



HAL
open science

Relativité générale (d'après M.Vaugon) et quelques problèmes mathématiques qui en sont issus

Emmanuel Humbert

► **To cite this version:**

Emmanuel Humbert. Relativité générale (d'après M.Vaugon) et quelques problèmes mathématiques qui en sont issus. 2010. hal-00530721v1

HAL Id: hal-00530721

<https://hal.science/hal-00530721v1>

Preprint submitted on 29 Oct 2010 (v1), last revised 30 May 2013 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Relativité générale (d'après M.Vaugon)
et quelques problèmes mathématiques
qui en sont issus.**

Emmanuel Humbert

Institut Élie Cartan de Nancy

Université H. Poincaré de Nancy I

BP 70239

54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy Cedex

ehumbert@iecn.u-nancy.fr

Depuis deux ans, mon ancien directeur de thèse et ami Michel Vaugon a entrepris de comprendre les intuitions physiques qui ont conduit à l'axiomatique de la relativité générale tout en gardant un langage de mathématicien et plus précisément de géomètre. Ses notes, manuscrites, sont à mon sens d'une clarté remarquable et je le remercie chaleureusement de me les avoir fournies. Cela a été l'occasion pour moi de comprendre ces notions, qui m'étaient étrangères bien que mes travaux de recherche aient des liens importants avec la relativité générale. J'ai commencé à écrire ce texte en suivant ses notes, non pas pour améliorer son travail, mais pour m'appropriier ces notions et les traduire dans mon propre langage. D'ailleurs, des cinq premiers chapitres au moins, je ne peux revendiquer qu'une part infime de la forme et quelques remarques. Par la suite, j'ai eu envie de poursuivre son travail et d'étudier quelques problèmes mathématiques provenant de la relativité générale, en les replaçant dans leur cadre physique. En particulier, je présente les équations de contraintes provenant du problème de Cauchy en relativité générale, les problèmes de masse positive et moment-énergie positif provenant de l'étude des systèmes isolés et l'inégalité de Penrose provenant de la conjecture de la censure cosmique.

Ce texte est à bien des égards imprécis : beaucoup de démonstrations ne sont pas écrites, quelques approximations mathématiques y sont faites, les références bibliographiques sont très incomplètes et ma relecture est bien moins sérieuse que si j'avais l'intention de le publier. Mon but est simplement de donner un support à un géomètre qui veut comprendre les bases physiques de la relativité générale dans un langage qui lui est familier.

J'ai essayé dans tout le texte de ponctuer la discussion par des remarques d'ordre "physique". N'étant pas physicien, il est probable que j'ai commis des erreurs. Que tout lecteur plus averti que moi n'hésite pas à me les signaler.

Pour finir, voici quelques références de base pour le lecteur désireux d'approfondir le sujet : d'abord les incontournables livres de Hawking-Ellis [**Haw73**], de Wald [**Wa84**] et de Choquet-Bruhat [**CB09**]. Bien évidemment, la liste est très loin d'être exhaustive. Je voudrais tout de même citer la thèse de N. Vasset [**Va09**] sur laquelle je suis tombé complètement par hasard sur internet et dans laquelle j'ai trouvé de nombreuses informations sur les trous noirs présentées de manière remarquablement claire. Pour ceux qui voudront en savoir plus sur les problèmes mathématiques actuels provenant de la relativité générale, je viens juste de découvrir le preprint de Chruściel, Galloway et Pollack [**CGP10**] qui résume les avancées récentes dans le domaine et qui, même si je n'ai pas encore eu le temps de m'y plonger sérieusement, me paraît particulièrement intéressant.

Table des matières

Chapitre I. Quelques expériences fictives	5
1. Temps et longueurs	5
2. Masse et impulsion	9
3. La formule $E = mc^2$.	13
Chapitre II. Modélisation de l'espace-temps	17
1. En mécanique classique	17
2. En relativité restreinte	19
3. En relativité générale	25
Chapitre III. De la matière dans l'espace-temps	27
1. Particules et fluides	27
2. En mécanique classique	30
3. En relativité restreinte	38
4. En relativité générale	42
5. Complément sur le tenseur d'énergie-impulsion	50
6. Les limites de la relativité générale : l'électromagnétisme	54
7. Énergie et matière sombre	55
Chapitre IV. Le Big-Bang	57
1. Hypothèses	57
2. Traduction mathématique des hypothèses 1, 2 et 3	58
3. Big-bang et Big-Crunch	61
Chapitre V. Étoiles et trous noirs à symétrie sphérique	65
1. Variétés lorentziennes à symétrie sphérique en espace	65
2. L'espace de Schwarzschild	68
3. Trous noirs et trous blancs	72
4. À l'intérieur de l'étoile	75
Chapitre VI. Problème de Cauchy en relativité générale	77
1. Structure causale de l'espace-temps	77
2. Formulation de la relativité générale par conditions initiales	80
3. La méthode conforme	82
4. Une méthode de résolution des équations de contrainte conformes	84
5. Preuve du Corollaire VI.109	90
Chapitre VII. Les systèmes isolés	93
1. Diagramme de Carter-Penrose	93
2. Masse ADM d'un système isolé	98
3. La condition d'énergie dominante	110

4. Le quadrivecteur de moment-énergie	114
5. Masse positive et moment-énergie positif	115
Chapitre VIII. Effondrement gravitationnel et trous noirs	117
1. Singularités de l'espace-temps	117
2. Trous noirs	124
3. Espace-temps de Kerr	129
4. Inégalité de Penrose	134
5. D'où vient cette conjecture ?	134
Annexe A. Quelques précisions sur la géométrie lorentzienne	137
1. Variétés lorentziennes, courbures, géodésiques	137
2. Intégration sur les variétés lorentziennes	139
Annexe. Bibliographie	141

CHAPITRE I

Quelques expériences fictives

Ce chapitre permet de montrer comment à partir d'observations simples, on peut rapidement faire du calcul relativiste et même aboutir à la célèbre formule $E = mc^2$. Son but est uniquement culturel et ne servira pas dans la suite du texte. Le lecteur pressé peut donc commencer la lecture directement au chapitre suivant.

La théorie de la relativité est née d'une observation qui va à l'encontre de toutes nos intuitions : la vitesse de la lumière est la même par rapport à n'importe quel observateur. Imaginons par exemple qu'un photon passe devant un observateur à c km/h. Imaginons qu'un deuxième observateur aille exactement dans la même direction que le photon mais à $(c-1)$ km/h. Pour le sens commun, si ce deuxième observateur mesure la vitesse du photon, il doit trouver 1 km/h. Or, expérimentalement, il est démontré que cet observateur va trouver lui aussi une vitesse de c km/h. En particulier, les lois habituelles de la mécanique classique ne peuvent pas être vraies, d'où la nécessité de trouver un modèle de l'espace-temps qui prenne en compte ce phénomène tout en gardant "approximativement" (c'est-à-dire pour tout ce qui se passe à l'échelle humaine) les lois de la mécanique classique.

Dans ce premier chapitre, on explique comment, avant même de chercher un bon modèle, on peut déduire de cette observation plusieurs conclusions intéressantes grâce à des raisonnements simples.

1. Temps et longueurs

Prenons un observateur A qui se trouve dans un train qui avance à v mètres/seconde par rapport au quai et dont les wagons ont une longueur de l mètres. Prenons aussi un observateur B qui regarde passer le train depuis le quai. Maintenant, supposons qu'un photon parte de l'arrière du wagon et qu'il parcoure ce wagon en un temps de t secondes. Pour l'observateur A , le photon a parcouru l mètres en t secondes soit une vitesse de l/t mètres/seconde. Maintenant, pour B le photon a parcouru en t secondes l mètres plus la distance parcourue par le train en t secondes soit $d = l + vt$. Ainsi pour l'observateur B , le photon va à $(l + vt)/t = l/t + v$ mètres/seconde. Puisqu'on trouve des vitesses différentes pour les deux observateurs alors que l'expérience dit au contraire qu'on doit trouver les mêmes, c'est qu'il y a une erreur dans le raisonnement. En fait, on a considéré que

- (1) le temps mesuré par A et B pour que le photon parcoure le wagon étaient les mêmes (égaux à t).

(2) La longueur du wagon mesurée par A et B était la même.

Pour arriver à un modèle fidèle à la réalité, il faut donc remettre en cause ces deux principes. Bien sûr, ces différences ne se feront sentir qu'à des vitesses élevées. Un observateur humain qui observe ce qui se passe autour de lui ne se rendra pas compte de ces différences de mesure.

Donc, pour la suite, on supposera que le temps entre deux événements ou la longueur d'un objet dépend de l'observateur qui le mesure. Se pose aussi le problème de la simultanéité entre deux événements qui dépendra elle aussi de l'observateur.

Grandeurs conservées quel que soit l'observateur. Comme on l'a expliqué, on doit remettre en cause les notions de temps et de longueur mais on ne doit pas le faire n'importe comment. Par exemple, une longueur mesurée perpendiculairement au déplacement ne doit pas dépendre de l'observateur. En effet, supposons par exemple que ces longueurs se contractent quand la vitesse augmente (un raisonnement analogue se fait si on suppose que les distances s'allongent) et reprenons le cas du train sur lequel se trouve l'observateur A alors que l'observateur B est resté sur le quai.

- Plaçons nous d'abord du point de vue de l'observateur A . Pour lui le train est immobile alors que les rails ont une vitesse v non nulle. Donc la largeur des rails doit être plus petite que l'écartement des roues du train. Autrement dit, les roues du train laissent des traces à l'extérieur des rails.
- Pour l'observateur B , c'est le train qui avance et donc l'écartement de ses roues doit être plus petit que l'écartement des rails : les traces des roues du train doivent être à l'intérieur des rails.

Comme les traces laissées par le train ne peuvent pas être à la fois à l'extérieur et à l'intérieur des rails, c'est que l'écartement des rails (ou des roues du train) doit être le même pour les deux observateurs A et B .

On pourrait imaginer une deuxième expérience pour prouver que les distances mesurées dans le sens du déplacement ne dépendent pas non plus de l'observateur (mais comme on va le voir, ce raisonnement est faux) : les mêmes observateurs A et B ont chacun une règle graduée dans les mains. Au moment où ils se croisent, l'observateur A colle sa règle sur celle de l'observateur B placée dans le sens du déplacement par exemple dans un bac à sable posé sur le quai. Par le même genre de raisonnement que ci-dessus, on peut se dire qu'on arrive à une absurdité (pour B la marque laissée par sa règle dans le sable doit être plus grande que celle de A et inversement). Il y a un problème dans cet argument : pour laisser une marque, l'observateur A doit poser sa règle dans le sable pendant un intervalle de temps certes très court mais non nul. Or pour B , cet intervalle de temps n'est pas le même, il est plus long. En résumé, dans cette expérience, la marque laissée par la règle de A sera plus longue que celle laissée par la règle B mais pour deux raisons différentes : du point de vue de A , parce que sa règle est plus longue et du point de vue de B parce que A a laissé sa règle un certain temps dans le sable.

Temps et distance pour deux observateurs. On va maintenant imaginer deux expériences qui permettent de préciser les différences de mesure de temps et de distance dans le sens du déplacement pour deux observateurs.

- (1) Reprenons toujours nos deux observateurs A (dans le train) et B (sur le quai). Notons v la vitesse du train par rapport au quai. Imaginons qu'un photon fasse un aller-retour (plancher du wagon)-(plafond du wagon). Notons h la hauteur du plafond par rapport au plancher du train (h est la même pour A et B puisque c 'est une distance qui est mesurée perpendiculairement au déplacement).

- A mesure le temps t_A pour cet aller-retour du photon. Pour lui le photon a parcouru la distance de $2h$. Donc la vitesse du photon est $c_1 = \frac{2h}{t_A}$.
- B mesure le temps t_B pour le même trajet. Mais de son point de vue, le photon n'a pas un parcours vertical puisque le train avance. Plus précisément en hauteur il a parcouru $2h$ et horizontalement vt_B . D'après Pythagore, il a parcouru $\sqrt{4h^2 + v^2t_B^2}$ ce qui donne pour le photon une vitesse $c_2 = \frac{\sqrt{4h^2 + v^2t_B^2}}{t_B}$.

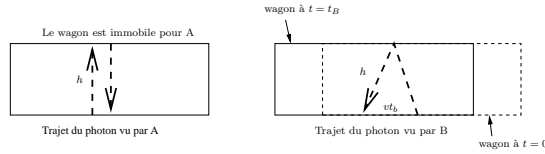


FIG. 1. Calcul du temps mesuré par deux observateurs

Maintenant, comme la vitesse de la lumière est constante par rapport à n'importe quel observateur, on a $c_1 = c_2 = c$ et on trouve que

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{2h}{c} \\ &= \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + v^2t_B^2}} t_B \\ &= \sqrt{1 - \frac{v^2t_B^2}{v^2t_B^2 + 4h^2}} t_B. \end{aligned}$$

Comme $c = \frac{\sqrt{4h^2 + v^2t_B^2}}{t_B}$, on trouve que

$$t_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t_B.$$

On admet donc la règle suivante :

*Règle 1 : Soient deux observateurs A et B qui se déplacent à vitesse constante v l'un par rapport à l'autre. On considère deux événements qui se passent **au même endroit** pour A . Alors si on note respectivement t_A et t_B les temps mesurés entre ces deux événements par A et B , on a*

$$t_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t_B.$$

REMARQUE I.1. Il est très important de noter que ces événements doivent se passer au même endroit pour l'un des observateurs (d'où la nécessité de considérer un aller-retour du photon). Sans cela, la règle dirait aussi que $t_B = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t_A$, ce qui est faux bien sûr. Le point 1 de la Remarque I.2 ci-dessous illustre aussi la nécessité de considérer de tels événements.

Avec le même raisonnement, on peut aussi en déduire une règle avec des hypothèses un peu plus générales, qui nous servirons pour la suite :

*Règle 1' : Soient deux observateurs A et B qui se déplacent à vitesse constante v l'un par rapport à l'autre. On considère deux événements qui se passent à deux endroits X et Y avec (XY) perpendiculaire au mouvement pour A (**attention, cette notion dépend de l'observateur**). Alors si on note respectivement t_A et t_B les temps mesurés entre ces deux événements par A et B, on a $t_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t_B$.*

- (2) Maintenant, considérons que le photon fait un aller-retour (arrière du wagon)-(avant du wagon). Cette fois, la longueur dépend de l'observateur. Notons l_A (resp. l_B) la longueur du wagon mesurée par A (resp. par B) et conservons v pour sa vitesse.

- L'observateur A mesure un temps t_A pour cet aller-retour. La distance parcourue par le photon pendant ce temps est $2l$. Donc sa vitesse est $c = \frac{2l_A}{t_A}$.
- Pour B, séparons le trajet aller du trajet retour. Notons t'_B (resp. t''_B) le temps mesuré par B pour l'aller (resp. le retour). Pour B, la distance parcourue par le photon sur l'aller est $l_B + vt'_B$ (longueur du wagon plus distance parcourue par le wagon pendant le trajet aller). Pour le retour la distance est $l_B - vt''_B$.

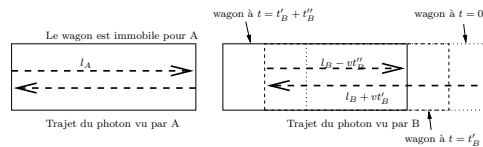


FIG. 2. Calcul des longueurs dans le sens du mouvements mesurées par deux observateurs

On a donc

$$c = \frac{l_B + vt'_B}{t_{B'}} = \frac{l_B - vt''_B}{t_{B''}}.$$

De cette équation, on tire $t'_B = \frac{l_B + vt'_B}{c}$ c'est-à-dire $t'_B = \frac{l_B}{c-v}$. De même, $t''_B = \frac{l_B}{c+v}$. D'après la Règle 1 ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} t_A &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} (t'_B + t''_B) \\ &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) l_B \\ &= \frac{2}{\sqrt{c^2 - v^2}} l_B. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$l_A = \frac{ct_A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} l_B.$$

On en déduit la règle suivante :

*Règle 2 : Soient deux observateurs A et B qui se déplacent l'un par rapport à l'autre à vitesse constante et soit $[PQ]$ un segment **fixe pour A** et parallèle au mouvement. Alors, les distances l_A et l_B entre P et Q mesurées respectivement par A et B sont liées par $l_A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} l_B$.*

REMARQUE I.2.

- (1) Encore une fois, pour appliquer la règle qui lie les temps mesurés par deux observateurs, il faut bien vérifier que ces événements se passent au même endroit pour l'un des observateurs. En effet, dans cette expérience, les temps des trajets aller et retour mesurés par A sont tous les deux de $t_A/2$. En appliquant la règle de comparaison de temps, on a envie de dire que $t_A/2 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'_B$ et $t_A/2 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t''_B$. Cela conduit à $t'_B = t''_B$, ce qui est faux (sinon, la vitesse du photon mesuré par B n'est pas la même sur l'aller et le retour). De même, dans la règle de comparaison des longueurs, il est important que le segment $[PQ]$ mesuré soit fixe par rapport à l'un des observateurs.
- (2) De ces raisonnements, on peut facilement déduire des règles de comparaison de temps lorsque deux événements ne se passent pas au même endroit ou de comparaison de longueur pour un segment quelconque. Ces règles sont appelées *transformations de Lorentz*.

2. Masse et impulsion

En mécanique classique, considérons un objet q de masse m animé dans un repère (c'est-à-dire pour un observateur galiléen donné) d'une vitesse \vec{v} .

DÉFINITION. Le vecteur $\vec{p} := m\vec{v}$ est appelé *quantité de mouvement* ou *impulsion* de l'objet q .

Soit maintenant un système composé de n objets q_1, \dots, q_n de quantités de mouvement respectives $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$. Alors, une loi fondamentale de la dynamique en mécanique classique est

Loi de conservation de quantité de mouvement : *la quantité de mouvement du système défini par $\vec{p} = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_n$ est constante avec le temps. En particulier, elle est conservée lors des chocs entre les objets du système.*

On va supposer que cette loi, basée sur l'expérience, est toujours valide en relativité. Mais pour cela, il va falloir préciser les choses, puisque les notions de temps et de distance sont remises en cause. Dans ce but, nous reprenons nos deux observateurs A (dans le train) et B (sur le quai). Chacun va lancer une pierre sphérique (q_A pour A et q_B pour B) de masse m perpendiculairement au mouvement et avec une vitesse V de manière à ce que les deux pierres se rencontrent. Pour l'observateur B on travaille dans un repère (Bxy) où l'axe (Bx) est parallèle aux rails et (By) est orthogonal aux rails. Pour l'observateur A , on travaille dans le repère (Axy) dont seule l'origine est différente : on prend A à la place de B . Autrement dit, le repère (Axy) se déplace à la vitesse constante v par rapport au repère (Bxy) .

Avant le choc,

– L'observateur A voit la pierre q_A animée de la vitesse (exprimée dans (Axy))

$$\vec{v}_A^A = \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}$$

tandis que l'observateur B voit la même pierre animée de la vitesse (exprimée dans (Bxy))

$$\vec{v}_A^B = \begin{pmatrix} v \\ V' \end{pmatrix}$$

où v est la vitesse du train et V' est à calculer.

– Par symétrie de la situation, l'observateur A voit la pierre q_B animée de la vitesse

$$\vec{v}_B^A = \begin{pmatrix} v \\ -V' \end{pmatrix}$$

tandis que l'observateur B voit la même pierre animée de la vitesse

$$\vec{v}_B^B = \begin{pmatrix} 0 \\ -V \end{pmatrix}$$

(on a bien sûr arbitrairement choisi une orientation des axes).

Calcul de V' : V' est la composante perpendiculaire au train du vecteur vitesse de la pierre q_A vue par B . Regardons le temps que met la pierre q_A pour parcourir une distance l sur l'axe perpendiculaire aux rails (l'axe de y . On oublie les composantes dans l'autre direction). D'après le paragraphe précédent, cette distance ne dépend pas de l'observateur. Notons t_A (resp. t_B) le temps mesuré par A (resp. par B) pour que la pierre parcoure cette distance l . D'après la Règle 1' du paragraphe précédent, on a $t_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t_B$. D'autre part, on a $V = \frac{l}{t_A}$ et $V' = \frac{l}{t_B}$. On

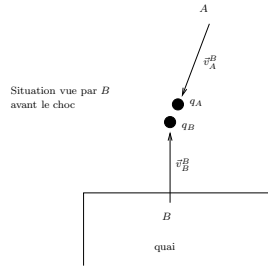


FIG. 3. Quantité de mouvement relativiste

obtient ainsi que

$$V' = V \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (\text{I.3})$$

Après le choc : on considère bien sûr que le choc est élastique. On remarque que les composantes des vitesses selon l'axe des x n'est pas modifiée. Regardons maintenant les composantes des vitesses sur l'axe des y . Par symétrie de la situation, A et B doivent voir revenir leur propre pierre à la même vitesse. Si cette vitesse est différente de celle avant le choc (par exemple strictement supérieure à V) alors le système a gagné de l'énergie ce qui va à l'encontre des lois physiques. Donc A et B doivent voir revenir leur pierre avec la vitesse V . Autrement dit,

– L'observateur A voit la pierre q_A animée de la vitesse

$$\vec{w}_A^A = \begin{pmatrix} 0 \\ -V \end{pmatrix}$$

tandis que l'observateur B voit la même pierre animée de la vitesse

$$\vec{w}_A^B = \begin{pmatrix} v \\ -V' \end{pmatrix},$$

– l'observateur A voit la pierre q_B animée de la vitesse

$$\vec{w}_B^A = \begin{pmatrix} v \\ V' \end{pmatrix}$$

tandis que l'observateur B voit la même pierre animée de la vitesse

$$\vec{w}_B^B = \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}.$$

Pour l'observateur A , vérifions si la loi de conservation de quantité de mouvement de la mécanique classique est toujours valable pour le système (q_A, q_B) . On doit avoir

$$m\vec{v}_A^A + m\vec{v}_B^A = m\vec{w}_A^A + m\vec{w}_B^A.$$

Or ce n'est pas le cas puisque la deuxième coordonnée donne $m(V - V') = m(V' - V)$. D'où vient l'erreur de raisonnement? La réponse est simple : on a considéré que les masses des pierres q_A et q_B étaient les mêmes du point de vue des observateurs A et B . Or il semble raisonnable de remettre en cause ce principe. En effet, supposons qu'un objet conserve la même masse quelle que soit sa

vitesse. Il suffira d'une quantité finie d'énergie pour accélérer la particule à n'importe quelle vitesse choisie, y compris à une vitesse plus grande que celle de la lumière. Or, d'après les formules trouvées au paragraphe précédent, la vitesse de la lumière est une barrière infranchissable. L'un des moyens d'expliquer ce fait est de supposer que la masse d'un objet tend vers l'infini quand sa vitesse tend vers celle de la lumière.

Revenons à notre problème. En mécanique relativiste, on va toujours supposer que la quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse mais on va aussi supposer que la masse d'un objet vu par un observateur dépend de sa vitesse par rapport à cet observateur. Notons \vec{V} ce vecteur vitesse. On va dire que sa masse est une fonction de \vec{V} notée $m_{\vec{V}}$. On va chercher cette fonction de manière à ce que la quantité de mouvement soit conservée après le choc c'est-à-dire de manière à avoir l'égalité

$$m_{\vec{v}_A^A} \vec{v}_A^A + m_{\vec{v}_B^A} \vec{v}_B^A = m_{\vec{w}_A^A} \vec{w}_A^A + m_{\vec{w}_B^A} \vec{w}_B^A. \quad (\text{I.4})$$

On remarque que cette égalité est vérifiée si pour une vitesse \vec{V} et un objet de masse m (pour donner un sens à la masse d'un objet, il faut comprendre ce terme comme étant sa masse au repos, c'est-à-dire à vitesse nulle), on a

$$m_{\vec{V}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\|\vec{V}\|^2}{c^2}}}$$

(où $\|\vec{V}\|$ est la norme euclidienne de \vec{V}). En effet, l'égalité de la première coordonnée est clairement vérifiée. Par ailleurs, pour la deuxième coordonnée, en utilisant (I.3), on a

$$\frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{V'}{\sqrt{1 - \frac{v^2 + (V')^2}{c^2}}} = 0 = -\frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + \frac{V'}{\sqrt{1 - \frac{v^2 + (V')^2}{c^2}}}.$$

Cette hypothèse faite sur la masse semble valable dans la mesure où elle tend vers $+\infty$ si la vitesse tend vers c .

En résumé, on retiendra :

Soit q un objet de masse m (au repos) vu par un observateur A . On suppose que q a une vitesse \vec{V} par rapport à A . Alors sa masse vue par A est

$$m_{\vec{V}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\|\vec{V}\|^2}{c^2}}} \quad (\text{I.5})$$

et sa quantité de mouvement est

$$\vec{p} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{\|\vec{V}\|^2}{c^2}}}.$$

Avec ces définitions, on garde la loi de conservation de quantité de mouvement énoncée ci-dessus dans le cadre de la mécanique classique.

Le raisonnement ci-dessus est, d'un point de vue mathématique en tout cas, beaucoup moins rigoureux que ceux donnés dans le paragraphe précédent pour établir les Règles 1, 1' et 2. Néanmoins, les mesures physiques permettent de vérifier ces lois avec une grande précision.

3. La formule $E = mc^2$.

L'énergie est par définition la capacité d'un système modifier un état, à produire un travail entraînant un mouvement, de la lumière ou de la chaleur. La formule $E = mc^2$ apparaît déjà dans les travaux de Poincaré et dit qu'une particule au repos possède de par sa masse, une énergie interne due aux forces d'interaction entre particules. L'intuition provient de la remarque expérimentale suivante : si un corps émet une énergie (par exemple par rayonnement) E , on mesure que sa masse diminue de $\frac{E}{c^2}$ d'où l'idée que cette masse m se soit transformée en énergie avec la relation $m = \frac{E}{c^2}$. L'étude de cette grandeur physique joue un rôle fondamentale en relativité en raison de la loi suivante :

Loi de conservation de l'énergie : *l'énergie totale d'un système qui n'a pas d'échange avec l'extérieur est constante avec le temps.*

En particulier, tout comme l'impulsion définie dans le paragraphe précédent, cette quantité est une intégrale première du système ce qui se définit parfaitement en mathématiques.

Maintenant essayons de déduire la formule $E = mc^2$ de la discussion précédente. D'abord, il paraît naturel de penser que l'énergie au repos d'une particule doit être proportionnelle à sa masse. Autrement dit, pour une particule de masse au repos m_0 , on a $E = km_0$ pour $k \in \mathbb{R}$ si la particule est immobile. Changeons maintenant d'observateur. Si ce nouvel observateur mesure l'énergie de la particule, il doit trouver la même valeur à laquelle s'ajoute l'énergie cinétique de la particule. Par contre, le résultat trouvé sera toujours proportionnel à sa masse m observée. On a aussi envie de dire que ce coefficient de proportionnalité doit être universel. On fera donc l'hypothèse suivante : l'énergie totale d'une particule de masse m mesurée par un observateur (liée à sa masse au repos par la formule (I.5)) est de la forme km où $k \in \mathbb{R}$. On vient de dire que l'énergie totale de la particule était son énergie interne (i.e. son énergie au repos) à laquelle s'ajoute son énergie cinétique. En d'autres termes, on a $E = km = km_0 + E_c$ ou encore

$$E_c = k(m - m_0). \quad (\text{I.6})$$

Calcul de k : nous aurons besoin de deux lois fondamentales de la mécanique classique :

- (1) Soit q un objet de masse m . Notons $\vec{a}(t)$ son accélération à l'instant t . Alors $m\vec{a}(t) = \vec{F}$ où $\vec{F}(t)$ est la résultante des forces qui s'appliquent à q à l'instant t .

- (2) La différence d'énergie cinétique (c'est-à-dire uniquement due à sa vitesse) de l'objet q entre deux instants est égale au travail de la force \vec{F} qui s'applique sur q le long de sa trajectoire.

