calculer les grandeurs énergétiques d'après les formules générales du chapitre 2. Une expression analytique explicite de ces grandeurs ne présente cependant un intérêt que soit lorsqu'elle présente un avantage numérique, soit lorsqu'elle permet

une illustration de la physique. Les développements suivants devraient surmonter les réticences à traiter ce domaine, trop souvent évité.

4.1. Milieux infinis

Le problème le plus simple de l'élastodynamique anisotrope est celui de la propagation d'ondes planes dans un milieu d'extension infinie, qui est totalement résolu théoriquement. Différents ouvrages en font une présentation [2.6 p. 409 ; 2.8 p. 26 ; 2.9 chap. III ; 2.4 tome I chap. 7]. Il faut aussi considérer les travaux plus anciens [4.5 ; 4.6 chap. 6] et le travail original de Synge [4.7]. Des solutions de l'équation du mouvement

$$\rho \ddot{u}_i = C_{ijkl} u_{l,jk} \quad (4.1.1)$$

sont cherchées (équation (2.1.11) dans le cas de milieux anisotropes homogènes), sous la forme

$$u_i = A_i \exp \left[i(k_j r_j - \omega t) \right] \quad (4.1.2)$$

ce qui conduit à une équation dite de Christoffel

$$\left(C_{ijkl} k_j k_k - \rho \omega^2 \delta_{il} \right) A_l = 0. \quad (4.1.3).$$

En considérant un vecteur unitaire \vec{e} dans la direction de propagation et les rigidités de Christoffel

$$\Gamma_{il} = C_{ijkl} e_j e_k \quad (4.1.4)$$

une solution, de vitesse de phase $c = \omega / k$, est mise en évidence

$$\left(\Gamma_{il} - \rho c^2 \delta_{il} \right) A_l = 0. \quad (4.1.5).$$

Les valeurs propres de cette équation sont obtenues à partir de la condition

$$\det \left(\Gamma_{il} - \rho c^2 \delta_{il} \right) = 0. \quad (4.1.6).$$

Ainsi, dans un milieu tridimensionnel, il faut résoudre une équation du troisième degré. Dans une direction \vec{e} , il y a par conséquent trois vitesses de phase différentes. La polarisation des ondes correspondantes est donnée par les vecteurs propres. Contrairement au cas isotrope, pour lequel les deux ondes 'transversale' et 'longitudinale' apparaissent, ce n'est qu'exceptionnellement que, dans un milieu anisotrope, les ondes sont polarisées, longitudinale ou transverse, sur la base de symétries. La polarisation est souvent approchée, et on parle d'ondes quasi-longitudinale ou quasi-transversale, selon la polarisation "pure" la plus proche (un exemple est traité dans [2.9, p. 107], pour lequel l'angle entre la polarisation pure et la polarisation effective reste inférieur à 10°).

Beltzer [2.9 pp.107-109] a démontré que la vitesse de transport d'énergie est identique à la vitesse de groupe :

$$C_j = \frac{\partial c}{\partial e_j} = \frac{A_i C_{ijkl} A_l e_k}{\rho A_m^2 c}. \quad (4.1.7)$$

Il en résulte que, si la matrice

$$A_i C_{ijkl} A_l \quad (4.1.8)$$

n'est pas proportionnelle à la matrice identité, les vitesses de groupe et de phase présentent des directions différentes. La projection du vecteur vitesse de groupe sur la direction de propagation correspond à la vitesse de phase:

$$\vec{C} \cdot \vec{e} = c. \quad (4.1.9)$$

Au lieu du vecteur \vec{c} de vitesse de phase, on utilise souvent avec avantage celui de "vecteur de lenteur" (en anglais : slowness vector)

$$\vec{l} = \vec{e}/c = \vec{k}/\omega \quad (4.1.10)$$

Le vecteur \vec{C} de vitesse de groupe (4.1.7) est perpendiculaire à la "surface de lenteur" (en anglais : slowness surface) décrite par la pointe du

vecteur \vec{l} (4.1.10) lorsque la direction de propagation \vec{e} décrit toutes les directions du milieu.

À titre d'illustration, on considère dans le paragraphe 5.2.3 un milieu bidimensionnel de symétrie cubique. Il est caractérisé par les valeurs (adimensionnées) des constantes élastiques dans la présentation de Voigt

$$c_{11} = 0.83, \quad c_{12} = 0.15, \quad c_{44} = 0.26 \quad (4.1.11)$$

(la normalisation, effectuée d'après (5.2.15), est ici sans importance). Les polarisation, phase et vitesse de groupe des deux modes concernent trois directions de propagation (0°, 22,5° et 45° par rapport à l'abscisse x). Le vecteur unitaire dans la direction de propagation φ forme un angle arbitraire par rapport à l'abscisse x

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.1.12).$$

ce qui fait apparaître, d'après [2.9 p.100], la matrice de rigidité de Christoffel comme

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= c_{11} \cos^2 \varphi + c_{44} \sin^2 \varphi, \\ \Gamma_{12} &= \Gamma_{21} = (c_{12} + c_{44}) \cos \varphi \sin \varphi, \\ \Gamma_{22} &= c_{11} \sin^2 \varphi + c_{44} \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

et la condition sur le déterminant (4.1.6) fournit les valeurs propres

$$\rho c^2 = \frac{1}{2} \{ c_{11} + c_{44} \pm \sqrt{\frac{1}{2} (c_{11} - c_{44})^2 (1 + \cos 4\varphi) + \frac{1}{2} (c_{12} + c_{44})^2 (1 - \cos 4\varphi)} \}, \quad (4.1.14)$$

dont la dépendance en φ rend compte de la symétrie cubique. Pour les directions de propagation citées,

$$\begin{aligned} \varphi = 0^\circ : \quad \rho c^2 &= \begin{cases} c_{44} \\ c_{11} \end{cases} \\ \varphi = 22.5^\circ : \rho c^2 &= \frac{1}{2} \left\{ c_{11} + c_{44} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{44})^2 + \frac{1}{2}(c_{12} + c_{44})^2} \right\} \quad (4.1.15) \\ \varphi = 45^\circ : \quad \rho c^2 &= \begin{cases} \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \\ \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12} + 2c_{44}) \end{cases} \end{aligned}$$

La figure 4.1a présente la dépendance de la lenteur en fonction de la direction de propagation, pour le cas (4.1.11) (la longueur du vecteur, mesurée depuis l'origine du système de coordonnées jusqu'à la courbe, correspond à la lenteur pour une direction φ parallèle à ce vecteur). À titre de comparaison, les lignes pointillées présentent les résultats d'un comportement de propagation en milieu isotrope. La différence n'est pas particulièrement grande ; l'anisotropie des milieux cubiques [4.2 p.121, 4.8]

$$a = \frac{c_{11} - c_{12} - 2c_{44}}{c_{11} - c_{12} + 2c_{44}} = \frac{\mu' - \mu}{\mu' + \mu}, \quad (4.1.16)$$

qui prend des valeurs comprises entre -1 et +1, en est diminuée de 0,13. μ' et μ sont les modules de cisaillement dans les directions [110] et [100] :

$$\mu' = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}), \quad \mu = c_{44}. \quad (4.1.17).$$

Le module de compression

$$K = \frac{1}{3}(c_{11} + 2c_{12}) \quad (4.1.18)$$

n'apparaît pas dans la relation d'anisotropie (4.1.1.6) : la réponse à un chargement hydrostatique d'un milieu de symétrie cubique est en effet isotrope ($3K$, $2\mu'$ et 2μ sont les valeurs propres du tenseur \underline{C} des constantes élastiques).

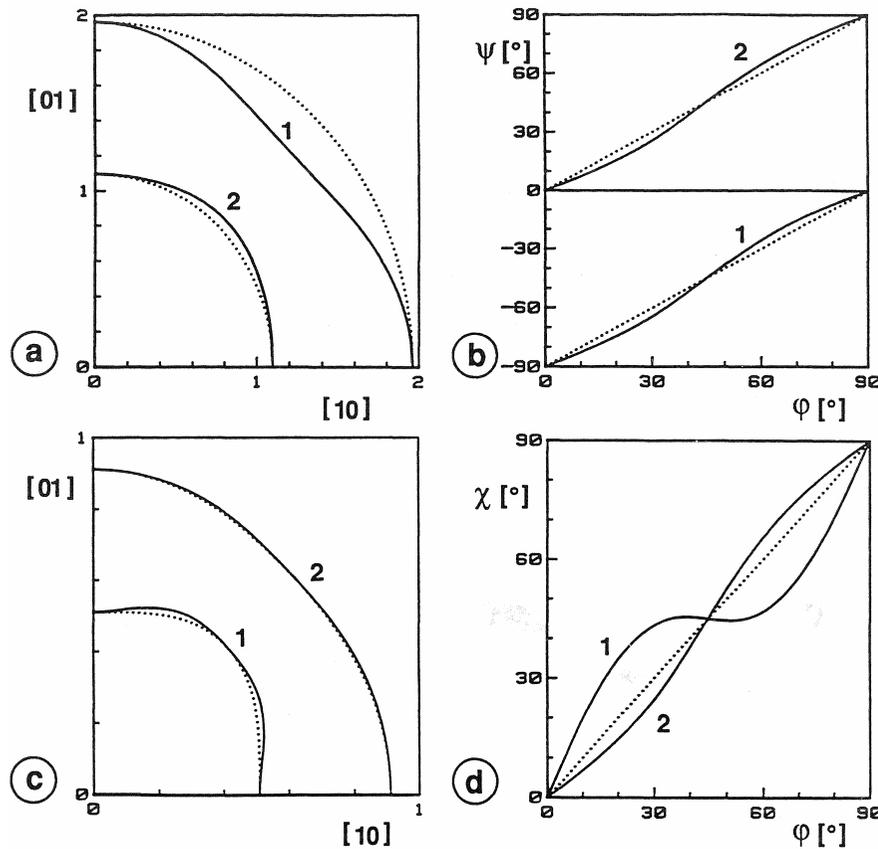


Fig.4.1 : Lenteur, polarisation, vitesses de phase et de groupe et direction de l'intensité des deux modes 1 et 2 en fonction de la direction de propagation φ ($\varphi = 0^\circ$, [10] et direction x ; $\varphi = 90^\circ$, [01] et direction y) dans un milieu anisotrope cubique avec des constantes élastiques (4.1.11) et/ou (4.1.19).

a) diagramme de lenteur (explication dans le texte ; pointillé : comportement isotrope).

b) polarisation ψ (en pointillé : polarisations longitudinale et transversale).

c) vitesse de groupe (en pointillé : vitesse de phase ; représentation identique au a)).

d) intensité dans la direction χ (en pointillé : direction de propagation φ).

L'importance physique des modules K , μ' et μ se présente plus facilement comme celle des modules de Voigt. Ces derniers viennent par conséquent se substituer aux premiers. D'après les valeurs (4.1.11),

$$K = 0,38 \quad \mu' = 0,34 \quad \mu = 0,26 \quad (4.1.19)$$

La polarisation ψ des deux modes est représentée fig. 4.1b en fonction de la direction de propagation φ . Elle ne dévie que peu des polarisations longitudinale et/ou transversale, représentées en pointillés. Le mode 1, de plus grande lenteur, peut donc être qualifié de 'quasi-transversal' ; le mode 2 de lenteur plus faible de 'quasi-longitudinal'. Pour un angle φ fixé, les polarisations des deux modes diffèrent précisément de 90° ; ils sont ainsi disposés perpendiculairement. Les lignes pointillée et pleine se coupent dans les directions de symétrie : la polarisation est ici exactement longitudinale ou transversale.

La figure 4.1c montre (avec la même présentation que la figure 4.1a) la vitesse de groupe des deux modes, en comparaison des vitesses de phase en pointillés. Dans les directions de symétrie, les deux vitesses d'un mode se rejoignent (cela ne s'applique pas en cas de dégénérescence, c'est à dire lorsque les deux modes possèdent la même vitesse de phase. Les vitesses de groupe sont alors aussi identiques, mais de la vitesse de phase est différente). La vitesse de groupe n'est jamais inférieure à la vitesse de phase.

La figure 4.1d représente la direction χ de l'intensité (en pointillé la direction φ de propagation). Elle est identique à la direction normale des courbes de lenteur et dévie plus clairement du comportement isotrope que les polarisations. Dans les directions de symétrie, elle coïncide avec la direction de propagation.

Les particularités du comportement anisotrope apparaissent en particulier pour des directions de propagation obliques. La caractéristique la plus importante est certainement que la direction du transport énergétique et la direction de propagation à marche de phase constante ne coïncident pas. En comparaison du paragraphe 5.2.3, quelques valeurs numériques sont présentées dans le tableau 4.1 pour la direction oblique $\varphi = 22,5^\circ$.

Si l'amplitude A du mode (4.1.2) est choisie indépendamment de la direction de propagation φ (en étant par exemple normée unitairement), pour une pulsation ω fixée, la densité d'énergie cinétique moyennée temporellement pour les deux modes et toutes les directions de propagation prend une valeur donnée. Puisque les conditions du principe de Rayleigh sont réalisées (voir § 2.4), la composante potentielle prend la même valeur que la composante cinétique

Mode	ψ	χ	R
1	-72.1°	37.4°	1.035
2	17.9°	16.8°	1.005

Tab. 4.1 Polarisation ψ , direction χ de l'intensité et rapport R entre les vitesses de groupe et de phase pour (1) le mode quasi-longitudinal et (2) le mode quasi-transversal, sous une incidence $\varphi = 22,5^\circ$ pour un milieu de constantes élastiques (4.1.11).

(l'établissement d'une moyenne spatiale n'est pas nécessaire pour un milieu homogène infini) et il en est de même pour la densité d'énergie totale moyennée temporellement, pour les deux modes et toutes les directions de propagation. D'après (2.5.1), l'intensité s'exprime comme le produit de la moyenne temporelle de la densité d'énergie et de la vitesse de groupe. Dans ce cas, dans les formules (où A est réel) :

$$w_{tot} = 2w_{kin} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A_i^2, \quad (4.1.20)$$

$$I_j = w_{tot} C_j = \frac{\omega^2}{2c} A_j C_{ijkl} A_l e_k. \quad (4.1.21),$$

la vitesse de groupe constitue par conséquent une mesure de l'intensité. Ainsi, la figure 4.1c illustre la quantité d'énergie transportée par chaque mode, en fonction de la direction de propagation φ , l'amplitude étant

conservée constante. La direction du transport énergétique est lue sur la figure 4.1d.

L'étude d'un milieu de forte anisotropie (figure 4.2 avec $a = -0,8$) révèle des différences radicales par rapport à l'exemple précédent. À nouveau, le mode de plus faible vitesse de phase est désigné par l'indice 1, celui de plus grande vitesse par l'indice 2. Le caractère des polarisations change considérablement avec la direction de propagation : le mode 1 est polarisé longitudinalement pour $\varphi = 0^\circ$ et $\varphi = 90^\circ$, transversalement pour $\varphi = 45^\circ$. Inversement, le mode 2 est transversal pour $\varphi = 45^\circ$, longitudinal pour $\varphi = 0^\circ$ et $\varphi = 90^\circ$. La représentation, issue de l'étude de milieux isotropes, selon laquelle les ondes longitudinales sont plus rapides que les ondes transversales doit être abandonnée. Elle reste certes valable pour $\varphi = 45^\circ$, mais c'est l'inverse pour $\varphi = 0^\circ$ et $\varphi = 90^\circ$. Helbig et Schoenberg [4.9] ont les premiers attiré l'attention sur ce phénomène, seulement récemment, dans un travail détaillé sur des ondes élastiques dans les milieux isotropes-transversal, et l'ont qualifié de *polarisation anormale*.

Dans l'exemple de la figure 4.2, il n'est justifié de parler de mode quasi-longitudinal ou quasi-transversal qu'à proximité des directions de symétrie ; aussi la qualification d'un mode uniformément pour toutes les directions φ n'est plus possible. On substitue à ce nom une numérotation d'après la vitesse de phase.

Alors que, pour le mode 2, les vitesses dépendent peu de la direction et que le transport énergétique est orienté dans une direction proche de la direction de propagation, l'anisotropie se manifeste clairement pour le mode 1 dans les différentes courbes de la figure 4.2. La différence maximale entre la direction de l'intensité et la direction de propagation atteint environ 40° .

On échange maintenant les valeurs de μ' et μ , ainsi que le signe de l'anisotropie a (figure 4.3). Le mode 1 est maintenant plus rapide pour $\varphi = 45^\circ$ (transversal) que pour $\varphi = 0^\circ$ (longitudinal) ; les polarisations sont aussi inversées (les courbes de la figure 4.3 ne peuvent toutefois pas être obtenues de la figure 4.2 par les opérations simples de symétrie, par exemple par une rotation autour de 45°). Le comportement anisotrope des deux modes est encore plus manifeste qu'en figure 4.2 : pour le mode 1, la différence maximale entre la direction de l'intensité et la direction de propagation atteint presque 60° .

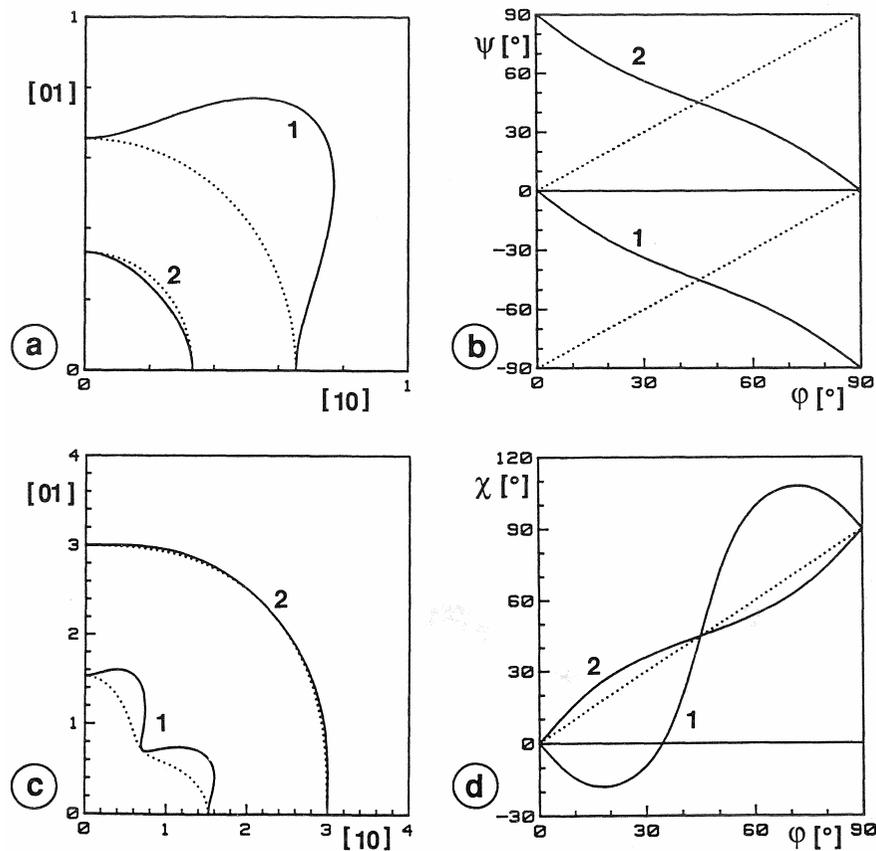


Fig.4.2 : Identique à la fig. 4.1, mais pour d'autres constantes élastiques : $K = 1$, $\mu' = 1$, $\mu = 9$; anisotropie $a = -0,8$.

Les conséquences les plus importantes du comportement anisotrope du matériau pour la propagation des ondes sont précisées sur cet exemple bidimensionnel. Le traitement numérique d'exemples tridimensionnel ne pose pas de difficulté, à l'exception du traitement des cas particuliers de dégénérescence ou de singularité. Les résultats associés, seulement plus variés et plus compliqués, peuvent être omis ici. La littérature [4.5 p.12, 4.6 pp. 72-78, 2.4] traite explicitement les cas des symétries cubique et

hexagonale. Il y a généralement un mode quasilongitudinal et deux modes de type quasitransversal. Ces derniers peuvent dégénérer dans certaines directions, c'est à dire lorsqu'ils présentent la même vitesse de phase. Ils se différencient toutefois pour le transfert d'énergie. En raison de la dégénérescence, chaque combinaison linéaire des deux modes est également, à nouveau, un mode. La propagation énergétique liée à ce mode doit être calculée séparément, car elle ne se laisse pas lire sur les diagrammes de vitesse de groupe et de direction de l'intensité.

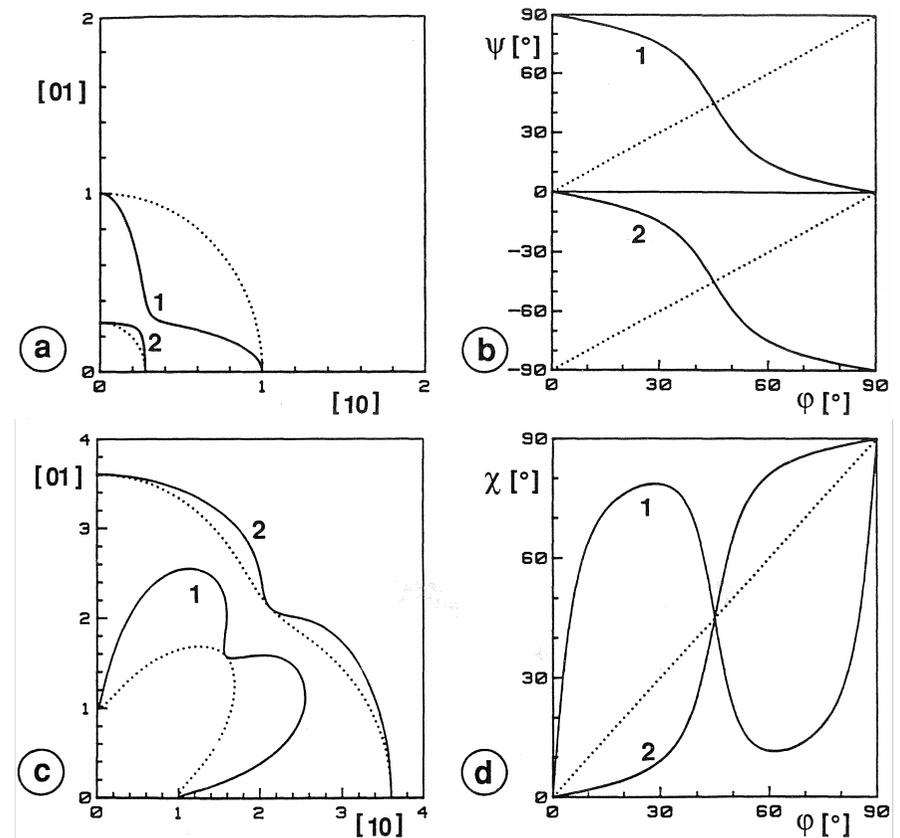


Fig. 4.3 : Identique à la fig. 4.1, mais pour d'autres constantes élastiques : $K = 1$, $\mu' = 9$, $\mu = 1$; anisotropie $a = +0,8$.

Waterman [4.10] a fait l'effort de déterminer le caractère approché, presque transversal ou longitudinal, des modes de propagation d'ultrasons dans les différentes directions de cristaux. L'approximation est réalisée à partir d'une direction de symétrie, de polarisation purement transversale ou longitudinale, et poursuivie au plus faible ordre en s'écartant de cette direction. Ce type d'approximation aurait pu être sans difficulté étendu à l'étude de l'intensité dans les cristaux cubiques ; cette grandeur d'intensité était alors probablement peu utilisée, et on peut de nos jours, au moyen d'un ordinateur, obtenir une solution exacte, ce qui réduit l'intérêt d'un travail à partir d'approximations.

Il ne semble qu'exceptionnellement exister de solution analytique [4.2, p.141] en milieux anisotropes, comme pour des ondes émises par une sphère pulsante ou oscillante (voir annexes A et B). D'après les considérations générales qui sont suggérées en [4.5, § 7], l'amplitude de la perturbation apportée par la source ponctuelle est presque toujours inversement proportionnelle à la distance à la source, mais une décroissance plus lente peut avoir lieu dans des directions singulières.

Pour être complet, la moitié du § 11 de [4.5] mentionne la prise en compte de l'absorption, toujours présente, par une loi de Hooke dont le tenseur d'élasticité C est complexe et dépendant de la fréquence. La polarisation des ondes planes, considérée jusqu'ici comme linéaire, prend alors une forme elliptique. En première approximation, la direction de propagation énergétique reste non influencée par l'absorption de l'onde.

La présentation de l'acoustique par tirs de rayons ou de paquets d'onde de Gauss, utile aux fréquences élevées, peut aussi être développée pour les milieux anisotropes [4.11] (la référence annoncée d'Acta Mech. (1987) "Elastic Gaussian wave packets in isotropic media" citée en [4.11] n'est jusqu'ici pas parue).

4.2. Milieux finis

Considérer un milieu *fini* signifie, pour la théorie de la propagation du son, qu'il ne suffit plus seulement de résoudre l'équation du mouvement : les conditions aux limites doivent également être vérifiées sur la surface frontière du domaine. Pour les plaques et poutres de matériaux isotropes,

traités dans le chapitre 3, la prise en compte de ces conditions aux frontières pour des systèmes apparemment simples conduit déjà à des expressions analytiques assez compliquées, pour autant qu'elles soient accessibles. Dans le cas anisotrope, non seulement le calcul analytique est plus difficile et ne se présente souvent pas sous forme d'un système soluble d'équations fermées, mais les résultats présentent également une variété plus grande ; les raisons en sont la dépendance envers l'anisotropie, les propriétés de symétrie et l'orientation. Il ne faut par conséquent pas s'étonner si ce domaine de l'acoustique comporte encore des lacunes qui attendent d'être étudiées. Il s'agit là d'un travail de recherche pure, loin de l'incitation à considérer des applications pratiques. Ce contexte justifie de se limiter, ici, à quelques remarques sur la réflexion sur une surface plane, libre de toute force, pour les ondes de surface et les ondes de plaques.

La résolution de la réflexion d'ondes planes dans un demi-espace anisotrope est décrite brièvement et avec clarté dans le paragraphe 8 de [4.5] ; une représentation détaillée illustrée d'exemples se trouve chez Auld [2.4, tome II, chap. 9]. Une onde plane incidente quasi-transversale ou quasi-longitudinale produit en réflexion trois ondes. Les angles sous lesquels elles quittent la surface peuvent facilement être déterminés d'après un diagramme de lentour ; il est en revanche plus difficile d'en obtenir les amplitudes correspondantes. Si les circonstances s'y prêtent, des ondes de surface sont également émises. En ce qui concerne les intensités, il faut s'attendre à des profils quasi-périodiques, comme dans le cas du demi-espace isotrope (paragraphe 3.2).