La deuxième loi n'a, a priori, aucune raison d'être remise en question en relativité. Par contre, la première loi n'est pas satisfaisante puisque la masse dépend du temps. On remarque cependant que $m\vec{a}(t)$ n'est autre que la dérivée de la quantité de mouvement en fonction du temps. Il paraît plus naturel de garder cette formule en relativité : $\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = \vec{F}(t)$. On rappelle que le travail d'une force sur une trajectoire $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est donné par

$$\int_a^b (\vec{F}(c(t)), c'(t)) dt$$

où $\vec{F}(c(t))$ est la force qui s'applique en $c(t)$ et où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire euclidien. Soit donc un objet q de masse au repos m_0 soumis à une force \vec{F} constante. À l'instant $t = 0$ supposons que cette particule est au repos. On note E_c l'énergie cinétique de la particule à l'instant $t = 1$, $\vec{p}(t)$ la quantité de mouvement à l'instant t , $m(t)$ la masse à l'instant t et $v(t)$ la vitesse à l'instant t . On remarque que le vecteur vitesse est en tout point proportionnel à \vec{F} . Avec les lois 1 et 2, on obtient

$$\begin{aligned} E_c &= \int_0^1 (\vec{F}, c'(t)) dt \\ &= \int_0^1 (mv)' v dt \quad \text{car } \|c'(t)\| = v(t) \\ &= \int_0^1 (mv^2)' - mv' v dt \\ &= m(1)v^2(1) - \int_0^1 mv' v dt. \end{aligned}$$

En utilisant la valeur de la masse trouvée ci-dessus

$$E_c = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v(1)^2}{c^2}}} v(1)^2 - \int_0^1 \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v' v dt.$$

Posons maintenant $u = v(t)$ dans l'intégrale ci-dessus. On a alors

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v(1)^2}{c^2}}} v(1)^2 - \int_0^{v(1)} \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} du \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v(1)^2}{c^2}}} v(1)^2 + \left[c^2 m_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right]_0^{v(1)} \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v(1)^2}{c^2}}} c^2 - m_0 c^2 \\ &= (m(1) - m(0)) c^2. \end{aligned}$$

En comparant ce résultat avec (I.6), on obtient que $k = c^2$ ce qui donne que l'énergie totale d'une particule au repos de masse m est $E = mc^2$.

CHAPITRE II

Modélisation de l'espace-temps

1. En mécanique classique

Modélisation *En mécanique classique, l'univers est modélisé par un espace affine \mathcal{M} de dimension 4 muni d'une forme quadratique T sur $E := \overrightarrow{\mathcal{M}}$ de signature $(+, 0, 0, 0)$.*

REMARQUE II.7. On préfère prendre un espace affine plutôt que \mathbb{R}^4 , ce qui évite d'avoir un point base et des directions privilégiées.

Orientation en temps : Comme les vecteurs isotropes ($T(v) = 0$) forment un hyperplan de E , l'ensemble $E \setminus \{v \in E | T(v) = 0\}$ a exactement deux composantes connexes. Choisissons l'une d'elles une fois pour toutes et notons-la E^+ . Ce sont les directions dites *positives*.

Dans tout le paragraphe, b désignera la forme bilinéaire symétrique associée à T .

DÉFINITION.

- (1) Un *observateur* est une courbe de genre temps i.e. telle qu'il existe une paramétrisation $c : I \rightarrow \mathcal{M}$ (I est un intervalle réel) tel que pour tout $t \in I$, $T(c'(t)) \neq 0$.
- (2) Un *observateur galiléen* est une droite non isotrope.

Considérer les observateurs galiléens parmi tous les observateurs est naturel pourtant, physiquement cela pose un problème. Cela signifie qu'il y a des observateurs privilégiés dans l'univers. Qui sont-ils ? Il faut remarquer que si l'on connaît un observateur galiléen, on les connaît tous.

Choisissons maintenant un produit scalaire g sur $\ker(T) = \{v \in E | b(v, x) = 0 \forall x \in E\}$. Notons $\|\cdot\|$ la norme associée. On peut définir naturellement :

DÉFINITION.

- (1) Soit $A, B \in \mathcal{M}$. On dit que A et B sont *simultanés* si $\overrightarrow{AB} \in \ker(T)$. "Être simultanés" est une relation d'équivalence dont les classes sont de la forme $A + \ker(T)$. Ce sont des hyperplans affines qui physiquement, représentent l'univers à un instant donné.
- (2) Lorsque $A, B \in \mathcal{M}$ sont simultanés, on peut calculer leur distance :

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

- (3) Le temps qui sépare $A, B \in \mathcal{M}$ est donné par $\tau_{AB} = \sqrt{T(\overrightarrow{AB})}$. Autrement dit, deux points sont simultanés si et seulement si $\tau_{AB} = 0$.

Considérons un observateur galiléen D dirigé par un vecteur i_D unitaire ($T(i_D) = 1$) et orienté positivement. Si l'on fixe une origine $A \in D$ (on notera D_A), on a un isomorphisme naturel

$$\varphi_{D_A} : \begin{cases} \mathcal{M} & \rightarrow \ker(T) \times \mathbb{R} \\ B & \mapsto (\overrightarrow{v}, t) \end{cases}$$

où \overrightarrow{v}, t sont déterminés par l'écriture unique $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v} + ti_D$. Prendre une origine consiste à définir pour D un temps $t = 0$. Pour D_A , l'univers observable à l'instant t est $\varphi_{D_A}^{-1}(\ker(T) \times \{t\})$.

Paramétrisation normale positive d'un observateur

(on dit aussi *paramétrisation par le temps*).

Soit D un observateur. Soit $c : I \rightarrow \mathcal{M}$ (I est un intervalle de \mathbb{R}) une paramétrisation de D telle que $T(c'(t))$ ne s'annule jamais sur I . Quitte à remplacer $c(t)$ par $c(-t)$, on peut supposer qu'en tout point $c'(t) \in E^+$. Posons $s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{T(c'(u))} du$ où t_0 est un point fixé de I . On voit que s est un difféomorphisme de I sur l'intervalle $J := s(I)$. Posons maintenant $C = c \circ s^{-1}$. On voit que pour tout $t \in J$,

$$T(C'(t)) = 1 \text{ et } C'(t) \in E^+.$$

En effet,

$$T(C'(t)) = T(c'(s^{-1}(t))(s^{-1})'(t)) = T\left(\frac{c'(s^{-1}(t))}{s'(s^{-1}(t))}\right).$$

Le résultat est maintenant clair puisque $s'(t) = \sqrt{T(c'(t))}$. Une telle paramétrisation de D est appelée *paramétrisation normale positive* de l'observateur D . On a montré qu'une telle paramétrisation existe toujours et on remarque facilement qu'elle est unique à translation en temps près.

Vitesse Soit D, \tilde{D} deux observateurs et $\alpha, \tilde{\alpha}$ des paramétrisations normales positives respectives de D et \tilde{D} . Quitte à faire une translation en temps, on peut supposer que pour t fixé, $\alpha(t)$ et $\tilde{\alpha}(t)$ sont simultanés. Alors, $\tilde{\alpha}'(t)$ s'écrit de manière unique

$$\tilde{\alpha}'(t) = \overrightarrow{k} + a\alpha'(t)$$

où $\overrightarrow{k} \in \ker T$ et où $a \in \mathbb{R}$. Comme $T(\tilde{\alpha}'(t)) = T(\alpha'(t)) = 1$, on voit que $a = 1$.

DÉFINITION. Le vecteur \overrightarrow{k} est appelé *vecteur vitesse* de \tilde{D} par rapport à D et est noté $\overrightarrow{v}_{\tilde{D}/D}$

Remarques et propriétés :

- (1) La vitesse ainsi définie dépend de l'instant t .
- (2) Si D, \tilde{D} sont des observateurs galiléens alors le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}_{\tilde{D}/D}$ est constant en fonction du temps. Cette définition est bien conforme à l'idée

que l'on se fait de la vitesse : le quotient de la distance par le temps. Prenons en effet deux observateurs galiléens D et \tilde{D} . Prenons $A, B \in D$ et $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{D}$ tels que A et \tilde{A} sont simultanés ainsi que B et \tilde{B} . Naturellement, on voit que la norme du vecteur vitesse $\vec{v}_{\tilde{D}/D}$ est égal à

$$\frac{\|\vec{B\tilde{B}} - \vec{A\tilde{A}}\|}{\tau_{AB}}$$

(i.e. distance / temps).

(3) On a $\vec{v}_{\tilde{D}/D} = -\vec{v}_{D/\tilde{D}}$.

(4) Si $\tilde{\tilde{D}}$ est un troisième observateur, on a

$$\vec{v}_{\tilde{\tilde{D}}/D} = \vec{v}_{\tilde{\tilde{D}}/\tilde{D}} + \vec{v}_{\tilde{D}/D}.$$

Accélération : Reprenons les notations utilisées pour la définition de la vitesse. On définit l'accélération de \tilde{D} par rapport à D par $\vec{a}_{\tilde{D}} = \frac{d}{dt} \vec{v}_{\tilde{D}/D}$. Supposons que D est galiléen. Puisque la vitesse relative de deux observateurs galiléens est constante, l'accélération définie ci-dessus **ne dépend pas de l'observateur galiléen D** .

2. En relativité restreinte

On abandonne la mécanique classique pour la raison suivante : de manière expérimentale, on constate que la vitesse de la lumière est constante (en norme) par rapport à n'importe quel observateur. Supposons qu'un observateur D voie passer la lumière dans une certaine direction à la vitesse $c \simeq 300000$ km/h et qu'un autre observateur D' ait une vitesse de $(c - 1)$ km/h par rapport à D dans la même direction que la lumière. La propriété (4) du vecteur vitesse défini en mécanique classique implique que la vitesse de la lumière par rapport à D' sera de 1 km/h, ce qui contredit l'expérience. On doit donc abandonner le modèle de la mécanique classique. C'est ainsi qu'est née la relativité restreinte en 1905 grâce aux travaux d'Einstein.

Modélisation *En relativité restreinte, l'univers est modélisé par un espace affine \mathcal{M} de dimension 4 muni d'une forme quadratique T sur $E := \vec{\mathcal{M}}$ de signature $(-, +, +, +)$.*

D'un point de vue physique, on prend un espace affine pour éviter qu'il y ait des points privilégiés. Malgré tout, dans la pratique, on se placera la plupart du temps dans l'espace de Minkowski (\mathbb{R}^4, η) où

$$\eta := -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

Dans E , il y a trois types de vecteurs \vec{v} :

- les vecteurs de type *temps* : $T(\vec{v}) < 0$;
- les vecteurs de type *lumière* : $T(\vec{v}) = 0$;
- les vecteurs de type *espace* : $T(\vec{v}) > 0$.

On peut comme en mécanique classique choisir une orientation de temps. En effet, l'ensemble E des vecteurs de type temps a deux composantes connexes. Il faut remarquer que cet ensemble est un cône dont le bord est l'ensemble des vecteurs de type lumière. On choisit l'une des composantes connexes et on la note E^+ , cet ensemble représentant l'ensemble des vecteurs de type temps orientés positivement. Une autre manière de voir les choses est de fixer un vecteur \vec{v}_0 de type temps et de dire qu'un vecteur \vec{v} est orienté positivement si $g(\vec{v}, \vec{v}_0) > 0$, où g est la forme bilinéaire associée à T .

De la même manière, on définit

- un *observateur* : courbe de genre temps (i.e. dont tout vecteur tangent est de type temps)
- un *observateur galiléen* : droite de type temps.

Soit D un observateur. En procédant comme en mécanique classique, on montre qu'il existe une paramétrisation $c : I \rightarrow \mathcal{M}$ de D , unique à translation en temps près que l'on appellera *paramétrisation normale positive* qui vérifie $T(c'(t)) = -1$ et $c'(t) \in E^+$ pour tout $t \in I$. On verra plus loin qu'il y a d'autres paramétrisations normales naturelles.

Soit D un observateur paramétré par $c : I \rightarrow \mathcal{M}$.

En mécanique classique, l'*espace vu par D* ou *univers observable pour D* à l'instant t est l'ensemble des points simultanés à $c(t)$ c'est-à-dire $c(t) + \ker(T)$. L'espace vu par D ne dépend pas de D mais seulement du point $c(t)$.

En relativité restreinte, on a une définition analogue :

DÉFINITION. on appelle *espace vu par D au point $c(t)$* l'espace affine $c(t) + [c'(t)]^\perp$. En particulier, **cet espace dépend de l'observateur D** et pas seulement de $c(t)$. Physiquement, cela correspond à l'ensemble des points simultanés à l'observateur à un instant donné.

Si $A, B \in \mathcal{M}$, cela n'a pas de sens de se demander si A et B sont simultanés. Par contre si $A \in D$ et si $B \in \mathcal{M}$, on peut se demander si B est simultané à A pour D . C'est le cas si $B \in c(t) + [v]^\perp$ où v est un vecteur tangent à D en A . Contrairement à ce qui se passe en mécanique classique, la simultanéité n'est pas symétrique (si $A \in D$, $A' \in D'$ et si A' et A sont simultanés pour D , ils ne le sont pas forcément pour D').

Pour avoir une bonne image en tête, le plus simple est d'imaginer \mathbb{R}^2 muni de $-dt^2 + dx^2$. Soit D un observateur galiléen. Si D est parallèle à l'axe des abscisses, l'espace vu par D est vertical (axe des ordonnées). Si l'espace \vec{D} (droite vectorielle associée à D) se rapproche de la position limite $x = t$ alors $[\vec{D}]^\perp$ aussi ($[\vec{D}]^\perp$ est le symétrique de \vec{D} par rapport à $x = t$).

Ce modèle est assez pratique pour visualiser correctement ce qui se passe, mais pour coller plus à la réalité physique, il faudrait plutôt penser à \mathbb{R}^2 muni de $-dt^2 + \varepsilon^2 dx^2$ avec ε petit. Ainsi, lorsque ε est suffisamment petit, l'orthogonal de toute droite

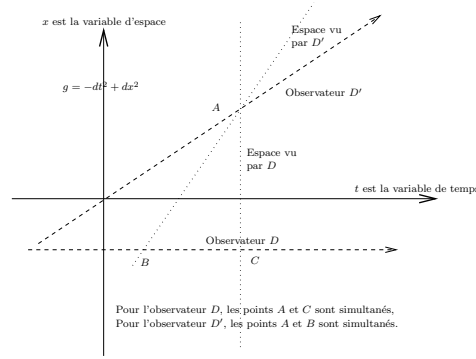


FIG. 1. Simultanéité en relativité restreinte

de type temps est “presque” verticale. En effet, l’orthogonal d’une droite dirigée par (a, b) est dirigé par $(\varepsilon, a/b)$ et on se rapproche du modèle \mathbb{R}^2 muni de $-dx^2$ qui permet de visualiser la mécanique classique (considérer dt^2 ou $-dt^2$ ne change rien à la géométrie).

DÉFINITION. Soit D un observateur (pas forcément galiléen) paramétré par $c : I \rightarrow \mathcal{M}$.

– Soient $A = c(t_1), B = c(t_2) \in D$. Le *temps propre* pour l’observateur D entre A et B est donné par

$$\tau_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-T(c'(t))} dt.$$

Physiquement, il s’agit du temps que mesure l’observateur D entre A et B .

– Soient $A, B \in \mathcal{M}$ simultanés pour D (i.e. il existe t tel que $A, B \in c(t) + [c'(t)]^\perp$).

On définit la distance de A à B (pour D) par $d(A, B) = \sqrt{T(\overrightarrow{AB})}$.

REMARQUE II.8.

- (1) Le temps propre ne dépend pas de la paramétrisation choisie.
- (2) La définition est la même qu’en mécanique classique (on remplace juste T par $-T$) : en mécanique classique, lorsque l’on écrit

$$\tau_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{T(c'(t))} dt$$

(T est ici de signature $(+, 0, 0, 0)$) on voit que l’on obtient $\tau_{AB} = \sqrt{T(\overrightarrow{AB})}$.

En effet, on peut écrire de manière unique $\overrightarrow{Ac(t)} = \overrightarrow{k}(t) + \alpha(t)\overrightarrow{AB}$ où $\overrightarrow{k}(t) \in \ker(T)$ et $\alpha(t) \in \mathbb{R}$. Alors $c'(t) = \overrightarrow{k}'(t) + \alpha'(t)\overrightarrow{AB}$ et $\alpha'(t)$ est de signe constant (sinon c n’est pas de genre temps). Supposons par exemple $\alpha'(t) > 0$. Alors, $\sqrt{T(c'(t))} = \alpha'(t)\sqrt{T(\overrightarrow{AB})}$. Ainsi, $\tau_{AB} = (\alpha(t_2) - \alpha(t_1))\sqrt{T(\overrightarrow{AB})}$. En revenant à la définition de α , on voit que $\alpha(t_1) = 0$ et $\alpha(t_2) = 1$ (car $c(t_1) = A$ et $c(t_2) = B$), d’où le résultat.

- (3) Si l’on se donne $A, B \in \mathcal{M}$, cela n’a pas de sens comme en mécanique classique de parler de temps qui sépare A et B . Cela dépend de la trajectoire

choisie. Imaginons $A, B \in \mathcal{M}$ tels que \overrightarrow{AB} est de type temps. Prenons la trajectoire directe (i.e. la droite (AB)). On regarde le temps propre entre A et B et l'on trouve $\tau_{AB} = \sqrt{-T(\overrightarrow{AB})}$. Maintenant, imaginons une trajectoire entre A et B de type lumière, (ou du moins très proche d'une trajectoire de type lumière) et calculons le temps propre entre A et B . On paramétrise par $c : I \rightarrow \mathbb{R}$. On voit que $T(c'(t)) \equiv 0$ si bien que $\tau_{AB} = 0$. Évidemment, physiquement, aucun observateur ne peut suivre une courbe de type lumière mais si la trajectoire s'en rapproche, le temps propre τ_{AB} sera très petit. En particulier, on remarque que **si deux observateurs D et D' ont une trajectoire qui passent par A et B et si D voyage à une vitesse proche de celle de la lumière, i.e. avec une trajectoire dont la tangente se rapproche de la position limite "lumière", D aura un temps propre beaucoup plus petit que D' entre A et B** . Cette propriété, contraire à l'intuition, est connue sous le nom de *paradoxe de langevin*. On la présente habituellement en disant que deux jumeaux sont nés sur Terre. L'un part en voyage à une vitesse proche de celle de la lumière. Quand il revient sur Terre, il est beaucoup plus jeune que son frère.

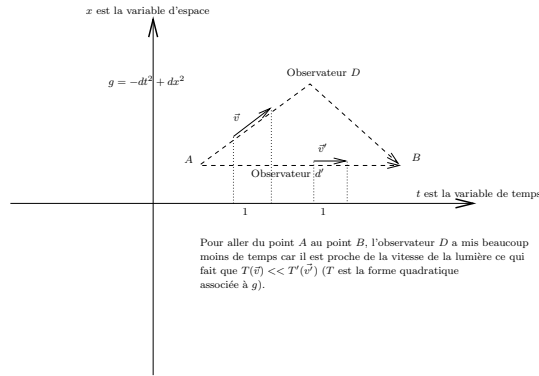


FIG. 2. Paradoxe des jumeaux de Langevin

- (4) Soit \vec{v} un vecteur de type temps. Alors l'hyperplan vectoriel $[\vec{v}]^\perp$ est de type espace (i.e. $T_{[\vec{v}]^\perp}$ est de signature $(+, +, +)$). En effet, la signature de T est obtenue en ajoutant un $-$ (car \vec{v} de type temps) à celle de $T_{[\vec{v}]^\perp}$. En particulier, dans la définition de $d(A, B)$, $T(\overrightarrow{AB}) > 0$.
- (5) Dans un sens, tout est beaucoup plus naturel qu'en mécanique classique car il n'y a pas besoin de se donner un produit scalaire supplémentaire. Toute l'information est contenue dans T .

Paramétrisation normale positive pour un observateur galiléen D . Soit D un observateur galiléen de vecteur directeur i_D unitaire ($T(i_D) = -1$) orienté positivement) paramétré par $c : I \rightarrow \mathcal{M}$ tel que pour tout t , $c'(t) = i_D$. Pour D , l'unité de temps est i_D . Maintenant considérons un autre observateur \tilde{D} paramétré par $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathcal{M}$. Il est naturel de décomposer pour tout t $\tilde{c}'(t) = \vec{k} + \alpha i_D$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

et $\vec{k} \in [i_D]^\perp$. En mécanique classique, si $T(\tilde{c}'(t)) = 1$ alors $\alpha = 1$. En relativité restreinte, $T(\tilde{c}'(\tilde{t})) = -1$ n'implique pas $\alpha = 1$. En particulier, il est naturel de considérer une paramétrisation orientée positivement pour laquelle $\alpha = 1$ pour tout t , c'est-à-dire qui respecte l'unité de temps pour D (voir la Remarque II.9 ainsi que le point 1 de la Remarque II.10). Une telle paramétrisation existe, est unique à translation en temps près (même argument que pour l'existence des autres paramétrisations normales) et sera appelée *paramétrisation normale positive pour l'observateur D* .

REMARQUE II.9. L'une des propriétés d'une telle paramétrisation est la suivante : si $t \in I$, $\tilde{t} \in \tilde{I}$ sont tels que $c(t)$ et $\tilde{c}(\tilde{t})$ sont simultanés pour D , alors pour tout a , $c(t+a)$ et $\tilde{c}(\tilde{t}+a)$ sont simultanés pour D . En effet, quitte à faire une translation en temps, on peut supposer $\tilde{t} = t$ et alors

$$\tilde{c}(t+a) - c(t+a) = (\tilde{c}(t) - c(t)) + \int_t^{t+a} (\tilde{c}'(s) - c'(s))ds \in [i_D]^\perp$$

car les deux termes du membre de droites sont dans $[i_D]^\perp$. On voit avec cet argument pourquoi il est nécessaire de définir ce type de paramétrisation relativement à un observateur galiléen. Par contre, si c et \tilde{c} sont des paramétrisations normales positives de deux observateurs D et \tilde{D} et si $c(t)$ et $\tilde{c}(t)$ sont simultanés pour D , en général $c(t+a)$ et $\tilde{c}(t+a)$ **ne sont pas simultanés pour D** .

Vitesse : Soit D, \tilde{D} deux observateurs paramétrés respectivement par $c : I \rightarrow \mathcal{M}$ et $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathcal{M}$. On suppose que c est une paramétrisation normale positive. Fixons un point $A \in D$ que l'on écrit $A = c(t)$. Quitte à faire une translation en temps, on peut supposer que $\tilde{c}(t)$ est simultané à $c(t)$ pour D . Le vecteur $\tilde{c}'(t)$ s'écrit de manière unique

$$\tilde{c}'(t) = \vec{k} + \alpha c'(t)$$

où $\vec{k} \in [c'(t)]^\perp$ et où $\alpha \in \mathbb{R}$.

DÉFINITION. Le *vecteur vitesse* de \tilde{D} par rapport à D est

$$\vec{v}_{\tilde{D}/D} = \frac{\vec{k}}{\alpha}.$$

REMARQUE II.10.

- (1) Si \tilde{c} est une paramétrisation normale pour D , $\alpha = 1$ et donc $\vec{v}_{\tilde{D}/D} = \vec{k}$.
- (2) Parler de vitesse sans préciser l'observateur par rapport auquel on se place n'a pas de sens sauf pour la vitesse de la lumière qui est constante par rapport à n'importe quel observateur (voir Proposition II.12 ci-dessous).
- (3) La vitesse relative de deux observateurs galiléens est constante. Avec les notations ci-dessus, $\vec{v}_{\tilde{D}/D}$ correspond exactement à la vitesse relative de deux observateurs galiléens dirigés par $c'(t)$ et $\tilde{c}'(t)$.
- (4) Cette définition correspond bien à l'intuition. Si D et D' sont deux observateurs galiléens qui se croisent en A et si $B \in D$ et $B' \in D'$ sont

simultanés pour D alors

$$\vec{v}_{\tilde{D}/D} = \frac{\overrightarrow{BB'}}{\tau_{AB}}$$

(=distance parcourue dans la direction de $\overrightarrow{BB'}$ divisée par le temps). En effet, soit \vec{v}, \vec{v}' des vecteurs directeurs de D et D' normaux orientés positivement. Écrivons $B = A + a\vec{v}$ et $B' = A + a'\vec{v}'$. Comme B et B' sont simultanés pour D , on a $\overrightarrow{BB'} \in [v]^\perp$. On écrit $\vec{v}' = \vec{k} + s\vec{v}$ où $\vec{k} \in [v]^\perp$ et où $s \in \mathbb{R}$. On a alors $a'\vec{v}' - a\vec{v} \in [v]^\perp$ i.e. $a'\vec{k} + (a's - a)\vec{v} \in [v]^\perp$ et donc $a's - a = 0$ ou encore $a' = a/s$. Cela donne que

$$\overrightarrow{BB'} = a'\vec{k}. \quad (\text{II.11})$$

Par ailleurs, on a par définition

$$\vec{v}_{\tilde{D}/D} = \frac{\vec{k}}{s} = \frac{a'\vec{k}}{a} = \frac{\overrightarrow{BB'}}{a}.$$

Comme $a = \sqrt{-T(\overrightarrow{AB})} = \tau_{AB}$ on a le résultat cherché.

Avec cette modélisation de l'espace, on a

PROPOSITION II.12. *La vitesse de la lumière par rapport à n'importe quel observateur est constante.*

Dans cette proposition, par "vitesse de la lumière", il faut bien évidemment comprendre "norme du vecteur vitesse de la lumière".

REMARQUE II.13. Avec la normalisation choisie, on trouve que la vitesse de la lumière est 1. Pour changer cette valeur, il suffit de normaliser les vecteurs de type temps à une autre constante que 1.

DÉMONSTRATION. Soit D un observateur paramétré par $c : I \rightarrow \mathcal{M}$, paramétrisation normale positive et L un rayon de lumière i.e. une droite de type lumière. Soit \vec{l} un vecteur directeur de L (qu'on ne peut pas normaliser puisque $T(\vec{l}) = 0$) on peut paramétrer L par $\tilde{c}(t) = M + t\vec{l}$. Soient $A = c(t)$ un point de D et $B = \tilde{c}(\tilde{t})$ un point de L simultané à $c(t)$ pour D . On écrit

$$\tilde{c}'(\tilde{t}) = \vec{l} = \vec{k} + ac'(t)$$

où $a \in \mathbb{R}$ et où $\vec{k} \in [c'(t)]^\perp$. Quitte à remplacer \vec{l} par $-\vec{l}$ on peut supposer que $a > 0$. Par définition, on a

$$\vec{v}_{L/D} = \frac{\vec{k}}{a}.$$

Remarquons que

$$0 = g(\vec{l}, \vec{l}) = g(\vec{k}, \vec{k}) + a^2g(c'(t), c'(t)).$$

Comme $g(c'(t), c'(t)) = -1$ et comme $a > 0$, on a $a = \sqrt{T(\vec{k})}$, ce qui implique que

$$\vec{v}_{L/D} = \frac{\vec{k}}{a}.$$

Ainsi

$$\|\vec{v}_{L/D}\| = \sqrt{T(\vec{v}_{L/D})} = 1.$$

ce qui démontre le résultat. □

3. En relativité générale

On abandonne la relativité restreinte principalement parce que, comme on le verra dans le prochain chapitre, elle n'est pas adaptée à la description du comportement de la matière. Un autre problème est qu'en relativité restreinte, comme en mécanique classique, les observateurs galiléens sont des observateurs privilégiés, ce qui physiquement n'est pas satisfaisant. Einstein a ainsi introduit la théorie de la relativité générale, dont il a publié les bases en 1915.

Modélisation *En relativité générale, l'univers est modélisé par une variété \mathcal{M} munie d'une métrique lorentzienne g , c'est-à-dire une métrique de signature $(-, +, +, +)$ sur chaque espace tangent $T_x\mathcal{M}$.*

On pourra regarder l'Appendice A pour avoir quelques précisions sur la géométrie lorentzienne.

REMARQUE II.14. On simplifiera en prenant des variétés C^∞ mais Hawking a étudié les conséquences de considérer des variétés de régularité plus faible.

Soit $\vec{v} \in T\mathcal{M}$. On dit que

- v est de genre *temps* si $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$;
- v est de genre *lumière* si $g(\vec{v}, \vec{v}) = 0$;
- v est de genre *espace* si $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0$.

Une courbe est de genre temps (resp. lumière, resp. espace) si en tout point ses vecteurs tangents sont de type temps (resp. lumière, resp. espace).

Dans chaque espace tangent $T_x\mathcal{M}$, l'ensemble $E_x := \{\vec{v} \in T_x\mathcal{M} | g_x(v, v) < 0\}$ a deux composantes connexes.

DÉFINITION. Une *orientation en temps continue* de (\mathcal{M}, g) est une orientation en temps de chaque espace tangent (i.e. le choix d'une composante connexe E_x^+ de E_x) telle que pour tout $x \in \mathcal{M}$, il existe un voisinage V_x de x et un champ de vecteur $X \in \Gamma(TV_x)$ sur V_x tel que pour tout $y \in V_x$, $X(y)$ est dans E_x^+ .

Si un tel choix existe, on dit que (\mathcal{M}, g) est *orientable en temps*. Dans la suite, on suppose (\mathcal{M}, g) est *orientée en temps*, c'est-à-dire que (\mathcal{M}, g) est orientable en temps et qu'une orientation en temps continue a été fixée.

DÉFINITION.

- On appelle *observateur* une courbe de genre temps.
- On appelle *observateur en un point* $x \in \mathcal{M}$ la donnée d'un vecteur $\vec{v} \in T_x\mathcal{M}$ de genre temps, unitaire (i.e. $g(\vec{v}, \vec{v}) = 1$) et orienté positivement (i.e. $\vec{v} \in E_x^+$).
- Soit D un observateur (ou un observateur en un point). L'*espace global vu par* D en $x \in D$ est la partie de \mathcal{M} qui est g_x -orthogonale, c'est-à-dire la partie \mathcal{E}_x de \mathcal{M} formée de la réunion de toutes les géodésiques issues de x et orthogonale à D en x .
- Soit D un observateur paramétré par $c : I \rightarrow \mathcal{M}$. Le temps propre entre $A = c(a) \in \mathcal{M}$ et $B = c(b) \in \mathcal{M}$ est donné par

$$\tau_{AB} = \int_a^b \sqrt{-g(c'(t), c'(t))} dt.$$

REMARQUE II.15.

- (1) De même qu'en relativité restreinte et en mécanique classique, si D est un observateur, il existe une *paramétrisation normale positive* de D , unique à translation en temps près, i.e. une paramétrisation $c : I \rightarrow \mathcal{M}$ telle que pour tout t , $g(c'(t), c'(t)) = 1$ et $c'(t) \in E_{c(t)}^+$.
- (2) En relativité restreinte, on n'avait pas besoin de la notion d'observateur en un point, bien que beaucoup de notions auraient pu se restreindre à cette définition (par exemple la vitesse ne dépendait que de la position et du vecteur tangent).
- (3) L'espace global vu par un observateur en x est une sous-variété de type espace de dimension 3 au voisinage de x (même argument qu'en relativité restreinte).

Avec ces définitions, parler de vitesse n'a pas vraiment de sens. En effet, soit D un observateur en un point $x \in \mathcal{M}$ dirigé par $\vec{v} \in T_x\mathcal{M}$ unitaire. On a besoin de décomposer un vecteur d'un autre espace tangent $T_y\mathcal{M}$ en une composante sur \vec{v} et une composante sur $[\vec{v}]^\perp$. Il y a plusieurs manières de la faire, mais aucune n'est canonique.

CHAPITRE III

De la matière dans l'espace-temps

Ce chapitre a pour but d'arriver jusqu'à l'axiomatique de la relativité générale pour décrire le comportement de la matière. Avant d'en arriver à ce stade, il faut comprendre quels sont les problèmes posés par la mécanique classique et la relativité restreinte. Quelle que soit la manière dont on construit la théorie, il faut garder à l'esprit qu'un "observateur humain" doit percevoir les mouvements prédits par les lois de Newton. Ces règles ne peuvent en aucun cas être remises en cause à vitesse faible (par rapport à celle de la lumière). La principale différence entre la relativité générale et la mécanique classique doit surtout se faire sentir soit à grande échelle, soit lorsque des vitesses importantes sont en jeu (par exemple, un GPS qui analyse très précisément la position d'un utilisateur à partir d'ondes tient compte des effets relativistes). C'est pourquoi dans ce chapitre, nous commençons par rappeler les lois utilisées pour décrire le comportement de la matière en mécanique classique et en relativité restreinte, ce qui nous amènera naturellement à l'axiomatique de la relativité générale.

1. Particules et fluides

En mécanique classique, relativité restreinte et relativité générale, la matière est supposée se composer de particules qui se définissent de la manière suivante.

DÉFINITION. En mécanique classique, relativité restreinte et relativité générale, une particule est un couple (\mathcal{C}, m) où \mathcal{C} est une courbe de genre temps et m est un nombre positif ou nul, la *masse* de p .

Autrement dit, une particule est un observateur muni d'une masse. Lorsqu'on prend en compte les phénomènes électromagnétiques, on lui attribue également une charge e .

Malheureusement, si on s'intéresse au mouvement de chaque particule, les équations qui apparaissent même en mécanique classique sont quasiment irrésolubles. Cela conduit à considérer la matière comme un fluide.

DÉFINITION.

- (1) Une *congruence de courbes* (terminologie de S. Hawking) sur un domaine Ω de M est une famille de courbes de type temps qui ne se coupent pas. Plus précisément, il s'agit d'une famille de courbes $(\mathcal{C}_j)_{j \in X}$ de type temps telle que tout $x \in \Omega$ admet un voisinage ouvert w_x et un difféomorphisme (avec régularité suffisante pour que tout soit bien défini) $\varphi_x : w_x \rightarrow I \times B$

(où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et où B est une boule ouverte de \mathbb{R}^3) tel que pour tout $j \in X$, il existe un unique $y \in B$ avec $\varphi_x(\mathcal{C}_j \cap w_x) = I \times \{y\}$.

- (2) Un *fluide* dans \mathcal{M} est un couple (congruence de courbes, ρ) où $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction appelée *densité de masse* du fluide. Ce couple devra vérifier une propriété supplémentaire que l'on définira plus tard (voir la "propriété requise" ci-dessous).

Physiquement, les courbes représentent les trajectoires de chaque point du fluide. Avec ce point de vue, on ne voit plus les particules une à une. Prenons un observateur D *attaché au fluide* (i.e. l'une des courbes de la congruence). La fonction densité de masse, physiquement, se définit comme suit : au point x , considérons l'observateur D_x *fixé au fluide* (i.e. la courbe qui passe par x). Le densité de masse est la limite du quotient de la masse mesurée par D_x (i.e. la somme des masses des particules) contenue dans un voisinage v_x de \mathcal{E}_x (espace vu par D en x) par le volume pour la métrique riemannienne induite de v_x lorsque v_x se réduit autour de x .

REMARQUE III.16. On pourrait penser que la fonction densité de masse décrit complètement le fluide à elle seule puisqu'elle indique la quantité de matière présente à tout instant et à tout endroit. En fait, elle n'est pas suffisante : par exemple, sans la donnée de la congruence de courbes, on n'a aucun moyen de détecter la rotation d'une particule sphérique.

DÉFINITION. Considérons un fluide F dans \mathcal{M} . Le *champ de vecteurs unitaire associé à F* est le champ de vecteurs \vec{u} formé des vecteurs tangents aux courbes du fluide, normaux ($T(\vec{u}) = 1$ en mécanique classique, $T(\vec{u}) = g(\vec{u}, \vec{u}) = -1$ en relativité restreinte et $g(\vec{u}, \vec{u}) = -1$ en relativité générale) et orientés positivement.

DÉFINITION. Considérons une hypersurface S de type espace et un fluide F de densité de masse ρ . On appelle *masse au repos de F sur S* le flux du champ \vec{u} à travers S (voir l'Appendice A). En relativité restreinte et relativité générale, elle est définie par l'intégrale

$$- \int_S \rho g(\vec{u}, \vec{n})$$

où \vec{u} est le champ de vecteurs unitaire, où \vec{n} est le champ de vecteur g -orthogonal à S , unitaire ($g(\vec{n}, \vec{n}) = -1$) et orienté positivement.

Donnons quelques explications sur la "masse au repos". Supposons que S soit g -orthogonale à \vec{u} , c'est-à-dire, d'un point de vue physique, au "mouvement" du fluide. Alors, $g(\vec{u}, \vec{n}) = -1$ (car $\vec{u} = \vec{n}$) et la masse au repos est la masse de fluide que contient S mesurée par un observateur D fixé au fluide.

Propriété requise (en mécanique classique, relativité restreinte et relativité générale) :

Soit F un fluide, ρ et \vec{u} respectivement la densité de masse et le champ de vecteurs unitaire associés à F . On impose que

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0. \tag{III.17}$$

Cette condition traduit le fait qu'il n'y a pas de perte de matière entre deux instants donnés. Essayons de comprendre pourquoi. On se place dans le cadre de la relativité générale ou restreinte. Reprenons la définition de la congruence de courbes : pour $x \in \mathcal{M}$ il existe un voisinage w_x diffeomorphe via φ_x à $I \times B$. Pour simplifier, supposons que $I =]0, 1[$ et identifions w_x à $]0, 1[\times B$ (on confond w_x et son image). Le bord de w_x est formé de trois parties : $S_0 := \{0\} \times B$, $S_1 := \{1\} \times B$ et $S_2 :=]0, 1[\times S^1$. On se place dans la situation la plus claire physiquement : S_0 et S_1 sont g -orthogonales au fluide - c'est-à-dire que les points de S_0 et S_1 sont tous simultanés pour un observateur fixé au fluide - alors que S_2 est tangente au fluide (voir Figure 1. Notons \vec{n}_j le vecteur normal à S_j ($i, j \neq 2$ sinon S_j n'est pas de genre espace). Notons aussi ds_g l'élément de volume induit par g sur S_j .

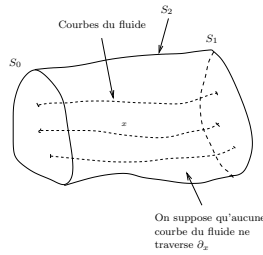


FIG. 1. Conservation de la masse

Avec le théorème de Stokes (voir l'Appendice A,

$$0 = \int_{w_x} \operatorname{div}(\rho \vec{u}) dv_g = \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \rho g(\vec{u}, \vec{n}_i) ds_g.$$

où \vec{n}_j est le vecteur g -orthogonal à S_j , unitaire et sortant. Autrement dit, $\vec{n}_0 = -\vec{n}_1$ et $\vec{n}_1 = \vec{n}_1$. De plus, il est clair que

$$\int_{S_2} \rho g(\vec{u}, \vec{n}_2) ds_g = 0.$$

On obtient ainsi

$$0 = \int_{S_1} \rho g(\vec{u}, \vec{n}_1) ds_g - \int_{S_0} \rho g(\vec{u}, \vec{n}_0) ds_g$$

ce qui montre que la masse au repos du fluide sur S_0 est la même que sur S_1 .

À l'échelle de l'univers, les fluides sont composés d'étoiles, de galaxies qui jouent le rôle de particules. Ces particules s'entrechoquent rarement et les forces qui s'exercent entre elles ne sont pas de nature électromagnétique (en fait, on verra qu'en relativité générale les particules n'interagissent pas entre elles). Cela conduit à introduire la définition suivante :

DÉFINITION. Un *fluide parfait sans pression* est un fluide dans lequel les particules sont indépendantes les unes des autres et dans lequel il n'y a pas d'autre énergie que celle des particules (pas de chocs, c'est-à-dire pas de viscosité, pas de rotation)

Cette définition est parfaitement adaptée au modèle de la relativité générale, où comme on le verra plus tard, les particules sont supposées ne pas avoir d'interactions entre elles. Un *fluide parfait* inclut normalement la pression (qui est une énergie supplémentaire) mais lorsque les particules du fluide sont constituées d'étoiles, de planètes et de galaxie, la pression est supposée nulle, sauf à l'intérieur des particules. Ce modèle est aussi utilisé dans d'autres cadres, par exemple dans le cas d'un fluide de très faible viscosité (par exemple en aérodynamique).

2. En mécanique classique

En mécanique classique, les principes utilisés sont ceux de Newton, qui traduisent l'*attraction universelle* (deux objets quelconques s'attirent mutuellement), idée qui sera complètement abandonnée en relativité générale. Il y a deux points de vue différents pour modéliser l'attraction universelle. Soit on utilise les lois de Newton, soit on utilise la notion de Lagrangien. Bien évidemment, quel que soit le point de vue choisi, on retrouve les mêmes résultats.

2.1. Point de vue du potentiel pour des particules. *Ce paragraphe a pour but de formuler la loi de Newton qui traduit l'attraction universelle.*

Soit $p = (\mathcal{C}, m)$ une particule.

DÉFINITION. Le *potentiel* créé par p est la fonction définie sur \mathcal{M} par

$$f_p(M) = -\frac{km}{d(p, M)}$$

où k est une constante universelle appelée *constante de gravitation* et où $d(M, p)$ est la distance introduite dans le paragraphe 1 du chapitre II.

Le comportement de la matière est alors régi par la

Loi de Newton *Soient $p_1 = (\mathcal{C}_1, m_1), \dots, p_n = (\mathcal{C}_n, m_n)$ des particules. On suppose que les courbes \mathcal{C}_i ne se coupent pas. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ l'accélération de la particule p_i en $M \in \mathcal{C}_i$ est*

$$\vec{a}_i(M) = -\sum_{j \neq i} \nabla_x f_j(M)$$

où ∇_x est le gradient calculé dans la direction de $\ker(T)$.

L'accélération est calculée relativement à un observateur galiléen mais rappelons qu'elle ne dépend pas de l'observateur galiléen choisi. Ce système différentiel d'ordre 2 est presque impossible à résoudre dès qu'il y a 3 particules ou plus en jeu (*problème des 3 corps*).

2.2. Point de vue du potentiel pour un fluide parfait sans pression.

Ce paragraphe sert à faire deviner quelles seront les bons axiomes à poser en relativité générale pour qu'à vitesse faible (par rapport à celle de la lumière), on puisse retrouver des lois proches de celles de Newton.

On rappelle que le potentiel créé par des particules $p_1 = (\mathcal{C}_1, m_1), \dots, p_m = (\mathcal{C}_m, m_m)$ est

$$f(M) = -k \sum_{i=1}^m \frac{m_i}{d(M, \mathcal{C}_i)}$$

où $d(M, \mathcal{C}_i)$ est la distance de M à l'unique point de \mathcal{C}_i qui est simultané à M . Par extension, si F est un fluide parfait sans pression de densité de masse ρ , on définit le potentiel créé par F en posant

$$f(M) = - \int_{M+\ker(T)} \frac{\rho(y)}{d(M, y)} dv_g(y)$$

où rappelons-le g est le produit scalaire dont nous avons muni $\ker(T)$ et où l'on a choisi l'unité de masse pour que $k = 1$. Soit maintenant D un observateur galiléen dirigé par i_D unitaire, orienté positivement. On rappelle que dès lors qu'on choisit une origine $A \in D$ (ce qui correspond à choisir un instant $t = 0$ pour D) D "voit" \mathcal{M} comme $\mathbb{R} \times \ker(T)$ via l'isomorphisme φ_D décrit dans le paragraphe 1 du chapitre II. L'hyperplan $\{t\} \times \ker(T)$ correspond à l'espace observable par D à l'instant t . Via cet isomorphisme, f se réécrit

$$f(t, x) = - \int_{\ker(T)} \frac{\rho(t, y)}{d(x, y)} dv_g(y)$$

pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \ker(T)$.

REMARQUE III.18. Avec les mêmes notations, si $\Omega \subset \ker(T)$, l'intégrale

$$\int_{\Omega} \rho(t, y) dv_g(y)$$

représente la masse du fluide qui se trouve dans Ω (bien sûr, ce Ω dépend de D à l'instant t).

Maintenant, il faut se souvenir que la fonction de Green du laplacien sur $(\ker(t), g)$ est

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi d(x, y)}$$

(on travaillera toujours avec le laplacien avec la convention de signe suivante : il est égal à $-\sum_i^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ lorsque la carte (x_1, \dots, x_n) est une isométrie sur un ouvert de \mathbb{R}^n muni de sa métrique standard) et ainsi

$$f(t, x) = -4\pi \int_{\ker(T)} G(x, y) \rho(t, y) dv_g(y).$$

Autrement dit, on a

$$\Delta_x f = -4\pi\rho. \quad (\text{III.19})$$

La loi de Newton traduite sur les courbes du fluide est alors donnée par

$$\vec{a}(t, x) = -\nabla_x f(t, x) \quad (\text{III.20})$$

où $\vec{a}(t, x)$ est l'accélération au point x et au temps t de la courbe du fluide passant par (t, x) . Maintenant, on rappelle que

$$\text{div}(\rho\vec{u}) = 0 \quad (\text{III.21})$$

où \vec{u} est le champ de vecteurs unitaire associé au fluide et que cette relation traduit la conservation de masse. Lorsqu'on considérait la matière particule par particule, cette relation était juste remplacée par le fait qu'il y avait à tout instant le même nombre de particules et que leur masse était constante.

Les relations (III.19), (III.20) et (III.21) sont les relations qui régissent le mouvement d'un fluide parfait sans pression en mécanique classique. Ce sont elles que l'on va essayer de retrouver à vitesse faible en relativité générale.

2.3. Point de vue du lagrangien. *Ce paragraphe donne une formulation équivalente à la loi de Newton qui permet d'introduire naturellement les notions d'énergie et d'impulsion qui seront à la base de la théorie en relativité générale. Pour finir nous regarderons l'exemple d'une particule dans le vide. La lecture de ce paragraphe n'est pas indispensable pour comprendre d'où vient l'équation d'Einstein.*

Le point de vue du lagrangien consiste à voir les trajectoires des particules comme des chemins minimisant une fonctionnelle appelée *fonctionnelle d'action* (en quelque sorte des géodésiques sauf que cette fonctionnelle dépend du système physique). On travaille donc particule par particule. Physiquement, la fonctionnelle d'action calcule pour une trajectoire donnée l'énergie cinétique de la trajectoire moins l'énergie potentielle créée par les autres particules. En effet, les particules vont avoir tendance à suivre les trajectoires qui leur font dépenser le moins d'énergie (énergie cinétique) et qui va utiliser au maximum l'énergie potentielle des autres particules. En fait, on va oublier cette interprétation physique en relativité restreinte.

DÉFINITION.

- (1) Un *lagrangien* d'une particule $p = (\mathcal{C}, m)$ dans un système physique (i.e. dans un ensemble de particules contenant p) est une application C^1 $L : \mathcal{M} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie plusieurs axiomes que nous précisons plus tard et qui permettront de modéliser les trajectoires des particules.
- (2) Soit L un lagrangien de p et $A, B \in \mathcal{C}$. Dans la suite on considérera toujours que B est ultérieur à A . Notons τ_{AB} le temps entre A et B . Soit \mathcal{C}' une autre courbe de genre temps passant par A et B paramétrée par $\beta : [0, \tau_{AB}] \rightarrow \mathcal{M}$, normale orientée positivement et telle que $\beta(0) = A$

et $\beta(\tau_{AB}) = B$ (on dira que β est *admissible*). On définit la *fonctionnelle d'action* associée à L entre A et B par

$$S_{AB}(\mathcal{C}') \text{ (ou } S_{AB}(\beta)) = \int_0^{\tau_{AB}} L(\beta(t), \beta'(t)) dt.$$

Comme expliqué plus haut, on veut que

Axiome 1

$$S_{AB}(p) := S_{AB}(\mathcal{C}) \leq S_{AB}(\mathcal{C}')$$

pour toute courbe \mathcal{C}' de genre temps passant par A et B ou de manière équivalente

$$S_{AB}(p) \leq S_{AB}(\beta)$$

pour toute paramétrisation β admissible.

Le lagrangien d'une particule p vérifiant l'axiome 1 n'est pas unique. Il est défini à une différentielle totale près. Rappelons qu'une différentielle totale est une fonction $F : \mathcal{M} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme $F(x, \vec{v}) = df_x(\vec{v})$ où $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. En effet, soit F une telle fonction. Notons $L' = L + F$. Alors, puisque

$$\int_0^{\tau_{AB}} F(\beta(t), \beta'(t)) dt = f(B) - f(A)$$

pour toute paramétrisation β admissible, les fonctionnelles d'action associées à L et L' ne diffèrent que de la constante $f(B) - f(A)$ et l'axiome 1 est vrai pour L si et seulement si il est vrai pour L' . Inversement, on a :

PROPOSITION III.22. *Si les fonctionnelles d'action de deux lagrangiens L et L' diffèrent d'une constante pour tous A, B , alors L et L' diffèrent d'une différentielle totale.*

DÉMONSTRATION. On définit la forme différentielle w par $w(x)(\vec{v}) = L(x, \vec{v}) - L'(c, \vec{v})$. Par hypothèse, l'intégrale de $w(x)$ le long d'un chemin ne dépend que des extrémités de c . On fixe $q \in \mathcal{M}$ et on définit pour $x \in \mathcal{M}$ la fonction $f(x) = \int_c w$ où c est un chemin quelconque joignant q à x . Fixons $x \in \mathcal{M}$ et prenons une base (e_1, e_2, e_3, e_4) . La forme w s'écrit $w = \sum_{i=1}^4 a_i dx_i$ où les dx_i sont les fonctions coordonnées dans cette base. Pour t petit, remarquons que $f(x + te_i) = \int_c w + \int_{c_i} w$ où $c_i(s) = x + se_i$ pour $s \in [0, t]$. Comme le premier terme ne dépend pas de t ,

$$\frac{d}{dt}_{t=0} f(x + te_i) = \frac{d}{dt}_{t=0} \int_0^t w(c(s))(c'(s)) ds = \frac{d}{dt}_{t=0} \int_0^t a_i(c(s)) ds = a_i(x).$$

Cela montre que $w = df$ et que L et L' diffèrent d'une différentielle totale. □

Soit D_A un observateur galiléen muni d'une origine A (voir paragraphe 1 du chapitre II). On a vu que D_A déterminait de manière naturelle un isomorphisme entre \mathcal{M} et $\mathbb{R} \times \ker(T)$ en écrivant, pour tout point $M \in \mathcal{M}$

$$\overrightarrow{AM} = \vec{k} + ai_D$$

où $a \in \mathbb{R}$, $\vec{k} \in \ker(T)$ et où i_D est le vecteur unitaire orienté positivement qui dirige D .

DÉFINITION. Soient L un lagrangien d'une particule p dans un système physique. Le lagrangien de p vu par D_A et associé à L est donné par

$$L_{D_A} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \ker(T) \times \ker(T) \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, \vec{v}) \mapsto L(M, \vec{v} + i_D) \end{array}$$

où M est tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{k} + ti_D$.

Soit $\beta : [O, \tau_{AB}] \rightarrow \mathcal{M}$ une paramétrisation admissible entre A et un autre point B de D . On peut lui associer

$$\tilde{\beta} \left| \begin{array}{l} [0, \tau_{AB}] \rightarrow \mathbb{R} \times \ker(T) \\ t \mapsto (\alpha(t), \vec{k}(t)) \end{array} \right.$$

où comme dans la définition ci-dessus, $\overrightarrow{A\beta(t)} = \vec{k} + \alpha(t)i_D$. Remarquons que comme $T(\beta'(t)) = 1$, on a $T(\alpha'(t)i_D) = 1$ et $\alpha'(t) = 1$. Comme de plus $\alpha(0) = 0$ (puisque $\beta(0) = A$), on a $\alpha(t) = t$. Ainsi $\tilde{\beta}(t) = (t, \vec{k})$. De cette manière, $\vec{k}'(t) = \vec{v}_{\beta/D}$ (voir le point 1 de la Remarque II.10). On a aussi $\vec{k}'(t) = \beta'(t) - i_D$. On en déduit que

$$L_{D_A}(t, \vec{k}(t), \vec{k}'(t)) = L(\beta(t), \beta'(t)).$$

Cela justifie cette définition d'autant que si on pose,

$$\tilde{S}_{AB}(\tilde{\beta}) = \int_0^{\tau_{AB}} L_{D_A}(t, \vec{k}(t), \vec{k}'(t)) dt$$

la courbe \tilde{c} associée à la courbe c paramétrant la courbe \mathcal{C} de p minimise la fonctionnelle \tilde{S}_{AB} parmi tous les $\tilde{\beta}$.

On a maintenant le résultat suivant (voir Avez, calcul différentiel)

THÉORÈME III.23. Soit $F : \mathbb{R} \times \ker(T) \times \ker(T) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 . Supposons qu'une courbe $k : [t_1, t_2] \rightarrow \ker(T)$ minimise

$$S(k) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, k(t), k'(t)) dt$$

parmi toutes les courbes normales orientées positivement, alors on a

$$d_x F_{(t,k(t),k'(t))} = d/dt (d_v F_{(t,k(t),k'(t))}) \quad (\text{III.24})$$

où d_x et d_v représentent respectivement les différentielles partielles relativement aux deuxième et troisième variables.

Ce théorème calcule l'équation d'Euler d'un minimiseur de la fonctionnelle d'action et fournit ainsi une équation différentielle dont les solutions donnent les trajectoires des particules.

On va maintenant définir l'énergie et l'impulsion d'une particule dans un système physique vu par un observateur D_A . Dans le premier chapitre, on explique brièvement leur interprétation physique. Par ailleurs, les lois physiques données dans ce

même chapitre impliquent que ces grandeurs doivent être constantes avec le temps. D'un point de vue mathématique, ce sont des intégrales premières du système. On gardera ce point de vue mathématique ici. On verra aussi que leur définition impose des conditions très restrictives mais qui seront remplies pour le cas d'une particule dans le vide. On constatera au final que les résultats trouvés correspondent à ceux qui avaient été obtenus par des intuitions physiques au Chapitre I.

PROPOSITION III.25. *Avec les mêmes notations que ci-dessus, on suppose que L_{D_A} ne dépend pas de la première variable. Soit $c : [0, \tau_{AB}] \rightarrow \mathcal{M}$ l'unique courbe admissible qui paramètre la courbe \mathcal{C} de la particule. Notons $\tilde{c} : [0, \tau_{AB}] \rightarrow \mathbb{R} \times \ker(T)$, $\tilde{c}(t) = (t, \vec{k}(t))$ la courbe associée vue par l'observateur D_A (voir ci-dessus). Alors le nombre*

$$\mathcal{E}(t) = (d_v L_{D_A})_{(\vec{k}(t), \vec{k}'(t))}(\vec{k}'(t)) - L_{D_A}(\vec{k}(t), \vec{k}'(t))$$

est constant. On l'appelle l'énergie de la particule vue par D_A .

Insistons encore une fois sur le fait que cette proposition-définition n'a de sens que si L_{D_A} ne dépend pas de la première variable. Notons aussi que si tel est le cas, il n'y a aucune raison que cette hypothèse soit vraie si on change d'observateur galiléen. Pour comprendre ce qui se passe physiquement, imaginons qu'un observateur étudie une particule dans le vide. L'énergie de cette particule est la somme de son énergie au repos (qui est supposée nulle en mécanique classique) et de son énergie cinétique. Supposons que cet observateur soit en mouvement irrégulier par rapport à la particule. Imaginons par exemple qu'il soit soumis à des forces électromagnétiques et que la particule soit neutre électriquement. Alors, l'observateur va mesurer une énergie pour la particule qui est non constante dans le temps (elle va dépendre de la vitesse de la particule par rapport à l'observateur). Pour avoir une bonne définition d'énergie, il faut que l'observateur soit d'une certaine manière lié au système.

DÉMONSTRATION. On a en utilisant l'équation (III.24)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &= \left((d_x L_{D_A})_{(\vec{k}(t), \vec{k}'(t))}(\vec{k}'(t)) \right) \\ &\quad + (d_v L_{D_A})_{(\vec{k}(t), \vec{k}'(t))}(\vec{k}''(t)) - \frac{d}{dt} \left(L_{D_A}(\vec{k}(t), \vec{k}'(t)) \right). \end{aligned}$$

Or

$$\frac{d}{dt} \left(L_{D_A}(\vec{k}(t), \vec{k}'(t)) \right) = (d_x L_{D_A})_{(\vec{k}(t), \vec{k}'(t))}(\vec{k}'(t)) + (d_v L_{D_A})_{(\vec{k}(t), \vec{k}'(t))}(\vec{k}''(t)).$$

D'où $\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = 0$, ce qui prouve la proposition. \square

De même, on définit l'impulsion de la manière suivante :

PROPOSITION III.26. *On utilise les mêmes notations que dans la proposition précédente mais cette fois, on suppose que L_{D_A} ne dépend pas des deux premières variables. Alors*

$$\vec{P} = (d_v L_{D_A})_{\vec{k}'(t)} \in (\ker(T))^* \sim \ker(T)$$

*est un vecteur constant que l'on appelle **impulsion de la particule vue par D_A***

Notons que dans l'énoncé ci-dessus, l'identification entre $\ker(T)$ et $\ker(T)^*$ est donnée par le produit scalaire g (voir Paragraphe 1). Encore une fois, les conditions extrêmement restrictives d'application de la proposition (dépendance de L_{D_A} de la troisième variable uniquement) seront vérifiées dans le cas d'une particule dans le vide.