Une onde qui se propage sur un demi-espace limité par une surface libre et dont l'amplitude décroît exponentiellement avec la distance à la surface est appelée *onde de Rayleigh*. Dans un milieu isotrope, une telle onde de surface peut se propager, parallèlement à la surface, de manière identique en toute direction, puisque toutes ces directions sont équivalentes. Dans un demi-espace anisotrope, ces directions ne sont plus équivalentes (à de rares exceptions près) ; la polarisation et la vitesse d'une onde de Rayleigh dépendent de sa direction. En comparaison du cas isotrope, une autre différence réside en ce que la décroissance exponentielle de l'amplitude avec la distance à la surface (et/ou la composition de ces décroissances exponentielles) peut alors prendre la

forme d'une variation sinusoïdale. En d'autres termes, le vecteur d'onde n'est pas rigoureusement parallèle à la surface ! La polarisation est elliptique, l'excentricité et l'orientation de l'ellipse pouvant changer avec la distance à la surface [4.5 ; 4.7]. Les ondes de surface dans un cristal de symétrie cubique ont été examinées par Stoneley [4.12] ; le cas particulier de la direction [100] est aussi pris en compte en [2.9]. Il est discuté en [4.13;2.4] ce qui est appelé *pseudo-ondes de surface*. Synge [4.7] et avec lui Musgrave [4.5] affirment que les ondes de Rayleigh ne peuvent se propager que dans certaines directions des milieux anisotropes. Farnell contredit cela [4.13, p. 119] : des calculs numériques dans de nombreux exemples auraient toujours donné comme solution une onde de Rayleigh, à l'exclusion des directions singulières pour lesquelles une dégénérescence est possible avec une onde de volume. Que Synge se soit trompé dans sa conclusion se laisse expliquer simplement, sans besoin de se référer aux équations :

Il s'agit de la solution d'un système d'équations linéaire et homogène. La vitesse de phase des ondes de Rayleigh est fournie par une condition qui porte sur le déterminant. Puisque les coefficients du système peuvent être complexes, cette condition peut également être complexe, ce qui correspond à deux équations réelles pour la vitesse de phase (qui est réelle). Par conséquent, l'existence d'une solution n'est pas garantie en général. Synge exclut le cas d'une solubilité générale. Toutefois, si l'on scinde les coefficients et les inconnues du système d'équations en une partie réelle et une partie imaginaire, on obtient le double d'équations (six) pour le double d'inconnues, mais toutefois une seule équation pour la vitesse de phase, puisque la matrice des coefficients est maintenant réelle. Il reste à clarifier s'il y a en effet une solution réelle sous certaines conditions pour la vitesse de phase, comme les résultats de Farnell le laissent supposer. Que les ondes de Rayleigh ne doivent exister qu'exceptionnellement, p. ex. uniquement pour certaines directions, n'est en tout cas pas directement plausible, si on se place du deuxième point de vue. Viktorov [4.13 p.7] affirme encore que dans les cristaux de système triclinique, aucune onde de Rayleigh n'existe en général. La suite de la discussion sur ces questions est poursuivie dans le travail [4.15], dans lequel des contributions essentielles des années quatre-vingts et de soixante-dix sont citées (pour plus de détails, voir [4.16 ; Z.10 ; Z.11]).

Malgré des progrès considérables, auxquels un chapitre propre et vaste pourrait être consacré, ce sujet de recherche n'est toujours pas achevé.

On peut comprendre les ondes de Rayleigh comme le cas limite d'ondes de plaque (ondes de Lamb) lorsque l'épaisseur de la plaque ou la fréquence de l'onde deviennent très grandes. Il est clair que des ondes dans les plaques anisotropes constituent un défi épineux, puisque les ondes de surface de Rayleigh se sont déjà avérées fort complexes quant à leur existence et leur structure. Synge [4.7] considère une plaque d'un matériau d'anisotropie quelconque dont une face est libre et l'autre soumise à une onde de tension. Si l'amplitude de l'onde de tension est fixée à zéro, on obtient les ondes de plaque libre. Une onde de plaque comporte jusqu'à six composantes d'onde, chacune vérifiant les équations du mouvement, et dont l'amplitude sur l'épaisseur de la plaque a une variation exponentielle ou sinusoïdale. La combinaison linéaire de ces ondes partielles est établie de telle sorte que les conditions aux limites soient vérifiées. La vitesse de phase de l'onde de la plaque est également fixée. Des relations de dispersion explicites comme celle de Rayleigh-Lamb (3.3.9) n'existent pas pour une anisotropie quelconque. Dans [4.17], Synge examine au moins qualitativement le flux d'énergie pour le cas considéré. Le flux total d'énergie est, en moyenne temporelle, la somme des contributions particulières des ondes partielles, puisque les termes croisés entre les différentes composantes d'ondes disparaissent.

Il paraît concevable de calculer analytiquement, comme en [3.6], de manière simple au moyen d'un ordinateur, les densités d'énergie et les intensités dans les plaques anisotropes, localement et en moyenne sur l'épaisseur de la plaque (par intégration analytique !). Le plus grand coût de calcul pourrait venir de la détermination des "lenteurs" des composantes de l'onde et des vitesses de groupe et de phase pour l'onde de la plaque. La difficulté principale de programmation pourrait se trouver dans la gestion de beaucoup de cas singuliers, venant par exemple de combinaisons linéaires liées à la symétrie du problème lors d'une dégénérescence de composantes d'ondes.

Tant que ce traitement, suggéré pour les ondes dans les plaques anisotropes, reste à l'état de projet d'avenir, on se servira volontiers - ou l'on se satisfera - de l'approximation de solutions existantes dans des cas particuliers. Deux possibilités s'avèrent souvent suffisantes pour des

applications pratiques. Quelques références sont disponibles en [2.4, Vol. II, p. 217]. Le cas d'une plaque transversale isotrope a été étudié par Abubakar [4.18], en particulier pour les modes fondamentaux aux basses fréquences. Puisqu'un résultat par cette méthode s'avère très coûteux, même pour des propriétés de symétrie réduites et aux basses fréquences, Markus [4.19] utilise une méthode approchée, basée sur un développement en puissances du nombre d'onde, qui est applicable pour une anisotropie quelconque. Un matériau orthotrope (Magnésium-Barium-Fluorid) a servi d'exemple.

Dans quelques cas, il peut même suffire de remplacer le comportement anisotrope, en l'approchant par un matériau isotrope dont les modules de compression et de cisaillement sont choisis avec habileté. Pour une symétrie cubique, les moyennes se recommandent à [4.2, p. 125 et p. 160] d'après Voigt ou Reuss. En pratique, pour beaucoup de plaques orthotropes, les ondes de flexion et/ou les impédances qui leurs sont associées peuvent être décrites avec une très bonne approximation par un comportement isotrope, en utilisant comme raideur de flexion isotrope la moyenne géométrique des raideurs de flexion des deux directions de symétrie qui se trouvent dans le plan de la plaque [2.13, pp. 301-304].

5. Milieux hétérogènes de structure périodique

Il est fréquent de rencontrer des milieux dont la structure macroscopique peut être considérée, avec une bonne approximation, comme périodique. Ainsi, les pages de ce livre ont une disposition périodique, si l'on fait abstraction du fait qu'elles sont imprimées. Dans la pratique pour l'acousticien, parmi les périodicités qui sont intéressantes, comptent essentiellement la disposition régulière de cloisons et de planchers, de portes, de fenêtres ou éléments de grands bâtiments, le renforcement régulier des poutres, plaques, toits, pylônes, raidisseurs de coques de navire, la stratification régulière de différents matériaux dans le contreplaqué, dans les matériaux renforcés par des fibres ou dans une paroi maçonnée, ou encore la disposition régulière des trous dans une tôle perforée.

Le traitement théorique de telles structures périodiques se trouve, dans la littérature, presque uniquement pour des périodicités linéaires. Cremer et Heckl y consacrent un chapitre [2.73, pp.405-425], dans lequel ils font remarquer l'analogie déjà connue depuis longtemps avec l'électrotechnique (cascades, directeurs de chaîne). Dans le manuel de Thomson [5.1, pp. 325-330] sont traités des systèmes constitués d'une série d'éléments identiques ("repeated structures") par la méthode des matrices de transfert, ce qui lui permet de donner des conditions aux limites aux extrémités de la structure.

D'un point de vue mathématique, dans les systèmes périodiques, une équation différentielle avec un opérateur différentiel spatial périodique est résolue pour la propagation d'une onde. Ce travail a été traité, avec d'innombrables variantes, dans le cadre de la théorie de l'électron dans les milieux cristallins. La qualité fondamentale des solutions, liée à la périodicité du milieu, se reflète dans le théorème de Bloch [5.2-4] qui constitue la clé essentielle de la forme recherchée pour les solutions. Le théorème de Bloch [5.5] est une généralisation du théorème de Floquet [5.6] qui n'avait été formulé que pour une périodicité linéaire (équation de Mathieu). Comme on peut le lire dans le livre de Brillouin [5.7], le théorème de Bloch s'applique non seulement aux solutions de l'équation de Schrödinger dans les cristaux, mais aussi aux ondes élastiques dans les

milieux de structure spatialement périodique. Par conséquent, ces ondes peuvent être également qualifiées de d'ondes de Bloch (élastiques).

L'aspect '*ondes de Bloch*' est rigoureux dans le cadre de l'élastodynamique linéaire. Il ne jouit pourtant en acoustique d'aucune popularité, parce que l'ignorance des méthodes de la théorie de l'électron en milieu cristallin représente généralement un seuil d'inhibition important. Les travaux de Sheng et de Tào comptent parmi les exceptions importantes [5.8-9] en traitant des exemples concrets dans le cas limite des basses fréquences. Comme dans les chapitres précédents, nous nous limitons aussi ici (au moins en principe) à une description exacte, et renonçons à une discussion sur les nombreuses méthodes approchées. Les développements suivants suivent ceux du rapport [5.10], en se basant sur les travaux [5.8-9], et en se concentrant comme eux sur le cas limite des basses fréquences. Un calcul des grandeurs énergétiques aux fréquences plus élevées n'a probablement pas été jusqu'ici mis en oeuvre.

5.1. Equations de base pour les milieux périodiques localement isotropes

Les équations du mouvement (2.1.6) pour un milieu localement isotrope ont été présentées dans le paragraphe 2.1. Elles restent valides lorsque la masse volumique et des propriétés élastiques présentent une variation spatiale quelconque. Dans le cas d'une inhomogénéité périodique, il résulte du théorème de Bloch que le champ de déplacement peut être ramené à une onde de Bloch

$$\vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \vec{p}_{\vec{k}}(\vec{r}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (5.1.1)$$

(la dépendance temporelle est généralement omise ci-dessous). Une onde de Bloch, plane et de vecteur d'onde \vec{k} , est "modulée" par la fonction spatialement périodique

$$\vec{p}_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{g}) = \vec{p}_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad (5.1.2)$$

On parle pour $\vec{p}_{\vec{k}}$, de façon appropriée, d'une "fonction de polarisation", puisqu'elle indique la direction locale de l'oscillation. Sa moyenne spatiale

est la polarisation moyenne de l'onde de Bloch, \vec{g} est le vecteur de périodicité, qui s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base (linéairement indépendants):

$$\vec{g}_n = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3 \quad (5.1.3)$$

Le triplet de nombres entiers n_1, n_2, n_3 , est résumé par l'indice n , en omettant de noter par une flèche le caractère de vectoriel de n (pour plus d'explications sur la description des structures périodiques, nous renvoyons au livre de Kittel [5.2]). Comme les fonctions de polarisation (5.1.2), chaque propriété du matériau $M(\mathbf{r})$ est spatialement périodique :

$$M(\vec{r} + \vec{g}) = M(\vec{r}). \quad (5.1.4)$$

Pour utiliser la périodicité, une transformation de Fourier des équations du mouvement est généralement entreprise. Les "vecteurs de périodicité réciproque"

$$\vec{G}_m = m_1 \vec{A}_1 + m_2 \vec{A}_2 + m_3 \vec{A}_3 \quad (5.1.5)$$

sont nécessaires, dont les combinaisons linéaires des vecteurs de base du réseau périodique réciproque sont :

$$\vec{A}_1 = \frac{2\pi}{V_0} (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3), \quad \vec{A}_2 = \frac{2\pi}{V_0} (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1), \quad \vec{A}_3 = \frac{2\pi}{V_0} (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2). \quad (5.1.6)$$

$V_0 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ est le volume de la cellule de base du réseau périodique. La relation d'orthogonalité

$$\vec{a}_i \cdot \vec{A}_j = 2\pi \delta_{ij} \quad (5.1.7)$$

est vérifiée ($i, j = 1, 2, 3$; δ_{ij} : symbole de Kronecker). Chaque fonction respectant la périodicité du réseau peut être représentée par une série de Fourier

$$M(\vec{r}) = \sum_m M_m \exp[i\vec{G}_m \cdot \vec{r}] \quad (5.1.8)$$

dans laquelle on somme sur tous les éléments du réseau réciproque. Les coefficients de Fourier M_m sont obtenus par une intégrale sur la cellule de base

$$M_m = \frac{1}{V_0} \int M(\vec{r}) \exp[-i\vec{G}_m \cdot \vec{r}] d^3r. \quad (5.1.9)$$

L'orthogonalité et le caractère complet des fonctions $\exp[i\vec{G}_m \cdot \vec{r}]$ s'exprime sur la cellule élémentaire par les relations

$$\int \exp[i(\vec{G}_m - \vec{G}_n) \cdot \vec{r}] d^3r = V_0 \delta_{mn}, \quad (5.1.10)$$

$$\sum_m \exp[i\vec{G}_m \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] = V_0 \sum_n \delta(\vec{r} - \vec{r}' + \vec{g}_n) \quad (5.1.11)$$

où $\delta(\dots)$ est la distribution de Dirac.

Comme les équations du mouvement (2.1.6) s'écrivent comme le produit de fonctions périodiques, la transformation de Fourier fournit une somme double sur les points du réseau périodique réciproque. Après une intégration sur une cellule de base, celle-ci peut être réduite à une somme simple

$$\sum_n \{\omega^2 \rho_{l-n} - \underline{V}_{ln}\} \vec{p}_n = 0$$

avec les matrices

$$\begin{aligned} \underline{V}_{ln} &= \mu_{l-n} (\vec{k} + \vec{G}_l) (\vec{k} + \vec{G}_n) \underline{I} \\ &+ \lambda_{l-n} (\vec{k} + \vec{G}_l) (\vec{k} + \vec{G}_n) + \mu_{l-n} (\vec{k} + \vec{G}_n) (\vec{k} + \vec{G}_l). \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

L'équation aux dérivées partielles (2.1.6) est ainsi transformée en une suite infinie de systèmes linéaires homogènes. Le vecteur \vec{k} étant donné, on détermine d'abord ω (condition pour que le système soit soluble), puis ensuite les coefficients de Fourier \vec{p}_n des fonctions de polarisation. Les équations (5.1.12) sont présentées (pour la première fois ?) par Sheng et Tao [5.8] sous une forme légèrement différente ; l'analogie pour des milieux localement cubiques n'est que peu compliqué [5.9, éq. (9)].

Tous les termes $l \neq n$ disparaissent pour un milieu homogène

$$\{\omega^2 \rho_0 - \underline{V}_{ll} \cdot\} \vec{p}_l = 0, \quad (5.1.13)$$

c'est à dire que les coefficients \vec{p}_l sont découplés ; ils peuvent alors facilement être obtenus. Le système d'équations

$$\left[\omega^2 \rho_0 - \mu_0 (\vec{k} + \vec{G}_l)^2 \right] \vec{p}_l - (\lambda_0 + \mu_0) (\vec{k} + \vec{G}_l) (\vec{k} + \vec{G}_l) \cdot \vec{p}_l = 0 \quad (5.1.14)$$

possède deux familles de solutions non triviales, à savoir

$$\vec{p}_l \perp (\vec{k} + \vec{G}_l) \quad \omega^2 \rho_0 = \mu_0 (\vec{k} + \vec{G}_l)^2 \quad (5.1.15)$$

et

$$\vec{p}_l \parallel (\vec{k} + \vec{G}_l) \quad \omega^2 \rho_0 = (\lambda_0 + 2\mu_0) (\vec{k} + \vec{G}_l)^2, \quad (5.1.16)$$

auquel cas $p_l = 0$ pour $l \neq n$. Pour $l=0$ apparaissent comme attendu les ondes longitudinale et/ou transversale en milieu infini homogène et isotrope. Les autres solutions pour $l \neq 0$ sont similaires aux solutions $l=0$; leur apparition est liée à la périodicité de la relation de dispersion $\omega(\vec{k})$ (pour éviter une ambiguïté de la formulation, on se limite généralement aux valeurs de \vec{k} dans la première zone de Brillouin. Si l'on fait tendre la période spatiale vers zéro pour un milieu homogène, apparaît une valeur nulle, et les vecteurs de périodicité réciproque et la première zone de Brillouin devient ainsi infinie. Les valeurs $l > 0$ sont alors sans objet).

La démonstration des relations de symétrie générales présentées ci-dessous figure en annexe E. Le carré de la fréquence est inchangé par un renversement de la direction de propagation, la vitesse de groupe change alors seulement par son signe :

$$\omega^2(-\vec{k}) = \omega^2(\vec{k}). \quad (5.1.17)$$

On arrive aussi à ce résultat sans les calculs figurant en annexe, en utilisant l'invariance par renversement du temps et la propagation inverse de l'onde par retournement temporel. Pour la fonction périodique $\vec{p}_k(\vec{r})$, il en résulte la relation

$$\vec{p}_n(-\vec{k}) = \vec{p}_{-n}^*(\vec{k}) \quad (5.1.18)$$

et pour ses coefficients de Fourier

$$\vec{p}_{-\vec{k}}(\vec{r}) = \vec{p}_{\vec{k}}^*(\vec{r}). \quad (5.1.19)$$

La partie réelle de $\vec{p}_k(\vec{r})$ est ainsi une fonction paire de \vec{k} , la partie imaginaire une fonction impaire.

Dans beaucoup d'exemples, l'inhomogénéité est symétrique par inversion, c'est à dire que $M(\vec{r})$ reste inchangé par renversement d'un système de coordonnées approprié

$$M(\vec{r}) = M(-\vec{r}), \quad (5.1.20)$$

et pour les coefficients de Fourier

$$M_m = M_{-m}. \quad (5.1.21).$$

Si aucune absorption de matériau n'est prise en compte, les fonctions $M(\vec{r})$ sont réelles. Cela signifie que

$$M_{-m} = M_m^* \quad (5.1.22)$$

et, en raison de (5.1.21), que les coefficients de Fourier sont réels.

C'est pourquoi les coefficients \vec{p}_n peuvent également être choisis réels, si on se limite à des valeurs réelles de ω et de \vec{k} , c'est à dire pour des ondes de Bloch non amorties (voir éq. (5.1.12)). Alors, en particulier, le coefficient \vec{p}_0 est aussi réel et la polarisation moyenne des ondes de Bloch linéaire (les ondes de Bloch polarisés elliptiques se présentent visiblement comme la superposition de deux ondes de Bloch polarisés linéairement, avec un même ω et un même \vec{k} , même lors d'une dégénérescence). Puisque, dans un retournement par symétrie, l'étoile symbolisant la conjugaison complexe des propriétés du matériau (5.1.18) peut être omise, la combinaison de

$$\vec{p}_{-\vec{k}}(\vec{r}) = \vec{p}_{\vec{k}}(-\vec{r}). \quad (5.1.23)$$

avec (5.1.19) montre que la partie réelle de $\vec{p}_{\vec{k}}(\vec{r})$ est une fonction paire de \vec{r} , la partie imaginaire une fonction impaire.

Pour obtenir les grandeurs énergétiques, on a besoin des déformations

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \left\{ (\nabla + i\vec{k})\vec{p} + [(\nabla + i\vec{k})\vec{p}]^t \right\} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ &= [(\nabla + i\vec{k})\vec{p}]_s e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

(on note la composante symétrique du produit dyadique par l'indice s) et des contraintes qui, dans le cas d'une isotropie locale, s'écrivent encore explicitement sans prendre une expression trop lourde :

$$\underline{\sigma} = \left\{ \lambda(\nabla + i\vec{k}) \cdot \vec{p} \underline{I} + 2\mu [(\nabla + i\vec{k})\vec{p}]_s \right\} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}. \quad (5.1.25)$$

On arrive après quelques calculs aux résultats suivants pour la densité d'énergie moyennée temporellement ($k^2 = \vec{k}\cdot\vec{k}$, \vec{k} étant réel)

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{4} \left\{ \rho\omega^2 \vec{p}\cdot\vec{p}^* + \lambda \left| (\nabla + i\vec{k}) \cdot \vec{p} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \mu \left[k^2 \vec{p}\cdot\vec{p}^* + |\vec{k}\cdot\vec{p}|^2 \right] + 2\mu \operatorname{Re} \left\{ [(\nabla + i\vec{k})\vec{p}] \cdot (\nabla\vec{p})_s^* \right\} \right\} \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

et pour l'intensité

$$\bar{I} = \frac{\omega}{2} \operatorname{Re} \left\{ \lambda \left[(-i\nabla + \vec{k}) \cdot \vec{p} \right] \vec{p}^* + 2\mu \left[(-i\nabla + \vec{k})\vec{p} \right]_s \cdot \vec{p} \right\} \quad (5.1.27)$$

(la validité de ces deux dernières expressions n'est pas limitée à des ondes de Bloch, car la propriété de périodicité de \vec{p} n'a pas été utilisée). À titre de vérification, dans le cas limite d'un milieu homogène pour lequel tous les termes ∇ sont supprimés et $\vec{p}(\vec{r})$, $\vec{\rho}(\vec{r})$, $\vec{\lambda}(\vec{r})$ et $\vec{\mu}(\vec{r})$ peuvent être remplacés par la polarisation moyenne \vec{p}_0 et les valeurs des moyennes spatiales ρ_0 , λ_0 et μ_0 , nous obtenons :

$$w_{\text{hom}} = \frac{1}{4} \left\{ (\rho_0\omega^2 + \mu_0 k^2) \vec{p}_0 \cdot \vec{p}_0^* + (\lambda_0 + \mu_0) |\vec{k}\cdot\vec{p}_0|^2 \right\}, \quad (5.1.28)$$

$$\bar{I}_{\text{hom}} = \frac{\omega}{2} \operatorname{Re} \left\{ \mu_0 \vec{p}_0 \cdot \vec{p}_0^* \vec{k} + (\lambda_0 + \mu_0) (\vec{k}\cdot\vec{p}_0) \vec{p}_0^* \right\}. \quad (5.1.29)$$

Une valeur complexe de \vec{p}_0 signifie en général une polarisation elliptique (voir paragraphe 2.2). Pour une polarisation longitudinale (\vec{p}_0 parallèle à \vec{k}), on obtient

$$w_{\text{long}} = \frac{1}{4} \vec{p}_0 \cdot \vec{p}_0^* \{ \rho_0\omega^2 + (\lambda_0 + 2\mu_0)k^2 \}, \quad (5.1.30)$$

$$\bar{I}_{\text{long}} = \frac{\omega}{2} \vec{p}_0 \cdot \vec{p}_0^* (\lambda_0 + 2\mu_0) \vec{k}, \quad (5.1.31)$$

pour une polarisation transversale (\vec{p}_0 perpendiculaire à \vec{k})

$$w_{\text{trans}} = \frac{1}{4} \vec{p}_0 \cdot \vec{p}_0^* \{ \rho_0\omega^2 + \mu_0 k^2 \}, \quad (5.1.32)$$

$$\bar{I}_{\text{trans}} = \frac{\omega}{2} \vec{p}_0 \cdot \vec{p}_0^* \mu_0 \vec{k}. \quad (5.1.33)$$

Un rapprochement de ces résultats avec ceux du paragraphe 3.1 montre facilement une bonne concordance.

Les moyennes spatiales de la densité d'énergie et de l'intensité d'une onde de Bloch peuvent être obtenues par le développement des fonctions périodiques (5.7.26-27) en série de Fourier puis une intégration sur une cellule de base. Sur la base de l'orthogonalité (5.1.10), lors de la formation de la moyenne, la somme triple originale sur tous les points du réseau périodique réciproque se réduit en une somme double :

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \sum_{m,n} \rho_{n-m} \omega^2 \vec{p}_m \cdot \vec{p}_n^* + \lambda_{n-m} \left[(\vec{G}_m + \vec{k}) \cdot \vec{p}_m \right] \left[(\vec{G}_n + \vec{k}) \cdot \vec{p}_n^* \right] + \mu_{n-m} \left\{ k^2 \vec{p}_m \cdot \vec{p}_n^* + (\vec{k} \cdot \vec{p}_m) (\vec{k} \cdot \vec{p}_n^*) + 2 \left[(\vec{G}_m + 2\vec{k}) \vec{p}_m \right]_s \cdot (\vec{G}_n \vec{p}_n^*) \right\}, \quad (5.1.34)$$

$$\langle \vec{I} \rangle = \frac{\omega}{2} \operatorname{Re} \sum_{m,n} \lambda_{n-m} \left[(\vec{G}_m + \vec{k}) \cdot \vec{p}_m \right] \vec{p}_n^* + 2 \mu_{n-m} \left[(\vec{G}_m + \vec{k}) \vec{p}_m \right]_s \cdot \vec{p}_n^*. \quad (5.1.35)$$

Il est parfois utile de spécifier séparément les termes des sommes doubles pour $m = 0$ ou $n = 0$:

$$\sum_{m,n} (\dots) = (\dots)_{m=0} + \sum_{m \neq 0} (\dots)_{n=0} + \sum_{n \neq 0} (\dots)_{m=0} + \sum_{\substack{m \neq 0 \\ n \neq 0}} (\dots). \quad (5.1.36)$$

Avec le renversement de la direction de propagation, on parvient, d'après (5.1.19) et sans surprise, aux relations

$$w_{-\vec{k}}(\vec{r}) = w_{\vec{k}}(\vec{r}), \quad (5.1.37)$$

$$\vec{I}_{-\vec{k}}(\vec{r}) = -\vec{I}_{\vec{k}}(\vec{r}). \quad (5.1.38)$$

De plus, en raison d'une inhomogénéité symétrique par inversion :

$$w_{\vec{k}}(-\vec{r}) = w_{\vec{k}}(\vec{r}), \quad (5.1.39)$$

$$\vec{I}_{\vec{k}}(-\vec{r}) = \vec{I}_{\vec{k}}(\vec{r}). \quad (5.1.40)$$

La périodicité du milieu n'est pas une condition indispensable pour la validité des relations (5.1.37-40). Un milieu non-périodique peut être décrit de façon approchée par un milieu périodique dont la cellule de base est choisie suffisamment grande (par exemple en comparaison de la longueur d'onde de Bloch). Si maintenant la fréquence d'une onde n'est pas assez basse, l'influence de la périodicité imposée sur l'onde sera faible. Pour passer à une cellule de base de taille augmentant vers l'infini, les séries de Fourier passent formellement aux intégrales de Fourier ; la démonstration reste la même : leurs fondements essentiels sont l'invariance par renversement du temps des équations du mouvement (2.1.6) et la symétrie par inversion du milieu.

5.2. Approximation aux basses fréquences

Aux basses fréquences, les longueurs d'onde sont grandes en comparaison de la cellule de base de la structure périodique. Dans le domaine réciproque, cela se traduit par

$$|\vec{k}| \ll |\vec{G}_l|, \quad l \neq 0. \quad (5.2.1)$$

Dans ce cas, le milieu peut être considéré de façon approchée comme homogène, et est alors décrit avec des propriétés effectives (le mot clé en est l'*homogénéisation* [5.11-12]). Bien que l'hypothèse d'une isotropie locale ait été posée, la propagation d'ondes est en général anisotrope, le type d'anisotropie étant déterminé par les propriétés de symétrie de la structure périodique.