REMARQUE III.27. Les définitions ci-dessus ne sont pas tout à fait rigoureuses. En effet, on a vu qu'un lagrangien était définie à une différentielle totale près. Si maintenant on remplace L par $L+F$ où F est une différentielle totale, on va trouver une nouvelle énergie (et impulsion) qui seront les mêmes que celles trouvées avec L mais auxquelles on aura ajouté une constante. On verra que pour obtenir un modèle physique réaliste, il faudra que le lagrangien dépende de la masse de la particule. Il y aura alors un seul choix de constante possible pour que l'énergie et l'impulsion d'une particule de masse nulle soient nulles.

Exemple d'une particule dans le vide.

Comme expliqué ci-dessus, on pourra définir l'énergie et l'impulsion de la particule pour tout observateur galiléen.

Dans ce cas précis, on considère une particule $p = (\mathcal{C}, m)$ et on va se donner

Axiome 2 *un lagrangien de p est invariant par les isométries de \mathcal{M} i.e. pour toute isométrie $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ et pour tous $A, B \in \mathcal{M}$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout β admissible, on ait $S_{AB}(\varphi \circ \beta) = S_{AB}(\beta)$.*

Cet axiome traduit le fait que physiquement, il n'y a pas de direction privilégiée dans l'univers et qu'une particule que l'on "bouge" par une isométrie (position et vitesse) à un instant donné a une trajectoire qui est "bougée" de la même manière (i.e. par la même isométrie). Alors on montre

THÉORÈME III.28. *En considérant les axiomes 1 et 2, il existe dans \bar{L} (classe des lagrangiens définis à une différentielle totale près) un lagrangien L_0 tel que pour tout \vec{v} unitaire ($T(\vec{v}) = 1$) et orienté positivement*

$$L_0(x, \vec{v}) = a \|\vec{v} - i_D\|^2$$

où i_D est le vecteur directeur unitaire orienté positivement d'un observateur galiléen fixé D .

La démonstration de ce résultat n'est pas évidente du tout et sera omise ici.

REMARQUE III.29.

- (1) Dans l'énoncé ci-dessus, $\|\cdot\|$ est la norme associée à g (voir Paragraphe 1). La définition a bien un sens car $\vec{v} - i_D \in \ker(T)$.

- (2) La forme de L_0 n'est donné que pour des vecteurs unitaires mais c'est à ces vecteurs que l'on applique L_0 .
- (3) Le théorème dit "il existe D tel que ..." mais en fait, l'observateur D peut être choisi arbitrairement. En effet, si dans la définition de L_0 , on remplace i_D par $i_{D'}$ (D' étant un autre observateur galiléen), on obtient un lagrangien L'_0 qui diffère de L_0 par une différentielle totale.

Dans ce théorème, on peut a priori prendre $a = 0$ i.e. $L = 0$ et les axiomes 1 et 2 sont bien vérifiés mais toute trajectoire est alors minimisante ce qui ne correspond pas à la réalité physique. On va poser $a = \frac{m}{2}$. Fixons maintenant un observateur D . Pour simplifier, prenons celui que l'on a choisi dans le Théorème III.28. On a alors par définition $L_{D_A}(t, x, \vec{v}) = \frac{m}{2} \|\vec{v}\|^2$ qui ne dépend ni de t ni de x . L'énergie de la particule est donnée par (on conserve les notations utilisées lorsqu'on a défini l'énergie)

$$\mathcal{E} = (d_v L_{D_A})_{\vec{k}'(t)}(\vec{k}'(t)) - \frac{m}{2} \|\vec{k}'(t)\|^2$$

et puisque $(d_v \|\vec{v}\|^2)_{\vec{k}'(t)}(\vec{k}'(t)) = 2\|k'(t)\|^2$, on trouve

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} \|\vec{k}'(t)\|^2.$$

On remarque que $\vec{k}'(t)$ représente la vitesse de la particule par rapport à D . Ainsi, On trouve que E est égale à l'énergie cinétique de la particule au sens habituel ($1/2mv^2$). Comme on l'a expliqué plus haut, si on prend un autre lagrangien dans la même classe, on va trouver la même valeur de l'énergie plus une constante. On fixe cette constante à 0 pour que l'énergie d'une particule de masse nulle soit nulle.

De la même manière on trouve que l'impulsion est donnée par

$$\vec{P} = m \vec{k}'(t).$$

La trajectoire de la particule minimise la fonctionnelle d'action. La Proposition III.26 nous dit alors que le vecteur vitesse $\vec{k}'(t)$ de la particule par rapport à D doit être constant. Puisque D est arbitraire, on en déduit que la trajectoire de la particule est une droite.

Lorsque le système physique considéré est composé de n particules, l'axiome 2 ne permet plus de conclure. En fait, on postulera directement la valeur du lagrangien d'une particule pour retrouver la loi de Newton :

Axiome 2' *Le lagrangien d'une particule $p_1 = (\mathcal{C}_1, m_1)$ dans un système physique $p_i = (\mathcal{C}_i, m_i)$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) est donné par*

$$L_1(x, \vec{v}) = \frac{m_1}{2} \|v - i_D\|^2 - k \sum_{i=2}^n \frac{m_i}{d(M, \mathcal{C}_i)}$$

où i_D est le vecteur unitaire positivement orienté d'un observateur galiléen fixé D , où k est la constante de gravitation et où $d(M, \mathcal{C}_i)$ est la distance de M au point

M_i de \mathcal{C}_i qui est simultané à M .

On remarque que ce lagrangien est en gros l'énergie cinétique de p_1 moins l'énergie potentielle des autres particules.

3. En relativité restreinte

3.1. Point de vue du lagrangien pour une particule dans le vide. *Ce paragraphe a pour but de calculer l'énergie et l'impulsion d'une particule dans le vide en relativité restreinte. Ce sera un bon point de départ pour la théorie de la relativité générale du fait que, comme on le verra, on fera l'hypothèse que les particules sont indépendantes les unes des autres : chacune se comportera comme une particule dans le vide. La lecture de ce paragraphe n'est pas indispensable pour comprendre d'où vient l'équation d'Einstein.*

La loi de Newton pose de nombreux problèmes. Simplement par son énoncé, il y a interaction entre particules et de manière sous-jacente, il y a le problème de la simultanéité. Notamment (il faut essayer pour s'en convaincre), la loi de Newton amène à considérer des vitesses plus grandes que celle de la lumière : en effet, si un objet change de place, son potentiel newtonien est transformé en conséquence et son influence sur l'univers tout entier est instantanément modifié. L'information a donc été transmise avec une vitesse infinie. Pour une seule particule dans le vide, le principe lagrangien ne s'appuie pas sur ces interactions entre particules et on peut regarder ce qui se passe en relativité restreinte. Dans ce cadre, on cherche un lagrangien qui vérifie les axiomes 1 et 2. L'exemple le plus simple est clairement de poser $L = \text{constante}$. On a vu que ce choix, en mécanique classique, même s'il ne contredisait pas les axiomes 1 et 2, n'avait aucune chance de modéliser la réalité physique puisque toute trajectoire minimiserait alors la fonctionnelle d'action. Comme on va le voir, la situation est différente en relativité restreinte.

Soit donc $p = (\mathcal{C}, m)$ une particule dans le vide. On va poser $L = -m$, choix que l'on justifiera plus tard. Comme en mécanique classique, fixons $A, B \in \mathcal{C}$ et prenons \mathcal{C}' une autre courbe de genre temps passant par A et B . La fonctionnelle d'action associée est

$$S_{AB}(\mathcal{C}') \text{ (ou } S_{AB}(\beta)) := \int_0^{\tau_{AB}} (-m) dt = -m\tau_{AB}$$

où encore une fois les β admissibles sont les paramétrisations des courbes \mathcal{C}' définies sur $[0, \tau_{AB}]$, normales de type temps orientées positivement et telles que $\beta(0) = A$ et $\beta(\tau_{AB}) = B$. On rappelle que le temps propre d'un point $c(a)$ à un point $c(b)$ associé à une courbe c est défini par

$$\tau_{AB} = \int_a^b \sqrt{-T(c'(t))} dt.$$

Soit maintenant un D un observateur galiléen dirigé par i_D vecteur unitaire orienté positivement et $\beta : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ une paramétrisation d'une courbe \mathcal{C}' que l'on suppose normale pour l'observateur D (et qui n'est donc pas admissible). On veut

trouver l'expression du lagrangien de la particule relativement à l'observateur D . Pour cela, on écrit

$$\overrightarrow{A\beta(t)} = \vec{k}(t) + \alpha(t)i_D$$

où $\vec{k}(t) \in [i_D]^\perp$, $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ et où l'on a choisi A comme origine. On verra par la suite que le résultat obtenu ne dépend pas du choix de l'origine. On obtient ainsi une courbe associée dans $\mathbb{R} \times [i_D]^\perp$ $\tilde{\beta}(t) := (\alpha(t), \vec{k}(t))$. Comme en mécanique classique, puisque β est normale par rapport à l'observateur D , on a $\alpha'(t) = 1$ et $\vec{k}'(t)$ est la vitesse de β par rapport à D . On cherche le lagrangien L_D de la particule vue par D , c'est-à-dire $L_D : \mathbb{R} \times [i_D]^\perp \times [i_D]^\perp \rightarrow \mathbb{R}$. Plus précisément, on cherche une fonction L_D telle que la fonctionnelle d'action associée à β (que l'on reparamètre pour qu'elle soit admissible) soit égale à celle de $\tilde{\beta}$ et ce, pour tout β . Observons que comme $T(i_D) = -1$, on a :

$$T(\beta'(t)) = T(\vec{k}'(t)) - 1 = v_t^2 - 1$$

où $v_t := \sqrt{T(\vec{k}'(t))}$ est la norme de la vitesse de la particule décrite par la courbe $\beta(t)$ par rapport à D . Ainsi

$$S_{AB}(\mathcal{C}') = -m \int_a^b \sqrt{1 - v_t^2} dt = -m\tau_{AB}$$

où $A = \beta(a)$ et $B = \beta(B)$. Autrement dit, le lagrangien de la particule vue par D est

$$L_D \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \times [i_D]^\perp \times [i_D]^\perp \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, \vec{v}) \mapsto -m\sqrt{1 - T(\vec{v})} \end{array} \right.$$

La fonctionnelle d'action associée redonne bien $S_{AB}(\mathcal{C}')$.

REMARQUE III.30. Si le vecteur vitesse v est petit par rapport à la vitesse de la lumière (qui rappelons, avec nos conventions, vaut 1), on voit que

$$L_D(\vec{v}) \sim -m + \frac{1}{2}mv^2$$

($v = T(\vec{v})$). Comme $-m + \frac{1}{2}mv^2$ a une fonctionnelle d'action dont les minimiseurs sont les mêmes que celle de $\frac{1}{2}mv^2$, qui était le lagrangien de p vue par D en mécanique classique, on remarque que pour des vitesses petites, les trajectoires de p vérifient les mêmes principes qu'en mécanique classique. C'est la première raison pour laquelle on a choisi de prendre $L = -m$. On en verra une deuxième après le calcul de l'énergie.

Revenons maintenant au Théorème III.23 et aux Propositions III.25 et III.26. Leurs preuves ne font intervenir que la structure d'espace affine et pas la signature de la forme quadratique T . Autrement dit, ils restent valables en relativité restreinte. Comme L_D ne dépend que de la troisième variable, on peut définir l'énergie et l'impulsion. Fixons $\beta = c$ où $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ est une paramétrisation normale pour D de la courbe \mathcal{C} associée à la particule p considérée. En gardant les mêmes notations que ci-dessus, on a pour l'énergie de p vue par D :

$$\mathcal{E}(t) = (dL_D)_{\vec{k}'(t)}(\vec{k}'(t)) - L_D(\vec{k}'(t)).$$

Puisque $L_D(\vec{v}) = -m\sqrt{1 - T(\vec{v})}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{mT(\vec{k}'(t))}{\sqrt{1 - T(\vec{k}'(t))}} + m\sqrt{1 - T(\vec{k}'(t))} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1 - v_t^2}}. \end{aligned}$$

REMARQUE III.31. Pour une particule au repos (c'est-à-dire vue par un observateur pour lequel $v = 0$), on retrouve que l'énergie de la particule est $E = mc^2$ (voir Chapitre I) où c est la vitesse de la lumière (qui dans nos unités vaut 1). Cela fournit une deuxième raison de définir le lagrangien par $L = -m$ pour une particule de masse m . Une différence majeure avec la mécanique classique est qu'en relativité restreinte une particule au repos a une énergie non nulle.

De même, on calcule que l'impulsion de p vue par D est donnée par

$$\vec{P} = \frac{m\vec{k}'(t)}{\sqrt{1 - v_t^2}}.$$

On retrouve la formule trouvée par intuition physique dans le Chapitre 1. Comme en mécanique classique, on déduit des Propositions III.25 et III.26 que la trajectoire de p est une droite.

REMARQUE III.32. Puisque $S_{AB}(\beta) = -m\tau_{AB}$, une particule dans le vide a une courbe qui maximise τ_{AB} .

3.2. Énergie d'un fluide parfait sans pression. *Ce paragraphe a pour but de définir l'énergie d'un fluide parfait sans pression en relativité restreinte. Cela permettra de donner en relativité générale une définition naturelle du tenseur d'énergie-impulsion. La lecture de ce paragraphe n'est pas indispensable pour comprendre d'où vient l'équation d'Einstein.*

En relativité restreinte, \mathcal{M} est un espace affine muni d'une forme bilinéaire symétrique g (ou d'une forme quadratique T) de signature $(-, +, +, +)$. C'est donc un cas particulier de variété lorentzienne dont la métrique est en tout point égale à g . Soit F un fluide parfait sans pression de densité de masse ρ .

DÉFINITION. Soit D un observateur galiléen dirigé par i_D unitaire et orienté positivement.

- (1) La densité d'énergie du fluide F par rapport à D est la fonction définie pour $x \in \mathcal{M}$ par

$$e_D(x) := \frac{\rho}{1 - v_x^2}$$

où v_x^2 est la vitesse (en norme) du fluide en x pour l'observateur D (i.e. la vitesse de la courbe qui passe par x relativement à D).

- (2) Soit S un voisinage d'un point $x \in \mathcal{M}$, $S \subset x + [i_D]^\perp$ (rappelons que $x + [i_D]^\perp$ est l'ensemble des points simultanés à x pour D). L'énergie du fluide à travers S est l'intégrale

$$\mathcal{E}_S = \int_S e_D ds_g.$$

Justifions cette définition. Supposons que sur S la vitesse du fluide par rapport à D est constante (en norme) égale à v . Alors par définition,

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{1-v^2} \int_S \rho ds_g. \quad (\text{III.33})$$

Par ailleurs, $v = \sqrt{g(\vec{v}_{F/D}, \vec{v}_{F/D})}$ et $\vec{v}_{F/D}(x) = \frac{\vec{k}}{a}$ où l'on a écrit comme ci-dessus

$$\vec{u}(x) = \vec{k} + ai_D. \quad (\text{III.34})$$

Ici $\vec{k} \in [i_D]^\perp$, $a \in \mathbb{R}$ et \vec{u} est le champ de vecteurs unitaire associé à F . Maintenant, notons m la masse au repos du fluide sur S . On a par définition

$$m = - \int_S \rho g(\vec{u}, i_D) ds_g \quad (\text{III.35})$$

car i_D est, puisque $S \subset x + [i_D]^\perp$, le champ de vecteurs g -orthogonal à S unitaire et positivement orienté. D'après l'équation (III.34), on a en utilisant le fait que $\vec{k} \perp i_D$,

$$g(\vec{u}, i_D) = -a. \quad (\text{III.36})$$

Encore une fois avec (III.34),

$$-1 = g(\vec{u}, \vec{u}) = g(\vec{k}, \vec{k}) - a^2$$

et comme

$$g(\vec{k}, \vec{k}) = a^2 g(\vec{v}_{F/D}, \vec{v}_{F/D}) = a^2 v^2,$$

cela donne

$$-1 = a^2(v^2 - 1).$$

Puisque $a > 0$ (car \vec{u} et i_D sont positivement orientés), on obtient $a = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. En injectant cette valeur dans (III.36), on obtient que

$$g(\vec{u}, i_D) = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (\text{III.37})$$

Avec (III.35), cela donne

$$m = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \int_S \rho ds_g.$$

Avec (III.33), on obtient une énergie

$$\mathcal{E}_S = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}.$$

On retrouve en particulier la valeur de l'énergie pour une particule dans le vide vue par l'observateur D (voir le paragraphe 3).

4. En relativité générale

Différence fondamentale avec la mécanique classique En mécanique classique, on considèrerait que les particules s'attiraient entre elles. En relativité, le comportement de la matière est régi par deux axiomes.

Axiome 1 : *Les courbes des particules, paramétrées par leur temps propres (c'est-à-dire que la paramétrisation est normale positive), sont des géodésiques de type temps de (\mathcal{M}, g) .*

On considère que le tenseur g (et donc ses géodésiques) contient toutes les informations sur la matière.

Axiome 2 : *Cet axiome donne précisément le lien entre le tenseur g et la matière. Il sera précisé plus tard.*

Toute la difficulté revient justement à trouver ce deuxième axiome de manière à ce que, à vitesse faible, on retrouve les lois de la mécanique classique. On veut éviter de considérer la matière particule par particule : on a vu que cela conduit à des équations affreusement compliquées à résoudre (c'est ce qui se passe en mécanique classique dès qu'il y a trois particules ou plus). On gardera donc le point de vue des fluides.

4.1. Fluides parfaits sans pression et tenseur d'énergie-impulsion.

Puisqu'en relativité générale, on considère que les particules sont indépendantes les unes des autres et que leur trajectoire ne dépend que de la métrique g , il est naturel de considérer la matière comme un fluide parfait sans pression. La première chose à faire est de donner une définition de l'énergie d'un fluide parfait sans pression par rapport à un observateur. Puisque les particules sont indépendantes deux à deux, chaque particule va se comporter comme une seule particule dans le vide, modèle que l'on a déjà étudié en relativité restreinte. On va voir qu'en relativité générale, on peut tout calculer en un point $x \in \mathcal{M}$ et dans l'espace tangent correspondant $T_x\mathcal{M}$. Or lorsqu'on travaille sur $T_x\mathcal{M}$ muni de la métrique g_x , on est exactement dans le cadre de la relativité restreinte, cadre sur lequel on va donc s'appuyer pour construire la théorie.

On commence par donner la définition suivante.

DÉFINITION. Soit F un fluide, D un observateur et $x \in D$. La *vitesse du fluide par rapport à D* est le vecteur vitesse de la courbe du fluide passant par x (qui peut être considérée comme un observateur) par rapport à D .

On a dit plus haut que la vitesse d'un observateur par rapport à un autre n'avait pas de sens en relativité générale, parce que pour la définir, il faudrait décomposer un vecteur d'un espace tangent $T_y\mathcal{M}$ dans un autre espace tangent $T_x\mathcal{M}$. Lorsque les deux observateurs sont au même point, il n'y a plus ce problème et on peut procéder comme en relativité restreinte. Donc pour préciser la définition ci-dessus,

notons i_D le vecteur unitaire tangent à D en x et orienté positivement. Notons \vec{u} le champ de vecteurs unitaire associé à F . On écrit de manière unique

$$\vec{u}(x) = \vec{k} + ai_D$$

où $\vec{k} \in [i_D]^\perp$ (l'orthogonalité étant bien évidemment relative à g) et $a \in \mathcal{M}$. Comme en relativité restreinte, on définit

$$\vec{v}_{F/D} := \frac{\vec{k}}{a}.$$

On considère un fluide parfait sans pression F de densité de masse ρ dans un domaine $\Omega \subset \mathcal{M}$, $x \in \Omega$ et un observateur au point x dirigé par i_D unitaire et orienté positivement. On a vu que la densité d'énergie de F vue par D en x était

$$e_D(x) = \frac{\rho(x)}{1 - v^2}$$

ou encore d'après (III.37),

$$e_D(x) = \rho(x) (g_x(\vec{u}(x), i_D))^2.$$

Il faut noter que cette expression n'aurait pas de sens en relativité générale en un autre point que x . Cela conduit à définir la forme bilinéaire symétrique

$$\tau_x \left| \begin{array}{l} T_x \mathcal{M} \times T_x \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \rho(x) g_x(\vec{u}(x), \vec{v}) g_x(\vec{u}(x), \vec{w}). \end{array} \right.$$

En considérant τ_x pour tout x , on obtient ainsi un tenseur deux fois covariant qui vérifie que pour tout observateur D au point x dirigé par i_D , unitaire et orienté positivement, on a

$$\tau(i_D, i_D) = e_D(x)$$

où $e_D(x)$ est défini comme ci-dessus. D'autre part, on pourrait faire pour l'impulsion la même construction que pour la densité d'énergie en relativité restreinte et avec la même démarche obtenir en relativité générale un vecteur au point x que l'on notera $\vec{P}_D(x)$ et qui est l'analogue de $e_D(x)$ construit ci-dessus. Alors, on peut vérifier que si \vec{w} est unitaire (i.e. $g(\vec{w}, \vec{w}) = 1$) et g -orthogonal à i_D ,

$$\tau_x(\vec{w}, \vec{w}) = g(\vec{P}_D(x), \vec{w}).$$

Cela justifie de donner la définition suivante

DÉFINITION. Le tenseur τ est appelé *tenseur d'énergie-impulsion* associé au fluide F .

En fait, on confondra souvent τ avec le tenseur deux fois contravariant qui lui est associé. On le notera toujours τ . Il est clair que

$$\tau = \rho \vec{u} \otimes \vec{u}, \tag{III.38}$$

\vec{u} étant le champ de vecteurs unitaires associé à F . On montre maintenant que

PROPOSITION III.39. *Le champ de vecteurs de composantes $\nabla_k \tau^{kl}$ est le champ de vecteurs nul si et seulement si les courbes du fluide sont des géodésiques de (\mathcal{M}, g) .*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in \Omega$. Prenons une base (e_1, \dots, e_4) de $T_x\mathcal{M}$ tel que $\nabla e_j(x) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\nabla_k \tau^{kl} e_l &= \nabla_k (\rho \vec{u}^k \vec{u}^l) e_l \\ &= \nabla_k (\rho \vec{u}^k) \vec{u}^l e_l + \rho \vec{u}^k \nabla_k \vec{u}^l e_l \\ &= \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \vec{u} + \rho D_{\vec{u}} \vec{u}\end{aligned}$$

où D est la connexion de Levi-Civita associée à g . Compte-tenu de (III.17), le champ de vecteurs $\nabla_k \tau^{kl} e_l$ est nul si et seulement si $D_{\vec{u}} \vec{u} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si les courbes du fluide sont des géodésiques de (\mathcal{M}, g) . \square

4.2. L'équation d'Einstein. Nous sommes maintenant en mesure de définir le deuxième axiome de la relativité générale. Pour cela, la stratégie est d'essayer de copier les modèles de la relativité restreinte et de la mécanique classique pour retrouver les lois de Newton pour des vitesses faibles par rapport à celle de la lumière. Le problème est que dans ces modèles, les observateurs galiléens jouent un rôle fondamental (par exemple pour définir l'énergie et l'impulsion) et qu'en relativité générale, on n'a aucun observateur privilégié. L'idée est alors de supposer dans un premier temps qu'on a de tels observateurs ("presque" galiléens), de trouver une bonne formulation du deuxième axiome dans ce cadre et de voir que ce que l'on a trouvé est en fait intrinsèque et ne dépend pas de ces observateurs particuliers.

DÉFINITION. Un *domaine statique* est un ouvert connexe Ω de \mathcal{M} tel que (Ω, g) est isométrique à $(I \times \omega, \tilde{g})$ où I est un intervalle ouvert, ω est un ouvert connexe de \mathbb{R}^3 et où dans la "carte canonique" (donnée par l'isométrie de Ω dans $I \times \omega$), la matrice de g au point $(t, x^1, x^2, x^3) \in I \times \omega$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} -f^2(x^1, x^2, x^3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{g}_{11}(x^1, x^2, x^3) & \bar{g}_{12}(x^1, x^2, x^3) & \bar{g}_{13}(x^1, x^2, x^3) \\ 0 & \bar{g}_{21}(x^1, x^2, x^3) & \bar{g}_{22}(x^1, x^2, x^3) & \bar{g}_{23}(x^1, x^2, x^3) \\ 0 & \bar{g}_{31}(x^1, x^2, x^3) & \bar{g}_{32}(x^1, x^2, x^3) & \bar{g}_{33}(x^1, x^2, x^3) \end{pmatrix}$$

où $f, \bar{g}_{i,j} : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) sont des fonctions suffisamment régulières pour que la suite ait un sens. Autrement dit, on a

$$\tilde{g}(t, x^1, x^2, x^3) = -f^2(x^1, x^2, x^3) + \sum_{k,l=1}^3 \bar{g}_{kl}(x^1, x^2, x^3) dx^k \otimes dx^l$$

pour tout $(t, x^1, x^2, x^3) \in I \times \omega$,

REMARQUE III.40. Le mot *statique* provient du fait que les composantes de la métrique ne dépendent pas du temps.

Il n'y a aucune raison qu'il existe dans (\mathcal{M}, g) un domaine statique mais Hawking a montré que l'existence d'un tel domaine statique est équivalente à l'existence d'un *champ de Killing* K (c'est-à-dire un champ de vecteurs engendrant un flot isométrique) et d'une hypersurface H de genre espace orthogonale en tout point au champ de vecteurs K . Le flot de K donne donc un groupe à un paramètre d'isométries dont les orbites (ce sont les courbes intégrales de K) sont

g -orthogonales à H .

Autrement dit, considérons une courbe intégrale de K . Cette courbe définit un observateur D . L'espace vu par D est à tout instant isométrique à (H, \bar{g}) où \bar{g} est la restriction de g à H . Ces observateurs observant toujours le même espace sont les analogues des observateurs galiléens en mécanique classique ou en relativité restreinte.

Nous travaillons donc dans $(I \times \omega, \tilde{g})$. La matière est modélisée par un fluide parfait sans pression F . Rappelons que le premier axiome dit que les courbes de F paramétrées par le temps sont des géodésiques de (\mathcal{M}, g) . L'idée fondamentale pour trouver le deuxième axiome est que le fluide lui-même (y compris sa densité de masse) est lié à la métrique g . C'est ce lien que l'on cherche à déterminer de manière à retrouver (en approximation) les lois de Newton. Remarquons que les domaines statiques permettent de se ramener à la relativité restreinte ou à la mécanique de la façon suivante : prenons le cas où $f = 1$ et où \bar{g} est la métrique euclidienne. Alors, on a deux manières de voir les choses. Soit on travaille dans $(I \times \omega, \tilde{g})$. Dans ce cas, on retrouve l'espace-temps de la relativité restreinte. Sinon, on peut travailler dans $I \times w$ muni de la forme T associée à la forme bilinéaire $-f^2 dt^2$ dont le noyau (tangent à w) est muni du produit scalaire \bar{g} . On retrouve le modèle de la mécanique classique. **Pour trouver le deuxième axiome, c'est avec cette vision des choses que l'on va travailler.**

Pour cela, considérons une courbe \mathcal{C} du fluide paramétrée par c , paramétrisation normale positive. On écrit c dans la carte (t, x^1, x^2, x^3, x^4) :

$$c(s) = (c_0(s), c_1(s), c_2(s), c_3(s))$$

et on note $\vec{k}(s) = (c'_1(s), c'_2(s), c'_3(s))$ et $\vec{a}(s) = (c''_1(s), c''_2(s), c''_3(s))$. Écrire c dans cette carte revient à regarder \mathcal{C} à travers les yeux d'un observateur galiléen D , c'est-à-dire une courbe intégrale de K . Le vecteur \vec{k} représente la vitesse de \mathcal{C} par rapport à D et le vecteur \vec{a} est le vecteur accélération de \mathcal{C} vue par D . En fait, pour travailler vraiment avec le modèle de la mécanique classique, il faudrait que c soit une paramétrisation normale pour $T = -\frac{\partial}{\partial t}$ et donc normaliser c pour avoir $c'_0 = 1$. Cependant, comme $g_{c(s)}(c'(s), c'(s)) = -1$, on a

$$-f^2 c'_0(s) + \|\vec{k}(s)\|_{\bar{g}} = -1$$

c'est-à-dire

$$(c'_0)^2 = \frac{1 + \|\vec{k}\|_{\bar{g}}}{f^2}. \quad (\text{III.41})$$

Maintenant, on doit supposer qu'on est proche du modèle de la mécanique classique donc f est proche de 1. D'autre part, les vitesses sont supposées petites par rapport à la vitesse de la lumière, c'est-à-dire qu'on suppose

$$\|\vec{k}\|_{\bar{g}} = o(1) \quad (\text{III.42})$$

ce qui fait que

$$c'_0 = o(1) \quad (\text{III.43})$$

(autrement dit, c est "presque" une paramétrisation normale pour la forme $-dt^2$) et \vec{a} peut bien être considéré comme le vecteur accélération de la courbe \mathcal{C} . Même si cette approche n'a rien de rigoureux, elle est physiquement cohérente. Elle va nous permettre de trouver par l'intuition un bon deuxième axiome dont la validité sera vérifiée par les observations physiques (voir le Chapitre IV).

La première chose à faire est de se débrouiller pour retrouver la relation (III.20) en approximation. Pour cela, nous devons exprimer \vec{a} en fonction de données géométriques. C'est l'objet du résultat suivant :

PROPOSITION III.44. *Les composantes du vecteurs \vec{a} vérifient pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$*

$$c''_k(s) = -\frac{1}{f}(1+v^2)\nabla_{\vec{g}}^k f - \sum_{i,j=1}^3 \Gamma_{ij}^k c'_i c'_j$$

où l'on a posé $v = \|\vec{k}\|_{\vec{g}}$ et où $\nabla_{\vec{g}}^k f = g^{kj}\partial_j f$.

DÉMONSTRATION. D'après l'axiome 1, \mathcal{C} est une géodésique de (\mathcal{M}, g) . Autrement dit, $D_{c'(t)}c'(t) = 0$ (D est la dérivée covariante associée à la connexion de Levi-Civita de g). Donc

$$\begin{aligned} 0 &= D_{c'(t)}(c'(t)) = D_{c'(t)}\left(c'_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) + \sum_{i,j=1}^3 D_{c'(t)}\left(c'_i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= c''_0(t) + c'_0 D_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^3 c'_i D_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

Écrivons maintenant que

$$D_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial t} = c'_0 D_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 c'_i D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Comme d'après (III.51), pour $i, k \geq 1$, $\Gamma_{i0}^k = 0$, on obtient

$$D_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial t} = c'_0 \Gamma_{00}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (\text{III.46})$$

De même, on calcule que

$$D_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial x^i} = c'_0 \Gamma_{0i}^0 + \sum_{j=1}^3 c'_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (\text{III.47})$$

En remplaçant dans (III.45) et en regardant composante par composante, on trouve que pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$

$$0 = c''_k + \Gamma_{00}^k (x'_0)^2 + \sum_{i,j=1}^3 \Gamma_{ij}^k x'_i x'_j.$$

En utilisant (III.51) (voir plus bas) et (III.41), la preuve de la proposition est complète. \square

Revenons maintenant à ce qui nous intéresse : retrouver la relation (III.20). Pour être "approximativement" en mécanique classique, on doit supposer que f vaut "presque" 1 et \bar{g} est presque la métrique euclidienne. On écrit donc $f = 1 + h$ et on suppose que $h = o(1)$. On écrit aussi $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij} + o(1)$. Compte-tenu de (III.51) et de (III.42), on obtient que

$$\vec{a} = -\overrightarrow{\nabla}h(1 + o(1)). \quad (\text{III.48})$$

Pour retrouver la relation (III.20), on voudrait que cette fonction h soit le potentiel newtonien f qui apparaît dans la relation (III.20), c'est-à-dire, en vertu de la relation (III.19) que

$$\Delta_{\bar{g}}h \equiv 4\pi\rho. \quad (\text{III.49})$$

Or on calcule que

PROPOSITION III.50. *Dans la carte (t, x^1, x^2, x^3) , la courbure de Ricci de g vérifie*

$$\text{Ric} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = -f \Delta_{\bar{g}}f.$$

DÉMONSTRATION. On commence par calculer les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita associée à g dans cette carte. Nous notons "0" la coordonnée associée à t et utilisons les conventions d'Einstein. On rappelle que par définition, on a pour tous $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$$

et que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Donc si $i, k \in \{1, \dots, 3\}$,

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{i0}^k = 0; \quad \Gamma_{i0}^0 = \frac{1}{f} \partial_i f \quad \text{et} \quad \Gamma_{00}^k = f g^{kl} \partial_l f. \quad (\text{III.51})$$

Maintenant, on sait que la courbure de Ricci s'exprime dans une carte en fonction des symboles de Christoffel (voir l'appendice) grâce à la formule suivante :

$$R_{\alpha\beta} = \partial_i \Gamma_{\alpha\beta}^i - \partial_\beta \Gamma_{\alpha i}^i + \Gamma_{im}^i \Gamma_{\alpha\beta}^m - \Gamma_{\beta m}^i \Gamma_{i\alpha}^m$$

où l'on a noté $R_{\alpha\beta}$ les composantes du tenseur de Ricci dans la carte considérée. On a donc :

$$R_{00} = \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{i0}^i + \Gamma_{00}^m \Gamma_{mi}^i - \Gamma_{i0}^m \Gamma_{m0}^i$$

c'est-à-dire en remplaçant les symboles de Christoffel par leur valeur :

$$R_{00} = \partial_i (f g^{ij} \partial_j f) + f \Gamma_{mi}^i g^{mj} \partial_j f - 2|df|_{\bar{g}}^2. \quad (\text{III.52})$$

On a utilisé le fait que puisque f ne dépend pas de t , $|df|_{\bar{g}} = |df|_g$. Maintenant, on calcule

$$\partial_i (f g^{ij} \partial_j f) = |df|_g^2 + f \partial_i (g^{ij}) \partial_j f + f g^{ij} \partial_{ij} f.$$

En écrivant que $\nabla_i g^{-1} = 0$, on obtient

$$\partial_i g^{ij} = -g^{mj} \Gamma_{im}^i - g^{im} \Gamma_{im}^j$$

ce qui donne

$$\partial_i (f g^{ij} \partial_j f) = |df|_{\bar{g}}^2 - f(\partial_j f) g^{mj} \Gamma_{im}^i - f(\partial_j f) g^{im} \Gamma_{im}^j + f g^{ij} \partial_{ij} f.$$

Rappelons que l'opérateur de D'alembert ou d'alembertien est l'analogue riemannien du laplacien. Il est défini en coordonnées par

$$\square_g f = -g^{ij} (\partial_{ij} f - \Gamma_{ij}^k \partial_k f).$$

Il est fréquent de conserver les notations riemanniennes en géométrie lorentzienne (par exemple en ce concerne les courbures) mais pour le d'alembertien, une notation différente indique la différence de nature entre ces deux opérateurs : le laplacien est elliptique alors que le d'alembertien est hyperbolique.

Reprenons notre calcul. Nous obtenons ainsi

$$\partial_i (f g^{ij} \partial_j f) = |df|_{\bar{g}}^2 - f(\partial_j f) g^{mj} \Gamma_{im}^i - f \square_g f.$$

En remplaçant dans (III.52), on a

$$R_{00} = -f \square_g f - |df|_{\bar{g}}^2. \quad (\text{III.53})$$

On calcule maintenant en utilisant que $g^{0i} = -f^2 \delta^{0i}$ et que $\Gamma_{00}^m = \frac{1}{f} \partial_m f$

$$\begin{aligned} f \square_g f &= -g^{ij} (f \partial_{ij} f - f \Gamma_{ij}^k \partial_k f) \\ &= f \Delta_{\bar{g}} f + g^{00} \Gamma_{00}^m \partial_m f \\ &= f \Delta_{\bar{g}} f - |df|_{\bar{g}}^2. \end{aligned}$$

En revenant à (III.53), on obtient

$$R_{00} = -f \Delta_{\bar{g}} f$$

ce qui termine la démonstration de la proposition III.50. \square

De cette proposition, on déduit puisque $f = 1 + h$ avec $h = o(1)$, que $\Delta_{\bar{g}} h = -Ric \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) (1 + o(1))$. En revenant aux notations tensorielles, pour avoir la relation (III.49), il faut donc imposer

$$R_{00} = 4\pi\rho.$$

Rappelons que le tenseur d'énergie-impulsion est défini par

$$\tau = \rho \vec{u} \otimes \vec{u}$$

et comme $c' = \vec{u}$,

$$\tau_{00} = \rho (c'_0)^2 = \rho(1 + o(1))$$

en utilisant (III.43). La relation (III.49) est donc satisfaite si on suppose que

$$Ric = 4\pi\tau.$$

REMARQUE III.54. Il suffit que cette relation soit satisfaite sur la composante 00 pour avoir (III.49) mais pour avoir une équation intrinsèque, on l'impose comme étant une égalité tensorielle.

Malheureusement, la proposition III.39 implique que l'on doit avoir

$$\nabla^i R_{ij} = 0$$

ce qui n'a aucune raison d'être vrai en général. Par contre, on remarque que le tenseur dit *tenseur d'Einstein*

$$E_{ij} := R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \quad (\text{III.55})$$

(où $R := g^{kl} R_{kl}$ est la courbure scalaire) vérifie cette condition (i.e. $\nabla^i E_{ij} = 0$). Cette relation se déduit de l'identité de Bianchi sur la courbure de Riemann. D'où l'idée de poser

$$\text{Ric} - \frac{1}{2} R g = 8\pi\tau. \quad (\text{III.56})$$

Cette relation conserve la relation (III.49). Pour le voir, contractons chaque côté de l'égalité par g^{ij} . Comme $g^{ij} g_{ij} = 4$ et comme $\tau_{ij} = \rho c'_i c'_j$ (car $\vec{u} = c'$), on obtient $R - 2R = 8\pi\rho c'_i c'_j g^{ij}$. Mais d'après (III.42), $c'_i = o(1)$ si $i \neq 0$ et on a déjà vu que $c'_0 = 1 + o(1)$ (d'après (III.43)). On obtient donc $-R = -8\pi\rho(1 + o(1))$ puisque $g^{00} = -1 + o(1)$. On en déduit en utilisant l'équation (III.56) que

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{g}} h &= -(1 + o(1)) R_{00} = -(1 + o(1)) \left(\frac{1}{2} R g_{00} + 8\pi\tau_{00} \right) \\ &= -(1 + o(1)) (-4\pi\rho + 8\pi\rho) \\ &= -(1 + o(1)) 4\pi\rho \end{aligned}$$

et on retrouve (III.49).

Si on ajoute à E_{ij} un terme de la forme Λg (où Λ est un réel), on garde la relation (III.55). Par contre, on perd la relation (III.49). Prendre $\Lambda = 0$ conduit à considérer que l'univers est en expansion (voir le chapitre suivant) ce que refusait complètement Einstein. C'est pourquoi il a ajouté ce terme. L'équation garde sa cohérence (i.e. la relation (III.55)). On peut même montrer que c'est le seul terme que l'on peut ajouter pour garder la cohérence de l'équation. Si l'on suppose que Λ est petit, on est proche des lois de Newton. C'est cette équation intrinsèque (on n'a pas besoin d'avoir de domaine statique pour la considérer) que l'on gardera.

Autrement dit, on est maintenant en mesure d'énoncer les deux axiomes qui régissent la matière lorsqu'on considère qu'il n'y a qu'un fluide parfait pression dans l'espace-temps :

Axiome 1 : Les courbes du fluide paramétrées par leur temps propre sont des géodésiques de (\mathcal{M}, g) .

Axiome 2 : La matière et la métrique sont liées par l'équation d'Einstein

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg = 8\pi\tau - \Lambda g \quad (\text{III.57})$$

où Λ est une constante, appelée *constante cosmologique*, que l'on peut choisir.

REMARQUE III.58. Si la matière n'est pas modélisée par un fluide parfait, on conserve tout de même ces deux axiomes sous cette forme mais c'est le tenseur d'énergie-impulsion qui prendra une autre forme.

Considérons seulement l'axiome 2. La relation (III.55) implique que $\nabla^i\tau_{ij} = 0$ et la proposition III.39 implique alors l'axiome 1. **On considère donc que le comportement de la matière est régi par l'axiome 2 seulement.** L'axiome 1 est alors automatiquement vrai.

À partir de maintenant et dans tous les chapitres qui suivent, nous nous plaçons toujours dans l'espace-temps de la relativité générale et nous supposons que le comportement de la matière est régi par l'axiome 2 seulement.

REMARQUE III.59. Vers la fin de sa vie, Einstein a admis qu'il avait fait une erreur en refusant d'admettre que $\Lambda = 0$. En tout cas, si la constante Λ n'est pas nulle, elle doit être très petite. En effet, ce terme additionnel détruit la relation (III.49). Par conséquent, on ne retrouve plus les lois de la mécanique classique à petite échelle. Les mesures physiques récentes tendent à montrer que $\Lambda > 0$ est non nulle, petite, mais pas aussi petite que ce que l'on pensait.

REMARQUE III.60. La constante cosmologique fournit également une explication possible à l'énergie noire dont il est question dans le Paragraphe 7.

REMARQUE III.61. Pour établir l'équation d'Einstein, on a travaillé avec la courbure de Ricci mais on aurait pu penser à poser $R = -4\pi\rho$ ce qui est a priori suffisant pour avoir la relation (III.49). Physiquement, cela n'aurait pas pu modéliser correctement la réalité car cette relation faisait intervenir seulement la densité de masse et pas les courbes du fluide. On aurait aussi pu penser à utiliser le tenseur de Riemann mais les équations auraient été beaucoup plus compliquées et les observations physiques montrent que le choix de l'axiome 2 ci-dessus est un modèle très proche de la réalité.

5. Complément sur le tenseur d'énergie-impulsion

Résumons la situation. On a commencé par se donner une variété lorentzienne (\mathcal{M}, g) de dimension 4, supposée être un bon modèle pour l'univers. Ensuite, on a fait l'hypothèse que toute la matière se présentait sous la forme d'un fluide parfait sans pression F et on lui a associé un tenseur, appelé tenseur d'énergie-impulsion, défini par $\tau = \rho\vec{u} \otimes \vec{u}$ où ρ est la densité de masse de F et où \vec{u} est son champ de vecteurs unitaire associé. On a alors montré que pour retrouver les lois de la

mécanique classique lorsque l'on se place à échelle humaine, il était naturel d'imposer que le tenseur d'énergie-impulsion et la métrique soient reliés par l'équation d'Einstein (III.57).

Tout mathématicien sera gêné par cette approche et portera plutôt le regard suivant sur la théorie : on se fixe une variété lorentzienne (\mathcal{M}, g) et on définit le tenseur d'énergie-impulsion associée en posant :

$$\tau = \frac{1}{8\pi}(\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g). \quad (\text{III.62})$$

Ainsi, la matière est réduite à une définition purement géométrique, dont les caractéristiques sont contenues dans la métrique. Cette manière de voir les choses est tout à fait cohérente mais correspond réellement à un raisonnement de mathématicien : on se fixe un objet mathématique (la métrique) que l'on utilise pour définir un objet physique (la matière). Le physicien part plutôt d'un objet physique (le tenseur d'énergie-impulsion qui contient toute l'information sur la matière et à qui on attribue des propriétés différentes selon la situation parce que justement on n'est pas capable d'avoir un modèle universel de matière) et lui associe des propriétés géométriques de manière à retrouver des lois physiques cohérentes.

Arrêtons-nous un instant sur le point de vue du mathématicien. La première remarque que l'on peut faire est que si l'on se fixe une variété lorentzienne (\mathcal{M}, g) quelconque et que l'on définit le tenseur d'énergie-impulsion associé par la formule (III.62), il n'y aucune raison a priori que le τ s'écrive sous la forme $\tau = \rho \vec{u} \otimes \vec{u}$. Mais il s'agit là d'un faux problème : τ prend cette forme particulière parce qu'on a modélisé la matière par un fluide parfait sans pression mais une forme plus générale pour τ correspond à une forme de matière plus générale dans laquelle toutes les interactions auront été prises en compte. La théorie se construit de la même manière et aboutit à la même équation à condition de donner la bonne forme au tenseur d'énergie-impulsion. On va voir que toutes les grandeurs physiques de la matière, exceptées celles qui concernent l'électromagnétisme, se déduisent de cette manière. Nous n'expliquerons pas, comme nous l'avons fait dans le cas d'un fluide parfait sans pression, les raisonnements physiques qui conduisent à imposer cette forme du tenseur τ .

Le problème revient à classifier les variétés lorentziennes selon la forme de leur tenseur d'Einstein. Cette classification est faite par exemple dans [Haw73]. Soit donc τ défini par (III.62). La première remarque est qu'il n'est pas évident que la donnée du tenseur τ suffise à construire canoniquement le champ de vecteurs \vec{u} associé au fluide. On verra que c'est possible sur tout domaine où il y a effectivement de la matière (s'il y a seulement de l'électromagnétisme, cela ne suffit pas). Plaçons-nous donc sur un tel domaine. Alors, on peut démontrer qu'il existe

- (1) des fonctions A, B uniques ;
- (2) un unique 2-tenseur π à trace nulle tel que $\vec{u} \in \ker(\pi)$;
- (3) un unique champ de vecteurs \vec{q} orthogonal à \vec{u}

tels que dans une carte quelconque

$$\tau_{ij} = Au_iu_j + B(g_{ij} + u_iu_j) + \pi_{ij} + (q_iu_j + q_ju_i). \quad (\text{III.63})$$

En particulier, on remarque que $A = \tau_{ij}u^iu^j$, $B = \frac{1}{3}\tau_{ij}(g^{ij} + u^iu^j)$ et $q^i = -\tau_{jk}u^j(g^{ki} + u^ku^i)$. Sur un domaine où \vec{u} se construit canoniquement, il n'y a pas d'ambiguïté sur la définition de ces quantités. La terminologie couramment utilisée est la suivante : au point $x \in \mathcal{M}$

- $A(x)$ est la *densité d'énergie* vue par $\vec{u}(x)$ (observateur en un point) et ce, même si \vec{u} n'est pas le champ de vecteurs canonique ;
- $B(x)$ est la *pression* vue par $\vec{u}(x)$;
- π_x est le *tenseur de pression anisotrope* vu par $\vec{u}(x)$;
- $\vec{q}(x)$ est le *flux d'énergie* vu par $\vec{u}(x)$.

On va maintenant commencer la classification proprement dite. Pour respecter les conventions habituelles, on va travailler avec le tenseur d'Einstein $E = 8\pi\tau$ (on a supposé que la constante cosmologique était nulle) :

Type 0 : $E = 0$

Les domaines où le tenseur d'Einstein est identiquement nul correspondent aux parties vides de l'espace-temps. On pourrait penser que leur étude est triviale et sans intérêt mais ce n'est pas le cas (voir par exemple le Chapitre (V)).

Type I : E admet en tout point

- une valeur propre $-\mu < 0$ d'espace propre $\mathcal{E}_{-\mu}$ de dimension 1 et de genre temps ;
- une deuxième valeur propre $\lambda \in]-\mu, \mu[$ d'espace propre \mathcal{E}_λ de dimension 3 orthogonal à $\mathcal{E}_{-\mu}$.

Autrement dit, il existe une base g -orthonormée dans laquelle la matrice de E a la forme

$$E = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ces domaines représentent les parties de l'espace-temps où il y a de la matière mais pas d'électromagnétisme : on est en présence d'un fluide parfait. On définit alors sans ambiguïté

- le champ de vecteurs $\vec{u} \in \mathcal{E}_{-\mu}$ unitaire orienté positivement ;
- la densité d'énergie μ ;
- la pression du fluide λ .

Le tenseur E se décompose alors de manière unique

$$E_{ij} = \mu u_i u_j + \lambda (g_{ij} + u_i u_j).$$

Type II : E admet

- une valeur propre $-\mu < 0$ d'espace propre $\mathcal{E}_{-\mu}$ de dimension 1 et de genre temps ;
- une deuxième valeur propre λ_1 d'espace propre \mathcal{E}_{λ_1} de dimension 1 orthogonal à $\mathcal{E}_{-\mu}$;
- une troisième valeur propre λ_2 d'espace propre \mathcal{E}_{λ_2} de dimension 2 orthogonal à $\mathcal{E}_{-\mu} \oplus \mathcal{E}_{\lambda_1}$.

Autrement dit, il existe une base g -orthonormée dans laquelle la matrice de E a la forme

$$E = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Ces domaines représentent les parties de l'espace-temps où il y a à la fois de la matière et un champ électromagnétique. On définit alors sans ambiguïté

- le champ de vecteurs $\vec{u} \in \mathcal{E}_{-\mu}$ unitaire orienté positivement ;
- la densité d'énergie μ ;
- la densité d'énergie du fluide $\mu - \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$;
- la pression du fluide $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$;
- la pression électromagnétique $\frac{1}{6}(\lambda_2 - \lambda_1)$;
- le tenseur électromagnétique π à trace nulle défini par la décomposition de E ci-dessous :

$$E_{ij} = \left(\left(\mu - \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) \right) + \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) \right) u_i u_j + \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{6} \right) (g_{ij} + u_i u_j) + \pi_{ij}.$$

Type III : E admet

- une valeur propre $-\mu < 0$ d'espace propre $\mathcal{E}_{-\mu}$ de dimension 2 ;
- une deuxième valeur propre $\lambda = \mu$ d'espace propre \mathcal{E}_{μ} de dimension 2, de genre espace, orthogonal à $\mathcal{E}_{-\mu}$.

Autrement dit, il existe une base g -orthonormée dans laquelle la matrice de E a la forme

$$E = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Les domaines où le tenseur d'Einstein prend cette forme représentent les domaines vides de matière mais possédant un champ électromagnétique. Dans ces domaines, **il n'y a pas de choix canonique de \vec{u}** . On n'est donc pas capable de décrire correctement l'électromagnétisme.

Type IV : E a 0 comme seule valeur propre. L'espace propre associée \mathcal{E}_0 est de dimension 3, ne contient aucun vecteur de type temps et ses vecteurs isotropes forment un sous-espace de dimension 1 (\mathcal{E}_0 est tangent au cône de lumière).

Il existe alors une base g -orthonormée dans laquelle la matrice de E a la forme

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces domaines représentent physiquement les parties de l'espace-temps sans matière, où il y a seulement une onde électromagnétique dont la direction de propagation est donnée par la direction isotrope de \mathcal{E}_0 . Dans ce cadre, le tenseur d'Einstein prend la forme suivante :

$$G = \nu \vec{i} \otimes \vec{i} \quad (\text{III.64})$$

où $\nu > 0$ et où \vec{i} est un champ de vecteurs indiquant le sens de propagation de l'onde électromagnétique. Remarquons que l'on a fait un léger abus de notation en ne distinguant pas la forme covariante et contravariante de G . Il est important de noter que la forme (III.64) **n'est pas canonique** : si la direction du champ de vecteurs \vec{i} est fixée, il n'est défini qu'à un scalaire multiplicatif près. En effet, étant de type lumière, il ne possède pas de normalisation canonique.

REMARQUE III.65. Cette classification n'est pas complète. Nous ne donnons que les situations physiques les plus courantes. Les autres formes possible du tenseur d'énergie-impulsion sont plus difficiles à décrire.

6. Les limites de la relativité générale : l'électromagnétisme

En relativité générale, l'électromagnétisme est décrit par un 2-tenseur F qui s'ajoute au tenseur d'énergie-impulsion sous la forme suivante :

$$T_{ij} = F_{ik}F_j^k - \frac{1}{4}g_{ij}F_{kl}F^{kl}. \quad (\text{III.66})$$

Supposons maintenant que le tenseur d'énergie-impulsion soit connu explicitement dans une région de l'espace-temps. Alors on est capable de retrouver toutes les caractéristiques de la matière (Type I ou II) mais on est incapable de retrouver F à partir de la donnée de T . Une autre manière de le dire est qu'il existe une infinité de 2-tenseurs F qui donnent la même forme à T lorsqu'il est défini par (III.66). Il s'agit là d'une vraie difficulté qu'Einstein a essayé de résoudre jusqu'à sa mort : en effet, sans la forme exacte du tenseur F , on est incapable d'écrire les équations de Maxwell qui décrivent précisément les effets des champs électromagnétiques.

Des travaux existent pour combler cette lacune mais toutes les théories cohérentes ne se limitent pas au cadre strict de la relativité générale telle que décrite dans ce texte. Un moyen de faire est de considérer un fibré au-dessus de \mathcal{M} .

7. Énergie et matière sombre

L'*énergie noire* (ou *énergie sombre*) et la *matière noire* (ou *matière sombre*) constituent deux des plus grandes énigmes de la cosmologie moderne.

Commençons par l'énergie noire. D'après l'équation d'Einstein sans constante cosmologique, l'univers est en expansion. Cependant, les mesures faites montrent que cette expansion est beaucoup plus rapide qu'elle ne devrait l'être. Il semble qu'une "énergie répulsive", dont on ignore tout, agit à grande échelle pour accélérer cette expansion. Cette énergie est appelée *énergie noire*.

Passons maintenant à la matière noire. En mesurant l'intensité lumineuse d'une galaxie, on est capable de déterminer approximativement sa masse. Or toutes les mesures physiques montrent que la vitesse de rotation des galaxies spirales est beaucoup plus grande que ne le permet sa masse ainsi mesurée. Pour qu'une telle vitesse soit possible, il faut que la masse réelle de la galaxie soit beaucoup plus grande que sa celle estimée en fonction de son intensité lumineuse. Cette "matière" manquante est appelée *matière sombre* ou *matière noire*.

Aussi bien l'énergie noire que la matière noire font l'objet de recherches intensives. On pourrait classer ces recherches en deux catégories : certains pensent que ces phénomènes n'ont pas d'origine physique mais que ce sont simplement les lois mathématiques qui gouvernent l'univers (c'est-à-dire principalement l'équation d'Einstein) qui doivent être modifiées. Au contraire, certains physiciens réfutent complètement l'idée que l'énergie noire et la matière noire puissent être purement mathématiques, et que les effets observés ne soient que la manifestation d'un terme supplémentaire dans une équation. Ils cherchent donc des causes physiques à ces phénomènes, par exemple en essayant de détecter de nouvelles particules.

Nous allons plutôt discuter ici des approches mathématiques de ces problèmes. En ce qui concerne l'énergie noire, il semblerait que prendre une constante cosmologique bien choisie dans l'équation d'Einstein suffise à expliquer les observations faites. Malgré tout, nous insistons bien sur le fait que cette explication n'est pas suffisante pour de nombreux physiciens, et que des recherches physiques sont toujours activement menées sur le sujet. Pour bien comprendre pourquoi la constante cosmologique modifie les propriétés de l'univers, faisons la remarque suivante : plaçons-nous dans une région vide de l'espace-temps, c'est-à-dire un endroit où $\rho = 0$. Alors on a

$$\text{Ric} = \frac{1}{2}Rg - \Lambda g.$$

En contractant par g^{ij} des deux côtés de l'équation, on trouve $R = 4\Lambda$ c'est-à-dire que g a une courbure non nulle. En particulier, les géodésiques dans le vide ne sont pas celles d'un espace plat : cette constante Λ a pour effet de modifier les trajectoires des particules.

En ce qui concerne la matière noire, de nombreuses approches mathématiques ont été tentées. Nous expliquons ici brièvement celle très récente de Bray [Br10]. Il est difficile de dire si elle est meilleure ou non qu'une autre. Il faudrait pour cela faire des mesures précises. Le problème qui se pose lorsque quelqu'un propose un nouveau modèle est de convaincre une équipe de physiciens de faire les mesures nécessaires, ce qui, bien souvent, demande d'avoir un budget important spécifique. Néanmoins, la formulation de Bray permet de simuler numériquement des images de galaxies spirales qui d'un point de vue visuel en tout cas, sont assez convaincantes comparées aux photos des galaxies réelles (NGC1300, NGC4314, NGC3310, NGC488, M87, NGC1132). Il faut savoir que l'existence de galaxies spirales ne découle pas des équations d'Einstein et que leur existence reste à ce jour une énigme non résolue.