L'approximation retenue ici se limite à des ondes de Bloch de vitesse indépendante de la fréquence, mais dépendant toutefois de la direction de propagation :

$$\omega(\vec{k}) = c(\vec{e})k, \quad \vec{k} = k\vec{e} \quad (5.2.2)$$

(\vec{e} : vecteur unitaire dans la direction de propagation). Les ondes de flexion, pour lesquelles $\omega \sim k^2$, n'apparaissent donc que pour la valeur triviale $c = 0$. Avec l'approximation (5.2.1), les matrices \underline{V} du système d'équations (5.1.12) deviennent

$$\begin{aligned} \underline{V}_{00} &= k^2[\mu_0 \underline{I} + (\lambda_0 + \mu_0)\vec{e}\vec{e}], \\ \underline{V}_{l0} &= k[\mu_l \vec{G}_l \cdot \vec{e} \underline{I} + \lambda_l \vec{G}_l \vec{e} + \mu_l \vec{e} \vec{G}_l] \quad (l \neq 0), \\ \underline{V}_{0n} &= k[\mu_{-n} \vec{e} \cdot \vec{G}_n \underline{I} + \lambda_{-n} \vec{e} \vec{G}_n + \mu_{-n} \vec{G}_n \vec{e}] \quad (n \neq 0), \\ \underline{V}_{ln} &= \mu_{l-n} \vec{G}_l \cdot \vec{G}_n \underline{I} + \lambda_{l-n} \vec{G}_l \vec{G}_n + \mu_{l-n} \vec{G}_n \vec{G}_l \quad (n \neq 0 \neq l). \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Etant donnée la dépendance en k de ces matrices, le terme $\omega^2 \rho_{l-n}$, proportionnel à k^2 peut être négligé dans (5.1.12), à l'exception de $l = n = 0$: dans le cas limite des basses fréquences, seule la densité de masse moyenne est importante pour les fonctions de polarisation d'une onde de Bloch, et non la distribution spatiale de la masse. Le système d'équations (5.1.12) se simplifie en

$$\begin{aligned} [\omega^2 \rho_0 - \underline{V}_{00}] \vec{p}_0 &= \sum_{n \neq 0} \underline{V}_{0n} \cdot \vec{p}_n \quad (l = 0) \\ -\underline{V}_{l0} \cdot \vec{p}_0 &= \sum_{n \neq 0} \underline{V}_{ln} \cdot \vec{p}_n \quad (l \neq 0). \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Les solutions \vec{p}_n peuvent être normées arbitrairement. Cette liberté est utilisée de telle sorte que la valeur de la polarisation moyenne \vec{p}_0 soit normalisée indépendamment de la fréquence, donc également du nombre d'onde k , par exemple sur une longueur unitaire. Afin que, dans (5.2.4), tous les termes d'une équation présentent le même poids en k , l'amplitude des \vec{p}_n pour $n \neq 0$ doivent être proportionnels à k . Cela s'exprime explicitement

$$\vec{p}_n = k \underline{s}_n \cdot \vec{p}_0 \quad (n \neq 0) \quad (5.2.5)$$

Après quelques traitements mathématiques, [5.10, pp. 20-21] on parvient au système d'équations

$$\begin{aligned} \left[\rho_0 c^2 \underline{I} - \underline{v}_{00} - \sum_{n \neq 0} \underline{v}_{0n} \cdot \underline{s}_n \right] \cdot \vec{p}_0 &= 0, \\ -\underline{v}_{l0} &= \sum_{n \neq 0} \underline{v}_{ln} \cdot \underline{s}_n, \quad (l \neq 0) \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

dont les solutions dépendent toujours de la direction de propagation \vec{e} , mais non plus du nombre d'onde k . Les matrices \underline{s}_n , pour lesquelles, d'après (5.2.5), la fonction de polarisation peut être extraite, sont indépendantes de la valeur propre c^2 , ainsi en milieu tridimensionnel peut on s'attendre à trois vitesses de propagation et vecteurs propres \vec{p}_0 identiques.

Les équations (5.2.7) sont résolues généralement itérativement (voir [5.8-10]); la résolution du problème aux valeurs propres (5.2.6) est relativement simple et exige, tout au plus, la recherche des racines d'une équation du troisième degré.

Sur la base des développements précédents, l'approximation aux basses fréquences des fonctions de polarisation présente la forme

$$\bar{p}_{\bar{k}}(\bar{r}) = \bar{p}_0(\bar{e}) + ik\bar{q}(\bar{e}; \bar{r}) \quad (5.2.8)$$

avec les fonctions \bar{p}_0 et \bar{q} indépendantes de k . Cette dernière, \bar{q} , est appelée "fonction de modulation", parce qu'elle contient la dépendance spatiale avec laquelle l'onde est modulée (voir les équations (5.1.1-2)). Si, comme dans tous les exemples de ce chapitre, la symétrie par inversion est vérifiée, \bar{p}_0 et la fonction de modulation sont des grandeurs réelles (voir les équations (5.1.19)); c'est pour cette raison que la partie imaginaire est ainsi définie en (5.2.8).

Les équations suivantes (5.2.9-14) s'appliquent pour les ondes de Bloch non amorties, dans le cas limite des basses fréquences, dans les milieux périodiques et symétriques par inversion. De la symétrie des matrices $\underline{\nu}_n$ et de (5.2.7), il vient

$$\underline{\varepsilon}_{-n} = -\underline{\varepsilon}_n, \quad \bar{p}_{-n} = -\bar{p}_n \quad (n \neq 0), \quad (5.2.9)$$

d'où ressort que la composante de k dépendante des fonctions de polarisation devient imaginaire et la fonction de modulation réelle :

$$\bar{q}(\bar{r}) = \sum_{n \neq 0} \bar{q}_n \sin(\bar{G}_n \cdot \bar{r}), \quad \bar{p}_n = k\bar{q}_n. \quad (5.2.10)$$

(les sommes sont des fonctions paires en n ; il suffit donc de sommer la moitié des points du réseau périodique réciproque et de doubler le résultat. On considère que les coefficients de Fourier de $\bar{q}(\bar{r})$ pour la série de Fourier complexe (5.1.8) s'appliquent à $-i\bar{q}_n$!).

Les moyennes temporelles de la densité d'énergie et de l'intensité sont données par

$$w = \frac{1}{4} k^2 \left\{ \rho c^2 |\bar{p}_0|^2 + \lambda (\bar{e} \cdot \bar{p}_0 + \nabla \cdot \bar{q})^2 + \mu \left[|\bar{p}_0|^2 + (\bar{e} \cdot \bar{p}_0)^2 + 2(\nabla \bar{q} + 2\bar{e} \bar{p}_0) \cdot (\nabla \bar{q})_s \right] \right\}, \quad (5.2.11)$$

$$\bar{I} = \frac{c}{2} k^2 \left\{ (\lambda + \mu) (\bar{e} \cdot \bar{p}_0) \bar{p}_0 + \mu |\bar{p}_0|^2 \bar{e} + \lambda (\nabla \cdot \bar{q}) \bar{p}_0 + 2\mu (\nabla \bar{q})_s \cdot \bar{p}_0 \right\} \quad (5.2.12)$$

Les moyennes spatiales sur une cellule de base sont :

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} k^2 \left\{ \rho_0 c^2 |\bar{p}_0|^2 + (\lambda_0 + \mu_0) (\bar{e} \cdot \bar{p}_0)^2 + \mu |\bar{p}_0|^2 + 2 \sum_{m \neq 0} \lambda_m (\bar{e} \cdot \bar{p}_0) (\bar{G}_m \cdot \bar{q}_m) + 2\mu_m (\bar{e} \bar{p}_0) \cdot (\bar{G}_m \bar{q}_m)_s \right\} \quad (5.2.13)$$

$$+ \sum_{\substack{m \neq 0 \\ n \neq 0}} \lambda_{n-m} (\bar{G}_m \cdot \bar{q}_m) (\bar{G}_n \cdot \bar{q}_n)$$

$$+ 2\mu_{n-m} (\bar{G}_m \bar{q}_m) \cdot (\bar{G}_n \bar{q}_n)_s \left. \right\},$$

$$\langle \bar{I} \rangle = \frac{c}{2} k^2 \left\{ (\lambda_0 + \mu_0) (\bar{e} \cdot \bar{p}_0) \bar{p}_0 + \mu |\bar{p}_0|^2 \bar{e} + \sum_{m \neq 0} \lambda_m (\bar{G}_m \cdot \bar{q}_m) \bar{p}_0 + 2\mu_m (\bar{G}_m \bar{q}_m)_s \cdot \bar{p}_0 \right\}. \quad (5.2.14)$$

Les équations (5.2.11-14) ont été publiées pour la première fois dans [5.13-14] sous une forme légèrement différente. Ici, les \vec{p}_m ($m \neq 0$) sont les valeurs divisées par k , qui sont désignées par \vec{q}_m . D'autres différences peuvent être facilement accordées : il est indifférent de prendre dans les sommes doubles μ_{n-m} ou μ_{n+m} . Il suffit de remplacer m par $-m$ et d'utiliser $\vec{G}_m \vec{q}_m = \vec{G}_{-m} \vec{q}_{-m}$ pour reconnaître l'équivalence entre les deux présentations. Dans le cas limite du milieu homogène, l'accord peut être vérifié d'après (5.1.28-29).

Il est avantageux pour le calcul numérique de passer à des grandeurs normalisées. Cela se fait ici, comme dans la section à 3.3, d'après

$$\lambda_0 + 2\mu_0 = \rho_0 = |\vec{G}_{100}| = 1. \quad (5.2.15)$$

L'unité de vitesse est la vitesse de l'onde longitudinale pour un milieu homogène dont les propriétés du matériau sont celles de la moyenne spatiale du milieu périodique. L'unité de longueur est celle de la plus petite périodicité du réseau réciproque dans la direction [100] (la direction x). La polarisation moyenne est normée unitairement dans les programmes informatiques :

$$|\vec{p}_0|^2 = 1. \quad (5.2.16)$$

Pour obtenir une représentation indépendante du nombre d'onde k , l'intensité est ci-après normée sur $c^2/2$ et la densité d'énergie sur $k^2/2$.

5.2.1. Solution générale pour des milieux linéaires

Dans le cas unidimensionnel, tous les vecteurs et tenseurs se réduisent à des scalaires, ce qui simplifie considérablement les équations. Avec la normalisation (5.2.1.6), la fonction de polarisation est

$$p(r) = 1 + ikq(r). \quad (5.2.17)$$

Pour décrire les propriétés élastiques, un seul module suffit

$$\zeta = \lambda + 2\mu. \quad (5.2.18)$$

La variation spatiale de ζ doit être symétrique par inversion ; q est donc une fonction réelle. L'intensité et la moyenne temporelle de la densité d'énergie prennent la forme

$$I(r) = \zeta(r)[1 + q'(r)] = I, \quad (5.2.19)$$

$$w(r) = \frac{1}{2} \left\{ \rho(r)c^2 + \zeta(r)[1 + q'(r)]^2 \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \rho(r)c^2 + \frac{I^2}{\zeta(r)} \right\}. \quad (5.2.20)$$

En raison de la conservation de l'énergie, puisqu'aucune source - ni puits - d'énergie n'est pris en compte, l'intensité doit être spatialement constante. La variation spatiale de w_{kin} est proportionnelle à la distribution de masse volumique $\rho(r)$, celle de w_{pot} inversement proportionnelle à la distribution de rigidité $\zeta(r)$. Tout comme la moyenne spatiale de la fonction de modulation, la valeur moyenne spatiale de sa dérivée, désignée par $q'(r)$, s'annule. Il résulte directement de ces deux considérations et de (5.2.19) que

$$I = \left\langle \frac{1}{\zeta(r)} \right\rangle^{-1}, \quad (5.2.21)$$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \{ c^2 + I \}. \quad (5.2.22)$$

D'après le principe de Rayleigh (2.4.9), les composantes cinétique et potentielle ont le même poids. Il en résulte l'expression analytique pour la vitesse de phase

$$c = \left\langle \frac{1}{\zeta(r)} \right\rangle^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.2.23)$$

qui est aussi la vitesse de groupe, puisqu'il n'y a pas de dépendance en fréquence. La normalisation retenue ici est

$$\langle w \rangle = \langle I \rangle = I = c^2. \quad (5.2.24)$$

On pourrait être tenté d'imaginer que la vitesse c puisse être obtenue en établissant une moyenne des valeurs de vitesses locale $\sqrt{\zeta/\rho}$, c'est à dire par une intégration sur la durée de passage d'une onde. Cela n'est toutefois pas exact ; on obtient ainsi seulement une valeur par excès :

$$c_{\text{Laufzeit}} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right\rangle^{-1} \geq c. \quad (5.2.25)$$

Cette vitesse moyenne obtenue sur les durées de passage pourrait être utile pour la participation d'ondes à des fréquences plus élevées, par exemple pour un front d'onde impulsionnel.

La solution pour $q(r)$ peut être exprimée comme une primitive tirée de l'équation différentielle (le 5.2.19) :

$$q(r) = I \int \frac{dr'}{\zeta(r')} - r. \quad (5.2.26)$$

La constante d'intégration vient de la condition $\langle q(r) \rangle = 0$. En rapport avec l'équation (5.1.23) on a montré que la fonction de modulation est une fonction impaire de r , c'est à dire que la condition ci-dessus peut aussi être remplacée par $q(0) = 0$, si on calcule $q(r)$ pour une cellule de base centrée à l'origine du système de coordonnées. Les solutions analytiques (5.2.20-24,26) ont été indiquées pour la première fois dans [5.15].

5.2.2. Exemples unidimensionnels

Les résultats du paragraphe précédent sont illustrés sur deux exemples simples. Le premier, pour lequel le module élastique $\zeta(r)$ est constant par morceaux a déjà été traité analytiquement plus haut, en assurant la continuité des champs de déplacement et de contraintes aux interfaces entre des morceaux de matériau homogène (le mot clé en est 'milieux stratifiés' [5.16]). On se limite à juxtaposer périodiquement deux matériaux différents ($ndt : A$ et B), de modules différents

$$\zeta_A - \zeta_B = \Delta > 0 \quad (5.2.27)$$

dans la fraction w de longueur pour le matériau A de plus grande rigidité (ndt et la proportion $(1-w)$ de matériau B), de sorte que la vitesse

$$c^2 = \frac{(1-w\Delta)[1+(1-w)\Delta]}{1+(1-2w)\Delta} \quad (5.2.28)$$

peut être calculée [5.10]. Comme la valeur moyenne de $\zeta(r) > 0$ est normée unitairement, l'inégalité suivante est vérifiée

$$0 < \Delta < \frac{1}{w}. \quad (5.2.29)$$

La figure 5.1 montre le "profil du module" de $\zeta(r)$ et la fonction de modulation $q(r)$ sur une cellule de base dans le cas $w = 2/3$, $\Delta = 6/5$. Conformément à (5.2.26), $q(r)$ se compose de segments de droite. La vitesse s'élève à environ 0,683, et est ainsi inférieure à la valeur 1 qu'aurait un milieu totalement homogène avec la rigidité moyenne $\zeta_0 = 1$.

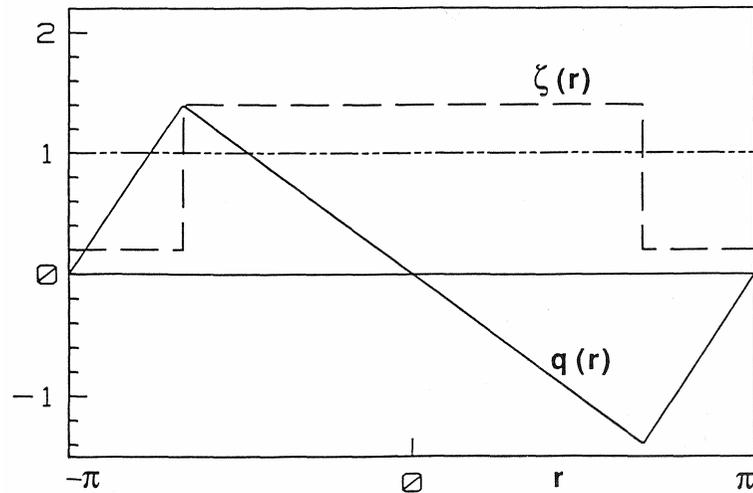


Fig. 5.1 : Rigidité $\zeta(r)$ et fonction de modulation $q(r)$ avec une proportion $w = 2/3$ de matériau plus rigide et une différence de rigidité $\Delta = 6/5$.

Sur la figure 5.2, la distribution spatiale du champ de déplacement (onde modulée en phase !)

$$u(r, t) = \cos(kr - \omega t) - kq(r)\sin(kr - \omega t) \quad (5.2.30)$$

$$\approx \cos[k(r + q(r)) - \omega t]$$

est représentée à deux instants séparés par un quart de la période T , sur une distance de dix cellules de base (nombre d'onde $k = 0,1$). L'onde se développe irrégulièrement, plus fortement dans les secteurs les moins rigides que dans les secteurs de plus grande rigidité. Comme attendu, la déformation $\varepsilon = u'$ est également plus importante dans les secteurs souples que dans les secteurs les plus rigides (les volumes de contrôle et de passage des milieux stratifiés sont examinés en [2.12]).

Si la rigidité varie de façon continue, la méthode de résolution pour une rigidité constante par morceaux ne s'applique plus, à moins de considérer le passage à la limite d'un nombre infini de sections. Avec la solution générale du paragraphe précédent, un résultat analytique peut toutefois être obtenu dans les cas simples.

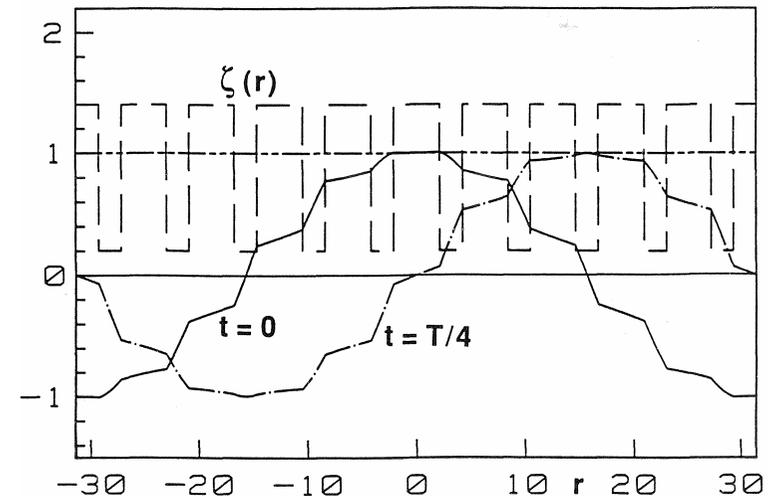


Fig. 5.2 : Champ de déplacement $u(r, t)$ d'après (5.2.30) avec le nombre d'onde $k = 0,1$ à deux instants t en quadrature, pour une rigidité $\zeta(r)$ variant comme sur la figure 5.1.

Dans l'exemple d'une variation sinusoïdale

$$\zeta(r) = 1 + 2\zeta_1 \cos r \quad (5.2.31)$$

la vitesse prend la forme

$$c = \sqrt[4]{1 - (2\zeta_1)^2} \quad (5.2.32)$$

et la fonction de modulation

$$q(r) = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1 - 2\zeta_1}{1 + 2\zeta_1}} \tan \frac{r}{2} \right] - r. \quad (5.2.33)$$

Avec $\zeta_1 = 0,45$ (fig. 5.3-4), $c \approx 0,660$. Le profil des solutions se différencie des résultats de l'exemple précédent surtout par l'absence "de coins" (singularités par rupture de pente dans la représentation spatiale). Un bon accord qualitatif est vérifié en dehors de ces détails.

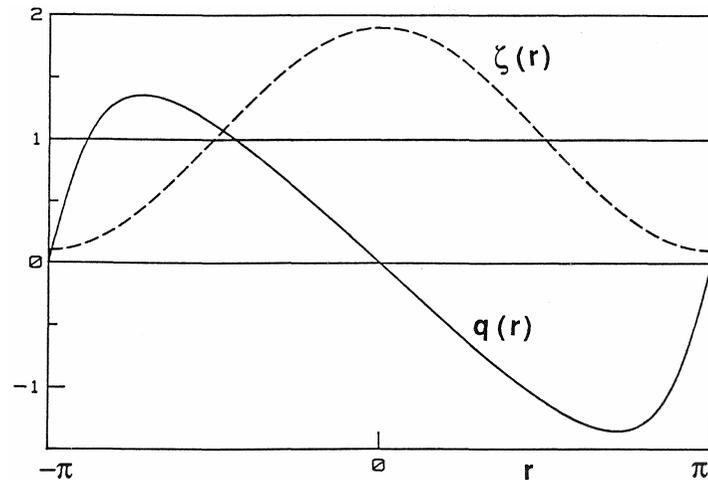


Fig. 5.3 : Rigidité $\zeta(r)$ modulée sinusoidalement d'après (5.2.31), avec $\zeta_l = 0,45$ et une modulation la fonction $q(r)$ suivant (5.2.33).

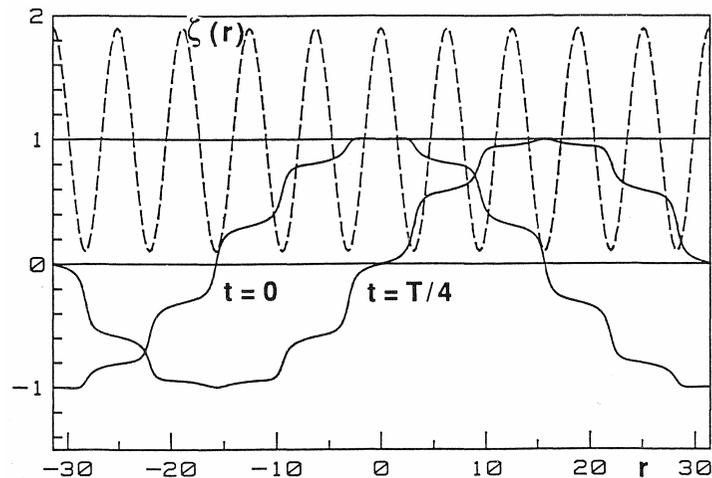


Fig. 5.4 : Champ de déplacement $u(r,t)$ d'après (5.2.30), avec le nombre d'onde $k=0,1$ à deux instants t en quadrature, pour une rigidité $\zeta(r)$ variant comme sur la fig. 5.3.

5.2.3. Exemple bidimensionnel

Pour les milieux de périodicité spatiale à deux ou trois dimensions, il ne semble pas jusqu'ici que des solutions analytiques autres que triviales ne soient disponibles. Puisque l'intensité n'est pas nécessairement spatialement constante, l'application de la conservation de l'énergie ne conduit plus de manière élégante à la solution, comme cela était le cas pour un milieu unidimensionnel. La divergence de l'intensité doit s'annuler localement (voir la relation (2.1.14)). Obtenir analytiquement une solution avec cette condition semble difficile, sinon désespéré, en raison de la dépendance compliquée de l'intensité par rapport aux fonctions de polarisation (voir les relations (5.1.27) et (5.2.12)). Il faut alors avoir recours à des méthodes numériques, en tout cas pour l'instant, ce qui conduit généralement à composer avec des problèmes de convergence et de puissance de calcul.

La méthode développée par Sheng et Tao [5.8-9] ne converge pas toujours [5.10], mais s'avère toutefois utile pour l'exemple suivant d'une "tôle perforée" (Fig. 5.5). Le côté des jours carrés, au centre de la cellule de base, représente un tiers de la période de la cellule de base. Cette structure constitue, dans [5.8], l'étape initiale traitée pour l'utilisation de réseaux de fractales de Sierpinski. Ses solutions font apparaître deux modes, le premier avec la plus faible vitesse étant essentiellement polarisé transversalement et le second surtout polarisé longitudinalement.

Le calcul a été mis en oeuvre pour un coefficient de Poisson de 1/6 et fournit une anisotropie de vitesse relativement faible [5.10, éq. (143-147)]. La fonction de modulation définie en (5.2.8) se calcule comme le produit d'une somme de matrices et du vecteur de polarisation moyen :

$$\vec{q}(r) = \left\{ \sum_{n \neq 0} \underline{s}_n \sin(\vec{G}_n \cdot \vec{r}) \right\} \cdot \vec{p}_0. \quad (5.2.34)$$

Conformément à (5.2.30) on obtient, en notation réelle, une expression du champ de déplacement

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{p}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) - k \vec{q}(\vec{r}) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (5.2.35)$$

Une représentation sous forme d'onde modulée en phase n'est plus possible dans les cas bi- ou tri-dimensionnel.

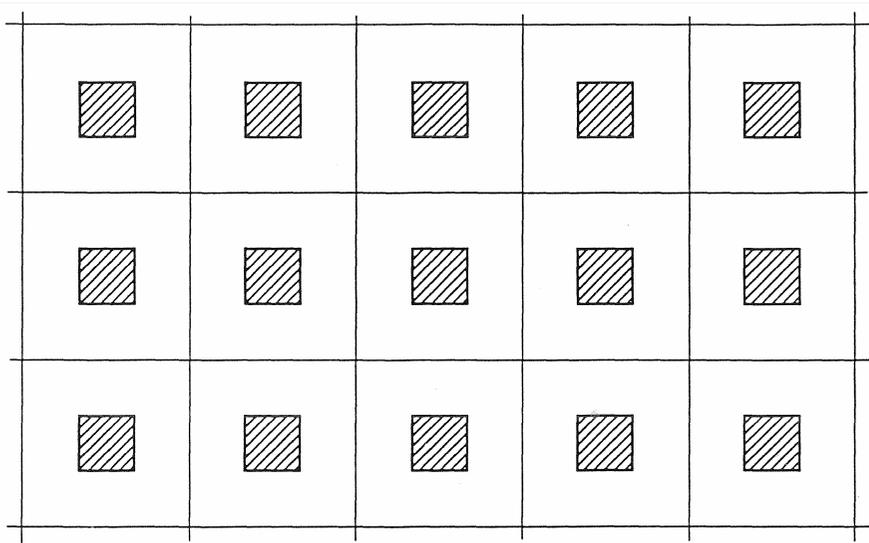


Fig. 5.5 : Schéma d'un milieu bidimensionnel de matériau isotrope avec des trous carrés disposés périodiquement ("tôle perforée").

Les figures 5.6-7 tentent une illustration graphique de la fonction de modulation et du champ de déplacement pour différentes directions de propagation. La figure 5.6 montre que la fonction de modulation se représente au travers du champ de déplacement, ici illustrée par la déformée de la cellule de base (déformée de 2×4 lignes du réseau). On renonce ici à une discussion détaillée de ces déformées. Il peut suffire de remarquer que la périodicité spatiale de la fonction de modulation se profile clairement et que son influence est plus grande à proximité de la perforation carrée. Pour la figure 5.7 qui montre la déformée de la cellule de base, le nombre d'onde a dû être choisi en dérogeant à la condition (5.2.1) de "basses fréquences" ($k = 0,5$), sans quoi les différences par rapport au milieu homogène sont à peine visibles. L'illustration fournit donc seulement une information qualitative. Dans un milieu homogène, pour le mode 1 (onde de cisaillement), les lignes verticales du réseau

passant de haut en bas évolueraient en morceaux de droites, et les lignes de réseau horizontales, de gauche vers la droite, prendraient une forme sinusoïdale ; pour le mode 2 (onde de compression), toutes les lignes de réseau seraient des lignes droites horizontales ou verticales, seule la distance entre les lignes de réseau verticales seraient modifiées par la déformation (dilatation à $t = T/4$, compression à $t = 3T/4$). Comme on peut s'y attendre, les différences à ce comportement s'observent en particulier à proximité du trou, là où le milieu est effectivement plus souple.

Les figures 5.8-9 suivantes, représentant les distributions d'intensité et de densités d'énergie correspondantes [5.13-14], pourraient bien être les premières de ce type. Dans la fig. 5.8, en plus des intensités (flèches), les densités d'énergie, moyennées temporellement, sont représentées sous forme de cercles, le rayon du cercle interne étant proportionnel à la composante cinétique, celui du cercle extérieur proportionnel à la densité d'énergie totale. On voit clairement que la distribution de densité d'énergie totale est hétérogène, et ce de manière différente selon le mode. De plus, le principe de Rayleigh n'est pas respecté localement : un exemple pour le mode 2 en est que la densité d'énergie potentielle au bords gauche et droit du trou est très petite ou nulle, tandis qu'elle est comparativement grande sur les bords supérieur et inférieur.

Pour obtenir une meilleure représentation du flux énergétique moyenné temporellement, les vecteurs intensité sont représentés en figure 5.9 avec une résolution spatiale plus élevée que les densités d'énergie. Dans la direction de propagation "oblique" ($22,5^\circ$), l'intensité n'est plus en moyenne spatiale parallèle au vecteur d'onde, comme cela est aussi le cas pour les milieux homogènes et anisotropes (paragraphe 4.1). Aux basses fréquences, ce milieu périodique et localement isotrope peut en effet être remplacé par un milieu homogène et anisotrope, si seulement des moyennes sont réalisées sur une cellule de base. Les polarisation moyenne, direction moyenne de l'intensité et relations entre les vitesses de groupe et de phase des deux modes correspondent très bien, dans ce cas, aux valeurs calculées au paragraphe 4.1 pour le milieu homogénéisé (voir tableau 4.1). Les déviations s'élèvent tout au plus à $0,1^\circ$ pour les directions d'intensité et à moins de 1% pour les relations de vitesse.