L'équation d'Einstein est une équation portant sur la métrique mais pas sur la connexion : à chaque métrique, on associe la connexion de Levi-Civita. L'idée de Bray est trouver une équation portant à la fois sur la métrique et la connexion. Autrement dit, à une métrique donnée, on associera une perturbation de la connexion de Levi-Civita. On verra dans le Chapitre VII que la métrique g est solution de l'équation d'Einstein dans le vide si et seulement si elle est point critique de la fonctionnelle

$$g \mapsto \int_M R dv_g.$$

L'idée est alors de considérer non plus une fonctionnelle dépendant uniquement de la métrique, mais dépendant de (g, ∇) où ∇ est une connexion. Sans rentrer dans les détails, résoudre ce problème revient à trouver une fonction f telle que

$$\begin{cases} Ric - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g & = 8\pi\mu_0 \left[2\frac{df \otimes df}{\Gamma^2} - \left(\frac{|df|^2}{\Gamma^2} + f^2 \right) g \right] \\ \square_g f & = \Gamma^2 f \end{cases}$$

où μ_0 et Γ sont des constantes universelles et où l'on a considéré le problème avec constante cosmologique Λ . La fonction f représente la densité de matière noire. La formulation présentée ici est celle d'un univers vide, c'est-à-dire sans matière baryonique (la matière habituelle, faite de particules connues). Pour un univers sans matière noire, c'est-à-dire avec $f = 0$, on retrouve l'équation d'Einstein usuelle. Remarquons que la deuxième équation est l'équation de Klein-Gordon évoquée dans le chapitre VII. On peut montrer que des solutions avec des fonctions f non nulles existent et Bray en a fait une estimation numérique, permettant de décrire l'influence de la matière noire ainsi modélisée sur la matière baryonique. Il obtient ainsi les images évoquées plus haut.

CHAPITRE IV

Le Big-Bang

Comme on va le voir, en faisant quelques hypothèses naturelles sur l'espace-temps, l'équation d'Einstein implique l'existence d'un "temps 0", c'est-à-dire d'un "commencement de l'univers". Cette découverte de Friedmann, Hubble et Lemaître, établie entre 1922 et 1927, va à l'encontre de l'intuition. Mais n'est-elle pas que pure spéculation mathématique ? D'ailleurs le terme de "Big-Bang" a été inventé à titre de sarcasme par l'astrophysicien anglais Hoyle.

Même si plusieurs éléments démontrent que la relativité générale est un bon modèle physique (citons par exemple les mirages gravitationnels ou le périhélie de Mercure évoqués dans le Chapitre V), la prédiction puis la vérification de l'existence du rayonnement cosmique vont venir confirmer cette théorie et établiront définitivement la relativité générale comme un modèle physique cohérent.

L'idée est que l'existence du Big-Bang implique que, dans l'univers primordial, la densité de matière était énorme et la température moyenne très élevée. En particulier, l'intensité lumineuse devait nécessairement y être importante. Si la théorie est vraie, que reste-t-il de cette lumière ? Gamow a prédit en 1948 qu'elle devait toujours être présente à notre époque sous forme de photons uniformément répartis dans l'univers et de longueur d'onde de l'ordre du millimètre. En 1965, on a pu vérifier l'existence de telles ondes lumineuses. L'étude de leur spectre montra par la suite leur provenance thermique, confirmant de manière frappante l'existence du Big-Bang.

1. Hypothèses

Nous nous plaçons dans l'espace-temps (\mathcal{M}, g) de la relativité générale. Le but de ce chapitre est de montrer comment l'équation d'Einstein conduit à l'existence du Big-Bang. Il est bien évidemment vain d'essayer de trouver LE tenseur d'énergie-impulsion modélisant toute la matière de l'univers. On est donc contraints de faire des hypothèses raisonnables adaptées à chaque situation physique. Dans ce chapitre, nous regardons des propriétés globales de l'espace-temps et nous nous plaçons donc à grande échelle. Nous allons supposer les faits suivants :

Hypothèse 1 : La matière dans l'univers est un fluide parfait sans pression.

Hypothèse 3 : l'univers est *spatialement homogène*. Cela fournit une notion d' "univers à un instant donné".

Hypothèse 3 : l'univers est *isotrope*. Cela signifie qu'en tout point de l'univers à un instant donné, "l'espace est le même".

On a déjà justifié l'hypothèse 1 mais il faut bien comprendre pourquoi, à grande échelle au moins, elle est physiquement raisonnable : si on voulait prendre un langage de mécanique classique qui nous est plus familier, on dirait que les forces électromagnétiques et les chocs ont une action négligeable devant l'attraction universelle (i.e. devant les conséquences de la courbure en relativité générale) quand on se place au niveau des étoiles et des galaxies. L'hypothèse 2 semble être la plus hasardeuse mais donne un sens à considérer l'univers à un instant donné. Que cette notion puisse se définir répond à une intuition commune et on s'aperçoit que dans presque toutes les situations, les physiciens s'arrangent d'une manière ou d'une autre pour introduire une notion, même vague, de temps absolu (voir aussi la version forte de la conjecture de la censure cosmique dans le Chapitre VI. L'hypothèse 3 dit que la matière est "uniformément répartie" dans l'univers. C'est faux à petit échelle : il y a évidemment plus de matière à l'intérieur d'une étoile que dans le vide qui l'entoure. Cependant, à grande échelle, on voit la matière comme les particules d'un fluide homogène. De même, si on regarde la mer, on a l'impression que l'eau qui la compose est homogène alors qu'en se plaçant à très petit échelle, il y a plus de concentration de masse dans le noyau des atomes ou les électrons que dans le vide entre ces particules. Mais à notre échelle, nous ne voyons pas ces irrégularités. Nous considérons qu'il en est de même à grande échelle avec les étoiles.

On va voir comment, de ces trois hypothèses physiquement plausibles, on déduit l'existence du Big-Bang. De nombreuses observations physiques prédites par la théorie et observées ensuite sont venues confirmer la validité de ces raisonnements (en particulier, comme expliqué plus haut, l'existence du rayonnement cosmique) et sont autant de preuves qui montrent que ces trois hypothèses sont vraies à grande échelle. On va dans un premier temps les traduire mathématiquement. Ensuite, on les étudiera pour aboutir au Big-Bang.

2. Traduction mathématique des hypothèses 1, 2 et 3

L'hypothèse 1 a été étudiée dans le chapitre précédent et conduit à travailler avec l'équation d'Einstein (III.57). Traduisons maintenant l'hypothèse 2.

DÉFINITION. Soit Ω un domaine (ouvert, connexe) de l'espace-temps \mathcal{M} . On dit que M est *spatialement homogène* s'il existe un groupe de Lie G d'isométries qui opère librement sur Ω et tel que chaque orbite de G soit une sous-variété de dimension 3 de genre espace de Ω .

En particulier, chaque $x \in \Omega$ appartient à une seule orbite que l'on notera \mathcal{E}_x qui correspond physiquement à l'univers à un instant donné t .

L'hypothèse 3 se traduit de la manière suivante :

DÉFINITION. Un domaine Ω spatialement homogène est *isotrope* si pour tout point $x \in \Omega$, il existe un groupe d'isométries H de \mathcal{E}_x (qui est par définition l'orbite de x sous G) qui laisse fixe x et tel que le groupe \hat{H} induit par H sur $(T_x(\mathcal{E}_x), g|_{\mathcal{E}_x})$ soit isomorphe à $SO(3)$.

Le résultat suivant est assez difficile à montrer mais est fondamental pour continuer.

THÉORÈME IV.67. *Soit Ω de (\mathcal{M}, g) spatialement homogène et isotrope. Alors, Ω est isométrique à $(V_1 \times V, -dt^2 + a(t)^2 \bar{g})$ où V_1 est une variété de dimension 1 (donc un intervalle ouvert de \mathbb{R} ou le cercle S^1), où V est une variété de dimension 3, où \bar{g} est à courbure sectionnelle constante sur V et où $a : V_1 \rightarrow]0, +\infty[$ est une fonction lisse.*

De tels espaces sont appelés *espaces de Robertson-Walker*.

Pour modéliser l'espace-temps, on considère que V_1 est un intervalle I ouvert. Autrement dit, on suppose (peut-être à tort) que $V_1 \neq S^1$, hypothèse qui conduirait à avoir des courbes fermées de type temps (un observateur suivant cette courbe revivrait éternellement les mêmes événements). Le fait que \bar{g} soit à courbure sectionnelle constante ne laisse pas beaucoup de choix pour V : si on suppose que V est simplement connexe et complète (ce qui physiquement paraît raisonnable), alors (V, \bar{g}) est isométrique soit à la sphère S^3 , soit à \mathbb{R}^3 soit à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 . Si on ne suppose plus la simple connexité, alors (V, \bar{g}) peut aussi être isométrique à l'un des quotients de ces trois espaces. Par contre, on peut montrer que seul l'espace projectif $\mathbb{R}P^3$ est isotrope.

Dans la suite, on travaillera donc dans $I \times V$ (I intervalle ouvert et V n'est pas précisé mais appartient à la liste ci-dessus) muni de la métrique $g := -dt^2 + a(t)\bar{g}$ où \bar{g} est une métrique sur V de courbure sectionnelle constante K .

Nous montrons le résultat suivant :

PROPOSITION IV.68.

- (1) *Le champ de vecteurs unitaire \vec{u} associé à la matière (i.e. au fluide parfait sans pression qui la modélise) est g -orthogonal en tout point aux orbites de G .*
- (2) *La distribution de masse ρ associée à la matière ne dépend que de t .*
- (3) *Soit $\omega \subset V$ un domaine relativement compact de V . Alors la masse de la matière contenue dans ω est constante en temps (évidemment on utilise pour cela la notion d'univers à un instant donné évoquée plus haut).*

REMARQUE IV.69. Ce que disent les points 2 et 3 de cette proposition d'un point de vue physique n'est bien sûr vrai qu'à grande échelle. En effet, le point 2 dit qu'à tout instant, la matière est uniformément répartie dans l'univers tandis que le point

3 assure qu'à un endroit donné, il y a toujours la même quantité de matière. C'est vraiment une propriété propre au fluide mais fausse quand on considère la matière comme une ensemble de particules.

DÉMONSTRATION.

(1) Écrivons en un point x

$$\vec{u} = \vec{u}_I + \vec{u}_V$$

où \vec{u}_I et \vec{u}_V sont tangents respectivement à I et à V . Prenons maintenant une carte (t, x_1, x_2, x_3) au voisinage de x telle

- $\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ est g -orthonormée ;
- $\frac{\partial}{\partial t}$ est le vecteur unitaire orienté positivement et g -orthogonal à \mathcal{E}_x ;
- $\frac{\partial}{\partial x_1}$ est colinéaire à \vec{u}_V .

Rappelons que d'après (III.38)

$$\tau_{ij} = \rho d\vec{u} \otimes d\vec{u}$$

(où $d\vec{u} = g(\cdot, \vec{u})$). Autrement dit, dans cette carte, on a pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$ (on note 0 la coordonnée associée à t) $\tau_{ij} = 0$ sauf si $i = j = 1$ auquel cas on a $\tau_{1,1} = \rho \|\vec{u}_V\|_g^2$. Or puisqu'on travaille dans un domaine isotrope et que τ s'exprime avec la courbure de Ricci et la métrique, le tenseur τ_x en x doit être invariant par les isométries de l'espace tangent en x à l'espace \mathcal{E}_x ce qui n'est pas le cas d'après ce qui précède sauf si $\vec{u}_V = 0$.

(2) L'équation d'Einstein dit que le tenseur τ est invariant sous l'action de G . De plus, d'après (III.38), $\rho = -\tau_{ij}g^{ij}$ donc ρ est invariante sous l'action de G ce qui montre, puisque les orbites de G sont les espaces $\{t\} \times V$ que ρ ne dépend que de t .

(3) Soit ω un domaine relativement compact de V et $t, t' \in I$ ($t < t'$) deux instants distincts. Notons $W = [t, t'] \times \omega$. Puisque $\text{div}(\rho\vec{u}) = 0$, on a, par le théorème de Stokes,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_W \text{div}(\rho\vec{u}) dv_g = \int_{[t, t'] \times \partial\omega} \rho g(\vec{u}, \vec{n}) ds_g \\ &\quad + \int_{\{t\} \times \omega} \rho g(\vec{u}, \vec{n}) ds_g + \int_{\{t'\} \times \omega} \rho g(\vec{u}, \vec{n}) ds_g. \end{aligned}$$

où dans les intégrales ci-dessus, \vec{n} et ds_g représentent respectivement le vecteur unitaire sortant g -orthogonal à l'hypersurface considérée et l'élément de volume induit par g sur l'hypersurface considérée. D'après le point 1 de cette proposition,

$$\int_{[t, t'] \times \partial\omega} \rho g(\vec{u}, \vec{n}) ds_g = 0.$$

De plus, sur $\{t\} \times \omega$, $\vec{n} = -\vec{u}$ tandis que sur $\{t'\} \times \omega$, $\vec{n} = \vec{u}$. On obtient ainsi

$$\int_{\{t\} \times \omega} \rho ds_g = \int_{\{t'\} \times \omega} \rho ds_g \tag{IV.70}$$

qui est la traduction mathématique du point 3 de la proposition.

□

On peut remarquer que comme corollaire presque immédiat de la Proposition IV.68, on obtient

COROLLAIRE IV.71. *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\rho(t) = \frac{c}{a(t)^3}$$

pour tout $t \in I$.

DÉMONSTRATION. D'après (IV.70), la fonction

$$t \mapsto \int_{\{t\} \times \omega} \rho ds_g$$

est constante sur I . Or, sur $\{t\} \times \omega$, $ds_g = a(t)^3 dv_{\bar{g}}$, ce qui fait que, avec le point 2 de la Proposition IV.68

$$\int_{\{t\} \times \omega} \rho ds_g = \rho(t) a(t)^3 \text{vol}_{\bar{g}}(w).$$

Cette expression ne dépend pas de t . Le Corollaire IV.71 s'ensuit immédiatement.

□

3. Big-bang et Big-Crunch

Dans cette section, nous étudions si les hypothèses que nous avons faites conduisent à un Big-Bang ou à un Big-Crunch. Précisons un peu ces notions. On rappelle qu'avec les notations ci-dessus "l'univers à un instant donné" a un sens. Il s'agit simplement des orbites de x sous G , c'est-à-dire des hypersurfaces de type espace de la forme $\{t\} \times V$. Dire qu'il y a un Big-Bang signifie qu'il y a un instant t_0 passé pour lequel V s'effondre sur lui-même. Plus précisément, il y a un Big-Bang si $\inf(I) > +\infty$ et si $\lim_{t \rightarrow \inf(I)} a(t) = 0$. Il y a un Big-Crunch s'il se passe le même phénomène pour un instant t_0 futur, c'est-à-dire en $\sup(I)$. L'idée est de voir à partir de l'équation d'Einstein (III.57) ce à quoi peut ressembler la fonction $a(t)$.

3.1. Mise en équation. Pour étudier la fonction $a(t)$, on va travailler dans de nouvelles coordonnées. Plus précisément, nous ferons le changement de variables

$$s = \int_{t_0}^t a^{-1}(u) du,$$

t_0 étant un point fixé de I . Remarquons que $ds^2 = a(t)^{-2} dt^2$, et donc en définissant b sur $J := s(I)$ par $b(s) = a(t)$, on a, avec cette nouvelle variable sur $J \times V$,

$$g = b(s)^2 h \quad \text{où} \quad h = -ds^2 + \bar{g}. \quad (\text{IV.72})$$

On fait alors le calcul suivant :

PROPOSITION IV.73. *On a, sur J*

$$b'' + Kb - \frac{2}{3}\Lambda b^3 = \frac{4}{3}\pi c \quad (\text{IV.74})$$

et

$$3(b')^2 b^{-1} + 3Kb - \Lambda b^3 = 8\pi c \quad (\text{IV.75})$$

où K est la courbure sectionnelle de \bar{g} , Λ est la constante de l'équation d'Einstein (III.57) et où c est la constante donnée par le Corollaire (IV.71).

REMARQUE IV.76. On peut montrer que les équations (IV.74) et (IV.75) sont les seules que l'on peut déduire de l'équation d'Einstein et des hypothèses que l'on a faites.

DÉMONSTRATION. Commençons par démontrer (IV.74). Pour cela, on rappelle l'équation de Yamabe qui lie la courbure scalaire de deux métriques conformes (valable aussi pour des métriques lorentziennes en remplaçant le laplacien par le d'Alembertien) : si M est une variété de dimension $n \geq 3$ et si $\tilde{G} = u^{\frac{4}{n-2}}G$ ($u \in C^\infty(M)$, $u > 0$) sont deux métriques conformes alors, si on note R_G et $R_{\tilde{G}}$ les courbures scalaires des métriques G et \tilde{G}

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \square_G u + R_G u = R_{\tilde{G}} u^{\frac{n+2}{n-2}} \quad (\text{IV.77})$$

(voir par exemple [Heb97]). On applique cette formule avec $n = 4$, $G = h$, $\tilde{G} = g$ et $u = b(s)^2$ (voir équation (IV.72)). Puisque $R_h = R_{-ds^2 + \bar{g}} = R_{\bar{g}} = 6K$, on obtient

$$6\square_h b + 6Kb = Rb^3$$

où R est la courbure scalaire de g . Comme b ne dépend que de la variable s , $\square_h b = b''$ (car $g_{00} = -1$). On obtient ainsi

$$6b'' + 6Kb = Rb^3. \quad (\text{IV.78})$$

En contractant l'équation d'Einstein (III.57), on a (on note R_{ij} les composantes de la courbure de Ricci de g dans une carte) :

$$g^{ij} \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \right) = g^{ij} (8\pi \tau_{ij} - \Lambda g_{ij})$$

ce qui donne puisque, d'après (III.38), $\tau_{ij} g^{ij} = -\rho$ (car $\tau_{00} = 1$ et $\tau_{ij} = 0$ si $(i, j) \neq (0, 0)$)

$$R = 8\pi\rho + 4\Lambda. \quad (\text{IV.79})$$

En reportant ce calcul dans l'équation (IV.78) et en utilisant le Corollaire (IV.71) qui dit que $\rho = cb(s)^{-3}$, on obtient l'équation (IV.74).

Passons maintenant à l'équation (IV.75). L'équation d'Einstein (III.57) et la relation (III.38) donnent que :

$$Ric^g(\vec{u}, \vec{u}) + \frac{1}{2}R - \Lambda = 8\pi\rho.$$

En utilisant (IV.78) et le fait que $\rho = cb^{-3}$, on obtient

$$Ric^g(\vec{u}, \vec{u}) = -\frac{3}{b^3}b'' - \frac{3}{b^2}K + 8\pi\frac{c}{b^3} + \Lambda. \quad (\text{IV.80})$$

Par ailleurs, la formule de la courbure de Ricci liant deux métriques conformes donne

$$Ric^g = Ric^h - \frac{2}{b}\nabla_h^2 b + \frac{4}{b^2}\nabla_h b \otimes \nabla_h b + \left(\frac{-\square_h b}{b} - \frac{h(\nabla_h b, \nabla_h b)}{b^2} \right) h.$$

Puisque b ne dépend que de s , puisque $Ric^h(\vec{u}, \vec{u}) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} Ric^g(\vec{u}, \vec{u}) &= Ric^g \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{b(s)^2} Ric^g \left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s} \right) \\ &= -\frac{3}{b^3}b'' + \frac{3}{b^4}(b')^2. \end{aligned}$$

En revenant à (IV.80), on obtient l'équation (IV.75), ce qui termine la démonstration de la proposition. \square

3.2. Le cas $\Lambda = 0$ et $K > 0$. On peut supposer pour simplifier que $K = 1$. En remplaçant K et Λ par leur valeur dans les équations (IV.74) et (IV.75), on voit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$b(s) = \alpha(1 \pm \cos(s + C)) \quad (\text{IV.81})$$

où l'on a défini $\alpha := \frac{2}{3}\pi c$. En choisissant convenablement une origine de temps, on peut supposer que $C = 0$. Puisque $b > 0$, J est au maximum un intervalle de longueur 2π . Si J est de longueur plus petite, on peut le prolonger. On va donc supposer que la variété n'est pas "prolongeable" et dans ce cas, en supposant par exemple $J =]0, 2\pi[$, b a un zéro en 0 et en 2π . Il faut maintenant en déduire ce qui se passe pour $a(t)$. C'est l'objet du résultat suivant :

PROPOSITION IV.82. *Quitte à faire une translation sur I , on peut supposer que pour tout $t \in I$,*

$$a(t) = \alpha \left(1 - \cos \left(\Theta \left(\frac{t}{\alpha} \right) \right) \right)$$

où $\Theta :]0, 2\pi[\rightarrow]0, 2\pi[$ est l'application réciproque de la fonction $v \mapsto v - \sin(v)$.

DÉMONSTRATION. On rappelle d'abord que s est défini par

$$s := s(t) = \int_{t_0}^t a^{-1}(u) du$$

où t_0 est fixé dans I . D'après (IV.81), on a pour $u \in I$

$$s'(u)b(s(u)) = \alpha(s'(u) - s'(u)\cos(s(u))).$$

En intégrant cette relation entre t_0 et t , on trouve, puisque $s(t_0) = 0$ et puisque $s'(u) = a^{-1}(u)$

$$\int_{t_0}^t a^{-1}(u)b(s(u))du = \alpha(s(t) - \sin(s(t))).$$

Or par définition de b , $a^{-1}(u)b(s(u)) = 1$. Ainsi

$$t - t_0 = \alpha(s(t) - \sin(s(t))).$$

Quitte à faire une translation en temps, on peut supposer que $0 \in I$ et prendre $t_0 = 0$. On a alors $s(t) = \Theta(\frac{t}{M})$, ce qui donne la proposition. \square

On voit alors que si I est maximum, $I =]r_0, r_1[$ où $a - b = 2\pi M$ et alors a tend vers 0 en r_0 et en r_1 .

On en déduit dans ce cas qu'il y a un Big-Bang en r_0 et un Big-Crunch en r_1 .

3.3. Le cas $\Lambda = 0$ et $K > 0$. Avec des calculs analogues, on voit qu'il y a un Big-Bang mais pas de Big-Crunch (a est prolongeable jusqu'en $+\infty$).

3.4. Le cas $\Lambda = 0$ et $K < 0$. Dans ce cas, on trouve qu'il y a un Big-Bang mais pas de Big-Crunch.

3.5. Le cas général. Il correspond au cas où $\Lambda \neq 0$. Les calculs sont plus durs mais on arrive à des résultats de même nature. Les mesures tendraient à montrer que $\Lambda > 0$ (pas si petit que ce que l'on pourrait penser) et que $K \geq 0$ est très petit. L'étude de $a(t)$ montre alors qu'il y a un Big-Bang qui s'est produit il y a environ 13.5 milliards d'années et pas de Big-Crunch. D'autres preuves physiques viennent confirmer ce résultat et montrer que les hypothèses que nous avons faites sont réalistes.

CHAPITRE V

Étoiles et trous noirs à symétrie sphérique

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié l'univers vu à grande échelle. Au contraire, maintenant, nous cherchons à comprendre ce qui se passe à proximité d'une étoile, ce qui reste dans les limites de l'observation humaine. À cette échelle, les lois de la mécanique classique sont approximativement vraies. Par ailleurs, on a vu que la constante cosmologique avait des influences globales sur l'espace-temps mais pour un problème local tel que celui-ci, nous allons la supposer nulle.

Dans cette situation, il serait évidemment absurde de considérer que l'univers est spatialement homogène. En effet, il faut distinguer l'intérieur de l'extérieur de l'objet étudié. On va même négliger l'influence de toute autre matière et donc faire l'hypothèse que l'espace-temps est vide à l'extérieur de l'étoile. Nous supposons aussi que l'espace-temps est à symétrie sphérique : cela suppose que l'étoile étudiée soit parfaitement sphérique et qu'on néglige toute rotation (auquel cas nous n'aurions eu qu'une symétrie axiale). Notre étude n'a donc aucune chance de décrire toutes les situations physiques. On pourra à titre de comparaison lire le Paragraphe 3 du Chapitre VIII où les trous noirs que l'on décrit ont une rotation non nulle.

De ces suppositions, on va déduire plusieurs choses : d'abord, sous cette seule hypothèse de symétrie sphérique, on verra que, à l'endroit où la courbure de Ricci est nulle (i.e. à l'endroit où le tenseur d'énergie-impulsion est nul, c'est-à-dire à l'extérieur de l'étoile), la métrique ne peut pas avoir n'importe quelle forme. On connaît même très bien ce à quoi elle ressemble : on l'appelle *métrique de Schwarchild*. Dès que la densité de l'étoile, c'est-à-dire le rapport de sa masse et de son volume, sera trop grande, on verra apparaître de manière naturelle des domaines particuliers, d'où ne peuvent sortir aucun rayon lumineux. Ces domaines seront appelés des *trous noirs*. On parle d'*effondrement gravitationnel*. À l'inverse, on verra apparaître des domaines qui ne laissent entrer aucune lumière. Ces domaines, appelés *trous blancs* n'ont jamais été observés physiquement. On terminera par un paragraphe décrivant ce qui se passe à l'intérieur de l'étoile.

1. Variétés lorentziennes à symétrie sphérique en espace

DÉFINITION. Une variété lorentzienne (\mathcal{M}', g) est à *symétrie sphérique en espace* s'il existe un sous-groupe G des isométries de (\mathcal{M}', g) isomorphe à $SO(3)$ tel que l'orbite de tout point de \mathcal{M}' soit une surface (sous-variété de dimension 2) de genre espace et difféomorphe à la sphère S^2 standard.

À première vue, cette définition est étonnante parce elle interdit à G d'avoir des points fixes. Une définition qui pourrait paraître plus naturelle est la suivante :

(\mathcal{M}', g) est à symétrie sphérique en espace s'il existe un observateur D tel qu'en tout point $p \in D$, l'espace vu par cet observateur (qui est une sous-variété de dimension 3 de genre espace) admet un groupe d'isométries isomorphe à $SO(3)$ tel que l'orbite de tout point $Q \neq p$ est difféomorphe à S^2 .

Dans cette définition, les points de l'observateur D sont fixes. Cependant, dans la suite \mathcal{M}' ne sera pas égale à \mathcal{M} toute entière (d'où la distinction de notation) mais au complémentaire de l'objet considéré (étoile ou trou noir). Les points fixes de G seront donc à l'extérieur de \mathcal{M}' , au coeur de l'étoile. Le résultat suivant montre que l'on connaît parfaitement les variétés lorentziennes à symétrie sphérique à l'endroit où la courbure de Ricci est nulle, ce qui correspond, puisque la constante $\Lambda = 0$, à la région sans fluide de l'espace-temps. Plus précisément, on a alors le théorème suivant (voir [Haw73] p. 369-372) dont la preuve est due à Birkhoff :

THÉORÈME V.83. *Une variété lorentzienne à symétrie sphérique et à courbure de Ricci nulle est toujours localement isométrique soit à l'espace de Minkowski (i.e. l'espace de la relativité restreinte) soit à une variété lorentzienne (Ω, g_c) où $-\Omega = \omega \times S^2$ avec*

$$\omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 < 1\}$$

et S^2 est la sphère standard

– pour tous $(p, q) \in \omega \times S^2$,

$$g_c = c^2 \left(\frac{4}{R(p)e^{R(p)}} h + R^2(p)k \right)$$

où

- h est la métrique hyperbolique standard sur $\omega \subset \mathbb{R}^2$ donnée par $h = -dx^2 + dy^2$;
- k est la métrique standard de S^2 ;
- c est une constante strictement positive ;
- pour tous $p = (x, y) \in \omega \subset \mathbb{R}^2$, $R(p) > 0$ est définie implicitement par

$$(R(p) - 1)e^{R(p)} = y^2 - x^2.$$

On peut vérifier que la courbure de Ricci de la métrique g_c est bien nulle. Par contre, la norme de la courbure de Riemann tend vers l'infini lorsqu'on se rapproche du bord de Ω , c'est-à-dire de $R = 0$, ce qui montre que Ω ne peut pas se prolonger (on dit que Ω est *inextensible*).

On écrit maintenant

$$\omega = \omega_1 \dot{\cup} \omega'_1 \dot{\cup} \omega_2 \dot{\cup} \omega'_2$$

où

$$\omega_1 := \{(x, y) \in \omega \mid y \geq |x|^2\} \quad \text{et} \quad \omega'_1 = -\omega_1;$$

$$\omega_2 = \{(x, y) \in \omega \mid y \leq -|x|^2\} \quad \text{et} \quad \omega'_2 = -\omega_2.$$

On définit aussi $\Omega_i = \omega_i \times S^2$ et $\Omega'_i = \omega'_i \times S^2$. Notons enfin

$$D_1 := \{(x, y) \in \omega \mid x = y\} \times S^2$$

et

$$D_2 := \{(x, y) \in \omega \mid x = -y\} \times S^2.$$

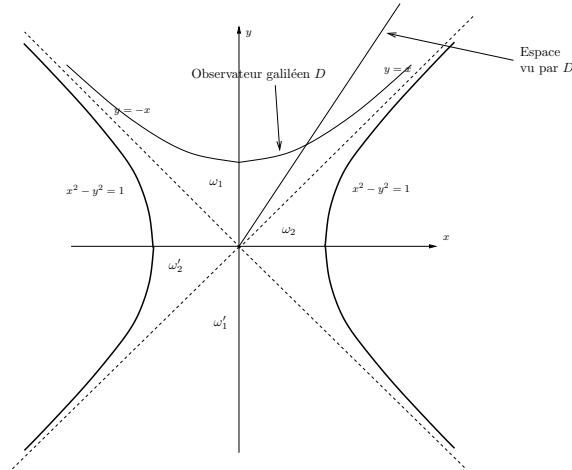


FIG. 1. L'espace de Schwarzschild

D_1 et D_2 sont des hypersurfaces de type temps (i.e. la direction orthogonale est de type espace. Voir l'appendice). Elles séparent les domaines Ω_i et Ω'_i

DÉFINITION.

- (Ω_1, g_c) est appelé l'*espace de Schwarzschild*;
- (Ω_2, g_c) est appelé un *trou noir*;
- (Ω'_2, g_c) est appelé un *trou blanc*.

REMARQUE V.84. Le domaine Ω'_1 est isométrique à Ω_1 . Nous limiterons donc notre étude à Ω_1 . De même, le domaine Ω'_2 est isométrique à Ω_2 . Par contre, leur orientation en temps est opposée, ce qui leur donne des propriétés physiques différentes.

Nous allons étudier en détail chacun de ces domaines. Avant de passer à une étude plus détaillée, expliquons rapidement vers où nous nous dirigeons. D'abord, nous verrons que l'espace de Schwarzschild est un domaine statique, c'est-à-dire un domaine dans lequel nos intuitions ont un sens. Au contraire les trous blancs et les trous noirs sont des endroits où les lois physiques sont très différentes du monde qui nous entoure. On verra que la lumière ne peut pas s'échapper d'un trou noir alors qu'au contraire, un trou blanc ne laisse entrer aucune lumière. Physiquement, on n'a jamais réussi à prouver l'existence de trous blancs.

Pour avoir une bonne image en tête, il faut imaginer les choses de la manière suivante : plaçons-nous du point de vue d'un observateur galiléen (qui existe puisque le domaine est statique) situé à grande distance de l'étoile, dans la partie "espace de Schwarzschild". Alors,

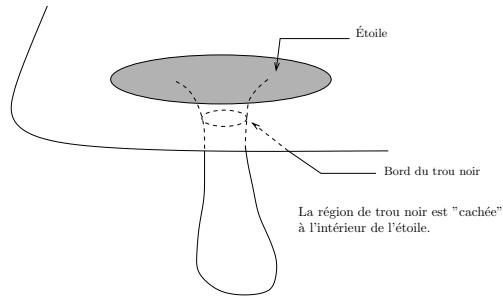


FIG. 2. Étoile à densité faible : pas de trou noir

- (1) Si l'étoile n'est pas suffisamment dense, elle occupe "plus de place" et son complémentaire se retrouve complètement dans la partie espace de Schwarzschild. Cette situation est représentée sur la Figure 2. Le trou noir est "caché" à l'intérieur de l'étoile. En fait, ce n'est pas tout à fait vrai, puisqu'à l'intérieur de l'étoile, la métrique n'est plus de Schwarzschild. Mais l'idée est qu'elle est trop grosse pour que le trou noir apparaisse.

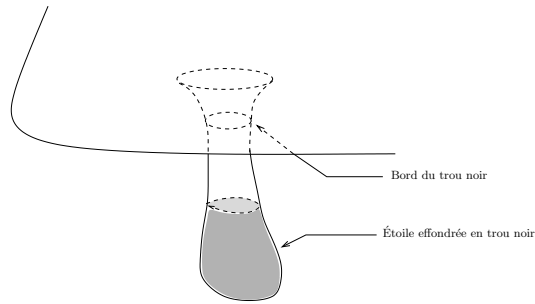


FIG. 3. Étoile à densité forte : formation d'un trou noir

- (2) Si l'étoile est dense, toute la matière est confinée dans la partie trou noir : il y a effondrement gravitationnel. Cette situation est représentée sur la Figure 3.

Comme on le verra plus loin, cette visualisation de la situation a ses limites.

2. L'espace de Schwarzschild

2.1. Remarques importantes. Tout part de la constatation suivante : définissons sur

$$\Omega' := \mathbb{R} \times]c, +\infty[\times S^2$$

la métrique g'_c définie en $(t, r, q) \in \Omega'$ par

$$g'_c = - \left(1 - \frac{c}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{c}{r}} dr^2 + r^2 k \quad (\text{V.85})$$

où l'on rappelle que k est la métrique standard sur S^2 . Alors,

PROPOSITION V.86. *L'application*

$$\varphi : \begin{cases} (\Omega_1 = \omega_1 \times S^2, g_c) & \rightarrow & (\Omega', g'_c) \\ (x, y, q) & \rightarrow & (t, r, q) := \left(c \log \left(\frac{y+x}{y-x} \right), cR, q \right) \end{cases}$$

est une isométrie.

Ce résultat est évident à démontrer mais il a plusieurs conséquences intéressantes. D'abord, pour préciser les choses, il faut voir Ω' comme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}(0, c)$ où l'on a pris les coordonnées polaires sur \mathbb{R}^3 dans une métrique un peu différente de la métrique euclidienne (elle est asymptotiquement plate : quand $r \rightarrow \infty$, on retrouve la métrique euclidienne en coordonnées polaires). Évidemment, t est la variable de temps. La variable r est une distance radiale par rapport au bord de l'étoile. En fait, r ne représente pas la distance mesurée dans \mathbb{R}^3 . En effet, la distance mesurée entre (t, r_1, q) et (t, r_2, q) est

$$\rho \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{c}{r}}}.$$

En parlant de distance mesurée dans \mathbb{R}^3 , on emploie un langage de mécanique classique ce qui est justifié au regard de la remarque suivante : définissons la métrique \bar{g}_c sur $]c, +\infty[\times S^2$

$$\bar{g}_c(r) := \frac{1}{1 - \frac{c}{r}} dr^2 + r^2 k.$$

Définissons aussi la fonction $f_c := \sqrt{1 - \frac{c}{r}}$. Le système de coordonnées (t, r, q) est une carte sur Ω_1 dans laquelle la métrique g_c prend la forme g'_c , c'est-à-dire que dans cette carte, $g_c = -f_c^2 dt^2 + \bar{g}_c$. D'autre part, t est constante sur les sous-variétés

$$\{(x, y) \in \omega_1 | x = by\} \times S^2$$

et les courbes $t \rightarrow (t, r, q)$ pour r et q fixés sont représentés dans Ω_1 par

$$\{(x, y) \in \omega_1 | y^2 - x^2 = a\} \times \{q\}$$

où a est la constante $(R-1)e^R = \left(\frac{r}{c} - 1\right) e^{\frac{r}{c}}$.

2.2. Un point sur la situation. Il découle de la Proposition V.86 que l'espace de Schwarzschild est un domaine statique dont les observateurs galiléens sont donnés par les courbes

$$\{(x, y) \in \omega_1 | y^2 - x^2 = a\} \times \{m\}$$

où $a > 0$ (si $a \in]-1, 0[$, la courbe se trouve dans la région de trou noir) et où $m \in S^2$ est fixé. L'espace vu par ces observateurs sont les sous-variétés

$$\{(x, y) \in \omega_1 | x = by\} \times S^2$$

où $b \in]-1, 1[$. La situation est représentée sur la Figure 1.

Rappelons qu'un *domaine statique* est un ouvert connexe Ω' de \mathcal{M} tel que (Ω', g') est isométrique à $(I \times \omega', \tilde{g})$ où I est un intervalle ouvert, ω' est un ouvert connexe

de \mathbb{R}^3 et où dans la “carte canonique” (donnée par l’isométrie de Ω' dans $I \times \omega'$), la matrice de g' au point $(t, x^1, x^2, x^3) \in I \times \omega'$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} -f^2(x^1, x^2, x^3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{g}_{11}(x^1, x^2, x^3) & \bar{g}_{12}(x^1, x^2, x^3) & \bar{g}_{13}(x^1, x^2, x^3) \\ 0 & \bar{g}_{21}(x^1, x^2, x^3) & \bar{g}_{22}(x^1, x^2, x^3) & \bar{g}_{23}(x^1, x^2, x^3) \\ 0 & \bar{g}_{31}(x^1, x^2, x^3) & \bar{g}_{32}(x^1, x^2, x^3) & \bar{g}_{33}(x^1, x^2, x^3) \end{pmatrix}$$

où $f, \bar{g}_{i,j} : \omega' \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) sont des fonctions. Rappelons également que Hawking a montré que l’existence d’un tel domaine statique est équivalent à l’existence d’un *champ de Killing* K (c’est-à-dire un champ de vecteurs engendrant un flot isométrique) et d’une hypersurface H de genre espace orthogonale en tout point au champ de vecteurs K . Le flot de K donne un groupe à un paramètre d’isométries dont les orbites (c’est-à-dire les courbes intégrales de K) sont g -orthogonales à H . Les courbes intégrales de K donnent des observateurs privilégiés que nous appellerons *observateurs galiléens*. Si D est un tel observateur, l’espace vu par D est à tout instant isométrique à (H, \bar{g}) où \bar{g} est la restriction de g' à H .

REMARQUE V.87.

- (1) Cette situation montre plusieurs choses. Supposons que notre étoile soit suffisamment dense pour qu’il existe une région de trou noir. Prenons un observateur galiléen. L’espace qu’il voit est le produit d’une sphère S^2 par une droite de la forme $x = by$ avec $b \in]-1, 1[$. Par conséquent, aucun observateur galiléen ne voit le bord du trou noir (on l’appelle l’*horizon*) si l’on omet $\{(0, 0)\} \times S^2$. Cela n’empêche pas un observateur non galiléen ou un photon d’entrer dans le trou noir par un autre endroit mais cela modifie un peu l’idée première que l’on peut avoir d’espace vu par un observateur qui n’a pas une interprétation physique claire. En particulier, cela montre les limites de la visualisation décrite plus haut et illustrée par les Figures 2 et 3.
- (2) La région de trou noir ressemble beaucoup, au niveau des équations qui la décrivent, à la région Ω_1 si ce n’est que les coordonnées x et y ont été échangées. Permuter une variable de type temps (la variable x) et une variable de type espace (la variable y) confère à ces deux régions des propriétés physiques très différentes. Par exemple, dans Ω_2 , les courbes

$$\{(x, y) \in \omega_1 | y^2 - x^2 = a\} \times \{m\}$$

où $a \in]-1, 0[$ sont de type espace tandis que les courbes

$$\{(x, y) \in \omega_1 | y = bx\} \times \{q\}$$

où $b \in]-1, 1[$ sont de type temps (voir la Figure 1).

On a vu en cherchant l’équation d’Einstein (voir paragraphe 4.2) que la fonction h définie par $f = 1 + h$ (ici $f_c = 1 + h$) représentait le potentiel de la mécanique newtonnienne. Dans le cas d’un objet sphérique de masse M en mécanique classique, la fonction potentielle est donnée par $\frac{-M}{r}$. Or ici, pour r grand $\frac{c}{r} \ll 1$ et $f_c(r) \sim 1 - \frac{c}{2r}$. Autrement dit

La constante $c > 0$ de g_c s'interprète comme $2M$ où M est la masse de l'objet considéré.

2.3. Géodésiques de l'espace de Schwarzschild. D'après l'axiomatique de la relativité générale, les géodésiques de genre temps vont décrire le mouvement des particules autour de l'objet considéré (il faut supposer que ces particules sont suffisamment légères pour ne pas influencer le système). Les calculs les plus simples sont obtenus en utilisant les coordonnées sphériques sur S^2 . Dans ces coordonnées (t, r, Θ, Φ) , la métrique g_c (ou g'_c) s'écrit

$$g_c = - \left(1 - \frac{c}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{c}{r}} dr^2 + r^2 (d\Theta^2 + \sin^2(\Theta)d\Phi^2).$$

Soit $(t(s), r(s), \Theta(s), \Phi(s))$ une courbe C^1 de genre temps. On montre le résultat suivant.

PROPOSITION V.88. *On suppose que l'objet considéré est de masse M (i.e. d'après le paragraphe précédent, $c = 2M$). Alors, pour tous c_1, c_2 , les solutions du systèmes suivants sont des géodésiques de genre temps :*

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad \Theta = \frac{\pi}{2} \\ b) \quad (r')^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{c_2^2}{r^2} + 1\right) = c_1^2 \\ c) \quad r^2 \varphi' = c_2 \\ d) \quad \left(1 - \frac{2M}{r}\right) t' = c_1 \end{array} \right.$$

où les ' désignent la dérivée par rapport à la variable s . Les autres géodésiques sont obtenues par action du groupe G .

Cette démonstration est évidemment calculatoire mais est très longue si on s'y prend mal. Il faut utiliser le fait que certaines quantités restent constantes le long des géodésiques. On ne la fait pas ici.

Comparaison avec les lois de Kepler : Puisque l'espace de Schwarzschild est statique, les observateurs galiléens voient toujours le même espace. En se plaçant de leur point de vue, on peut travailler dans un espace fixe à trois dimensions et comparer la situation à celle de la mécanique classique, décrite par les *lois de Kepler* qui modélisent le mouvement des étoiles. Fixons un observateur galiléen D . Vu par D l'espace-temps s'identifie à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ où \mathbb{R}^3 est muni du produit scalaire euclidien. On utilise dans \mathbb{R}^3 les coordonnées sphériques habituelles (r, Θ, Φ) et on considère un objet sphérique de masse M centré en 0. La fonction potentiel à l'extérieur de l'objet est donnée par $-M/r$. Considérons maintenant une particule dont la masse est suffisamment faible pour ne pas influencer le système (on suppose que le centre de l'objet de masse M considéré reste sur D). Notons $(r(s), \Theta(s), \Phi(s))$ la trajectoire de la particule. Les lois de Newton permettent d'écrire que

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad \Theta = c_0 \\ b) \quad (r')^2 - \frac{2M}{r} + \frac{c_2^2}{r^2} = c_1 \\ c) \quad r^2 \Phi' = c_2, \end{array} \right.$$

où $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes. L'étude des trajectoires de ce système montre que les solutions sont des coniques de foyer 0. On remarque que ces équations sont assez proches de celles obtenues dans la Proposition V.88. Cependant, cette différence rend les équations relativistes beaucoup plus difficiles à étudier. On montre que les trajectoires bornées d'une particule (dans l'espace vu par les observateurs galiléens) dans Ω_1 sont "presque" des ellipses fixes mais ne sont plus des courbes fermées. En fait, elles se comportent comme des ellipses dont l'axe tournerait légèrement à chaque rotation. Cette différence est faible mais malgré tout mesurable physiquement. Cela a été fait pour la planète Mercure : son *périhélie* (le point de son orbite le plus proche du soleil) se déplace à chaque révolution comme prédit par la théorie, confirmant ainsi la réalité physique du modèle relativiste.

Géodésiques isotropes : De la même manière, on calcule les trajectoires des photons en regardant les géodésiques de type lumière. À l'infini, elles ont un comportement de droites. On calcule avec ces équations l'angle exact α entre la trajectoire rectiligne limite quand $s \rightarrow -\infty$ et celle obtenue quand $t \rightarrow +\infty$. Cette déviation a été vérifiée expérimentalement : lors d'une éclipse de Soleil, Einstein avait prédit l'existence de *mirages gravitationnels*. Plus précisément, il pensait qu'on pourrait à cette occasion voir des étoiles se trouvant derrière le soleil, mais dont les rayons lumineux auraient été déviés comme le disent les équations ci-dessus. L'expérience a confirmé cette prédiction, donnant une preuve de plus de la validité du modèle de la relativité générale.

Pour finir, on remarquera que si on calcule avec les lois de la mécanique classique l'angle α' de déviation obtenu non plus pour un photon mais pour une particule de masse non nulle voyageant à la vitesse de la lumière, alors on trouve une grosse différence entre α et α' .

3. Trous noirs et trous blancs

On se place sur le domaine Ω_2 . On rappelle que le domaine Ω'_2 (le trou blanc) est isométrique à Ω_2 mais qu'il a une orientation en temps opposée (via cette isométrie). La première chose que l'on pourrait montrer est que ce domaine Ω_2 n'est pas statique. Autrement dit, les lois qui y existent sont éloignées de celles de la physique classique. En particulier, il n'existe aucun observateur qui voit le même espace à tout instant. On va mettre en évidence deux propriétés importantes des trous noirs et propres à ce type de domaines.

Propriété 1 : *Tout observateur de Ω_2 a une durée de vie finie.*

Propriété 2 : *Aucun photon ne peut sortir de Ω_2 (d'où la terminologie de "trou noir").*

Pour démontrer ces deux propriétés, nous allons travailler dans les coordonnées (x, y, Θ, Φ) où (x, y) sont les coordonnées canoniques de ω_2 et où (Θ, Φ) sont les

coordonnées sphériques sur S^2 . Dans ces coordonnées, la métrique g_c s'écrit :

$$g_c = c^2 \left(\frac{4}{Re^R} (-dx^2 + dy^2) + R^2 (d\Theta^2 + \sin(\Theta)^2 d\Phi^2) \right)$$

où l'on rappelle que R est définie implicitement par $(R-1)e^R = y^2 - x^2$.

Preuve de la propriété 1 : Précisons un peu la propriété 1. On va en fait montrer

Propriété 1' : Une courbe de genre temps $\gamma(s) = (x(s), y(s), \Theta(s), \Phi(s))$ paramétrée par son temps propre et dans l'orientation (i.e. $\|\gamma'(s)\|_{g_c} = -1$ et $\gamma'(s)$ orientée positivement) est toujours telle que $R(s) := R(\gamma(s))$ est strictement décroissante. Supposons de plus que γ est définie en 0. Alors, il existe $T \in]0, \pi M]$ (on rappelle que $c = 2M$), telle que $\lim_{s \rightarrow T} R(s) = 0$.

Il faut remarquer que $R(s)$ tend vers 0 revient à dire que $x(s)^2 - y(s)^2$ tend vers 1 dans Ω et donc que $\gamma(s)$ tend vers le bord du domaine Ω . Comme on l'a déjà expliqué, le bord de Ω est une singularité au sens où la norme du tenseur de Riemann y est infinie. Passons à la preuve proprement dite.

Puisque γ est orientée positivement, $x' > 0$. D'autre part, on a

$$-1 = g(\gamma', \gamma') = \frac{(2c)^2}{Re^R} ((y')^2 - (x')^2) + c^2 R^2 ((\Theta')^2 + \sin^2(\Theta) (\Phi')^2).$$

Puisque $c^2 R^2 ((\Theta')^2 + \sin^2(\Theta) (\Phi')^2) \geq 0$, on obtient

$$(y')^2 \leq (x')^2 - \frac{Re^R}{(2c)^2}$$

et donc

$$|y'| \leq \sqrt{(x')^2 - \frac{Re^R}{(2c)^2}}. \quad (\text{V.89})$$

D'autre part, par définition de R , $(R-1)e^R = y^2 - x^2$, c'est-à-dire

$$|y| = \sqrt{x^2 - (1-R)e^R}. \quad (\text{V.90})$$

En dérivant $(R-1)e^R = y^2 - x^2$ par rapport à s , on obtient $Re^R R' = 2(yy'_x x')$. En utilisant les relations (V.89) et (V.90), cela donne

$$Re^R R' \leq 2 \left(\sqrt{x^2 - (1-R)e^R} \sqrt{(x')^2 - \frac{Re^R}{(2c)^2}} - xx' \right). \quad (\text{V.91})$$

Posons $a = \sqrt{(1-R)e^R}$, $b = \frac{\sqrt{Re^R}}{2c}$ et

$$f(x) = 2 \left(\sqrt{x^2 - a^2} \sqrt{(x')^2 - b^2} - xx' \right)$$

pour $x \geq a$. Pour tout $x' > 0$ fixé, l'étude de la fonction f montre que

$$f(x) \leq f\left(\frac{x'b}{a}\right) = -2ba = -\frac{e^R}{c} \sqrt{(1-R)R}.$$

ce qui, en revenant à (V.91) montre que

$$R' \leq -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{1}{R} - 1}. \quad (\text{V.92})$$

On en déduit que $R' < 0$ et donc que R est strictement décroissante.

On peut sans restreindre la généralité supposer que γ est définie en 0 et à $t = 0$ est strictement à l'intérieur de Ω_2 (i.e. $R(0) < 1$). On atteint une singularité dès que R tend vers 0. Soit $T > 0$ en lequel γ est définie. Puisque R est strictement décroissante, $R(t) \leq R(0) < 1$ pour tout $t \in [0, T]$. Autrement dit, la courbe ne sort pas de Ω_2 . Par ailleurs puisque R est décroissante

$$R' \leq -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{1}{R(0)} - 1}.$$

Ainsi R atteint 0 en un temps fini. Pour avoir une borne explicite de ce temps, on procède de la manière suivante : R étant strictement décroissante, elle établit une bijection de $[0, T]$ sur $[R(T), R(0)]$. Notons S sa bijection réciproque. On a $S'(r) = \frac{1}{R'(S(r))}$ c'est-à-dire d'après (V.92),

$$S'(r) \geq -\frac{c}{\sqrt{\frac{1}{R(S(r))} - 1}} = -\frac{c}{\sqrt{\frac{1}{r} - 1}}$$

Or, puisque $R(0), R(T) \in]0, 1[$ ($0 < R < 1$ sur Ω_2)

$$\begin{aligned} T &= S(R(T)) - S(R(0)) \\ &= \int_{R(0)}^{R(T)} S'(u) du \\ &= - \int_{R(T)}^{R(0)} S'(u) du \\ &\leq \int_0^1 \frac{c}{\sqrt{\frac{1}{u} - 1}} du. \end{aligned}$$

En posant $R = \sin^2 u$, on obtient $T \leq \frac{\pi}{2}c$ ce qui implique la courbe γ atteint la singularité en un temps fini. Cela termine la preuve de la Propriété 1.

Preuve de la propriété 2 : La méthode est exactement la même sauf que cette fois, $c(s)$ est de genre lumière. Autrement dit, on a $g(c'(s), c'(s)) = 0$ ce qui conduit avec le même calcul à $|y'| \leq x'$ (on n'a pas défini la notion d'être orienté positivement pour une courbe de genre lumière mais la manière de le faire est évidente et conduit encore à $x' > 0$). La relation (V.90) reste vraie, mais on aura simplement besoin du fait que $|y| \leq x$ (on notera que sur Ω_2 , on a $x > 0$). De ces deux relations, on tire

$$Re^R R' = 2(yy' - xx') < 0$$

ce qui implique que $R' < 0$.

4. À l'intérieur de l'étoile

On suppose toujours qu'on a une symétrie sphérique en espace mais par contre, on suppose maintenant que l'on est en présence d'un fluide et donc que le tenseur d'énergie-impulsion n'est plus nul. Il faut prendre garde au fait que, à l'intérieur d'une étoile, on ne peut plus faire l'hypothèse que la pression est nulle. Par contre, on va négliger l'influence de tout champ électromagnétique. On est cette fois en présence d'un fluide parfait avec pression (c'est-à-dire correspondant à un tenseur d'énergie-impulsion de type II avec les notations du Paragraphe 5 du Chapitre III), dont on rappelle la définition :

DÉFINITION. Un *fluide parfait* est la donnée d'un fluide (ρ, \vec{u}) et d'une fonction $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ caractérisant la pression. Le *tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide parfait* est défini par

$$\tau = \rho \vec{u} \otimes \vec{u} + p(g + \vec{u} \otimes \vec{u}).$$

La forme que prend le tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide parfait ne sera pas justifiée ici. On montre ([**Wa84**] p. 125-135 ou [**Haw73**] p372) :

THÉORÈME V.93. *Un domaine statique d'une variété lorentzienne à symétrie sphérique en espace, contenant un fluide parfait, est localement isométrique à (Ω, G) où*

$$\Omega = \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times S^2$$

et où pour $(t, r, q) \in \Omega$,

$$G = -e^{2\varphi(r)} dt^2 + \frac{1}{1 - 2\frac{m(r)}{r}} dr^2 + r^2 k$$

avec

$$p'(r) = \frac{(\rho(r) + p(r))(m(r) + 4\pi p(r)r^3)}{r(r - 2m(r))}, \quad (\text{V.94})$$

$$m(r) = 4\pi \int_0^R \rho(u)u^2 du < \frac{r}{2} \quad (\text{V.95})$$

et

$$\varphi'(r) = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r(r - 2m(r))}. \quad (\text{V.96})$$

Ici, p' et φ' désignent les dérivées de p et φ par rapport à r .

Si l'on connaît la pression p en fonction de la densité de masse ρ , alors les équations différentielles (V.94) et (V.95) déterminent p et m (et donc ρ) en fonction de r . Puis (V.96) permet de déterminer φ . Pour déterminer ces fonctions, on se sert du fait qu'il existe $r_0 > 0$ tel que pour $r \geq r_0$, on est dans la partie sans fluide (Schwarzschild ou trou noir) ce qui donne des conditions au bord et permet de résoudre ces équations.

Si les équations (V.94) et (V.95) ne sont pas résolubles avec $m(r) < r/2$, cela signifie que l'espace-temps représentant l'étoile n'est pas statique et que l'étoile évolue avec le temps. L'étude est alors beaucoup plus compliquée. Regardons, lorsque le théorème s'applique, le cas particulier d'un fluide incompressible, ce qu'on traduit par le fait que la densité de masse est constante à l'intérieur de l'étoile i.e. $\rho = \rho_0$ pour $r \leq r_0$ et $\rho = 0$ si $r > r_0$ (donc ρ n'est pas continue, ce qui implique que m est dérivable mais pas C^1). Les équations (V.94), (V.95) et (V.96) se résolvent assez facilement et on trouve

$$p(r) = \rho_0 \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{c}{r_0}} - \sqrt{1 - \frac{cr^2}{r_0^3}}}{\sqrt{1 - \frac{cr^2}{r_0^3}} - 3\sqrt{1 - \frac{c}{r_0}}} \right).$$

Ici $c = 2M$ où M est la masse de l'étoile. En particulier, la pression au centre de l'étoile est

$$p(0) = \rho_0 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{c}{r_0}}}{3\sqrt{1 - \frac{c}{r_0}} - 1} \right).$$

Cela signifie en particulier qu'une étoile (dont le fluide est incompressible) ne peut être stable que si $3\sqrt{1 - \frac{c}{r_0}} - 1 > 0$ c'est-à-dire si $r_0 > \frac{9}{4}M$. On pourrait en fait montrer un résultat similaire pour des fluides compressibles.

CHAPITRE VI

Problème de Cauchy en relativité générale

Ce chapitre s'intéresse à la notion de prédictibilité en relativité générale. Dans quelle mesure un observateur peut-il prédire l'avenir ou au contraire déduire le passé en connaissant le présent ? D'un point de vue mathématique, le problème se traduit facilement : soit Σ une surface de type espace (sur laquelle il faudra tout de même mettre plusieurs hypothèses) qui peut s'interpréter comme l'espace vu par un observateur à un instant donné et sur laquelle la métrique est connue (c'est-à-dire que l'on a une description complète du présent de cet observateur). Existe-il un unique espace-temps dans lequel Σ se plonge de manière isométrique ? L'existence (dont il faut préciser le sens) dit simplement que le présent est réaliste. L'unicité (dont il faudra là aussi préciser le sens) par contre est bien plus intéressante : elle dit que le présent détermine complètement le futur et le passé. Outre cet aspect, ce chapitre présente la formulation de la relativité générale par conditions initiales. C'est un point de vue fréquemment adopté par les livres et qu'il faut connaître. Par ailleurs, cette démarche nous conduira à un problème mathématique d'analyse activement étudié à l'heure actuelle : les équations de contraintes dont nous donnons ici une résolution partielle.