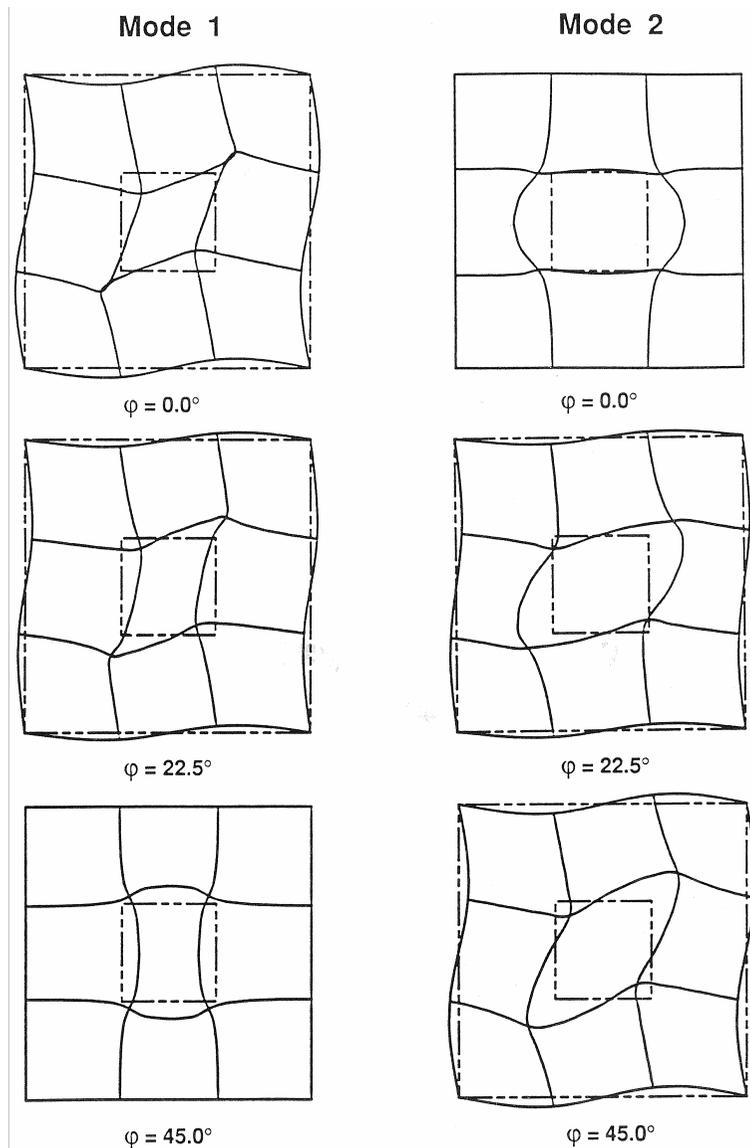


Fig. 5.6 : Déformée de la cellule de base de la fig. 5.5 par la fonction de modulation (5.2.34) pour différentes directions φ du vecteur d'onde.

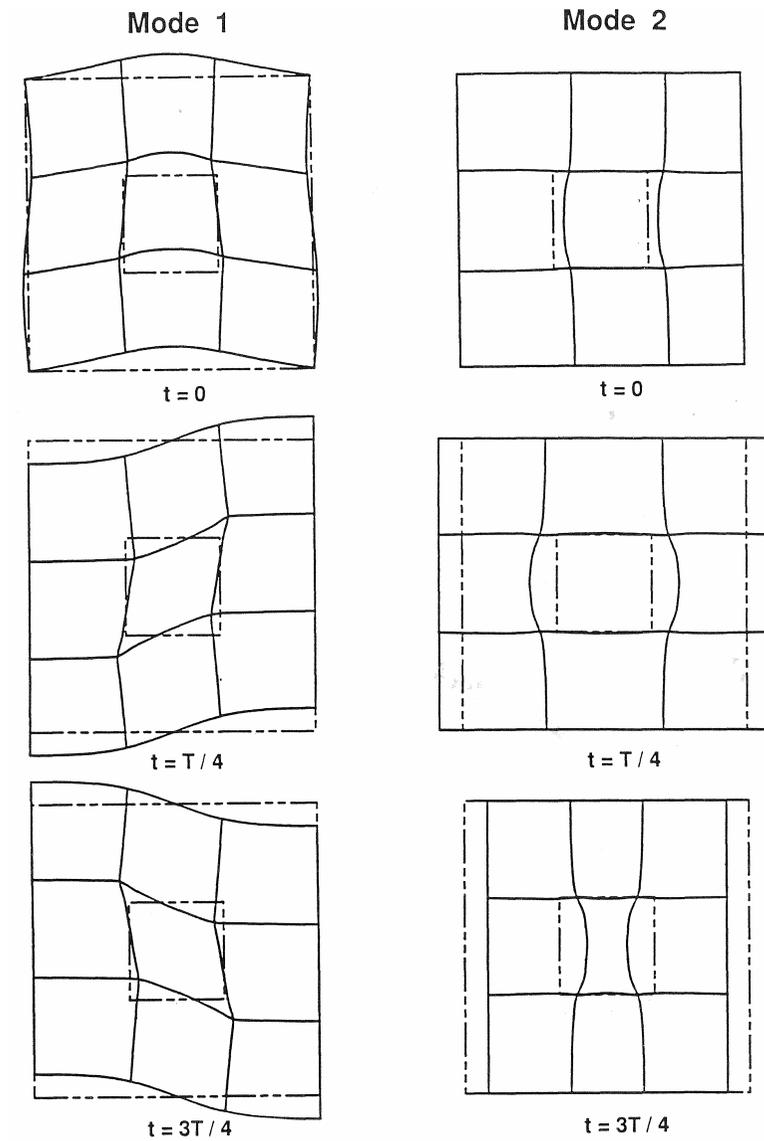


Fig. 5.7 : Déformée de la cellule de base de la figure 5.5 d'après (5.2.35) avec le nombre d'onde $k = 0,5$ à différents temps t pour une propagation dans la direction x ($\varphi = 0^\circ$, c'est-à-dire vers la droite).

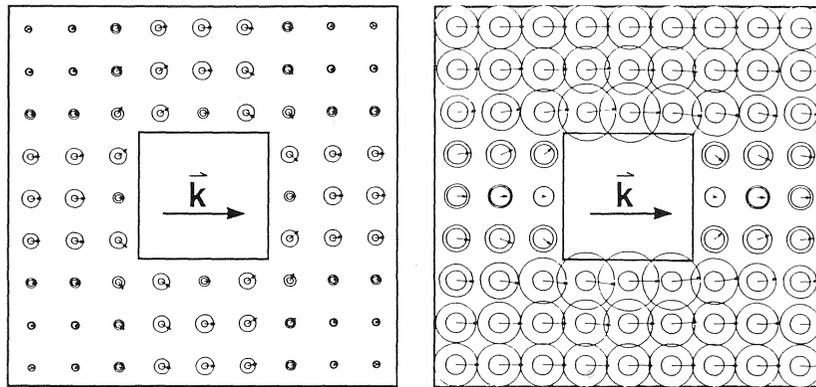


Fig. 5.8 : Intensité (flèches) et densités d'énergie moyennées temporellement (cercles ; le rayon du cercle interne est proportionnel à la densité d'énergie cinétique, le rayon du cercle extérieur est proportionnel à la densité d'énergie totale), dans une cellule de base de la structure périodique de la figure 5.5.

La différence de polarisation, de tout juste $1,4^\circ$, est légèrement plus grande, probablement parce qu'aucune extrapolation n'a été réalisée pour le calcul en milieu périodique [5.10].

La "représentation des lignes de flux" est très différente pour les deux modes : alors que pour le mode 1, essentiellement transversal, le flux d'énergie "contourne" l'obstacle en s'écoulant doucement autour du trou par ses faces latérales, pour le mode 2, essentiellement longitudinal, l'écoulement est plus "dur", en restant rectiligne jusqu'à heurter le trou.

Ce type d'image permet d'étudier la distribution des densités d'énergie et l'écoulement de l'intensité vibratoire autour des perforations, ainsi que leur évolution lors d'une modification locale des propriétés du matériau. Cela présente un intérêt particulier lorsqu'il s'agit de focaliser, de modifier la distribution ou d'orienter l'intensité vibratoire dans certaines directions. Si, en plus, l'absorption de matériau est prise en compte, on peut optimiser l'absorption ou le transfert d'énergie d'un point à un autre de la structure par le choix des matériaux ou une adaptation locale de la structure. Savoir si ce rêve d'acousticien peut être réalisé ne saurait être discuté ici.

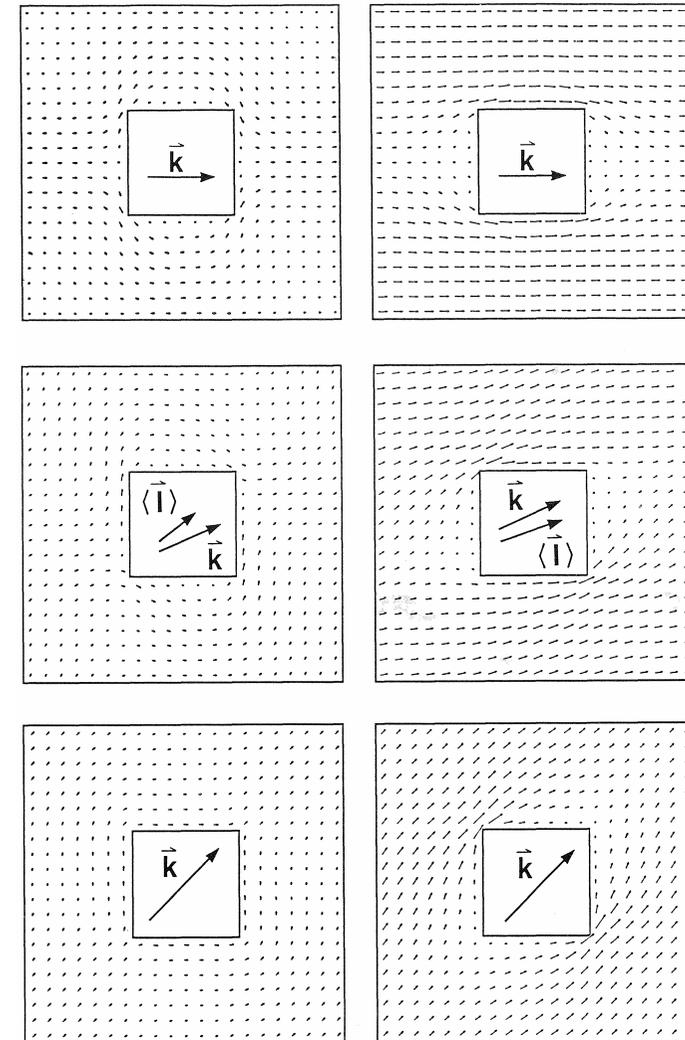


Fig. 5.9 : Intensités pour différentes directions de propagation (orientations du vecteur d'onde \vec{k} : 0° ; $22,5^\circ$; 45°). Pour une direction de propagation "oblique" ($22,5^\circ$), \vec{k} et l'intensité moyenne $\langle \vec{I} \rangle$ ne sont plus parallèles.

Les potentialités et les limites du "guidage du son" ne se manifestent pas seulement dans cet exemple numérique en milieu de structure périodique. On peut toutefois supposer que l'influence de l'inhomogénéité augmente avec la fréquence, surtout lorsque la longueur d'onde des ondes de Bloch sont de l'ordre de grandeur de la cellule de base et si des volumes de contrôle peuvent apparaître (nous citons, comme exemple de mise en évidence expérimentale de cette caractéristique typique des milieux périodiques, les mesures [5.17] sur une paroi maçonnée de briques creuses de sable et chaux). Pour cette raison, les calculs qui restent à réaliser pour les fréquences plus élevées sont attendus avec impatience. On trouve en [5.10, fig. 21] un aperçu des structures qui peuvent être calculées par un programme en langage Pascal de l'auteur, dans le cas limite des basses fréquences.

5.3. Equations de base pour une anisotropie quelconque

Sur la base des équations générales du mouvement (2.7.11) pour un milieu d'hétérogénéité et d'anisotropie locale quelconques, le problème de la propagation d'ondes en milieux périodiques peut être converti en un problème aux valeurs propres. Il faut pour cela 'un petit tour', à savoir la division de (2.1.11) par la masse volumique $\rho(r) \neq 0$; une dépendance harmonique en temps à la pulsation ω est supposée :

$$\omega^2 u_i + \rho^{-1} [C_{ijkl} u_{k,lj} + C_{ijkl,j} u_{k,l}] = 0. \quad (5.3.1)$$

Les variations spatiales des propriétés du matériau font l'objet d'une transformation de Fourier, les composantes de Fourier de la densité de masse réciproque étant désignées par $\sim \rho^l$. Les composantes de Fourier sont ici notées par un indice en haut (comme un exposant), pour éviter toute confusion avec les indices (placés en bas) des composantes du tenseur \underline{C} qui se réfèrent aux directions du repère cartésien. Un vecteur est souligné par une impression en caractères gras, et toute confusion avec des exposants doit être évitée :

$$\omega^2 u_i + \sum_{l,m} \exp[i(\bar{G}^l + \bar{G}^m) \cdot \bar{r}] \tilde{\rho}^l C_{ijkl}^m [u_{k,lj} + iG_j^m u_{k,l}] = 0. \quad (5.3.2)$$

Si on considère les ondes de Bloch

$$u_i = \sum_n p_i^n \exp[i(\bar{k} + \bar{G}^n) \cdot \bar{r}] \quad (5.3.3)$$

pour le vecteur déplacement, après la multiplication par $\exp[-i(\bar{k} + \bar{G}^n) \cdot \bar{r}]$, il vient

$$\sum_n \left\{ \omega^2 p_i^n \exp[i\bar{G}^{n-n'} \cdot \bar{r}] \right. \quad (5.3.4)$$

$$\left. - \sum_{l,m} \exp[i\bar{G}^{l+m+n-n'} \cdot \bar{r}] \left[\tilde{\rho}^l C_{ijkl}^m (k_l + G_l^n) (k_j + G_j^{m+n}) p_k^n \right] \right\} = 0.$$

Après intégration sur une cellule de base, cette équation se simplifie en

$$\omega^2 p_i^{n'} = \sum_{l,m,n} \delta_{l+m+n,n'} \tilde{\rho}^l C_{ijkl}^m (k_l + G_l^n) (k_j + G_j^{m+n}) p_k^n. \quad (5.3.5)$$

La mise en œuvre de la somme sur l permet de supprimer le symbole de Kronecker δ en remplaçant l par $n' - (m + n)$:

$$\omega^2 p_i^{n'} = \sum_{m,n} \tilde{\rho}^{n'-(m+n)} C_{ijkl}^m (k_l + G_l^n) (k_j + G_j^{m+n}) p_k^n. \quad (5.3.6)$$

Une sommation et une redéfinition des indices met en évidence la forme habituelle d'un problème aux valeurs propres

$$\omega^2 p_i^n = \sum_{l,m} \tilde{\rho}^{n-m} C_{ijkl}^{m-l} (k_l + G_l^l) (k_j + G_j^m) p_k^l, \quad (5.3.7)$$

dont les valeurs propres ω^2 et les valeurs propres p_i^n peuvent être déterminés par les méthodes usuelles.

Le cas localement isotrope est obtenu en utilisant la relation

$$C_{ijkl}^m = \lambda^m \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^m (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5.3.8)$$

auquel cas le second membre ne nécessite plus la sommation sur les trois indices du repère cartésien, mais nécessite cependant encore une sommation :

$$\begin{aligned} \omega^2 p_i^n &= \sum_{l,m} \tilde{\rho}^{n-m} \left\{ \left[\lambda^{m-l} (k_j + G_j^l) (k_i + G_i^m) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu^{m-l} (k_i + G_i^l) (k_j + G_j^m) \right] p_j^l \right. \\ &\quad \left. + \mu^{m-l} (k_j + G_j^l) (k_i + G_i^m) p_i^l \right\}. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Cette équation a été indiquée en 1992 par Sigalas et Economou et appliquée à l'inclusion périodique de sphères dans un milieu homogène stratifié de matériaux de propriétés différentes [Z.13]. Ont été examinées surtout les structures en bande, en particulier l'apparition de bandes d'arrêt ('stop bands'), sans toutefois examiner ni les densités d'énergie ni l'intensité. Braga et Herrmann [Z.14] ont traité en détail la propagation d'ondes dans les milieux périodiquement stratifiés composés de couches élastiques homogènes et anisotropes. Ici encore, les aspects énergétiques sont restés non traités.

Une généralisation analytique de (5.1.12) aux milieux anisotropes dans le cas limite des très basses fréquences est

$$\sum_n \left\{ \omega^2 \rho^{l-n} \delta_{ik} - C_{ijkl}^{l-n} (k_j + G_j^l) (k_l + G_l^n) \right\} p_k^n = 0, \quad (5.3.10)$$

forme plus appropriée que (5.3.7) et plus générale que la procédure introduite au paragraphe 5.2. Lorsque des problèmes de convergence apparaissent dans l'application numérique pour les petites valeurs de k , il est préférable de résoudre numériquement la forme (5.3.7).

6. Milieux hétérogènes de structure non périodique

Dans pratiquement tous les milieux solides, la structure n'est pas strictement périodique, puisqu'une périodicité exige au sens mathématique une extension infinie (sauf à travailler sur un objet annulaire ou suivant une autre forme cyclique). Souvent, pour différentes raisons, notamment à cause d'une absorption suffisamment forte du matériau, l'influence du caractère fini du système est suffisamment faible pour observer, en pratique, un comportement caractéristique des milieux infinis. Ou bien l'on peut être en mesure d'obtenir des solutions pour un milieu strictement fini. Ces possibilités justifient le contenu du chapitre 5 précédent, du point de vue de l'application.

L'objet de ce sixième chapitre est moins d'étudier les structures dont la périodicité n'est réalisée qu'imparfaitement, que celles qui ne présentent pas une stricte répétition spatiale de séquences identiques, ou seulement dans les cas limites. Pour une description théorique aussi simple que possible, on est ici encore conduit à idéaliser les structures réelles. Pour étudier la propagation d'ondes en négligeant l'absorption, une extension infinie de la structure dans au moins une direction est acceptée. Comme dans le cas de structures périodiques, les résultats théoriques associés à cette condition se retrouvent expérimentalement dans beaucoup de cas. L'étude de systèmes idéaux présente en tout cas un grand intérêt scientifique, même si l'accord quantitatif entre la théorie et l'expérience ne réussit pas toujours complètement, et est souvent lié à quelques compromis de part et d'autre. Puisque la réalité complexe ne peut être calculée que très imparfaitement, la compréhension fondamentale des phénomènes doit d'abord être encouragée et approfondie, ce qui peut être mené surtout pour les modèles simples et à l'aide des lois physiques générales, en particulier à partir de la conservation de l'énergie. Il faut d'abord se demander quelles caractéristiques sont dominantes pour le système étudié, et s'il est possible, sans approximation trop grossière, de le simplifier, ou de négliger certains effets. On peut essayer de cette manière de construire un modèle qui soit réaliste, et dont le calcul puisse être maîtrisé.

À l'image de la variété que présentent les vibrations de structures, depuis l'isolation acoustique des bâtiments et des véhicules jusqu'à l'étude

de la croûte terrestre, il y a abondance de littérature sur les vibrations en milieux hétérogènes et non périodiques. Par conséquent, les méthodes utilisées sont ici juste mentionnées, sans exhaustivité. L'étude détaillée des transferts énergétiques, voire le simple calcul des densités d'énergie et des intensités, n'est le plus souvent pas menée du tout, alors qu'on devrait en attendre des résultats instructifs.

La méthode des éléments finis (FEM) est utilisée depuis seulement quelques années pour le calcul des énergies et des intensités acoustiques [6.1 ; 2.17], par exemple au moyen d'un post-processeur « McPOW » qui traite les résultats du programme FEM "NASTRAN" [6.2]. Dans le domaine des basses fréquences, la "méthode de couplage d'ondes", programmée par Rosenhouse [6.3-5], est adaptée aux assemblages plans de poutres minces ; l'auteur a complété ce travail pour le calcul des grandeurs énergétiques [6.6]. Le principe de cette méthode, qui est aussi utilisé par d'autres auteurs [6.7-8], est de déterminer l'amplitude des ondes de flexion (en tenant compte du champ proche) en écrivant, pour chaque poutre, les conditions aux jonctions.

Aux fréquences élevées, pour lesquelles ces deux méthodes ne sont plus applicables, on utilise, lorsque c'est possible, l'analyse statistique énergétique (SEA) [6.10 ; 2.13, chap. V.8], qui étudie la répartition de l'énergie vibratoire totale et les échanges entre sous-systèmes. Fahy et White [6.11] étudient la validité, la précision et l'applicabilité de cette méthode eu égard au volume du système. Bien que la SEA soit déjà très appliquée depuis plus de trente ans, il n'y a pas jusqu'à aujourd'hui de procédure, reconnue en général, permettant de définir les limites des critères statistiques à vérifier (en anglais : 'confidence limits') (*ndt.* des progrès ont été réalisés à ce sujet pour la SEA depuis l'édition originale de cet ouvrage en 1994). On devrait donc essayer de déterminer expérimentalement avec une meilleure précision les flux d'énergie et des informations dites de "facteurs de perte".

La méthode de tir de rayons acoustiques qui a été brièvement abordée à la fin du paragraphe 4.7, également limitée aux fréquences élevées, peut aussi être appliquée dans des milieux hétérogènes, en particulier si les sous-domaines sont homogènes. On peut étudier, de cette façon, les pertes de transmission d'ultrasons dans les matériaux polycristallins, par exemple en fonction de la taille de grain et de l'anisotropie [6.53].

Les paragraphes suivants 6.1 et 6.2 contiennent quelques remarques concernant les structures les plus accessibles parmi les milieux hétérogènes et non périodiques, pour lesquelles un calcul peut être mené relativement facilement. Les "milieux stratifiés" forment le premier groupe : il s'agit de structures jointes de type plaques homogènes, isotropes ou anisotropes, d'épaisseur constante et d'extension infinie. Les propriétés du matériau sont ainsi constantes par morceau et ne dépendent que de la direction normale à la stratification. Cette régularité, simple, permet d'obtenir des solutions analytiques dans de nombreux cas. Le deuxième groupe, dit des "milieux désordonnés", forme un pôle opposé au premier, en ce que les propriétés du matériau sont certes également constantes par morceaux, mais en dépendant de toutes les coordonnées et de manière statistiquement désordonnée. L'information sur la distribution de matériau est ainsi incomplète et ne permet pas d'obtenir résultats significatifs sur un cas individuel, mais seulement au sens de moyennes et de distributions statistiques en termes de probabilités. Par cette restriction, le calcul en milieux désordonnés n'est possible que sous certaines conditions, en particulier lorsque les difficultés principales peuvent être éliminées par une prise de moyenne. Ce deuxième groupe s'étudie donc à partir de méthodes approchées et au moyen d'un arsenal théorique important ; elle est donc moins simple à traiter que la première.

Dans les deux groupes cités ci-dessus, des phénomènes acoustiques importants apparaissent, qui sont inconnus en milieux homogènes. Dans la pratique - que ce soit en acoustique industrielle, en acoustique du bâtiment ou en sismique -, une grande importance échoit aussi aux deux groupes. La conséquence en est un grand volume de publications, qui ne peuvent pas être analysées ici systématiquement, mais sont seulement citées par sondage et sans évaluation. Le choix effectué reflète d'une part l'état de la recherche, d'autre part les connaissances et l'intérêt de l'auteur, mais ne prétend pas être équilibré. Il en est de même pour le domaine des milieux stratifiés et désordonnés. Les exemples de l'acoustique dans les structures de quasi-cristaux [6.12-13] ou de fractales [6.14 ; 5.8] constituent certainement un sujet de recherche passionnant, qui peut probablement trouver quelque application pratique. Nous nous interdisons dans le cadre de ce livre de traiter de ces structures exotiques, ne serait-ce qu'en raison

de l'étendue des outils mathématiques que nécessite la description de ces systèmes.

6.1. Milieux stratifiés

L'exemple le plus simple de milieu stratifié est constitué de la juxtaposition de deux demi-espaces homogènes de propriétés de matériaux différentes. Comme sur la surface libre d'un corps, des réflexions apparaissent à la discontinuité des propriétés de matériau. De même, il y a des ondes dont l'amplitude décroît exponentiellement avec la distance à la surface interfaciale (ondes de Stoneley [2.6, p.194]). En comparaison du milieu homogène apparaît le phénomène de réfraction, qui est souvent traité dans les manuels conjointement avec la réflexion. Une onde plane produit généralement plus d'une seule onde 'brisée'. Les angles sous lesquels les ondes brisées quittent la surface interfaciale sont obtenus au mieux, comme pour les ondes réfléchies, au moyen des diagrammes de lentur des deux milieux [2.4, chapitre 9]. Cette méthode est aussi applicable pour les milieux anisotropes. Une étude complète pour une anisotropie arbitraire des deux milieux est disponible en [6.15 ; Z.15]. Ils soulignent l'aspect énergétique du problème et formulent entre autres l'idée qu'une onde devrait être naturellement définie d'après la direction du flux d'énergie et non pas sur celle du vecteur d'onde. Quelques difficultés fondamentales apparaissent ; ce sont probablement principalement les nombreux cas particuliers et angles critiques qui peuvent en compliquer la représentation sur un exemple concret. Concernant les intensités des différentes composantes des ondes brisées, les propos du paragraphe 3.2 restent valables pour étudier la superposition de l'onde incidente et des ondes réfléchies.

La notion de formation, à l'envers, de "réfraction conique interne" (en anglais : internal conical refraction) crée une confusion inutile [4.5]. Il s'agit de la propagation d'une onde transversale pure dans une direction qui peut, en cas de dégénérescence, donner lieu à une direction d'oscillation transversale définie par la superposition de deux modes transversaux dégénérés. Si on fait varier les polarisations (linéaires), le vecteur intensité décrit un cône autour de la direction de propagation. On appelle par exemple la direction [111] une symétrie cubique, ou la

direction [001] une symétrie trigonale [4.10]. Ce cas ne concerne pas une réfraction, puisqu'il a lieu dans un milieu complètement homogène. Waterman [4.10], en s'efforçant d'étudier le flux énergétique avec une condition de symétrie, a toutefois commis, à la fin, l'erreur d'admettre que l'intensité de la superposition des ondes dégénérées est additive. D'après le paragraphe 2.7, ce n'est précisément pas le cas. La superposition adaptée à la symétrie pour les deux modes possède une polarisation elliptique ou circulaire, et un flux énergétique dans la direction de propagation.

Deux milieux sont en effet associés dans la "réfraction conique extérieure" (en anglais : external conical refraction) [4.5] : on considère, dans un milieu anisotrope, la superposition d'ondes dont les vecteurs d'onde se trouvent sur un cône, et leurs intensités toutes parallèles à l'axe du cône. Si ce flux énergétique heurte verticalement une interface avec un milieu isotrope, il crée deux familles de vecteurs d'onde et d'intensités qui se trouvent sur un cône, respectivement pour les ondes transversales et pour les ondes longitudinales.

Si l'on s'en tient au strict calcul de base pour des ondes planes, on ne trouve en effet pas de propagation énergétique conique issue d'un point, ni sur un cône interne ni sur un cône externe, puisque les composantes normales à l'axe des cônes respectifs sont un chemin moyen. Cela peut changer seulement lorsque les ondes incidentes sont limitées latéralement, lorsque l'on travaille ainsi pour le rayonnement vibratoire.

Nous traitons, comme autre structure simple, le cas de deux demi-espaces de matériaux différents réunis sur une plaque. Si les deux matériaux sont élastiquement isotropes et que la vitesse d'onde transversale est plus grande dans un milieu semi-infini que dans la plaque, peuvent apparaître des ondes de surface purement transversales et polarisées horizontalement (c'est-à-dire dans le plan de la plaque). La décroissance exponentielle avec la distance de la surface ne commence toutefois que dans le demi-espace ; dans une certaine mesure, la plaque représente la surface du demi-espace. Ces ondes, qui jouent surtout un rôle en sismique, sont appelées *ondes de Love* [2.6, p. 218]. Tout comme les ondes dans les plaques libres, elles sont dispersives, pour le mode de base comme pour les modes plus élevés. Les densités d'énergie et l'intensité des ondes de Love se calculent analytiquement d'après les modèles du paragraphe 3.3.

Certaines lignes de flux d'énergie remarquables peuvent se former dans les systèmes constitués d'une ou de plusieurs couches, en forme de plaquettes empilées sur une certaine épaisseur de la surface d'un tel demi-espace [Z.16 ; Z.17]. Il y a d'un côté des lignes de flux fermées sur elles-mêmes, donc des "tourbillons d'intensité", le flux d'énergie s'annulant en leurs centres, et d'un autre côté des lignes de flux qui circulent presque parallèlement à la surface et qui transportent de l'énergie en retour vers le point d'excitation. Ces dernières soulèvent la question de savoir si l'énergie vient de l'infini ou si une telle ligne de flux fait partie d'une circulation fermée à très grande échelle. Les auteurs [Z.77] constatent que, comme pour une plaque libre dans le vide, il existe des modes qui présentent pour certaines fréquences une vitesse de groupe négative. Une résonance d'amplitude modérée induit un fort flux en arrière le long des surfaces interfaciales entre les couches. La question d'une explication claire et convaincante des processus énergétiques associés est encore ouverte.

Pour étudier des structures de complexité croissante, on incline à utiliser des méthodes numériques. Reddy [6.16] donne un aperçu de différentes approches pour le traitement des plaques stratifiées et leur modélisation par la Méthode des Éléments Finis. Avec un peu d'adresse, beaucoup de telles structures peuvent pourtant être bien maîtrisées analytiquement, comme Nayfeh [6.17] l'a prouvé récemment. Il considère une plaque constituée de l'empilement de plusieurs couches finies, qui peuvent être soumises à des conditions différentes aux interfaces (par exemple libre en surface), de façon constante ou périodique. Chaque couche peut présenter un comportement anisotrope assez général, à savoir monoclinique ; l'orientation des axes de symétrie est seulement limitée par le fait que les côtés non rectangulaires de la cellule de base doivent être parallèles à la stratification [5.2, p. 38]. La direction de propagation de la solution de recherche pour l'onde peut être choisie, sans être soumise à une restriction par rapport aux directions de la stratification, parallèlement ou verticalement, comme on le trouve fréquemment. Nayfeh utilise la méthode des matrices de transfert réciproque établie par Thomson [6.18]. Chaque couche comporte six ondes planes d'amplitudes inconnues. Les trois composantes du vecteur de déplacement et les trois composantes constantes du tenseur des contraintes aux surfaces interfaciales peuvent

être résumées en un vecteur à six composantes. On peut ainsi écrire un système linéaire au moyen d'une matrice, la "matrice de transfert", pour calculer les variables sur la couche entre deux interfaces. Puisque le vecteur à six composantes est constant sur les surfaces interfaciales, on passe d'une interface à l'autre d'une par une multiplication par la matrice de transfert. Ainsi, et de manière élégante, la relation entre deux interfaces au travers de plusieurs est gouvernée par le produit des matrices de transfert de chacune des couches. Les conditions aux limites conduisent enfin aux vitesses de phase de la solution globale. Toutes les grandeurs physiques peuvent alors être calculées à souhait, en tout point de la plaque. Cela s'applique naturellement aussi aux densités d'énergie et aux intensités.

La méthode des matrices de transfert présente un intérêt pratique limité pour l'étude des excitations transitoires, réparties ou ponctuelles, en milieux stratifiés, par exemple en sismique. Pour ce type d'excitation, des solutions peuvent en principe être produites par la superposition de telles solutions. Si l'on craint un coût de calcul trop élevé par cette procédure, mieux vaut envisager d'autres méthodes de résolution. Van der Hijden [6.19] a élaboré une méthode pour calculer le champ rayonné dans un milieu anisotrope stratifié par une source ponctuelle d'impulsion. Les équations de base sont traitées par une transformée de Laplace temporelle et une transformée de Fourier spatiale dans un repère cartésien parallèle à la stratification. Le formalisme matriciel utilisé suit la méthode des matrices de transfert pour la prise en compte de la stratification. La transformation inverse dans le domaine temps-espace par la méthode de Cagniard-de-Hoop (parcours adéquat pour l'intégration dans le plan complexe ; voir aussi [2.6, p. 298]) livre la fonction de Green du problème. Une convolution temporelle livre le champ vibratoire cherché pour ce type d'excitation, et peut s'interpréter comme la contribution de rayons vibratoires.

Les rayons vibratoires sont étroitement liés au transport d'énergie acoustique, et conviennent bien à la description de phénomènes acoustiques aux courtes longueurs d'onde et pour des perturbations brèves. Une description assez simple suffit lorsque les circonstances s'y prêtent, par exemple s'agissant des conditions de durée. Lerche [6.20] considère une source impulsionnelle et un récepteur, à quelque distance l'un de

l'autre, qui se trouvent à une même hauteur de la surface interfaciale entre deux milieux anisotropes, et examine la différence de durée entre le rayon réfléchi normalement et l'onde de tête (en anglais : 'head wave') potentiellement causée par l'impact du rayon sur la surface interfaciale (pour la production d'ondes de tête, voir par exemple [2.6, p. 307]). Dans les cas favorables, de telles mesures permettent de déterminer les vitesses vibratoires en milieux anisotropes.

Pour d'autres applications comme le contrôle non destructif au moyen d'impulsions ultrasonores des matériaux renforcés par des fibres, Norris [4.11] a développé la méthode mentionnée au paragraphe 4.1, qui est aussi applicable aux milieux homogènes par morceaux. Son domaine de validité peut être étendu aux milieux de propriétés continûment variables et à des effets faiblement non-linéaires [6.21]. On ne s'attend pas à une application adaptée pour des ondes planes, mais seulement pour des paquets d'ondes de forme gaussienne, qui représentent la solution asymptotique de l'équation d'onde aux fréquences élevées. Un tel paquet d'ondes est, dans les trois directions de l'espace, d'une extension limitée, et son centre se déplace en ligne droite à la vitesse de groupe du matériau homogène. Au cours du temps, le paquet d'ondes s'élargit dans le milieu anisotrope, très différemment suivant la direction de propagation. Aux interfaces, qui n'ont pas besoin d'être planes mais sont caractérisées par leurs tangentes et courbures locales, apparaissent de nouveaux paquets d'ondes réfléchis et transmis, dont les caractéristiques peuvent être calculées par les lois de réfraction et de réflexion à partir de celles du paquet incident. Norris n'a pas déterminé le contenu énergétique d'un tel paquet en fonction de ses paramètres, bien que cela ne semble pas être difficile. La conservation de l'énergie et sa distribution lors d'une réflexion / réfraction pourrait, à ce stade, être réexaminée et comparée aux résultats des ondes planes (paragraphe 3.2 et 4.2).

Pour réduire le bruit des machines et des installations techniques, on fait le plus souvent appel aux panneaux multicouches pour absorber le son. Ces panneaux sont typiquement constitués d'une plaque métallique sur laquelle sont réunies une ou plusieurs couches viscoélastiques et éventuellement une nouvelle plaque métallique. Les longueurs d'onde présentes dans ces structures sont généralement grandes par rapport à l'épaisseur des couches, de sorte que l'approximation des basses

fréquences peut être utilisée pour les ondes de plaque. On peut estimer avec une bonne précision les facteurs de perte de ces plaques multicouches, comme décrit dans le paragraphe III.6 de [2.13]. Le facteur de perte pour des ondes de flexion est typiquement dix fois plus important que celui des ondes longitudinales.

On peut conclure ces propos consacrés aux milieux stratifiés par quelques autres ouvrages. Les monographies [6.22 - 24] constituent des sources denses d'information. Skelton et James [6.54] calculent le champ lointain rayonné par une disposition régulière de couches anisotropes pour différents types d'excitation (forces ponctuelles, monopôles acoustiques, ondes planes), ainsi que les coefficients de transmission et de réflexion pour des ondes planes. Comme introduction au paragraphe suivant sur des milieux désordonnés, nous citons le travail [6.25], qui traite de la statistique de la propagation d'ondes dans les milieux stratifiés aléatoires. Une étude analytique, basée sur une méthode de matrice de transfert, est complétée de simulations numériques.

6.2. Matériaux désordonnés

En janvier 1991 paraissait le premier numéro d'une nouvelle revue ayant pour titre "Waves in Random Media". Elle doit encourager l'échange d'informations interdisciplinaires sur les phénomènes et les problèmes qui concernent les ondes dans les milieux non ordonnés, et qui apparaissent sous forme plus ou moins similaires dans les secteurs de recherche les plus divers. Étant donnée les échanges réciproques fertiles réalisés par le passé entre les secteurs classiques de l'acoustique, de l'électrodynamique et de la mécanique quantique, cet objectif ne peut qu'être salué. Le "temps de diffusion" que nécessite une observation pour parcourir le chemin, combien profitable, de sa discipline originale vers une nouvelle pourrait ainsi être considérablement raccourci (il aura fallu plus de 20 ans pour que le phénomène de localisation d'Anderson, découvert en physique, soit analysé en acoustique !).

La parution d'une nouvelle revue signifie aussi qu'une branche de la science est active et promet d'être enrichie par un nombre croissant de contributions. La convergence des informations au sein d'une revue peut

aider à la bonne visibilité sur un domaine scientifique, ce qui devient de plus en plus difficile. Les remarques suivantes essaient de rendre compréhensibles quelques mots clés importants pour l'acoustique de milieux non ordonnés, pour faciliter ainsi cet accès à quelques acousticiens, généralement peu familiers avec ce sujet.

Le représentant typique d'un milieu non ordonné est un milieu composé d'un milieu homogène (désigné souvent comme la matrice) dans lequel sont insérés beaucoup de "pointes" (*ndt* inclusions) (homogènes) d'un autre matériau, dans une disposition irrégulière, par exemple du bore dans de l'aluminium [2.9, p.210]. La méthode la plus simple, pour traiter de façon approchée de la propagation d'ondes dans un tel milieu inhomogène, consiste à considérer le milieu "effectif" homogène, dont on doit déterminer les "propriétés effectives du matériau" à partir des propriétés des matériaux constituants (masse volumique, constantes d'élasticité, paramètres d'absorption). Sont apparues de nombreuses "théories du milieu effectif" (en anglais : Effective Medium Theories) et "techniques d'homogénéisation".

On obtient une première estimation des modules d'élasticité effectifs d'un milieu non ordonné par des bornes, supérieure et inférieure, obtenues par une moyenne spatiale sur les constantes élastiques (prise de moyenne de Voigt) et/ou sur les compliances (prise de moyenne de Reuss) [2.9, p. 200]. Ces bornes ne présentent malheureusement un intérêt pratique que pour de petites fractions de volume d'inclusions et de faibles différences des propriétés élastiques, parce qu'elles fournissent sinon un encadrement trop large. En revanche, les bornes de Hashin-Shtrikman sont beaucoup plus proches des valeurs exactes [2.9 p. 202; 6.26-29]. La dérivation de ces bornes est basée sur l'application de principes variationnels.

Un des rares manuels à traiter des ondes dans les milieux non ordonnés est celui de Beltzer [2.9, chap. V]. Il décrit aussi comment sont obtenues des valeurs de module élastique dépendant de la fréquence. Dans un milieu linéaire, causal et passif, cette dépendance envers la fréquence entraîne une partie imaginaire des modules élastiques sur la base des relations de Kramers-Kronig : même si aucune dissipation d'énergie n'est acceptée, une "absorption", par exemple une décroissance de l'amplitude d'une onde plane se produit. La cause de cette absorption peut être liée à la dispersion de l'onde sur les "pointes" (*ndt* inclusions). L'énergie qui n'est

pas transmise dans la direction de propagation est prélevée sur l'onde plane et conduit à l'absorption.

Les théories de dispersion de diverses écoles représentent par conséquent un important artisanat visant au calcul des modules effectifs. Pour cela, la notion de diagramme de dispersion, qui présente les relations entre l'intensité répartie dans le milieu de dispersion et l'intensité incidente, est d'une importance capitale. Pour obtenir des solutions analytiques, on simplifie la forme du milieu de dispersion et considère, par exemple, un "grain sphérique". Le calcul des densités d'énergie et des intensités pour des situations idéalisées de ce genre (voir aussi les annexes A et B) ne doit donc pas être estimé comme un simple exercice, dénué d'intérêt pratique. C'est par la "superposition statistique" de telles solutions analytiques que le difficile problème de la propagation d'ondes dans les milieux non ordonnés peut être traité et examiné de façon approchée, suivant des règles de distribution généralement validées.

Comme en optique et en acoustique, on trouve aussi pour les vibrations de la dispersion de Rayleigh aux basses fréquences et de la dispersion géométrique (de Mie) aux fréquences élevées. Si la densité des corps de dispersion est faible, la dispersion multiple peut être négligée. De plus grandes densités peuvent être produites progressivement : une faible fraction de densité de corps de dispersion est d'abord homogénéisée, et on insère alors dans ce milieu effectif homogène encore une faible fraction de densité de corps de dispersion. On parle, pour ces petits incréments itératifs infinitésimaux, de schéma différentiel [2.9 p.193], et l'on parvient au résultat souhaité par l'intégration d'équations différentielles couplées pour les modules effectifs en fonction de la fraction de volume des corps de dispersion.

Les méthodes d'homogénéisation ne sont pas appliquées aux seuls milieux non ordonnés, mais aussi aux milieux périodiques inhomogènes [6.30-31]. Il arrive aussi que des milieux qui possèdent en réalité une structure non ordonnée puissent parfois être remplacés habilement dans le calcul par des milieux périodiques adaptés, sans que cela ne se répercute de façon sensible sur le résultat (voir [6.55]). À une fréquence donnée, l'influence de la périodicité imposée diminue lorsque la cellule de base est agrandie. La précision de la description d'un milieu non ordonné peut être

augmentée à volonté par cette mesure, en adaptant la périodicité dans la limite de la capacité de calcul disponible.

La périodicité structurelle offre l'avantage de pouvoir aussi utiliser des méthodes exactes pour l'homogénéisation. Pour la "tôle perforée" du paragraphe 5.2.3, le formalisme d'ondes de Bloch a servi à la détermination des modules effectifs d'un milieu homogène et anisotrope équivalent dans le cas limite des basses fréquences. Toutes les grandeurs moyennes sur la cellule de base sont fixées par les propriétés du milieu effectif ; des "finesses locales" de polarisation ou de flux d'énergie autour d'un trou ne peuvent évidemment pas être appréhendées dans le cadre d'une théorie des milieux effectifs.

Les actes de congrès [5.11-12] résument toute une série de contributions à la dérivation et à l'application des méthodes d'homogénéisation. Il n'en ressort pas une image uniforme ; l'abondance des thèmes et des types de représentation confine plutôt à la confusion. Il y a heureusement des travaux qui s'efforcent de prendre un peu de recul pour une meilleure compréhension. Face à une situation telle que différentes théories de milieux désordonnés peuvent arriver à des résultats complètement différents, Sheng [6.32] pose la question de la précision de ces approximations. Les divergences viennent en grande partie du fait que les théories sont issues de différentes microstructures. On pourrait montrer que certaines théories livrent des résultats exacts pour une structure précise. Ainsi, on devrait en réalité se demander pour quelle microstructure telle théorie est exacte. Puisque le nombre de différentes théories est limité, un résultat exact pour une structure quelconque ne peut donc pas être espéré. Il faut donc plutôt conclure que dans ces approximations, la prise en considération des caractéristiques structurelles essentielles est insuffisante. Sheng recommande, comme issue, de traiter [les milieux désordonnés] comme des milieux périodiques, comme présenté plus haut, ce qui permet alors (en principe) un traitement exact.

Les méthodes d'homogénéisation basées sur des approximations continuent toutefois d'être développées. Les succès obtenus jusqu'ici plaident en faveur de cette approche, et surtout son coût comparativement modeste pour le calcul numérique. La question de la précision, à laquelle Sheng n'a répondu que de manière incomplète, se pose à nouveau. Gaunard et Wertman [6.33-34] et les auteurs qu'ils citent donnent un

aperçu de la discussion presque passionnée sur le manque d'applicabilité et les domaines de validité de différentes théories. Il est remarquable d'observer (voir l'ouverture de [6.34]) que ces théories, qui ont été créées pour le domaine des grandes longueurs d'onde, donnent encore des résultats utiles aux fréquences plus élevées, bien que les conditions de base ne soient plus vérifiées. Ce phénomène d'extension inattendue du domaine de validité, qui est aussi connu dans d'autres théories physiques (on pense par exemple au formalisme fonctionnel de densité dans la théorie de l'électron), n'est jusqu'aujourd'hui pas compris en détail.

Dans une série de trois vastes articles [6.35-37], Sornette considère le thème des "ondes acoustiques dans les milieux désordonnés", en répondant dans une certaine mesure aux attentes exprimées plus haut. Il ne se limite pas aux techniques accessibles dans le domaine de l'homogénéisation, mais traite aussi le cas du désordre fort. La "plus grande attente" se trouve dans l'expression d'une description théorique, qui se sert des fonctions de Green et des techniques de diagramme de la théorie des champs quantiques. De cette manière, Sornette réussit une représentation uniforme, dont différentes théories du milieu effectif apparaissent comme des exemples d'approximations spéciales. Le lecteur pour lequel les équations de Dyson, de Bethe et de Salpeter, et encore le diagramme de Feynman sont étrangers n'a qu'à se laisser guider pour accéder à un niveau d'abstraction posant, en des mots tout à fait compréhensibles, les développements fondamentaux de cette "trilogie".

Sornette essaye de transposer les études du transport électronique vers l'acoustique des milieux désordonnés. Comme point de départ de la formulation théorique, il choisit pour plus de facilité l'équation scalaire de Helmholtz. D'après le "concept d'universalité", on suppose qu'il ne faut donc pas attendre un comportement différent pour les autres équations classiques des ondes, en particulier pour les vibrations qui nous intéressent ici.

Ce qui suit s'applique à la conductivité électrique : dans les milieux désordonnés uni- et bi-dimensionnels, tous les états de l'électron sont localisés, même si le degré de désordre est petit. Si l'étendue du milieu est suffisamment grande, il se comporte donc comme un isolant. En milieu tridimensionnel, lors d'un faible désordre, le comportement métallique règne ; au-dessus d'un certain degré de désordre, tous les états d'électron

sont toutefois encore localisés, et le milieu devient alors isolant. On appelle localisation d'Anderson cet effondrement de la conductivité causé par un désordre (le papier théorique célèbre de l'année 1958 d'Anderson [6.38], souvent cité, - plus rarement vraiment lu, à cause de sa difficulté - constitue le germe d'une branche de la recherche universelle. Dans un travail ultérieur et largement plus accessible de l'année 1985, Anderson examine aussi la possibilité de la localisation dans les systèmes classiques, lors de la propagation de micro-ondes, d'ondes sonores ou de lumière dans les milieux désordonnés [Z. 18]).

Le transport de charges correspond en acoustique au transport d'énergie vibratoire ; à une fonction d'onde électronique correspond un mode en milieu élastique. Jusqu'ici, tout indique que la dépendance de la conductivité d'un milieu envers ses dimensions et au désordre pourrait s'appliquer au transport énergétique de l'acoustique (pour ne pas éveiller une fausse impression, faisons à ce propos remarquer que de nombreuses questions restent encore ouvertes, en acoustique comme en électronique). Sornette s'occupe surtout du cas tridimensionnel et cite trois domaines qui se différencient en principe concernant la propagation énergétique. Savoir quel domaine s'applique dépend de la mesure du parcours d'une onde sonore entre sa source, ou son entrée dans le milieu, jusqu'au point d'observation. Considérer cette course revient à comparer, en élasticité, le libre parcours moyen l_e à la longueur de localisation ξ qui caractérise la localisation d'Anderson. Le libre parcours moyen est inversement proportionnel à la densité n du milieu de dispersion et à sa section efficace de dispersion σ_s ,

$$l_e \approx \frac{1}{n\sigma_s}, \quad (6.2.1)$$

et décrit la course moyenne jusqu'au processus de dispersion.

- si le parcours est plus petit que l_e , l'onde se propage avec seulement de faibles pertes de dispersion, comme dans le milieu homogène. Le transport énergétique a lieu à la vitesse de groupe effective \vec{C} et vérifie les relations connues entre les moyennes temporelles de densité d'énergie w et d'intensité \vec{I} :

$$\vec{I} = \vec{C}w.$$

$$(6.2.2)$$

Les méthodes d'homogénéisation sont applicables dans ce domaine.

- si la course est plus grande que l_e , la dispersion multiple est importante, et l'énergie est transférée suivant une loi de diffusion qui comporte des coefficients de diffusion $D(\omega)$ dépendants de la fréquence :

$$\bar{I} = -D(\omega) \nabla w. \quad (6.2.3)$$

Une estimation montre que

$$D(\omega) \approx D_0 = \frac{1}{3} Cl_e. \quad (6.2.4)$$

Lors de l'excitation unilatérale d'une plaque d'épaisseur L , l'intensité prélève linéairement de l'énergie du côté de la face excitée vers l'autre face, jusqu'à épuisement. Le degré de transmission de la plaque peut être indiqué

$$T = \frac{D}{CL} \approx \frac{l_e}{3L} \quad (6.2.5)$$

"L'imperméabilité" augmente linéairement avec l'épaisseur, comme le fait une résistance électrique.

Si la longueur d'onde λ n'est plus petite en comparaison du libre parcours moyen, les effets d'interférence entre l'onde incidente et les ondes réfléchies, à une ou différentes reprises, ne peuvent plus être négligés. L'influence des interférences sur le coefficient de diffusion est qualifiée de localisation faible et peut être décrite pour $D > 0$ par

$$D(\omega) \approx D_0 \left(1 - \left(\frac{\lambda}{l_e} \right)^2 \right) \quad (6.2.6)$$

- si la longueur d'onde est plus grande que le libre parcours moyen, la localisation forte, ou d'Anderson, se produit (critère d'Ioffe-Regel). Elle n'a rien à voir avec une dissipation d'énergie, mais est

exclusivement basée sur des effets d'interférences. Le coefficient de diffusion est nul ; le transport énergétique est plus lent que ne le ferait la diffusion. Ce "désordre suffisamment fort" fait apparaître la longueur de localisation ζ dépendant également de la fréquence. Après une propagation diffusive sur une distance ζ , l'énergie est distribuée sur une zone d'étendue ζ , c.-à-d. que les modes propres possèdent une pente de forme exponentielle. En conséquence, le transport énergétique de la plaque animée unilatéralement décroît exponentiellement avec son épaisseur L ; le degré de transmission est proportionnel à $\exp(-L/\zeta)$. Les mécanismes de localisation et la transition de la diffusion vers la zone de localisation ne sont pas encore complètement éclaircis.

Ces trois domaines ne peuvent apparaître que dans les milieux tridimensionnels. Bien qu'une localisation acoustique d'Anderson n'ait pas encore été prouvée expérimentalement de façon irréfutable dans un milieu tridimensionnel, il n'apparaît pas hors de propos de penser à une application pratique de cet effet pour le développement de nouveaux matériaux absorbants (pour permettre une comparaison valable entre théorie et expérience, l'influence de la dissipation d'énergie doit être prise en compte ; ceci est examiné en [6.37]).

Dans les milieux uni- ou bi-dimensionnels, une localisation est en principe associée à un désordre. Cela peut déjà être illustré sur des exemples simples (généralement 1D) par un calcul, une simulation par le calcul formel sur ordinateur ou une expérience en laboratoire. Le premier à se tourner vers les phénomènes de localisation dans les systèmes mécaniques, vingt ans après les travaux d'Anderson, a été Hodges [6.39]. Cet article et les contributions suivantes avec Woodhouse [6.40-42] permettent un accès de base à ce sujet au moyen de deux exemples unidimensionnels, un système d'oscillateurs couplés (pendules) et d'une chaîne ou d'une "poutre de flexion" constituée de masses et de ressorts.

Que des effets de localisation puissent être importants en pratique est déjà reconnaissable sur ces exemples simples. Le nombre d' "éléments" fonctionnels du système 1D n'a pas besoin d'être particulièrement grand pour cela ; déjà avec dix pendules couplés ou dix masses sur une chaîne, l'effet du désordre peut être spectaculaire. Pour un écart standard de 2,4%

d'irrégularité de distance entre les masses sur la chaîne, 1% seulement de l'énergie traverse le quatrième volume ! Attribuer un tel résultat de mesure à une absorption (dissipation d'énergie) serait méconnaître complètement la physique. Ce n'est pas l'absorption, mais les interférences cohérentes qui concentrent l'énergie à proximité du point d'excitation (en simulant des fluctuations temporelles de la tension de chaîne au moyen d'un "bain de chaleur", la cohérence peut être détruite et la localisation amenée à disparaître [6.37; 6.43]).

Sous sa forme habituelle, l'analyse énergétique statistique (SEA) considère la superposition de champs incohérents ; le phénomène de localisation n'est par conséquent pas pris en compte. Ainsi, si dans une application l'effet de localisation est plus important que l'absorption, la SEA livrera des estimations erronées. Ceci participe peut-être au fait que, jusqu'ici, aucun domaine de confiance utile ne pouvait être indiqué pour les prévisions par la SEA.

Le traitement théorique des systèmes désordonnés se conclut souvent par l'obtention de moyennes d'ensemble dont le caractère essentiel reste non exprimé. En revanche pour une application pratique, il est intéressant d'étudier le comportement du représentant typique d'un l'ensemble. Hodges [6.39] rappelle l'indication d'Anderson [6.38] selon laquelle les comportements 'typique' et 'moyen' ne coïncident pas nécessairement. Une densité de probabilité de distribution suffisamment asymétrique (par exemple avec une longue "queue") peut conduire à des divergences considérables. Peu de "cas particuliers" (mais qui restent des structures régulières !) présentant des propriétés remarquables sont représentatives du "comportement moyen des représentants typiques" de la moyenne d'ensemble. Il est ainsi possible qu'une localisation apparaissant pour les représentants typiques de la moyenne d'ensemble ne soit pas du tout reconnaissable ! Hodges et Woodhouse [6.41] proposent par conséquent d'utiliser une moyenne géométrique au lieu de la moyenne linéaire pour caractériser le comportement typique.

En [6.44], Pierre examine le comportement généralement méconnu des valeurs propres en fonction d'un paramètre de désordre d'après deux exemples 1D. Des particularités, qui sont liées à la localisation, peuvent être observées sur les courbes de valeur propres : si deux courbes de

modes différents s'approchent, elles ne se croisent pas, mais se "repoussent" ou s'"enlacent" (en anglais : eigenvalue lociveering).

Dans un autre travail, Pierre discute la question de l'intérêt pratique de tels systèmes au moyen de méthodes de Monte-Carlo et de méthodes de calcul analytique [6.45]. Il différencie les localisations faible et forte d'après l'étendue spatiale de la forme d'oscillation exponentielle décroissante. Un système d'oscillateurs couplés montre dans ce sens une localisation faible (limitée à des oscillations sur environ un millier d'oscillateurs) pour un désordre faible et un couplage fort, tandis que lors d'un désordre faible et d'un couplage faible apparaît une localisation forte (oscillation limitée sur environ dix oscillateurs). En pratique, le premier cas se fera sans aucun doute moins sentir que le deuxième.

La méthode de Monte-Carlo est aussi appropriée pour étudier le domaine de validité et la précision des théories. Dans le cas de la chaîne avec des masses ajoutées, même une théorie auto-cohérente comme la CPA (en anglais : Coherent Potential Approximation) semble fournir, dans la plupart des cas, de bons résultats [6.46].

Trois autres expériences sont brièvement mentionnées au sujet de la localisation. La première [6.47] a été conduite en acoustique sur une canalisation possédant, à des distances irrégulières, des embranchements fermés à des longueurs différentes. Pour la deuxième [6.48-49] des ultrasons à ondes de surface ont été envoyés sur des systèmes quasi-cristallins ou des systèmes quasi-périodiques, formés de cannelures parallèles sur la surface d'un cristal piézoélectrique. Dans ces systèmes, des notions comme l'auto-similarité et la quasi-localisation entrent en jeu. Les effets théoriques attendus ont été confirmés dans les deux expériences. Dans la troisième expérience [6.50], la propagation d'ultrasons dans une plaque d'aluminium a été mesurée. Dans ce cas, un accord quantitatif incontestable avec la théorie ne pouvait pas encore être obtenu.

La plupart des travaux sont consacrés au désordre isotrope, ou – lors de l'expérimentation sur des systèmes 1D – à la propagation d'ondes dans une direction. En réalité, le désordre peut être anisotrope, comme dans le cas de la croûte terrestre se composant de couches hétérogènes. Comme modèle simple pour de tels cas, on peut se servir d'une structure dont l'inhomogénéité varie au moyen d'un paramètre θ entre les cas extrêmes (i) d'un milieu tridimensionnel isotrope désordonné et (ii) d'une

succession désordonnée de couches homogènes. Il ressort d'une étude analytique-numérique [6.51] que la localisation se développe (verticalement à la stratification) avec une anisotropie plus forte de la structure, c'est-à-dire pour une stratification plus marquée. Il est remarquable que cette transition de localisation ne soit pas "progressive", mais suivant un type de transition de phase présentant une "valeur critique" du paramètre θ . Il y a ainsi non seulement un degré de désordre critique, mais aussi une anisotropie critique pour la transition de localisation dans les milieux tridimensionnels.

Ce chapitre sur des ondes élastiques dans les milieux déstructurés prend fin sur l'indication d'une autre référence de la littérature, [6.52]. Elle conduit loin des bases du calcul des intensités vibratoires et des densités d'énergie, tels que décrits dans les chapitres précédents pour des structures simples. Après avoir introduit les milieux désordonnés, les bases plus compliquées, présentant la superposition en partie incohérente et en partie cohérente du champ d'ondes planes, montre que des phénomènes apparaissent, non connus jusqu'ici, comme le transport diffusif d'énergie et la localisation vibratoire ; ne point trop négliger ce domaine scientifique n'a donc pas besoin d'arguments supplémentaires. Les développements ci-dessus tentent de constituer quelques bases pour inciter chaque acousticien à développer ses connaissances. Étendre l'horizon de l'acoustique à des phénomènes plus généraux pourrait, en tout cas, contribuer à éviter quelques interprétations naïves et à donner l'impulsion pour de nouveaux développements.

7. Applications

Les éléments présentés dans les chapitres précédents, visant au calcul des densités d'énergie et des intensités vibratoires sont utiles à de multiples fins. Avant tout, la considération détaillée des grandeurs énergétiques vibratoires contribue à une compréhension approfondie des processus acoustiques. Être familiarisé avec le comportement général (chapitre 2), les caractéristiques particulières de la distribution d'énergie dans différentes structures idéalisées et les transferts associés (chapitres 3-6) fournit une bonne vue d'ensemble de ce qui se produit pour les applications pratiques. On est aussi protégé contre des interprétations erronées, en évitant par exemple de confondre un phénomène de localisation avec une décroissance exponentielle d'amplitude causée par l'absorption du matériau. La connaissance détaillée des dériviatives et du calcul analytique n'est pas nécessaire pour acquérir ces capacités.

Il en va autrement si la base théorique doit servir au calcul de structures qui ne sont pas présentées dans ce livre, ou ont été traitées seulement de façon incomplète. La littérature citée peut être consultée, dans d'autres cas le calcul doit être effectué pour la nouvelle application. Réaliser des calculs sur des structures idéalisées ne peut pas être dissocié d'une pratique purement académique. Des exemples comme celui de la dispersion d'une onde plane sur un obstacle sphérique illustrent l'importance de telles études, et en particulier sous la forme de solutions analytiques : en combinant de multiples systèmes idéalisés, on arrive à une description utile à décrire avec réalisme des structures comportant beaucoup d'obstacles. En outre, les relations générales et les solutions analytiques peuvent être utilisées pour le calcul numérique, inévitable dans de nombreuses applications pratiques, souvent avec grand profit : pour le contrôle, l'optimisation, comme référence, comme première approximation ou comme cas limite asymptotique.

Enfin, l'échange régulier entre théorie et expérience doit être rappelé. Tout comme une théorie physique ne peut prouver son importance pratique que par une expérimentation, la valeur d'une mesure prend son sens avec la théorie de base. Dans le développement des méthodes de mesure, le travail théorique d'accompagnement joue donc un rôle crucial.

Lors d'une mesure vibratoire, on doit probablement se résigner à une particularité qui n'existe pas dans les milieux fluides : les mesures ne sont, jusqu'ici au moins, possibles que sur la surface du corps solide. Pourtant, dans la majorité des cas, l'intensité de surface ne présente par exemple pas d'intérêt en réalité, au contraire de l'intensité totale intégrée sur une section de plaque ou de poutre. Pour atteindre cet objectif, soit l'on mesure l'intensité en surface puis tente ensuite d'en obtenir l'intensité totale, soit l'on mesure d'autres grandeurs en surface pour en calculer, avec la meilleure précision possible, l'intensité totale. Par ces deux procédures, on ne s'en tire pas sans théorie ni sans hypothèses sur le champ vibratoire à l'intérieur du milieu. La théorie vibratoire est donc, pour ainsi dire, "plus indispensable" que la théorie des milieux fluides, parce que le calcul à l'intérieur d'un milieu fermé ne peut pas être remplacé par des mesures. Le degré de précision avec lequel l'intensité totale peut être déterminée dépend de la validité des hypothèses.

La méthode conventionnelle pour mesurer l'intensité d'une onde de flexion en plaque et en poutres minces emprunte la deuxième voie. L'erreur de mesure augmente avec la fréquence, puisque les relations d'une épaisseur de poutre ou de plaque vis-à-vis de la longueur d'onde de flexion augmentent. Comme montré dans le paragraphe 3.3.3, cette erreur peut être déterminée par la voie du calcul. Cela ouvre la possibilité de corriger cet écart, et d'étendre ainsi le domaine d'application de la méthode de mesure aux fréquences plus élevées.

Dans des cas particuliers, il est concevable que le champ vibratoire soit précisément connu sur la base de nombreuses mesures, ou que l'intensité soit accessible par des calculs à partir d'une mesure d'amplitude simple (par exemple d'accélération). Si des mesures d'intensité doivent souvent être répétées sur une structure, par exemple pour vérifier périodiquement le fonctionnement des appareils ou la sécurité des installations techniques, on peut mettre en place une procédure adaptée à partir de l'amplitude. Il faut toutefois toujours examiner si les conditions fondamentales de validité de cette "procédure d'amplitude" sont vérifiées, et si par exemple une modification de conditions aux limites ne s'est pas produite, qui devrait entraîner un ajustement correspondant pour le calcul de l'intensité à partir de l'amplitude.

Un autre aspect important pour la technique de mesure est celui du réexamen des méthodes de mesure et de la calibration des appareils de mesure. Il n'y a pas encore de directives à ce sujet pour des mesures vibratoires. Comme dans d'autres secteurs de la technique de mesure, il faudrait définir des corps d'épreuve calibrés. Ils doivent posséder une structure simple, afin que le résultat d'une mesure puisse être évalué aussi précisément que possible.

Tout comme une théorie peut constituer une bonne approximation au-delà du domaine de validité envisagé à l'origine (par exemple : la théorie du milieu effectif), une méthode de mesure peut aussi donner de meilleurs résultats que ce qu'on aurait pu, prudemment, en attendre. À titre d'illustration, la localisation de sources sonores, mentionnée dans l'introduction, est accessible par des mesures d'intensité vibratoire. La méthode [1.15] a été développée en partie empiriquement ; en particulier les recommandations relatives à la réponse fréquentielle, qui doivent être vérifiées en moyenne, proviennent de données expérimentales. On essaye ensuite de justifier théoriquement ces recommandations, en émettant quelques hypothèses plausibles. Avec "les bases pour le calcul des densités d'énergie et des intensités" décrites ici, des outils sont maintenant disponibles, avec lesquels une méthode de mesure peut être examinée plus en profondeur.

D'autres efforts théoriques sont nécessaires pour développer les connaissances sur des distributions d'intensité en champs vibratoires compliqués. Cela signifie surtout la prise en considération des données suivantes : les réflexions sur les inhomogénéités et les frontières d'une structure, l'effet de plusieurs sources sonores actives simultanément, ou encore l'absorption du matériau. Comment la contribution du champ proche et les ondes propagatives affectent-elles l'intensité ? Quel rôle jouent les relations de phase entre deux sources ? Qu'est-ce qui arrive lors de la réalisation d'une moyenne en fréquence ? Ces autres questions attendent encore un traitement attentif. Les réponses ne sont pas toujours simples, puisque des densités d'énergie et des densités de flux d'énergie ne sont qu'exceptionnellement additives (voir le paragraphe 2.7). Deux exemples remarquables de comportement non-additif ont déjà été décrits : la distribution de l'intensité quasi-périodique avec la réflexion d'une onde plane sur une surface (paragraphe 3.2) et la localisation faible ou forte,

possible dans les milieux désordonnés, qui s'attribue aussi à des interférences cohérentes (paragraphe 6.2). On devrait pouvoir tirer des conclusions généralisables par l'analyse détaillée de l'intensité sur d'autres exemples de problèmes vibratoires idéalisés, sélectionnés avec soin. La compréhension des phénomènes acoustiques doit être encouragée dans cette voie, pour enrichir la théorie des vibrations.

8. Résumé

Pour l'analyse et la recherche de solutions de problèmes vibratoires, une perspective intéressante est d'accéder à la distribution de l'intensité, en particulier lorsque les méthodes traditionnelles sont insuffisantes ou conduisent à des valeurs erronées. On rencontre toutefois, dans le domaine des vibrations, pour la mesure comme pour le calcul, des difficultés considérablement plus grandes qu'en acoustique aérienne. Le présent travail donne un aperçu de l'état actuel de la recherche dans ses aspects théoriques. L'étude n'a pas seulement pour objet l'intensité, donc la densité de flux d'énergie en moyenne temporelle, mais aussi la distribution moyenne temporelle de densités d'énergie potentielle et cinétique. Les calculs sont menés dans le cadre de l'élastodynamique linéaire, sans prendre en compte l'absorption de matériau.

Les expressions de ces grandeurs énergétiques sont fournies en fonction du vecteur vitesse, des tenseurs des contraintes et des déformations, sous une forme générale et pour des matériaux anisotropes. Dans un milieu homogène infini, la moyenne temporelle de la densité d'énergie potentielle d'une onde plane est, à tout instant et en tout point, identique à celle de la densité d'énergie cinétique (principe de Rayleigh pour les ondes propagatives) ; la vitesse de transport d'énergie est la vitesse de groupe, qui peut dans le cas anisotrope s'écarter de la vitesse de phase de l'onde plane. Ces relations peuvent être généralisées à des milieux inhomogènes de structure périodique, en moyennant spatialement les grandeurs énergétiques déjà moyennées temporellement et en remplaçant l'onde plane par une onde élastique de Bloch. La démonstration de ces relations importantes se fait dans le cadre du formalisme de Lagrange. Les plaques et poutres homogènes peuvent être considérées comme le cas limite de structures périodiques ; les relations s'appliquent en conséquence pour les modes propres de plaque ou de poutre, en établissant une moyenne spatiale sur une section.

Un paragraphe est consacré à la partie imaginaire de l'intensité vibratoire complexe, dite "intensité réactive", dont on examine si elle vérifie des équations semblables à celles qui sont connues et généralement valables en vibrations comme en acoustique. Cela ne se vérifie que dans un seul cas : les sources de l'intensité réactives sont déterminées, en

vibrations comme en acoustique, par la moyenne temporelle de la densité Lagrangienne (différence entre les densités d'énergies cinétique et potentielle). Ce fait devrait à l'avenir être prise en considération dans le débat sur l'importance théorique et pratique de l'intensité réactive.

Les ondes de Bloch et les ondes planes de fréquence non nulle transportent en moyenne temporelle de l'énergie, mais aucune impulsion (*ndt.* quantité de mouvement). Le transport d'impulsion n'est possible qu'associé à un transport de masse, et n'est provoqué par les forces excitatrices que sur une moyenne de temps importante.

Lors de la superposition de champs vibratoires, la question se pose de savoir si les grandeurs énergétiques moyennées temporellement s'accumulent par additivité, comme celles des différentes composantes du champ. On montre qu'une telle additivité est plutôt exceptionnelle pour des ondes de même fréquence et si l'on recherche une additivité valable pour toute différence de phase entre les ondes. Le nombre maximal d'ondes est alors très limité et, dans le milieu à n -dimensions, se situe entre n et $2n$. L'additivité de l'une des grandeurs énergétiques ne permet pas d'en déduire l'additivité des autres. Par exemple, les moyennes en temps des densités d'énergies cinétique et potentielle peuvent être additionnelles, sans que l'intensité ne le soit. Le cas inverse est également possible.

Les équations générales de base pour des densités d'énergie et l'intensité vibratoire sont évaluées pour différentes structures simples. Ceci est réalisé analytiquement lorsqu'un résultat exact est accessible à un coût de calcul raisonnable ; autrement, des procédures numériques complètent le travail analytique préparatoire. Le profil d'intensité quasi-périodique généré par la réflexion d'une onde plane sur une surface libre est présenté, application jusqu'ici inédite. Les ondes indispensables pour les applications pratiques sont présentées en détail pour les plaques isotropes. Si les vitesses de groupe et de phase sont connues pour un mode, les grandeurs énergétiques correspondantes, ainsi que leurs moyennes sur l'épaisseur de plaque, peuvent être obtenues analytiquement en fonction de ces vitesses, qui sont elles-mêmes (généralement) déterminées numériquement. Ce calcul rigoureux de l'intensité des ondes de plaque sert à déterminer l'erreur de la procédure traditionnelle, dont le domaine de validité pour la mesure de l'intensité d'une onde de flexion ne

couvre que les basses fréquences. Cette erreur, une fois connue, peut alors être corrigée, ce qui permet d'étendre le domaine de validité de la procédure à des fréquences plus élevées.

Le calcul de l'intensité d'une onde plane dans un milieu anisotrope est essentiellement basé sur la vitesse de groupe. L'élastodynamique en milieux anisotropes n'a pas été, à ce jour, présentée pleinement ni de manière définitive dans la littérature. Pour donner un aperçu, seuls ont été ici rappelés les travaux les plus importants de ce domaine, trop peu étudié. Comme il n'y a actuellement que peu de solutions analytiques exactes, on doit souvent recourir à des approximations et à des solutions numériques.

Les vibrations d'un milieu hétérogène de structure périodique peuvent être décrites à l'aide des ondes de Bloch. Une procédure numérique itérative est disponible pour déterminer localement ces ondes de Bloch dans un milieu isotrope dans le cas limite des basses fréquences. Dans un milieu unidimensionnel, une solution analytique est disponible sous la forme d'une intégrale sur une période spatiale. Elle résulte de la conservation de l'énergie, qui signifie dans le milieu linéaire sans absorption que l'intensité est constante spatialement. Une tôle perforée est traitée à titre d'exemple de structure bidimensionnelle de symétrie carrée. Deux sortes d'ondes de Bloch apparaissent : un mode essentiellement transversal et un mode polarisé essentiellement longitudinalement. La représentation graphique des distributions d'intensité de ces deux modes illustre l'écoulement de l'énergie vibratoire autour des perforations. En outre, il faut remarquer que les moyennes temporelles de densités d'énergies locales dans les formes cinétique et potentielle sont, en général, différentes. Aux basses fréquences, si la longueur d'onde des ondes de Bloch est grande par rapport à la période spatiale, un milieu périodique peut être considéré comme "effectivement homogène" si les moyennes spatiales présentent un intérêt. Les résultats numériques peuvent être utilisés, en accord avec la théorie, pour obtenir l'intensité moyenne et la polarisation moyenne pour un milieu homogène mais anisotrope, de propriétés élastiques appropriées. La différence d'orientation entre le vecteur d'onde et le vecteur d'intensité est confirmé, en particulier pour des directions de propagation "obliques".

Les milieux stratifiés et les milieux désordonnés sont considérés en tant que représentants importants des milieux hétérogènes de structure

non-périodique. Des phénomènes acoustiques essentiels sont observés pour ces deux groupes, puis décrits dans leurs principes fondamentaux (le traitement mathématique quantitatif dépasse néanmoins le cadre présent). Dans le domaine des vibrations comme dans celui de l'optique, les phénomènes de réflexion et de réfraction apparaissent à l'interface entre deux milieux différents. Conformément aux ondes de surface qui se propagent parallèlement à la surface libre, apparaissent des ondes de couche limite dont l'amplitude décroît exponentiellement avec la distance à la frontière. Elles apparaissent par exemple si un angle critique est dépassé et qu'une réflexion totale se produit. Dans une stratification multiple, on en tire profit pour calculer les processus répétés de réfraction et de réflexion au moyen d'un formalisme mathématique élégant qui est appliqué, suivant différentes variantes, sous le nom de méthode des *matrices de transfert*. Les calculs de densité d'énergie et d'intensité peuvent être facilement traités par ce formalisme, aussi bien pour des couches anisotropes. Enfin, le concept de particule sonore a été mentionné pour le domaine des fréquences élevées, au moyen des paquets d'onde de forme gaussienne. Chaque particule sonore possède une certaine énergie et se déplace à la vitesse de groupe, jusqu'à ce qu'elle rencontre une interface où elle se divise en une particule transmise et une réfléchie.

Les milieux désordonnés conduisent à des considérations statistiques. Dans le cas limite des basses fréquences, comme pour les structures périodiquement inhomogènes, une homogénéisation doit fournir des propriétés élastiques "effectives" (théorie du milieu effectif). En raison de la dispersion d'une onde incidente sur les hétérogénéités au cours de la propagation sans absorption du matériau, un affaiblissement de l'onde se produit. En plus de ce dernier, la théorie prévoit en réalité encore d'autres phénomènes internes, mathématiquement bien plus exigeants, contribuant à la dispersion en vibrations : si, dans un milieu tridimensionnel, le désordre est "suffisant petit", l'énergie est répartie sur de plus grandes distances d'après une loi de diffusion, c'est-à-dire que l'intensité est proportionnelle au gradient de la densité d'énergie. Si le désordre dépasse une valeur critique, le coefficient de diffusion est nul et l'énergie reste localisée spatialement (localisation d'Anderson). Dans les milieux uni- et bi-dimensionnels, cette "transition de phase" entre la diffusion et le comportement localisé n'existe pas ; même pour un désordre très petit,

l'énergie sonore est en principe localisée. Lors d'un transport d'énergie par diffusion, la transmission au travers d'une couche est inversement proportionnelle à l'épaisseur de la couche ; lors d'une localisation la décroissance est exponentielle. La localisation d'Anderson est une conséquence des interférences cohérentes de nombreuses ondes qui prennent naissance par dispersion sur les inhomogénéités du milieu.

Les présentes "*bases pour le calcul des densités d'énergie et des intensités*" sont utilisables de diverses manières. D'un côté, elles permettent une meilleure compréhension des processus acoustiques dans les solides du point de vue de l'énergie. D'autre part, ces bases peuvent servir de point de départ pour étudier des structures qui n'ont pas été traitées jusqu'ici, ou seulement qualitativement. L'arrière-plan théorique est particulièrement important pour le développement de méthodes de mesure des densités d'énergie et des intensités vibratoires. Les procédures existantes peuvent être réexaminées et améliorées ; les calculs à réaliser requièrent de nouvelles procédures fiables. Cela est particulièrement vrai pour le calcul des champs vibratoires à l'intérieur des structures, où la mesure n'est pas accessible. Enfin, ces bases théoriques ont un intérêt pour l'interprétation des résultats d'une mesure. Une connaissance complète des phénomènes acoustiques suivant les différents cas peut aider à éviter des erreurs d'interprétation, comme par exemple attribuer fallacieusement à l'absorption du matériau la décroissance exponentielle de l'amplitude, alors qu'il s'agit d'un effet de localisation.

L'"*analyse énergétique vibratoire*" est généralement perçue comme une approche pertinente, mais qui se heurte en pratique à des difficultés, comme par exemple le fait que les méthodes de mesure ne sont pas encore complètement au point, ou que les mesures comportent des incertitudes importantes. Pour dépasser cet état, quelques travaux théoriques et expérimentaux doivent encore sans aucun doute être menés avant que les applications pratiques ne prennent leur essor. Cela permettrait de développer par la suite une méthode de localisation des sources sonores au moyen de mesures d'intensité vibratoire.

Annexe A

Sphère pulsante

les annexes A et B utilisent les notations suivantes :

r, θ, φ : coordonnées sphériques pour le vecteur r ,

e_r, e_θ, e_φ : vecteurs unitaires dans les directions du système de coordonnées,

$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$: composantes des tenseurs de contraintes et de déformations dans la base orthonormée e_r, e_θ, e_φ ,

ρ : masse volumique,

λ, μ : constantes de Lamé,

σ : coefficient de Poisson,

c_l, c_t : vitesses des ondes longitudinales et transversales dans un milieu infini, élastique et isotrope,

$$\alpha^2 = \frac{c_t^2}{c_l^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\sigma}{2 - 2\sigma}$$

ω : pulsation,

$k_l = \omega / c_l, k_t = \omega / c_t$: nombres d'ondes,

A : Amplitude (réelle ou complexe),

$\text{Sp}(\underline{T})$: trace du tenseur \underline{T} ($\text{Tr}(\underline{T})$)

Le champ de déplacement d'une sphère pulsante [2.27 pp. 15-22 ; 2.6 pp. 129-135]

$$\bar{u}(\vec{r}, t) = U_0 \vec{e}_r \left\{ \frac{1}{(k_l r)^2} - \frac{i}{k_l r} \right\}, \quad r \geq R > 0, \quad (\text{A.1})$$

$$U_0 = \frac{A k_l^2 e^{-i\omega \left(t - \frac{r}{c_l} \right)}}{4\pi \rho c_l^2},$$

décrit les oscillations d'un milieu élastiquement isotrope homogène excité par une sphère creuse, placée à l'origine du système de coordonnées, dont le rayon R évolue périodiquement à la pulsation ω . Les composantes non nulles du tenseur des déformations sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= -U_0 k_l \left\{ \frac{2}{(k_l r)^3} - \frac{2i}{(k_l r)^2} - \frac{1}{k_l r} \right\}, \\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta} &= \varepsilon_{\varphi\varphi} = +U_0 k_l \left\{ \frac{1}{(k_l r)^3} - \frac{i}{(k_l r)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Sp}(\underline{\varepsilon}) = \frac{U_0}{r},$$

dont il ressort pour les composantes de contraintes non nulles

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\rho c_l^2 U_0 k_l \left\{ 4\alpha^2 \left[\frac{1}{(k_l r)^3} - \frac{i}{(k_l r)^2} \right] - \frac{1}{k_l r} \right\}, \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} &= \sigma_{\varphi\varphi} = +\rho c_l^2 U_0 k_l \left\{ 2\alpha^2 \left[\frac{1}{(k_l r)^3} - \frac{i}{(k_l r)^2} \right] + \frac{1 - 2\alpha^2}{k_l r} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

et

$$\nabla \cdot \underline{\sigma} = -\rho c_l^2 U_0 k_l^2 \bar{e}_r \left\{ \frac{1}{(k_l r)^2} - \frac{i}{k_l r} \right\} \quad (\text{A.4})$$

Pour l'intensité active et réactive, on obtient

$$\bar{I} = I_0 \frac{\bar{e}_r}{(k_l r)^2}, \quad I_0 = \frac{1}{2} \omega \rho c_l^2 k_l |U_0|^2 = \frac{|A|^2 k_l^6}{32 \pi^2 \rho c_l} \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \cdot \bar{I} = 0, \quad \nabla \times \bar{I} = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{Q} = I_0 \bar{e}_r \left\{ \frac{4\alpha^2}{(k_l r)^5} - \frac{1-4\alpha^2}{(k_l r)^3} \right\}, \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \cdot \bar{Q} = -I_0 k_l \left\{ \frac{12\alpha^2}{(k_l r)^6} - \frac{1-4\alpha^2}{(k_l r)^4} \right\}, \quad (\text{A.8})$$

pour les moyennes temporelles des densités d'énergie cinétique et potentielle

$$w_{kin} = \frac{I_0}{2c_l} \left\{ \frac{1}{(k_l r)^4} + \frac{1}{(k_l r)^2} \right\}, \quad (\text{A.9})$$

$$w_{pot} = \frac{I_0}{2c_l} \left\{ \frac{12\alpha^2}{(k_l r)^6} + \frac{4\alpha^2}{(k_l r)^4} + \frac{1}{(k_l r)^2} \right\} \quad (\text{A.10})$$

et pour la densité Lagrangienne moyennée temporellement

$$\langle L \rangle_t = -\frac{I_0}{2c_l} \left\{ \frac{12\alpha^2}{(k_l r)^6} - \frac{1-4\alpha^2}{(k_l r)^4} \right\}. \quad (\text{A.11})$$

La vitesse de propagation énergétique

$$\bar{c}_e = \frac{\bar{I}}{w} = \frac{c_l \bar{e}_r}{1 + \frac{1+4\alpha^2}{2(k_l r)^2} + \frac{6\alpha^2}{(k_l r)^4}} \quad (\text{A.12})$$

dépend du rayon, y compris dans de l'air (c'est-à-dire pour $\alpha^2 = 0$), alors que ce n'est pas le cas pour une onde plane. La densité de flux d'énergie au cours du temps ("vecteur de Kirchhoff") s'exprime comme

$$\begin{aligned} \bar{S}(\vec{r}, t) = \bar{I} + I_0 \bar{e}_r \left\{ \left[-\frac{8\alpha^2}{(k_l r)^4} + \frac{1}{(k_l r)^2} \right] \cos \left[2\omega \left(t - \frac{r}{c_l} \right) \right] \right. \\ \left. + \left[-\frac{4\alpha^2}{(k_l r)^5} + \frac{1+4\alpha^2}{(k_l r)^3} \right] \sin \left[2\omega \left(t - \frac{r}{c_l} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

pour une amplitude A réelle et après quelques lignes de calcul, cette écriture se met sous la forme des équations (2.3.12a), où l'indice i fait référence aux coordonnées sphériques et où seule la composante radiale r est non nulle.

Annexe B

Sphère oscillante en rotation (voir l'annexe A pour les notations)

Le champ de déplacement d'une sphère oscillant en rotation [2.27 pp. 16-22 avec des erreurs d'impression ! ; 2.6 pp. 160-161 ; 2.9 pp. 68-70]

$$\bar{u}(\vec{r}, t) = U_0 \sin \vartheta \bar{e}_\varphi \left\{ \frac{1}{(k_t r)^2} - \frac{i}{k_t r} \right\}, \quad r \geq R > 0 \quad (\text{B.1})$$

$$U_0 = \frac{A k_t^2 e^{-i\omega \left(t - \frac{r}{c_t} \right)}}{4\pi \rho c_t^2},$$

provient du mouvement harmonique en rotation d'une boule rigide de rayon R , disposée à l'origine du système de coordonnées et solidement liée au milieu élastique homogène et isotrope l'entourant. Le point d'appui est l'axe des z ($\theta = 0^\circ$, le rayon R reste constant !). Les composantes non nulles du tenseur des déformations sont :

$$\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = -\frac{1}{2} U_0 k_t \sin \vartheta \left\{ \frac{3}{(k_t r)^3} - \frac{3i}{(k_t r)^2} - \frac{1}{k_t r} \right\}, \quad \text{Sp}(\underline{\varepsilon}) = 0 \quad (\text{B.2})$$

dont viennent les composantes non nulles des contraintes

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = -\rho c_t^2 U_0 k_t \sin \vartheta \left\{ \frac{3}{(k_t r)^3} - \frac{3i}{(k_t r)^2} - \frac{1}{k_t r} \right\} \quad (\text{B.3})$$

et

$$\nabla \cdot \underline{\sigma} = -\rho c_t^2 U_0 k_t^2 \sin \vartheta \bar{e}_\varphi \left\{ \frac{1}{(k_t r)^2} - \frac{i}{k_t r} \right\} \quad (\text{B.4})$$

On obtient d'après (B.1), les intensités active et réactive :

$$\bar{I} = I_0 \frac{\sin^2 \vartheta \bar{e}_r}{(k_t r)^2}, \quad I_0 = \frac{1}{2} \omega \rho c_t^2 k_t |U_0|^2 = \frac{|A|^2 k_t^6}{32\pi^2 \rho c_t}, \quad (\text{B.5})$$

$$\nabla \cdot \bar{I} = 0, \quad \nabla \times \bar{I} = -I_0 k_t \frac{\sin(2\vartheta) \bar{e}_\varphi}{(k_t r)^3}, \quad (\text{B.6})$$

$$\bar{Q} = I_0 \sin^2 \vartheta \bar{e}_r \left\{ \frac{3}{(k_t r)^5} + \frac{2}{(k_t r)^3} \right\}, \quad (\text{B.7})$$

$$\nabla \cdot \bar{Q} = -I_0 k_t \sin^2 \vartheta \left\{ \frac{9}{(k_t r)^6} - \frac{2}{(k_t r)^4} \right\}, \quad (\text{B.8})$$

$$\nabla \times \bar{Q} = -I_0 k_t \sin^2(2\vartheta) \bar{e}_\varphi \left\{ \frac{3}{(k_t r)^6} - \frac{2}{(k_t r)^4} \right\},$$

les moyennes temporelles des densités d'énergie cinétique et potentielle :

$$w_{kin} = \frac{I_0 \sin^2 \vartheta}{2c_t} \left\{ \frac{1}{(k_t r)^4} + \frac{1}{(k_t r)^2} \right\}, \quad (\text{B.9})$$

$$w_{pot} = \frac{I_0 \sin^2 \vartheta}{2c_t} \left\{ \frac{9}{(k_t r)^6} + \frac{3}{(k_t r)^4} + \frac{1}{(k_t r)^2} \right\} \quad (\text{B.10})$$

et la densité Lagrangienne moyennée temporellement :

$$\langle L \rangle_t = -\frac{I_0 \sin^2 \vartheta}{2c_t} \left\{ \frac{9}{(k_t r)^6} - \frac{2}{(k_t r)^4} \right\}. \quad (\text{B.11})$$

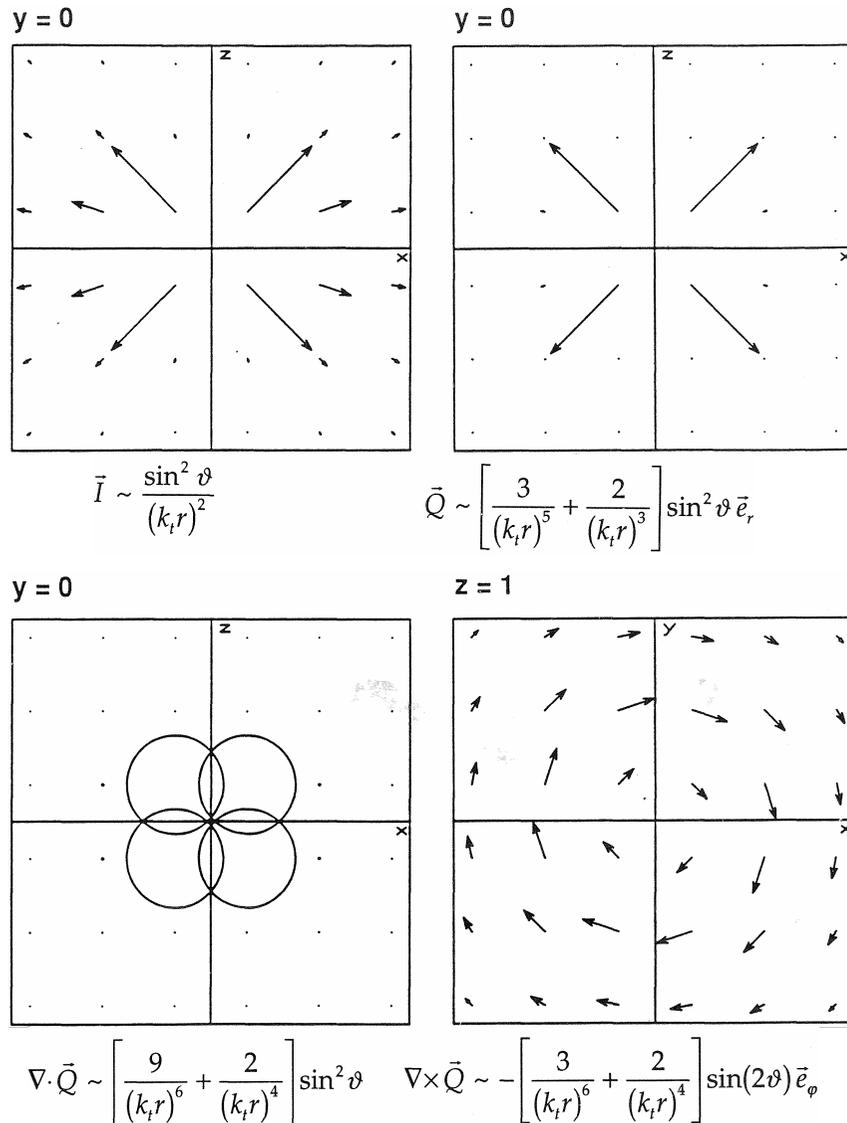


Fig. B.1: Sphère pulsante. \bar{I} : intensité active, \bar{Q} : intensité réactive. Les échelles de représentation des quatre diagrammes sont choisies arbitrairement et différemment. Les rayons des cercles sont proportionnels à $\text{div}(\bar{Q})$.

La vitesse de propagation de l'énergie

$$\bar{c}_e = \frac{\bar{I}}{w} = \frac{c_i \bar{e}_r}{1 + \frac{2}{(k_i r)^2} + \frac{9}{2(k_i r)^4}} \quad (\text{B.12})$$

dépend du rayon, contrairement à ce qui se passe pour une onde plane. La densité de flux d'énergie en fonction du temps ("vecteur de Kirchhoff") s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{S}(\vec{r}, t) = & \bar{I} + I_0 \sin^2 \vartheta \bar{e}_r \left\{ \left[-\frac{6}{(k_i r)^4} + \frac{1}{(k_i r)^2} \right] \cos \left[2\omega \left(t - \frac{r}{c_i} \right) \right] \right. \\ & \left. + \left[\frac{3}{(k_i r)^5} - \frac{4}{(k_i r)^3} \right] \sin \left[2\omega \left(t - \frac{r}{c_i} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

ou encore, pour une amplitude A réelle et après quelques lignes de calcul, s'écrit sous la forme des eq. (2.3.72a), où l'indice i fait référence aux coordonnées sphériques et où seule la composante radiale r est différente de zéro.

Annexe C

Démonstration élémentaire du principe de Rayleigh pour les ondes de Bloch dans un milieu élastique (avec les notations du chapitre 2)

La première partie de la démonstration se déroule comme la dérivation du théorème du viriel en mécanique classique [C.1 pp. 76-78]. On considère la variable auxiliaire

$$g = \rho \dot{\bar{u}} \cdot \bar{u} \quad (\text{C.1})$$

avec la relation temporelle

$$\dot{g} = \rho \ddot{\bar{u}} \cdot \bar{u} + \rho \dot{\bar{u}} \cdot \dot{\bar{u}}, \quad (\text{C.2})$$

qui, combinée à l'équation du mouvement

$$\rho \ddot{\bar{u}} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{C.3})$$

peut s'écrire

$$\dot{g} = (\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \bar{u} + 2e_{kin} \quad (\text{C.4})$$

Pour des processus temporellement périodiques à la période T , la variable auxiliaire \bar{g} retrouve la même valeur après l'écoulement d'un temps T :

$$g(t+T) - g(t) = \int_t^{t+T} \dot{g} dt = 0. \quad (\text{C.5})$$

Il s'ensuit, pour la moyenne temporelle de la densité d'énergie cinétique,

$$w_{kin} = \langle e_{kin} \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle (\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \bar{u} \rangle_t. \quad (\text{C.6})$$

Le second membre de cette équation correspond au viriel de Clausius.

Dans l'étape suivante, nous utilisons la loi de Hooke généralisée (2.1.2) avec $\underline{\underline{\varepsilon}}$ = partie symétrique de $\underline{\underline{\text{grad } \mathbf{u}}}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{C.7})$$

de sorte que

$$e_{pot} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (\text{C.8})$$

La notation indicielle est utilisée ci-dessous, pour laquelle, comme en analyse tensorielle, la présence double d'un indice représente une somme implicite, et un indice derrière une virgule signifie une différentiation suivant la composante correspondante du système de coordonnées. D'après (C.6),

$$w_{kin} = -\frac{1}{2} \langle \sigma_{ij,i} u_j \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle (C_{ijkl} \varepsilon_{kl})_{,i} u_j \rangle_t. \quad (\text{C.9})$$

La relation $C_{ijkl} = C_{jilk}$ [2.9] donne

$$\begin{aligned} w_{kin} &= -\frac{1}{2} \langle (C_{ijkl} u_{l,k})_{,i} u_j \rangle_t \\ &= \frac{1}{2} \langle C_{ijkl,i} u_{l,k} u_j + C_{ijkl} u_{l,ik} u_j \rangle_t. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Cela est à comparer avec ($C_{ijkl} = C_{jilk}$)

$$w_{pot} = +\frac{1}{2} \langle C_{ijkl} u_{l,k} u_{j,i} \rangle_t. \quad (\text{C.11})$$

Une onde de Bloch est considérée pour le champ de déplacement :

$$\bar{\mathbf{u}}(\vec{r}, t) = \bar{\mathbf{p}}(\vec{r}) \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] = \bar{\mathbf{p}}(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t). \quad (\text{C.12})$$

Dans une représentation complexe, les équations ci-dessus deviennent, après la formation de moyennes temporelles (la pulsation ω étant réelle)

$$w_{kin} = -\frac{1}{4} \text{Re} \{ C_{ijkl,i} u_{l,k} u_j^* + C_{ijkl} u_{l,ik} u_j^* \}$$

et

$$w_{pot} = +\frac{1}{4} \operatorname{Re}\{C_{ijkl} u_{l,k} u_{j,i}^*\} \quad (\text{C.13})$$

Le champ de déplacement vérifie

$$u_{l,k} = (p_{l,k} + ik_k p_l) \psi, \quad (\text{C.14})$$

$$u_{l,ik} = (p_{l,ik} + i[k_k p_{l,i} + k_i p_{l,k}] - k_k k_i p_l) \psi. \quad (\text{C.15})$$

pour \mathbf{k} réel, $|\boldsymbol{\psi}|^2 = 1$, et on obtient

$$w_{kin} = \frac{1}{4} \operatorname{Re}\{C_{ijkl} (p_{l,k} + ik_k p_l) p_j^* + C_{ijkl} (p_{l,ki} + i[k_i p_{l,k} + k_k p_{l,i}] - k_i k_k p_l) p_j^*\}, \quad (\text{C.16})$$

$$w_{pot} = \frac{1}{4} \operatorname{Re}\{C_{ijkl} (p_{l,k} p_{j,i}^* + i[k_k p_l p_{j,i}^* - k_i p_{l,k} p_j^*] + k_i k_k p_l p_j^*)\}. \quad (\text{C.17})$$

La différence entre ces deux équations se réduit à :

$$w_{pot} - w_{kin} = \frac{1}{4} \operatorname{Re}\{C_{ijkl} (p_{l,k} + ik_k p_l) p_j^* + C_{ijkl} (p_{l,ki} p_j^* + p_{l,k} p_{j,i}^* + ik_k [p_{l,i} p_j^* + p_l p_{j,i}^*])\}. \quad (\text{C.18})$$

Dans la dernière étape, nous considérons une décomposition en série de Fourier des fonctions spatialement périodiques \underline{C} et \boldsymbol{p} :

$$C_{ijkl}(\vec{r}) = \sum_{\lambda} C_{ijkl}^{(\lambda)} \exp[i\vec{G}_{\lambda} \cdot \vec{r}], \quad (\text{C.19})$$

$$p_i(\vec{r}) = \sum_{\mu} p_i^{(\mu)} \exp[i\vec{G}_{\mu} \cdot \vec{r}].$$

Les sommes portent sur tous les points du réseau réciproque. Les différentiations de (C.18) s'expriment alors explicitement :

$$w_{pot} - w_{kin} = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \sum_{\lambda, \mu, \nu} C_{ijkl}^{(\lambda)} p_l^{(\mu)} p_j^{(\nu)*} \{-G_i^{(\lambda)} G_k^{(\mu)} - G_i^{(\lambda)} k_k - G_k^{(\mu)} G_i^{(\mu)} + G_k^{(\mu)} G_i^{(\nu)} - k_k G_i^{(\mu)} + k_k G_i^{(\nu)}\} \exp[i(\vec{G}^{(\lambda)} + \vec{G}^{(\mu)} - \vec{G}^{(\nu)}) \cdot \vec{r}]. \quad (\text{C.20})$$

(14 signes de sommation seraient écrits, dans le détail, pour le second membre de cette équation dans le cas d'un milieu tridimensionnel : 4 sommes sur les indices cartésiens (i, j, k, l), 3×3 sommes sur le réseau réciproque et une somme pour le produit scalaire du facteur exponentiel !). La différence entre les moyennes temporelles de densité d'énergie potentielle et cinétique locales peut tout à fait être différente de zéro ; elle s'annule seulement en moyenne spatiale. Pour montrer cela, nous intégrons la différence sur une cellule de base de la structure périodique. Seuls les termes pour lesquels

$$\vec{G}^{(\lambda)} + \vec{G}^{(\mu)} - \vec{G}^{(\nu)} = 0 \quad (\text{C.21})$$

(c'est-à-dire $\lambda = \nu - \mu$) contribuent à l'intégrale.

En raison de $G^{(v-\mu)} = G^{(v)} - G^{(\mu)}$, le terme entre crochets de (C.20) devient

$$\left\{ -G_i^{(v)} G_k^{(\mu)} + G_i^{(\mu)} G_k^{(v)} - G_i^{(v)} k_k + G_i^{(\mu)} k_k \right. \\ \left. - G_k^{(\mu)} G_i^{(\mu)} + G_k^{(\mu)} G_i^{(v)} - k_k G_i^{(\mu)} + k_k G_i^{(v)} \right\} = 0. \quad (\text{C.22})$$

On prouve de cette façon que

$$\langle \mathcal{W}_{pot} \rangle = \langle \mathcal{W}_{kin} \rangle, \quad (\text{C.23})$$

si le champ de déplacement se compose d'une seule onde de Bloch (C.12).

Annexe D

Matrices symétriques complexes

Au contraire des matrices réelles symétriques et complexes hermitiennes, l'usage de matrices complexes symétriques se rencontre plus rarement. Si, comme à l'habitude, sont considérés des tenseurs de déformations et de contraintes symétriques, on rencontre ce cas en représentation complexe pour une dépendance en temps monofréquentielle. Cette condition de symétrie est par exemple rencontrée dans le paragraphe 2.2 pour l'amplitude des composantes du tenseur complexe des contraintes

$$|\Sigma_{ij}| = |\Sigma_{ji}|, \quad \varphi_{ij} = \arg\{\Sigma_{ij}\} = \varphi_{ji}, \quad (\text{D.1})$$

c'est-à-dire que Σ est symétrique et généralement complexe. On démontre que pour une matrice de 2×2 symétrique générale

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

les valeurs propres et les vecteurs propres de matrices symétriques complexes sont complexes et que les vecteurs propres ne forment pas toujours base orthonormée complète. Le cas $b = 0$ est réglé rapidement : a et c sont les valeurs propres, qui peuvent être complexes, tandis que les vecteurs propres peuvent être choisis réels, comme

$$\bar{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

et former ainsi une base orthogonale complète. Pour $b = 0$, on trouve les valeurs propres

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \left[a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2} \right]. \quad (\text{D.4})$$

À partir de l'équation aux valeurs propres

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

viennent les relations

$$y = \frac{1}{b}(\lambda - a)x \quad (\text{D.6})$$

entre les deux composantes d'un vecteur propre. Sans appliquer une normalisation précise, un vecteur propre peut être représenté par

$$\bar{\eta} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix} \quad (\text{D.7})$$

Un exemple concret avec des valeurs propres complexes est donné par

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1/2} = \frac{1}{2}[i \pm \sqrt{3}], \quad (\text{D.8})$$

$$\bar{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(-i + \sqrt{3}) \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(-i - \sqrt{3}) \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres sont complexes, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas être rendus réels par la multiplication avec un nombre complexe. La relation

$$\bar{\eta}_1 \cdot \bar{\eta}_2 = 0, \quad (\text{D.9})$$

est vérifiée, mais toutefois

$$\bar{\eta}_1 \cdot \bar{\eta}_2^* = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \neq 0. \quad (\text{D.10})$$

Les deux vecteurs propres forment une base complète. La projection des vecteurs unitaires dans les directions x et y est :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} [(\sqrt{3} + i)\bar{\eta}_1 + (\sqrt{3} - i)\bar{\eta}_2], \quad (D.11)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} [\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2].$$

Si l'on considère maintenant le cas $b \neq 0$, les deux valeurs propres convergent vers

$$b = \pm \frac{i}{2}(a - c), \quad (D.12)$$

ce qui conduit, en prenant le signe positif, à

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + c), \quad \bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (D.13)$$

Les deux vecteurs propres convergent vers la même valeur : la base des vecteurs propres est alors incomplète. On peut illustrer par l'exemple

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = i \quad (D.14)$$

la façon dont les vecteurs, qui ne sont pas des vecteurs propres, sont tournés par la matrice \underline{M} :

$$\underline{M} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{M} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (D.15)$$

Le vecteur $(1, i)$ est d'ailleurs lui-même orthogonal ! (les vecteurs de composantes complexes s'appellent occasionnellement des *bivecteurs* [Z.15 annexe A]. Quand un bivecteur est lui-même orthogonal, il est qualifié d'*isotrope*. D'autres définitions et relations sont données dans la référence ci-dessus).

Une condition suffisante pour que des vecteurs propres forment une base complète [D.1 p.17 ; D.2 p.336] est que la matrice soit normale, c'est-à-dire que le produit avec son Hermitienne-conjuguée soit commutatif :

$$\underline{M} \cdot \underline{M}^+ = \underline{M}^+ \cdot \underline{M}. \quad (D.16)$$

Cela est synonyme, pour une matrice symétrique, de

$$\underline{M} \cdot \underline{M}^* = \underline{M}^* \cdot \underline{M}. \quad (D.17)$$

Cette condition n'est toutefois pas nécessaire, comme l'exemple (D.8) le montre

$$\underline{M} \cdot \underline{M}^* = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \underline{M}^* \cdot \underline{M}, \quad (D.18)$$

qui peut aussi servir à se souvenir que le produit de deux matrices symétriques n'est pas forcément symétrique. Le caractère complet de la base des vecteurs propres est garanti lorsque toutes les valeurs propres sont différentes [D.1 p.7 ; D.2 p.338].

Un exemple tridimensionnel instructif est celui représenté par le tenseur des contraintes (2.3.9) d'ondes de cisaillement polarisées circulairement. Les valeurs propres de la matrice

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (D.19)$$

sont toutes nulles, et il n'y a qu'un vecteur propre (parallèle à l'amplitude de la vitesse). En divisant la matrice conformément à la superposition d'ondes de cisaillement polarisées linéairement

$$\underline{N} = \underline{N}_1 + \underline{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.20})$$

on trouve comme valeurs propres et vecteurs propres ceux des composantes partielles des ondes:

$$\underline{N}_1 : \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1.$$

$$\bar{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(D.21)

$$\underline{N}_2 : \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = i, \quad \lambda_6 = -i.$$

$$\bar{\eta}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont différentes les unes des autres, et la base des vecteurs propres est orthogonale et complète. De cette manière, après la normalisation des vecteurs propres, la représentation

$$\underline{N}_1 = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \bar{\eta}_j \bar{\eta}_j, \quad \underline{N}_2 = \sum_{j=4}^6 \lambda_j \bar{\eta}_j \bar{\eta}_j \quad (\text{D.22})$$

peut être utilisée, ce qui n'était pas possible pour la résultante (D.19) de ces matrices, en raison de vecteurs propres inadaptés. On pourrait aussi l'écrire

$$\underline{N} = \sum_{j=1}^6 \lambda_j \bar{\eta}_j \bar{\eta}_j \quad (\text{D.23})$$

Cette représentation n'a toutefois probablement que peu d'avantage par rapport à la représentation élémentaire, dans la base des tenseurs symétriques

$$\underline{N} = \sum_{j=1}^6 \alpha_j \underline{t}_j, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = -1, \quad \alpha_6 = -i,$$

$$\underline{t}_1 = \bar{e}_1 \bar{e}_2, \quad \underline{t}_2 = \bar{e}_2 \bar{e}_2, \quad \underline{t}_3 = \bar{e}_3 \bar{e}_3, \quad (\text{D.24})$$

$$\underline{t}_4 = \bar{e}_1 \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \bar{e}_1, \quad \underline{t}_5 = \bar{e}_1 \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \bar{e}_1, \quad \underline{t}_6 = \bar{e}_2 \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \bar{e}_2$$

qui ne montre que deux termes différents de zéro (où \bar{e}_i sont les vecteurs unitaires du repère cartésien).

Annexe E

Relations de symétrie avec le renversement de la direction de propagation

Par la transformation de Fourier (5.1.12) des équations du mouvement pour un milieu localement isotrope et périodique, on obtient

$$\underline{V}_{ln}(-\vec{k}) = \underline{V}_{l\bar{n}}^*(\vec{k}). \quad (\text{E.1})$$

(le signe négatif d'un indice est ici écrit au-dessus de l'indice, pour éviter la confusion avec une différence entre deux indices ; les propriétés du matériau ρ , λ , μ , ainsi que la pulsation ω et le nombre d'onde \mathbf{k} sont supposés réels). De la relation (5.1.12)

$$\sum_n \left\{ \omega^2(\vec{k})\rho_{l-n} - \underline{V}_{ln}(\vec{k}) \cdot \right\} \vec{p}_n(\vec{k}) = 0 \quad (\text{E.2})$$

vient, pour $-\mathbf{k}$, l'équation

$$\sum_n \left\{ \omega^2(-\vec{k})\rho_{l-n} - \underline{V}_{ln}(-\vec{k}) \cdot \right\} \vec{p}_n(-\vec{k}) = 0, \quad (\text{E.3})$$

qui, combinée à (E.1) donne

$$\sum_n \left\{ \omega^2(-\vec{k})\rho_{l-n} - \underline{V}_{l\bar{n}}^*(\vec{k}) \cdot \right\} \vec{p}_n(-\vec{k}) = 0 \quad (\text{E.4})$$

Les modifications de $l \rightarrow -l$, $n \rightarrow -n$ conduisent en définitive à

$$\sum_n \left\{ \omega^2(-\vec{k})\rho_{n-l} - \underline{V}_{ln}(\vec{k}) \cdot \right\} \vec{p}_{\bar{n}}(-\vec{k}) = 0. \quad (\text{E.5})$$

La formation des complexes conjugués montre que

$$\sum_n \left\{ \omega^2(-\vec{k})\rho_{l-n} - \underline{V}_{ln}(\vec{k}) \cdot \right\} \vec{p}_{\bar{n}}^*(-\vec{k}) = 0. \quad (\text{E.6})$$

L'identification de (E.6) et (E.2) montre deux systèmes d'équations identiques,

à l'exception du signe des valeurs propres et des vecteurs propres recherchés. En établissant la correspondance dans la numérotation des valeurs propres et une même normalisation des vecteurs propres, il est par conséquent obtenu

$$\vec{p}_n(-\vec{k}) = \vec{p}_{\bar{n}}^*(\vec{k}), \quad (\text{E.7})$$

$$\omega^2(-\vec{k}) = \omega^2(\vec{k}). \quad (\text{E.8})$$

De (E.7), il résulte

$$\vec{p}_{-\vec{k}}(\vec{r}) = \vec{p}_{\vec{k}}^*(\vec{r}). \quad (\text{E.9})$$

Cela signifie que la partie réelle de $\mathbf{p}_k(\mathbf{r})$ est une fonction paire de \mathbf{k} , et la partie imaginaire une fonction impaire.

*Bibliographie**(les titres en allemand sont traduits)*

- [1.1] G. Kirchhoff: Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik. (*Conférences sur la physique mathématique : Mécanique*) Teubner, Leipzig 1877.
- [1.2] A. D. Pierce: Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications. Acoustical Society of America, Woodbury, New York 1989.
- [1.3] J. D. Jackson: Classical Electrodynamics. Wiley, New York 1962.
- [1.4] F. J. Fahy: Sound Intensity. Elsevier Applied Science, London 1989.
- [1.5] D. U. Noiseux: Measurement of power flow in uniform beams and plates. J. Acoust. Soc. Am. 47 (1970) 238-247.
- [1.6] G. Pavić : Measurement of structure-borne wave intensity, Part I: Formulation of the methods. J. Sound Vib. 49 (1976) 221-230.
- [1.7] J. W. Verheij: Cross spectral density methods for measuring structure-borne power flow on beams and pipes. J. Sound Vib. 70 (1980) 133-139.
- [1.8] P. Rasmussen, G. Rasmussen: Intensity measurements in structures. Proc. 11th International Congress on Acoustics, Paris 1983, Vol. 6, p. 231-234.
- [1.9] G. Pavić : Structural surface intensity: An alternative approach in vibration analysis and diagnosis. J. Sound Vib. 115 (1987) 405-422.
- [1.10] Proc. Recent Developments in Acoustic Intensity Measurements. Centre Technique des Industries Mecaniques, Senlis (France) 1981.
- [1.11] Proc. 2nd Int. Congress on Acoustic Intensity; Measurement techniques and applications. Centre Technique des Industries Mecaniques, Senlis (France) 1985.
- [1.12] Proc. 3rd Int. Congress on Intensity Techniques; Structural intensity and vibrational energy flow. Centre Technique des Industries Mecaniques, Senlis (France) 1990.
- [1.13] P. Kruppa: Measurement of structural intensity in building constructions. Appl. Acoust. 19 (1986) 61-74.
- [1.14] W. Maysenhölder, W. Schneider: Entwicklung eines Meßverfahrens zur Lokalisierung von Körperschallbrücken in mehrschaligen Wänden. (*Développement d'une méthode de mesure pour localiser les ponts acoustiques dans les parois multicouche.*) Fraunhofer-Institut für Bauphysik - IBP (Hrsg.). Stuttgart, 1987. (IBP-Bericht BS 166/87).
- [1.15] W. Maysenhölder, W. Schneider: Sound bridge localization in buildings by structure-borne sound intensity measurements. Acustica 68 (1989) 258-262.
- [1.16] W. Maysenhölder: Körperschallausbreitung in Gebäuden - Untersuchungsmöglichkeiten mit einem Intensitätsmessverfahren. (*Propagation des vibrations dans les bâtiments - potentialités d'une méthode de mesure intensimétrique.*) Bauphysik 10 (1988) H. 4, 117-120.
- [1.17] J. Mohr, W. Maysenhölder: Schallbrückenlokalisierung bei schwimmenden Estrichen. (*Localisation de ponts acoustiques sur une dalle flottante*) Fraunhofer-Institut für Bauphysik - IBP - (Hrsg.). Stuttgart: IRB-Vlg., 1988. (IBP-Mitteilung; 167).
- [1.18] J. E. Ffowcs Williams: Dear Editor... Acustica 72 (1990) 79.
- [2.1] A. Sommerfeld: Vorlesungen über Theoretische Physik, Band 11: Mechanik der deformierbaren Medien. Bearbeitet und ergänzt von E. Fues und E. Kröner. Nachdruck der 6. Auflage, (*Conférences sur la physique théorique, volume II : Mécanique des milieux*)

- déformables. Travail et compléments de E. Fues et E. Kröner. Reproduction de la 6ème édition*), Harri Deutsch, Thun 1978.
- [2.2] W. Weizel: Lehrbuch der theoretischen Physik, Band I. (*Manuel de physique théorique, volume I*) Springer-Verlag, Berlin 1965.
- [2.3] J. Malecki: Physical Foundations of Technical Acoustics. Pergamon Press, Oxford 1969.
- [2.4] B. A. Auld: Acoustic Fields and Waves in Solids. 2 Vols. New York 1973.
- [2.5] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band VII: Elastizitätstheorie. (*Physique théorique, Volume VII : Théorie de l'élasticité*) Akademie-Verlag, Berlin 1975.
- [2.6] J. D. Achenbach: Wave Propagation in Elastic Solids. NorthHolland, Amsterdam 1984.
- [2.7] E. Becker, W. Bürger: Kontinuumsmechanik. (*Mécanique des milieux continus*) Teubner, Stuttgart 1975.
- [2.8] H. F. Pollard: Sound Waves in Solids. Pion Limited, London 1977.
- [2.9] A. I. Beltzer: Acoustics of Solids. Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [2.10] M. C. Junger, D. Feit: Sound, Structures and Their Interaction. MIT Press, Cambridge, Massachusetts 1986.
- [2.11] J. W. S. Rayleigh: The Theory of Sound. Nachdruck der 2. Auflage von 1894 (2 Bände), Dover Publications, New York 1945.
- [2.12] F. J. Fahy: Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response. Academic Press, London 1985.
- [2.13] L. Cremer, M. Heckl: Structure-Borne Sound: Structural Vibrations and Sound Radiation at Audio Frequencies. Translated and revised by E. E. Ungar. Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [2.14] F. P. Mechel: Schallabsorber, Band I. (*Absorption des vibrations*) Hirzel-Verlag, Stuttgart 1989.
- [2.15] C. J. Bouwkamp: A contribution to the theory of acoustic radiation. Philips Res. Rep. 1 (1946) 251-277.
- [2.16] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. (*Formulaire de mathématiques*) Harri Deutsch, Zürich 1970.
- [2.17] L. Gavrić, X. Carniel, G. Pavić: Structure-borne intensity fields in plates, beams and plate-beam assemblies. In [1.12], p. 223-230.
- [2.18] H. Kutter-Schrader: Einsatz der Schallintensitätsmessung zur Analyse transient emittierender Schallquellen – Grundsätzliche Betrachtungen und Meßbeispiele. (*Application de l'intensimétrie vibratoire à l'analyse transitoire de sources sonores - Considérations fondamentales et exemples de mesure*) Verein Deutscher Ingenieure (Hrsg.): Schalltechnik '88, Aktueller Stand der Intensitätsmeßtechnik. VDI-Berichte 678, VDI-Verlag, Düsseldorf 1988, 207-223.
- [2.19] P. W. Smith, T. J. Schultz, C. I. Malme: Intensity measurement in near fields and reverberant spaces. Bolt, Beranek and Newman, Inc., Report No.1135 (1964).
- [2.20] J.-C. Pascal: Mesure de l'intensité active et réactive dans différents champs acoustiques. In [1.10], p. 11-19.
- [2.21] G. W. Elko, J. Tichy: Measurement of the complex acoustic intensity and the acoustic energy density. Proc. Inter-Noise '84 Honolulu, USA (1984) 1061-1064.
- [2.22] J.-C. Pascal: Structure and patterns of acoustic intensity fields. In [1.11], p. 97-104.
- [2.23] J.-C. Pascal, J. Lu: Advantage of the vectorial nature of acoustic intensity to describe sound fields. Proc. Inter-Noise '84, Honolulu, USA (1984), 1111-1114.

- [2.24] J.-C. Pascal, C. Carles: Systematic measurement errors with two microphone sound intensity meters. *J. Sound Vib.* 83 (1982) 53-65.
- [2.25] J. A. Mann 111, J. Tichy, A. J. Romano: Instantaneous and timeaveraged energy transfer in acoustic fields. *J. Acoust. Soc. Am.* 82 (1987) 17-30.
- [2.26] W. Maysenhölder: Some didactical and some practical remarks on free plate waves. *J. Sound Vib.* 118 (1987) 531-538.
- [2.27] E. Kröner: Vorlesung über Mechanik (*conférence de mécanique*), Teil IIb. Universität Stuttgart 1970.
- [2.28] D. Quinlan: Adaptation of the four channel technique to the measurement of power flow in structures. In [1.11], p. 227-234.
- [2.29] D. Quinlan: Measurement of power flow and other energy quantities within plates. *Proc. Inter-Noise '85, München* (1985) 1259-1262.
- [2.30] D. Quinlan: Measurement of Complex Intensity and Potential Energy Density in Structural Bending Waves. Masters Thesis in Acoustics, The Pennsylvania State University, USA, 1985.
- [2.31] J. W. S. Rayleigh: On progressive waves. *Proc. London Math. Soc.* 9 (1877) 21, réimprimé en [2.11], Vol.1, p. 475-480.
- [2.32] G. F. J. Temple, W. G. Bickley: *Rayleigh's Principle and Its Applications to Engineering*. Oxford University Press, London 1933.
- [2.33] A. D. Pierce: The natural reference wavenumber for parabolic approximations in ocean acoustics. *Comp. Maths. with Appls.* 11 (1985) 831-841.
- [2.34] M. J. Lighthill: Group velocity. *J. Inst. Maths. Appls.* 1 (1965) 1-28.
- [2.35] M. A. Biot: General theorems on the equivalence of group velocity and energy transport. *Phys. Rev.* 105 (1957) 1129-1137.
- [2.36] G. B. Whitham: A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian. *J. Fluid Mech.* 22 (1965) 273-283.
- [2.37] G. Pavic: Energy flow induced by structural vibrations of elastic bodies. In [1.12], p. 21-28.
- [2.38] V. D. Belov, S. A. Rybak, B. D. Tartakovskii: Propagation of vibrational energy in absorbing structures. *Sov. Phys. Acoust.* 23 (1977) 115-119.
- [2.39] I. A. Butlitskaya, A. I. Vyalyshev, B. D. Tartakovskii: Propagation of vibrational and acoustic energy along a structure with losses. *Sov. Phys. Acoust.* 29 (1983) 333-334.
- [2.40] A. S. Nikiforov: Estimating the intensity of structure-borne noise in ribbed structures. In [1.12], p. 53-56.
- [2.41] O. Bouthier, R. Bernhard, C. Wohlever: Energy and structural intensity formulations of beam and plate vibrations. In [1.12], p. 37-44.
- [2.42] Y. Lase, L. Jezequel: Analysis of a dynamic system based on a new energetic formulation. In [1.12], p. 145-150.
- [2.43] G. Maidanik, J. Dickey: On the relationship between energy density and net power (intensity) in coupled one-dimensional dynamic systems. In [1.12], p. 151-156.
- [3.1] I. N. Sneddon (ed.): *Encyclopaedic Dictionary of Mathematics for Engineers and Applied Scientists*. Pergamon Press, Oxford 1976.
- [3.2] A. S. Besicovitch: *Almost Periodic Functions*. Dover Publications, New York 1954.
- [3.3] H.-S. Tuan: On bulk waves excited at a groove by Rayleigh waves. *J. Appl. Phys.* 46 (1975) 36-41.
- [3.4] S. V. Biryukov: Rayleigh-wave scattering by two-dimensional surface corrugations in oblique incidence. *Sov. Phys. Acoust.* 26 (1980) 272-276.

- [3.5] S. R. Seshadri: Energy transport velocity of surface tic waves. J. Appl. Phys. 54 (1983) 1699-1703.
- [3.6] W. Maysenhölder: Rigorous computation of plate-wave intensity. Acustica 72 (1990) 166-179.
- [3.7] T. R. Meeker, A. H. Meitzler: Guided wave propagation in elongated cylinders and plates. In: W. P. Mason (ed.): Physical Acoustics, Vol. 1A, Academic Press, New York 1964, p. 111-167.
- [3.8] J. Spanier, K. B. Oldham: An Atlas of Functions. Hemisphere Publishing Corporation, Washington 1987.
- [3.9] M. Abramowitz, I. A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, New York, eighth Dover Printing (o. J.).
- [3.10] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik: Table of Integrals, Series and Products. Academic Press Orlando 1980.
- [3.11] D. C. Gazis: Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. I. Analytical Foundation. J. Acoust. Soc. Am. 31 (1959) 568-573.
- [3.12] A. D. Pierce: Structural intensity and vibrational energy flow on inhomogeneous shells of arbitrary shape. In [1.12] p. 121-128.
- [3.13] F. I. Niordson: Shell Theory. North-Holland, Amsterdam 1985.
- [3.14] G. Pavić: Vibrational energy flow in elastic circular cylindrical shells. J. Sound Vib. 142 (1990) 293-310.
- [3.15] E. G. Williams: Structural intensity in thin cylindrical shells. J. Acoust. Soc. Am. 89 (1991) 1615-1622.
- [3.16] J. Schwarte: Automatische Herleitung von Näherungsformeln für Schalenschwingungen. (*Dérivation automatique de formules approchées pour les vibrations de coque*) Z. angew. Math. Mech. 71 (1991) T91-T94.
- [4.1] C. Teodosiu: Elastic Models of Crystal Defects. Springer-Verlag, Berlin 1982.
- [4.2] G. Leibfried, N. Breuer: Point Defects in Metals I. Introduction to the Theory. Springer-Verlag, Berlin 1978.
- [4.3] P. S. Theocaris, T. P. Philippidis: Spectral decomposition of compliance and stiffness fourth-rank tensors suitable for orthotropic materials. Z. angew. Math. Mech. 71 (1991) 161-171.
- [4.4] J. B. Boehler (ed.): Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics. Springer-Verlag, Wien 1987.
- [4.5] M. J. P. Musgrave: Elastic waves in anisotropic media. In: L. N. Sneddon (ed.): Progress in Solid Mechanics, Vol. I. North-Holland, Amsterdam 1961, p. 61-85.
- [4.6] R. F. S. Hearmon: An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity. Oxford University Press 1961.
- [4.7] J. L. Synge: Elastic waves in anisotropic media. J. Math. Phys. 35 (1957) 323-334.
- [4.8] W. Maysenhölder: The Eshelby factor for cubic crystals with arbitrary elastic anisotropy. Phys. Lett. 100A (1984) 289-292.
- [4.9] K. Helbig, M. Schoenberg: Anomalous polarization of elastic waves in transversely isotropic media. J. Acoust. Soc. Am. 81 (1987) 1235-1245.
- [4.10] P. C. Waterman: Orientation dependence of elastic waves in single crystals. Phys. Rev. 113 (1959) 1240-1253.
- [4.11] A. N. Norris: A theory of pulse propagation in anisotropic elastic solids. Wave Motion 9 (1987) 509-532.
- [4.12] R. Stoneley: The propagation of surface waves in a cubic crystal. Proc. Roy. Soc. Lond. A232 (1955) 447-458.
- [4.13] G. W. Farnell: Properties of elastic surfaces waves. In: W. P. Mason, R. N. Thurston (eds.): Physical Acoustics, Vol. VI. Academic Press, New York 1970.
- [4.14] I. A. Viktorov: Rayleigh and Lamb Waves. Plenum Press, New York 1967.

- [4.15] S. A. Gundersen, L. Wang, J. Lothe: Secluded supersonic elastic surface waves. *Wave Motion* 14 (1991) 129-143.
- [4.16] R. M. Taziev: Dispersion relation for acoustic waves in an anisotropic elastic halfspace. *Sov. Phys. Acoust.* 35 (1989) 535-538.
- [4.17] J. L. Synge: Flux of energy for elastic waves in anisotropic media. *Proc. Roy. Irish Acad.* A58 (1956) 13-21.
- [4.18] I. Abubakar: Free vibrations of a transversely isotropic plate. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 15 (1962) 129-136.
- [4.19] S. A. Markus: Low-frequency approximations for zero-order normal modes in anisotropic plates. *Sov. Phys. Acoust.* 33 (1987) 634-636.
- [5.1] W. T. Thomson: *Theory of Vibration with Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (USA) 1981.
- [5.2] C. Kittel: *Einführung in die Festkörperphysik. (Introduction à la physique des solides)* Oldenbourg, München, und Wiley, Frankfurt a. M. 1973.
- [5.3] C. Kittel: *Quantum Theory of Solids*. Wiley, New York 1963.
- [5.4] J.M. Ziman: *Prinzipien der Festkörpertheorie. (principes de la théorie des corps solides)* Harri Deutsch, Zürich 1975.
- [5.5] F. Bloch: Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern. (*Mécanique quantique des électrons dans les réseaux cristallins*) *Z. Physik*, 52 (1928) 555-600.
- [5.6] G. Floquet: Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Ann. Ecole Norm. Ser. 2*, 12 (1883) 47-89.
- [5.7] L. Brillouin: *Wave Propagation in Periodic Structures*. Dover Publications, New York 1953.
- [5.8] P. Sheng, R. Tao: First-principles approach for effective elastic-moduli calculation: Application to continuous fractal structure. *Phys. Rev. B* 31 (1985) 6131-6133.
- [5.9] R. Tao, P. Sheng: First-principle approach to the calculation of elastic moduli for arbitrary periodic composites. *J. Acoust. Soc. Am.* 77 (1985) 1651-1658.
- [5.10] W. Maysenhölder: *Theoretische Grundlagen für die Körperschallausbreitung in gemauerten Wänden (Teil 1). (Bases théoriques de la propagation vibratoire dans les parois maçonnées (partie 1))* Fraunhofer-Institut für Bauphysik - IBP - (Hrsg.). Stuttgart, 1988. (IBP-Bericht BS 194/88).
- [5.11] J. L. Ericksen, D. Kinderlehrer, R. Kohn, J.-L. Lions (eds.): *Homogenization and Effective Moduli of Materials and Media. The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Vol. 1*, Springer-Verlag, New York 1986.
- [5.12] E. Sanchez-Palencia, A. Zaoui (eds.): *Homogenization Techniques for Composite Media. Lectures delivered at the CISM International Center for Mechanical Sciences, Udine, Italy, July 1-5, 1985. Lecture Notes in Physics 272*, Springer-Verlag, Berlin 1987.
- [5.13] W. Maysenhölder: Körperschallintensitäten und –energiedichten in periodischen Medien. (*Intensités vibratoires et densités d'énergie dans les milieux périodiques*) *Fortschritte der Akustik DAGA '89*, Bad Honnef: DPG-GmbH 1989, 463-466.
- [5.14] W. Maysenhölder: Körperschallintensitäten und –energiedichten in periodischen Medien. (*Intensités vibratoires et densités d'énergie dans les milieux périodiques*) Fraunhofer-Institut für Bauphysik - IBP - (Hrsg.). Stuttgart: IRB-Vlg., 1989. (IBP-Mitteilung; 187).
- [5.15] W. Maysenhölder: Analytische Berechnung der Schallgeschwindigkeit in eindimensionalen periodischen Medien für den Grenzfall tiefer Frequenzen. (*Calcul analytique de la vitesse sonore dans les milieux périodiques unidimensionnels dans le cas*

- limite des basses fréquences*) Fortschritte der Akustik DAGA '90, Bad Honnef: DPG-GmbH; Wien: IAP-TU 1990, 647-650.
- [5.16] C.-T. Sun, J. D. Achenbach, G. Herrmann: Continuum theory for a laminated Medium. *J. Appl. Mech.* 35 (1968) 467-475.
- [5.17] W. Maysenhölder: Erster experimenteller Nachweis eines Sperrbandes für Dickenschwingungen in einer gemauerten Wand. (*Première mise en évidence d'un volume de contrôle pour des oscillations de volume dans une paroi maçonnée*) Fraunhofer-Institut für Bauphysik - IBP - (Hrsg.). Stuttgart, 1991. (IBP-Bericht B-BA 3/1991).
- [6.1] L. Gavrić, G. Pavić: Computation of structural intensity in beam-plate structures by numerical modal analysis using FEM. In [1.12], p. 207-214.
- [6.2] S. A. Hambric: Influence of different wave motion types on finite element power flow calculations. In [1.12], p. 215-222.
- [6.3] G. Rosenhouse: Acoustic wave propagation in bent thin-walled wave guides. *J. Sound Vib.* 67 (1970) 469-486.
- [6.4] G. Rosenhouse, H. Ertel: Theoretical models for investigation of sound transmission through isolation layers in staircase systems. *Appl. Acoust.* 16 (1983) 51-66.
- [6.5] G. Rosenhouse, F. P. Mechel: The Application of the Wave Coupling Method for Analysis of the Effect of Joints on Sound Transmission in Buildings. Fraunhofer-Institut für Bauphysik - IBP(Hrsg.). Stuttgart, 1984. (IBP-Bericht BS 95/84).
- [6.6] W. Maysenhölder: Swinging Graph. Unveröffentlichtes FORTRAN-Programm. Fraunhofer-Institut für Bauphysik, Stuttgart 1986.
- [6.7] D. W. Miller, A. v. Flotow: A travelling wave approach to power flow in structural networks. *J. Sound Vib.* 128 (1989) 145-162.
- [6.8] J. L. Horner, R. G. White: Prediction of vibrational power transmission through jointed beams. *Int. J. Mech. Sciences* 32 (1990) 215-223.
- [6.9] J. L. Horner, R. G. White: Prediction of vibrational power transmission through bends and joints in beam-like structures. *J. Sound Vib.* 147 (1991) 87-103.
- [6.10] D. Lyon: Statistical Energy Analysis. The M.I.T. Press, Cambridge MA (USA) 1975.
- [6.11] F. J. Fahy, R. G. White: Statistical energy analysis and vibrational power flow. In [1.12], p. 29-34.
- [6.12] M. Y. Jaric (ed.): Aperiodicity and Order. Academic Press, Boston. Vol.1: Introduction to Quasicrystals (1988) Vol.2: Introduction to the Mathematics of Quasicrystals (1989)
- [6.13] M. Y. Jaric, S. Lundqvist (eds.): Proceedings of the Anniversary Adriatico Research Conference on Quasicrystals, ICTP, Trieste, Italy, 1989. World Scientific, Singapore 1990.
- [6.14] B. B. Mandelbrot: The Fractal Geometry of Nature. W.B. Freeman and Company, New York 1983.
- [6.15] S.I. Rokhlin, T. K. Bolland, L. Adler: Reflection and refraction of elastic waves on a plane interface between two generally anisotropic media. *J. Acoust. Soc. Am.* 79 (1986) 906-918.
- [6.16] J. N. Reddy: On refined computational models of composite laminates. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 27 (1989) 361-382.
- [6.17] A. H. Nayfeh: The general problem of elastic wave propagation in multi-layered anisotropic media. *J. Acoust. Soc. Am.* 89 (1991) 1521-1531.
- [6.18] W. T. Thomson: Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *J. Appl. Phys.* 21 (1950) 89-93.
- [6.19] J. H. M. T. van der Hijden: Propagation of Transient Elastic Waves in Stratified Anisotropic Media. North-Holland, Amsterdam 1987.

- [6.20] I. Lerche: Acoustic head-wave arrival times in anisotropic media. *J. Acoust. Soc. Am.* 82 (1987) 319-323.
- [6.21] A. N. Norris: Gaussian wave packets in linear and nonlinear anisotropic solids. In: M. F. McCarthy, M. A. Hayes (eds.): *Elastic Wave Propagation*. North-Holland, Amsterdam 1989, p. 491-504.
- [6.22] W. M. Ewing, W. S. Jardetzky, F. Press: *Elastic Waves in Layered Media*. McGraw-Hill, New York 1957.
- [6.23] L. M. Brekhovskikh: *Waves in Layered Media*. Academic Press, New York 1960; Second Edition 1980.
- [6.24] L. M. Brekhovskikh, O.A. Godin: *Acoustics of Layered Media I: Plane and Quasi-Plane Waves*. Springer-Verlag, Berlin 1990.
- [6.25] Z. Kotulski: Wave propagation in a randomly stratified medium. *J. Sound Vib.* 128 (1989) 195-208.
- [6.26] R. M. Christensen: *Mechanics of Composite Materials*. Wiley, New York 1979.
- [6.27] J. R. Willis: Variational and related methods for the overall properties of composite materials. In: C.-S. Yih (ed.): *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 21, Academic Press, New York 1981, p.1-78.
- [6.28] E. Kröner: Bounds for effective elastic moduli of disordered materials. *J. Mech. Phys. Solids* 25 (1977) 137-155.
- [6.29] Y. Kantor, D. Bergmann: Improved rigorous bounds on the effective elastic moduli of a composite material. *J. Mech. Phys. Solids* 32 (1984) 41--62.
- [6.30] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland, Amsterdam 1978.
- [6.31] F. Devries, H. Dumontet, G. Duvaut, F. Lene: Homogenization and damage for composite structures. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 27 (1989) 285-298.
- [6.32] P. Sheng: Microstructures and physical properties of composites. In [5.11], p. 196-227.
- [6.33] G. C. Gaunaurd, W. Wertman: Comparison of effective medium theories for inhomogeneous continua. *J. Acoust. Soc. Am.* 85 (1989) 541-554.
- [6.34] G. C. Gaunaurd, W. Wertman: Comparison of effective medium and multiple scattering theories of predicting the ultrasonic properties of dispersions: A reexamination of results. *J. Acoust. Soc. Am.* 87 (1990) 2246-2248.
- [6.35] D. Sornette: Acoustic waves in random media. I. Weak disorder regime. *Acustica* 67 (1989) 199-215.
- [6.36] D. Sornette: Acoustic waves in random media. H. Coherent effects and strong disorder regime. *Acustica* 67 (1989) 251-265.
- [6.37] D. Sornette: Acoustic waves in random media. III. Experimental situations. *Acustica* 68 (1989) 15-25.
- [6.38] P. W. Anderson: Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.* 109 (1958) 1492-1505.
- [6.39] C. H. Hodges: Confinement of vibration by structural irregularity. *J. Sound Vib.* 82 (1982) 411-424.
- [6.40] C. H. Hodges, J. Woodhouse: Vibration isolation from irregularity in a nearly periodic structure: Theory and measurements. *J. Acoust. Soc. Am.* 74 (1983) 894-905.
- [6.41] C. H. Hodges, J. Woodhouse: Confinement of vibration by one-dimensional disorder, I: Theory of ensemble averaging. *J. Sound Vib.* 130 (1989) 237-251.
- [6.42] C. H. Hodges, J. Woodhouse: Confinement of vibration by one-dimensional disorder, 11: A numerical experiment on different ensemble averages. *J. Sound Vib.* 130 (1989) 253-268.
- [6.43] S. He, J. D. Maynard: Detailed measurements of inelastic scattering in Anderson localization. *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986) 3171-3174.

- [6.44] C. Pierre: Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *J. Sound Vib.* 126 (1988) 485-502.
- [6.45] C. Pierre: Weak and strong vibration localization in disordered structures: a statistical investigation. *J. Sound Vib.* 139 (1990) 111-132.
- [6.46] G. M. Romack, R. L. Weaver: Monte Carlo studies of multiple scattering of waves in one dimensional random media. *J. Acoust. Soc. Am.* 87 (1990) 487-494.
- [6.47] C. Depollier, J. Kergomard, F. Laloe: Localisation d'Anderson des ondes dans les réseaux acoustiques unidimensionnels aléatoires. *Ann. Phys. Fr.* 11 (1986) 457-492.
- [6.48] J.-P. Desideri, L. Macon, D. Sornette: Observation of critical modes in quasiperiodic systems. *Phys. Rev. Lett.* 63 (1989) 390-393.
- [6.49] L. Macon, J.-P. Desideri, D. Sornette: Surface acoustic waves in a simple quasiperiodic system. *Phys. Rev. B* 40 (1989) 3605-3615.
- [6.50] R. L. Weaver: Anderson localization of ultrasound. *Wave Motion* 12 (1990) 129-142.
- [6.51] W. Xue, P. Sheng, Q.-J. Chu, Z.-Q. Zhang: Localization transition in Media with anisotropic diagonal disorder. *Phys. Rev. Lett.* 63 (1989) 2837-2840.
- [6.52] P. Sheng (ed.): *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media.* World Scientific, Singapore 1989.
- [6.53] S. I. Rokhlin, T. K. Bolland, L. Adler: High-frequency ultrasonic wave propagation in polycrystalline materials. *J. Acoust. Soc. Am.* 91 (1992) 151-165.
- [6.54] E. A. Skelton, J. H. James: Acoustics of anisotropic planer layered media. *J. Sound Vib.* 152 (1992) 157-174.
- [6.55] A. A. Ruffa: Acoustic wave propagation through periodic bubbly liquids. *J. Acoust. Soc. Am.* 91 (1992) 1-11.
- [C.1] H. Goldstein: *Klassische Mechanik. (Mécanique classique)* Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a. M. 1972.
- [D.1] J. Stoer, R. Bulirsch: *Einführung in die numerische Mathematik II. (Introduction aux mathématiques numériques)* Springer Verlag, Berlin 1978.
- [D.2] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling: *Numerical Recipes; The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press, Cambridge 1986.
- [Z.1] Proc. 4th Int. Congress on Intensity Techniques; Structural Intensity and Vibrational Energy Flow. Centre Technique des Industries Mecanique, Senlis (France) 1993.
- [Z.2] Y. I. Bobrovnskii: Determination of structure-borne energy flow from surface conditions. In [Z.1], p. 3-12.
- [Z.3] K. Uller: Grundlegung der Kinematik einer physikalischen Welle von elementarer Schwingungsform. (*Base cinématique d'une onde physique de forme élémentaire*) I. *Physik. Zeitschr.* XVII (1916) 168-172.
- [Z.4] J. Linjama: Characterization of structural vibration. Field descriptors based on energy density and intensity. VTT Publications 152, Technical Research Centre of Finland, Espoo 1993.
- [Z.5] J. Linjama: Bending wave field descriptors - additional information from the two-transducer intensity measurement. In [Z.1], p.289-296.
- [Z.6] K. S. Alfredsson: Influence of local damping on active and reactive mechanical power flow. In [Z.1], p. 71-78.
- [Z.7] A. Carcaterra, A. Sestieri: Power flow investigation in dynamic continuous systems. In [Z.1], p. 355-362.

- [Z.8] A. Carcaterra, A. Sestieri: An approximate power flow solution for one-dimensional dynamic structures. In [Z.1], p. 363-370.
- [Z.9] I. Tolstoy, E. Usdin: Wave propagation in elastic plates: low and high mode dispersion. *J. Acoust. Soc. Am.* 29 (1957) 37-42.
- [Z.10] L. Wang, J. Lothe: Simple reflection in anisotropic elastic media and its relation to exceptional waves and supersonic surface waves. I: General theoretical considerations. *Wave Motion* 16 (1992) 89-99.
- [Z.11]] L. Wang, J. Lothe: Simple reflection in anisotropic elastic media and its relation to exceptional waves and supersonic surface waves. II: Examples. *Wave Motion* 16 (1992) 101-112.
- [Z.12]] M. A. G. Silva: Study of pass and stop bands of some periodic composites. *Acustica* 75 (1991) 62-68.
- [Z.13] M. M. Sigalas, E. N. Economou: Elastic and acoustic wave band structure. *J. Sound Vib.* 158 (1992) 377-382.
- [Z.14] A. M. B. Braga, G. Herrmann: Floquet waves in anisotropic periodically layered composites. *J. Acoust. Soc. Am.* 91 (1992) 1211-1227.
- [Z.15] P. Lancelur, H. Ribeiro, J.-F. DeBellevail: The use of inhomogeneous waves in the reflection-transmission problem at a plane interface between two anisotropic media. *J. Acoust. Soc. Am.* 93 (1993) 1882-1892.
- [Z.16] E. V. Glushkov, N. V. Glushkova, E. V. Kirillova: Acoustic energy flux lines in an elastic layer. *Sov. Phys. Acoust.* 36 (1990) 225-227.
- [Z.17] V. A. Babeshko, E. V. Glushkov, N. V. Glushkova: Energy vortices and backward fluxes in elastic waveguides. *Wave Motion* 16 (1992) 183-192.
- [Z.18] P. W. Anderson: The question of classic allocalization: a theory of white paint? *Phil. Mag.* B52 (1985) 505-509.

Index des noms propres

Abramowitz
Abubakar
Achenbach
Anderson
Auld

Beltzer
Bessel
Biot
Bloch
Bobrovnitskii
Bouwkamp
Braga
Brillouin

Cagniard-de-Hoop
Carcatera
Carniel
Clausius
Cremer
Christoffel

Dirac

Economou
Elko
Euler

Fahy
Farnell
Ffowcs Williams
Floquet
Fourier
Gaunard

Gavrić
Gradshteyn
Green

Hamilton
Hashin
Heaviside
Heckl
Helbig
Helmholtz
Herrmann
Hilbert
Hodges

Ioffe

James
Junger

Kirchhoff
Kittel
Kramers
Kronecker
Kronig

Lagrange
Lamb
Landau
Lerche
Lifschitz
Lighthill
Linjama
Love

Markus
Mathieu

Mayer
Mechel
Meeker
Meitzler
Mie
Monte-Carlo
Musgrave

Nayfeh
Niordson
Noiseux
Norris

Oldham
Olson

Pascal
Pavić
Pierce
Pierre
Poisson
Pollard
Poynting

Quinlan

Rasmussen
Rayleigh
Reddy
Regel
Reuss
Reynold
Rosenhouse
Ryzhik

Schoenberg

Schrödinger
Senlis
Sestieri
Sheng
Shtrikman
Sierpiński
Sigalas
Skelton
Sommerfeld
Somette
Spanier
Stegun
Stoke
Stoneley
Synge

Tao
Thomson
Tichy
Tolstoy

Uller
Usdin

van der Hijden
Veit
Verheij
Viktorov
Voigt

Waterman
Wertman
White
Whitham
Williams
Woodhouse