1. Structure causale de l'espace-temps

Comme expliqué ci-dessus, le but de ce chapitre est d'étudier dans quelle mesure le présent détermine le futur et le passé. Pour cela, il convient de se placer dans un espace-temps réaliste et de faire quelques hypothèses.

1.1. Hypothèses de causalité. Pour arriver au but ci-dessus, il faut fixer un cadre de travail réaliste. En particulier, les deux premières idées qui viennent à l'esprit sont les suivantes :

- (1) Les notions de "passé" et "futur" doivent être bien définies. C'est une hypothèse que l'on a déjà faite qui se traduit mathématiquement par l'orientabilité en temps. Remarquons qu'elle implique l'existence globale d'un champ de vecteurs \vec{t} de type temps dans l'orientation (il suffit de le construire localement et d'utiliser la paracompacité de M).
- (2) On va supposer aussi qu'il n'y a pas de courbes fermées de type temps pour qu'un observateur ne puisse pas revivre éternellement les mêmes événements. Quand au contraire, il existe de telles courbes, on parle de *violation de la causalité*.

Un exemple mathématique où il y a violation de la causalité est $\mathcal{M} := S^1 \times \mathbb{R}^3$ muni de la métrique plate de Minkowski. Cependant, cette hypothèse n'est pas suffisante : on peut construire des exemples d'espaces-temps (\mathcal{M}, g) pour lesquels la

causalité n'est pas violée mais qui possèdent des courbes fermées qui sont "presque" de type temps : plus précisément il existe une suite de métriques $(g_n)_n$ qui tend vers g et telle que pour tout n , la causalité est violée sur (\mathcal{M}, g_n) . Pour éviter ce genre de situation, Il semble que la bonne hypothèse soit :

DÉFINITION. On dit que l'espace-temps (\mathcal{M}, g) est *causalement stable* s'il existe un champ de vecteurs \vec{t} de type temps tel que la causalité n'est pas violée sur (\mathcal{M}, \tilde{g}) où la métrique \tilde{g} est définie par

$$\tilde{g} := g - d\vec{t} \otimes d\vec{t},$$

$d\vec{t}$ étant la 1-forme canoniquement associée à \vec{t} .

L'idée ici est de construire une métrique \tilde{g} dont le cône de lumière en chaque point (c'est-à-dire les vecteurs de type lumière ou temps) est strictement plus gros que celui de g . Si maintenant une courbe fermée est presque de type temps pour g , elle sera de type temps pour \tilde{g} ce qui contredira l'hypothèse ci-dessus. On peut montrer de manière rigoureuse (voir [Haw73] section 6.4) que :

THÉORÈME VI.97. *L'espace-temps (\mathcal{M}, g) est causalement stable si et seulement si il existe une fonction $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable dont le gradient est en tout point de type temps.*

Ce résultat dit que l'hypothèse de causalité stable a de "bonnes conséquences" : en particulier elle implique l'hypothèse de *causalité forte* qui dit que pour tout $p \in \mathcal{M}$, il existe un voisinage V de p tel que toute courbe de type temps intersecte V au plus une seule fois. Pour le montrer, il suffit de voir que la fonction f est strictement croissante le long de toute courbe de type temps. Ainsi si une courbe γ de type temps est telle que $\gamma_{t_0} = p \in \mathcal{M}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir un voisinage V_ε de p tel que sur V_ε , on a

$$f(\gamma(t_0) - \varepsilon) < f < f(\gamma(t_0) + \varepsilon).$$

On est alors assuré que pour $t \geq t_0 + \varepsilon$ et $t \leq t_0 - \varepsilon$, la courbe γ n'intersectera plus V_ε .

1.2. Variétés lorentziennes globalement hyperboliques. Il est naturel d'étudier d'abord l'influence d'un événement sur l'espace-temps. En particulier, la vitesse de la lumière étant une barrière absolue, un événement a une influence sur une portion limitée de l'espace-temps : celle qu'il peut atteindre sans dépasser cette vitesse. Il est donc naturel d'introduire les définitions suivantes :

DÉFINITION. Soit $S \subset \mathcal{M}$ un ensemble. On définit :

- (1) Le *futur chronologique* (resp. *passé chronologique*) $I^+(S)$ (resp. $I^-(S)$) de S est l'ensemble des points p tels qu'il existe une courbe γ de type temps orientée positivement (resp. négativement) telle que $\gamma(0) \in S$ et $\gamma(1) = p$. Remarquons qu'avec cette définition, $p \notin I^\pm(S)$.
- (2) Le *futur causal* (resp. *passé causal*) $J^+(S)$ (resp. $J^-(S)$) est défini comme $I^+(S)$ (resp. $I^-(S)$) à la différence que γ peut aussi être de type lumière.

Ces ensembles, dont nous donnons la définition parce qu'ils apparaissent fréquemment dans la littérature, sont les parties de l'espace-temps qui peuvent être influencées par ce qui se passe dans S . Selon que l'on admet que les événements puissent se déplacer à la vitesse de la lumière ou non, on considérera $J^\pm(S)$ ou $I^\pm(S)$. Ces ensembles ont certaines propriétés topologiques qui ne nous intéressent pas ici : pour l'objet de ce chapitre, c'est-à-dire le problème de prédictibilité, ce ne sont pas les bons ensembles à considérer. Imaginons que S soit l'espace vu par un observateur à un instant donné. On n'a alors aucune chance de prédire ce qui se passe sur $I^+(S)$ ou $J^+(S)$. On sait juste que ce qui se passe sur S influence ce qui se passe sur ces deux ensembles mais ils peuvent aussi recevoir l'influence d'événements extérieurs à S . Pour le problème de prédictibilité, on s'intéresse plutôt au *domaine de dépendance de S* défini de la manière suivante :

DÉFINITION. Le *domaine de dépendance futur* (resp. *domaine de dépendance passé*) $D^+(S)$ (resp. $D^-(S)$) de S est l'ensemble des points $p \in \mathcal{M}$ tels que toute courbe γ issue de p de type temps inextensible (qui n'admet pas de prolongement) vers le passé coupe S .

En d'autres termes, $D^+(S)$ est l'ensemble des points qui ne dépendent que de S . En ce qui concerne la surface S dont on étudie l'indépendance, il est naturel de considérer qu'elle ne s'influence pas elle-même. Plus précisément,

DÉFINITION. On dit qu'une surface S est *achronale* si pour tous $q, p \in S$, p et q ne peuvent pas être joints par une courbe de type temps ou de manière équivalente, si $I^+(S) \cap S = \emptyset$.

Pour en finir avec les définitions, on considère qu'un espace-temps réaliste possède la propriété suivante (voir le Paragraphe 2.2) : si \mathcal{E} est l'espace vu par un observateur à un instant donné, tout autre observateur croisera \mathcal{E} au cours de sa vie. On donne donc les définitions suivantes :

DÉFINITION. Une surface S est une *surface de Cauchy* si elle est achronale et si son domaine de dépendance $D^+(S) \cup D^-(S)$ est \mathcal{M} tout entier. Une variété lorentzienne qui possède une surface de Cauchy est dite *globalement hyperbolique*.

On peut montrer que les surfaces de Cauchy sont des hypersurfaces de classe C^0 de l'espace-temps. Mais c'est surtout le théorème suivant qui est très important : il décrit de manière précise la topologie des variétés globalement hyperboliques :

THÉORÈME VI.98. *Soit (\mathcal{M}, g) un espace-temps globalement hyperbolique. Alors, (\mathcal{M}, g) est causalement stable. De plus, il existe une fonction globale $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dont les surfaces de niveau sont des surfaces de Cauchy homéomorphes deux à deux. En particulier, \mathcal{M} est homéomorphe à un produit $\mathcal{M} = I \times \Sigma$ où I est un intervalle et où Σ est une surface de Cauchy de (\mathcal{M}, g) .*

Quelques mots sur la preuve : On commence par se donner une mesure quelconque μ sur \mathcal{M} telle que $\mu(\mathcal{M}) < +\infty$). On définit

$$f^-(p) = \mu(J^-(p)), \quad f^+(p) = \mu(J^+(p)) \quad \text{et} \quad f(p) = \frac{f^-(p)}{f^+(p)}$$

pour tout $p \in \mathcal{M}$. Clairement, f^- est strictement croissante le long des courbes de type temps car si γ est une telle courbe et si $t < t'$, on a $J^-(t) \subset J^-(t')$. Ainsi, f^- a un gradient qui est partout de type temps, ce qui implique d'après le Théorème (VI.97) que (\mathcal{M}, g) est causalement stable.

Soit maintenant $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I est un intervalle) une courbe de type temps inextensible. On va montrer que les courbes de niveau de f sont des surfaces de Cauchy. Pour cela, il suffit de vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, il existe t telle $f(\gamma(t)) = a$. Plus précisément, on va voir que $\lim_{t \rightarrow \inf(I)} f(\gamma(t)) = 0$ et que $\lim_{t \rightarrow \sup(I)} f(\gamma(t)) = +\infty$. D'abord, f est clairement croissante. Supposons que $\lim_{t \rightarrow \inf(I)} f(\gamma(t)) = c > -\infty$. La définition de f implique que $Z := \bigcap_{t \in I} J^-(\gamma(t)) \neq \emptyset$. Prenons une suite (t_n) qui tend vers $\inf(I)$. On voit alors que $\gamma(t_n)$ a une limite dans Z ce qui implique que la courbe γ possède un point de départ et contredit le fait qu'elle est inextensible.

L'hyperbolicité globale dans cette démonstration sert à démontrer des points qui semblent intuitivement vrais (par exemple que les fonctions f^- , f^+ et f peuvent être considérées comme étant différentiables ou encore que la suite $\gamma(t_n)$ a une limite) mais dont la preuve est plus subtile qu'il n'y paraît.

2. Formulation de la relativité générale par conditions initiales

2.1. Formulation du problème. Soit (\mathcal{M}, g) un espace-temps et Σ une hypersurface de type espace. Supposons que la métrique g soit connue sur Σ . Alors, peut-on en déduire g sur tout \mathcal{M} ? Autrement dit, le présent étant connu, peut-on en déduire le passé et l'avenir, et ce, de manière unique? La première remarque est que pour avoir une chance que cela soit vrai, il faut que \mathcal{M} tout entier ne dépende que de Σ , autrement dit, que $D^+(\Sigma) \cap D^-(\Sigma) = \mathcal{M}$. Puisque Σ est de type espace, elle est achronale et comme son domaine de dépendance est \mathcal{M} tout entier, l'espace-temps (\mathcal{M}, g) est globalement hyperbolique. En particulier, d'après le Théorème VI.98, \mathcal{M} est homéomorphe à $I \times \Sigma$ où I est un intervalle. Quitte à faire une translation en temps, Σ s'identifie à $\{0\} \times \Sigma$. L'idée est de voir $g_t = g|_{\{t\} \times \Sigma}$ comme une quantité sur une variété fixée Σ et qui évolue dans le temps.

Il y a un problème avec cette manière de procéder : g_t est définie sur $T\mathcal{M}|_{\{t\} \times \Sigma}$. Or il n'y a pas de manière canonique d'identifier ces espaces tangents pour deux valeurs de t différentes. L'idée est alors de travailler avec h_t que l'on définit comme la restriction de g_t à l'espace tangent de $T(\{t\} \times \Sigma)$ (qui s'identifie de manière canonique à $T\Sigma$) et K_t , la deuxième fondamentale de $\{t\} \times \Sigma$ dans (\mathcal{M}, g) .

DÉFINITION. On dira qu'un triplet (Σ, h_0, K_0) est une condition initiale pour la relativité générale si Σ est une variété de dimension 3, si h_0 est une métrique riemannienne sur Σ et si K_0 est un 2-tenseur symétrique sur Σ .

Le problème se reformule alors de la manière suivante :

Formulation 1 (provisoire) : On considère la condition initiale (Σ, h_0, K_0) . La métrique g (définie sur $\{t\} \times \Sigma$ par h_t et K_t) est-elle entièrement déterminée sur

\mathcal{M} si on suppose que $g|_{T(\{0\} \times \Sigma)} = h_0$ et que la deuxième forme fondamentale de $\{0\} \times \Sigma$ dans (\mathcal{M}, g) est K_0 ?

Pour obtenir une forme quelconque d'unicité, il faut supposer que l'espace-temps (\mathcal{M}, g) est le plus grand possible, condition sans laquelle tout domaine de (\mathcal{M}, g) contenant Σ répond à la question. On va donc reformuler le problème de la manière suivante :

Formulation 2 (provisoire) : On considère une condition initiale (Σ, h_0, K_0) . Existe-t-il un espace-temps (\mathcal{M}, g) maximal unique (le sens sera précisé plus loin), g vérifiant l'équation d'Einstein, tel que (Σ, h_0) se plonge isométriquement dans (\mathcal{M}, g) avec seconde forme fondamentale K_0 ?

La question ci-dessus n'a de sens que si l'on précise ce que l'on impose sur le tenseur d'énergie-impulsion. Dans cette discussion, on va se limiter aux espaces-temps vides. On impose la nullité du tenseur d'énergie-impulsion. Alors, on déduit de l'équation d'Einstein que :

$$R_{h_0} + (tr_{h_0}(K_0))^2 - |K_0|_{h_0}^2 = 0. \quad (\text{contrainte des moments}) \quad (\text{VI.99})$$

et

$$\nabla^i K_{ij} - \nabla_j tr_{h_0}(K_0) = 0 \quad (\text{contrainte hamiltonnienne}) \quad (\text{VI.100})$$

Ces contraintes proviennent de la formulation hamiltonnienne de la relativité générale mais peuvent aussi se déduire des équations de Gauss et Codazzi (voir la Remarque VII.139) En particulier, il faut donc encore une fois changer la formulation du problème :

Formulation finale On considère une condition initiale (Σ, h_0, K_0) telle que les équations (VI.99) et (VI.100) soient satisfaites. Existe-t-il un espace-temps (\mathcal{M}, g) maximal (le sens sera précisé plus loin), g vérifiant l'équation d'Einstein, tel que (Σ, h_0) se plonge isométriquement dans (\mathcal{M}, g) avec seconde forme fondamentale K_0 ?

Le théorème suivant montre qu'un tel espace-temps existe :

THÉORÈME VI.101. *On considère la condition initiale (Σ, h_0, K_0) où Σ est une variété de dimension 3, h_0 une métrique riemannienne et K_0 est un 2-tenseur symétrique sur Σ tels que les équations (VI.99) et (VI.100) soient satisfaites. Alors il existe un espace-temps (\mathcal{M}, g) orienté et un plongement $\Theta : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$ qui vérifient :*

- (1) (\mathcal{M}, g) est à courbure de Ricci nulle i.e. l'équation d'Einstein du vide est vérifiée ;
- (2) $\Theta(\Sigma)$ est une surface de Cauchy de (\mathcal{M}, g) (qui par conséquent est globalement hyperbolique) ;
- (3) $\Theta^*g = h_0$ et la seconde forme fondamentale du plongement $\Theta(\Sigma)$ est égale à K_0 ;

- (4) si (\mathcal{M}', g') et $\Theta' : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}'$ sont respectivement un autre espace-temps et un plongement qui satisfont les conditions ci-dessus, alors (\mathcal{M}', g') se plonge isométriquement dans (\mathcal{M}, g) et via ce plongement, les images de Σ par Θ et Θ' sont confondues.

Un théorème similaire existe lorsqu'on ne suppose plus que le tenseur d'énergie-impulsion est nul. Ces résultats sont dus à Choquet-Bruhat [FB52] et à Choquet-Bruhat-Geroch [CBG69].

DÉFINITION. L'espace-temps donné par le théorème ci-dessus s'appelle le *développement de Cauchy maximal* associé aux conditions initiales (Σ, h_0, K_0) .

2.2. La conjecture de la censure cosmique (version forte). Le Théorème VI.101 ne résout pas complètement le problème de prédictibilité qui consiste à savoir si le présent détermine entièrement le passé et le futur. En effet, étant données des conditions initiales (Σ, h_0, K_0) , le développement de Cauchy maximal (\mathcal{M}, g) associé est unique mais rien ne dit que ce développement n'est pas plongé isométriquement dans un espace-temps plus grand (\mathcal{M}', g') . Le domaine $\mathcal{M}' \setminus \mathcal{M}$ n'est pas a priori déterminé par le présent. Penrose a conjecturé que l'hypothèse suivante est vraie :

Conjecture de la censure cosmique (version forte) : *Dans un espace-temps raisonnable, le présent détermine complètement le passé et l'avenir. Autrement dit, tout espace-temps raisonnable est globalement hyperbolique. Une troisième manière de le dire est que tout développement de Cauchy maximal est inextensible (c'est-à-dire qu'il ne se plonge pas isométriquement dans un espace-temps plus grand).*

Nous verrons dans le Chapitre VIII une version faible de la conjecture de la censure cosmique qui, malgré la terminologie, est indépendante de celle-ci.

Compte-tenu du Théorème (VI.101), à chaque fois que l'on est capable de construire une condition initiale (Σ, h, K) vérifiant les équations de contraintes (VI.99) et (VI.100), on obtient une solution de l'équation d'Einstein du vide. Dans cette section, on montre comment construire de telles conditions initiales. On arrive alors à un problème purement mathématique. Les paragraphes qui suivent présentent cet aspect.

3. La méthode conforme

Cette méthode a été développée par Choquet-Bruhat, Lichnerowicz et York. Fixons une variété Σ de dimension 3 et cherchons h' et K' vérifiant les équations de contraintes (VI.99) et (VI.100). Le problème est sous-déterminé ce qui va nous permettre de faire des choix simplifiant considérablement les équations. En particulier, à la place de chercher la métrique h' dans l'ensemble de toutes les métriques riemanniennes sur Σ , on va la chercher dans une classe conforme. On fixe donc une métrique riemannienne h sur Σ et on cherche h' de la forme $h' := \varphi^4 h$ où $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$

est régulière, strictement positive.

Écrivons $K' = \frac{1}{3}\tau h' + \sigma'$ où $\tau = \text{tr}_h(\sigma)$ représente la courbure moyenne du plongement de Σ dans (\mathcal{M}, g) que l'on obtiendra grâce au Théorème (VI.101) et où σ' est la partie sans trace de K' . L'équation (VI.100) devient alors

$$(\nabla')^i \sigma_{ij} - \frac{2}{3}(\nabla')_j \tau = 0 \quad (\text{VI.102})$$

où ∇' est la connexion de Levi-Civita de la métrique h' .

Définissons σ'' par $\sigma'' = \varphi^2 \sigma'$. On calcule que

$$\varphi^{-6} \nabla^i \sigma_{ij} - \frac{2}{3} \nabla_j \tau = 0 \quad (\text{VI.103})$$

où cette fois, ∇ est la connexion de Levi-Civita de la métrique h . On va encore faire une simplification : on va supposer que σ'' s'écrit $\sigma'' = \sigma + LW$. Ici, σ est un 2-tenseur symétrique à trace et divergence nulles (ce type de tenseur s'appelle un *TT-tenseur*), W est une 1-forme et l'opérateur L est défini par

$$LW = \nabla_i W_j + \nabla_j W_i - \frac{2}{3} \nabla^k W_k h_{ij}.$$

L'opérateur L s'appelle l'*opérateur de Killing conforme*. Son noyau est composé des 1-formes dont le champ de vecteurs associé est un champ conforme. Rappelons qu'un champ de vecteurs est conforme si son flot fournit une famille de difféomorphismes conformes. On peut vérifier que le dual de L est la divergence relative à h ce qui implique qu'avec ces notations, l'équation (VI.103) devient

$$L^* LW = \frac{2}{3} \varphi^6 d\tau. \quad (\text{VI.104})$$

Il est important de noter que l'opérateur L^*L est elliptique.

On regarde maintenant l'équation (VI.99) que l'on transforme grâce à la formule de changement conforme de la courbure scalaire (IV.77) (appliquée cette fois pour une métrique riemannienne) :

$$\begin{aligned} 0 &= R_{h'} - |K'|_{h'} + (\text{tr}_{h'}(K'))^2 \\ &= \varphi^{-5}(8\Delta_h \Phi + R_h \varphi) - \frac{1}{3}\tau^2 - |\sigma'|_{h'}^2 + \tau^2 \\ &= \varphi^{-5}(8\Delta_h \Phi + R_h \varphi) - \frac{1}{3}\tau^2 - |LW + \sigma|_h^2 \varphi^{-12} + \tau^2 \end{aligned}$$

En multipliant cette équation par φ^5 , on obtient l'*équation de Lichnerowicz* :

$$8\Delta_h \varphi + R_h \varphi = -\frac{2}{3}\tau^2 \varphi^5 + |LW + \sigma|_h^2 \varphi^{-7}.$$

Cette équation avec l'équation (VI.104) sont appelées les *équations de contraintes conformes*.

En résumé : soient h une métrique riemannienne sur Σ , τ une fonction, σ un 2-tenseur symétrique sans trace et à divergence nulle. Si on trouve une fonction strictement positive φ et une 1-forme W solutions de

$$\begin{aligned} 8\Delta_h\varphi + R_h\varphi &= -\frac{2}{3}\tau^2\varphi^5 + |LW + \sigma|_h^2\varphi^{-7} \\ L^*LW &= \frac{2}{3}\varphi^6 d\tau, \end{aligned} \tag{VI.105}$$

alors $(\Sigma, \varphi^4 h, \frac{1}{3}\tau\varphi^4 h + \varphi^{-2}(\sigma + LW))$ est une condition initiale pour la relativité générale vérifiant les équations de contraintes (VI.99) et (VI.100). On obtient ainsi une solution de l'équation d'Einstein dans le vide.

4. Une méthode de résolution des équations de contrainte conformes

Nous présentons une méthode développée par M. Dahl, R. Gicquaud et l'auteur lorsque la variété Σ est compacte. D'autres méthodes existent, par exemple celles de [BI04], de [IOM04] ou de [M08] (la liste n'est pas exhaustive) mais la méthode proposée ici a l'avantage de requérir des hypothèses plus explicites que les autres. Dans le cas non compact, citons aussi les jolis résultats de Gicquaud [Gi09] et Gicquaud-Sakovich [GS10] et dans le cas où le tenseur d'énergie-impulsion n'est plus nul, ceux de Druet, Hebey [DH09]. Dans ce dernier cas, les équations de contraintes conformes ont un terme supplémentaire qui rend leur résolution beaucoup plus difficile. Il peut alors être naturel de découpler les équations et de n'étudier que l'équation de Lichnerowicz. Pour une telle approche, on pourra par exemple se référer à Hebey, Pacard et Pollack [HPP08].

Peut-être n'est-il pas inutile de s'arrêter quelques instants sur la cohérence physique de la compacité de Σ . Autrement dit, est-il plausible de penser que l'univers est compact? La plupart des travaux de cosmologie prennent comme cadre un univers au contraire non compact. Malgré tout, la cas compact est parfois envisagé : par exemple, Jean-Pierre Luminet [Lu01] a travaillé dans cette direction. L'un des arguments qu'il utilise pour justifier son travail, outre l'intérêt scientifique de la démarche, est le suivant : supposons que l'univers est infini. Comme dans un volume donné, il existe un nombre de configurations de particules certes très grand, mais fini, cela signifie que chacune de ces configurations a une probabilité très grande (en fait, cette probabilité vaut 1) d'être répétée une infinité de fois. Autrement dit, dans le cadre d'un univers infini, il est très probable qu'il existe en ce moment quelqu'un qui vous ressemble trait pour trait et qui est en train de lire le même texte que vous. Même si ce raisonnement est approximatif sur bien des points, on peut se convaincre en s'y penchant un peu plus profondément, qu'il n'est pas si absurde qu'on pourrait le penser. Nous n'allons pas poursuivre plus loin cette discussion puisque la compacité éventuelle de l'univers n'est que pure spéculation, mais il faut avoir en tête qu'un univers fini reste de l'ordre du possible.

Revenons donc à notre problème. D'après le paragraphe précédent, les données du problème sont, sur la variété Σ :

- une métrique riemannienne h ,

- un 2-tenseur σ symétrique, à divergence et à trace nulle,
 - une fonction régulière τ ,
- et on cherche à trouver
- une fonction strictement positive φ ,
 - une 1-forme W ,

qui satisfont les équations de contrainte conformes :

$$8\Delta\varphi + R\varphi = -\frac{2}{3}\tau^2\varphi^5 + |\sigma + LW|^2\varphi^{-7}, \quad (\text{VI.106})$$

$$L^*LW = \frac{2}{3}\varphi^6 d\tau. \quad (\text{VI.107})$$

Pour simplifier les notations, on a noté R la courbure scalaire de h et on ne précise pas la dépendance du laplacien Δ par rapport à h . On définit

$$C_h := \inf \frac{(\int_{\Sigma} |LV|^2 dv)^{1/2}}{(\int_{\Sigma} |V|^6 dv)^{1/6}}$$

(on note dv l'élément de volume de h) où l'infimum est à prendre sur tous les champs de vecteurs V sur σ non identiquement nuls. Des estimées elliptiques standard montrent que la constante C_h est strictement positive s'il n'existe aucun champ de Killing sur (Σ, h) . On montre alors que

THÉORÈME VI.108. *On suppose que τ ne s'annule pas sur Σ que $\sigma \neq 0$ et que (Σ, h) ne possède aucun champ de Killing conforme. Alors, si*

$$\left\| \frac{d\tau}{\tau} \right\|_{L^3(\Sigma)} < \sqrt{\frac{3}{2}} C_h,$$

le système d'équation (VI.106)–(VI.107) admet une solution (φ, W) où $\varphi > 0$.

COROLLAIRE VI.109. *On suppose que τ ne s'annule pas sur Σ , que $R > 0$ et que (Σ, h) ne possède aucun champ de Killing. Alors, si*

$$\left\| \frac{d\tau}{\tau} \right\|_{L^3(\Sigma)} < \sqrt{\frac{3}{2}} C_h,$$

le système d'équations (VI.106)–(VI.107) admet une solution (φ, W) où $\varphi > 0$ si et seulement si $\sigma \neq 0$.

4.1. Démonstration du Théorème VI.108. Dans tout ce paragraphe, on suppose que τ ne s'annule pas sur Σ et que $\sigma \neq 0$. On suppose aussi que

$$\left\| \frac{d\tau}{\tau} \right\|_{L^3(\Sigma)} < \sqrt{\frac{3}{2}} C_h \quad (\text{VI.110})$$

On va montrer que le système (VI.106)–(VI.107) admet alors un couple de solutions (φ, W) où $\varphi > 0$. La preuve se déroule en plusieurs étapes. D'abord, on peut vérifier l'invariance conforme du problème : l'existence de solutions dépend seulement de la classe conforme de h . D'après la solution du problème de Yamabe (voir par exemple [Aub98]), on peut supposer que la courbure scalaire R est constante égale à -1 , 0 ou 1 .

4.1.1. *Le système sous-critique.* L'idée d'étudier ce système a été suggérée par Jim Isenberg. Soit $\varepsilon > 0$ petit. On commence par étudier le système sous-critique

$$8\Delta\varphi_\varepsilon + R\varphi_\varepsilon = -\frac{2}{3}\tau^2\varphi_\varepsilon^5 + |\sigma + LW_\varepsilon|^2\varphi_\varepsilon^{-7}, \quad (\text{VI.111})$$

$$L^*LW_\varepsilon = \frac{2}{3}\varphi_\varepsilon^{6-\varepsilon}d\tau. \quad (\text{VI.112})$$

Pour trouver des solutions à ce système, nous utilisons une méthode développée par Maxwell [M08]. Soit $\varphi \in L^\infty(\Sigma)$, $\varphi > 0$. D'après les Propositions 2 et 5 de [M08], il existe un couple unique (W, ψ) où $W \in C^1(\Sigma)$, $\psi \in C^2(\Sigma)$ qui satisfait

$$8\Delta\psi + R\psi = -\frac{2}{3}\tau^2\psi^5 + |\sigma + LW|^2\psi^{-7}, \quad (\text{VI.113})$$

$$L^*LW = \frac{2}{3}\varphi^{6-\varepsilon}d\tau. \quad (\text{VI.114})$$

On définit

$$N_\varepsilon(\varphi) := \psi$$

et on montre le résultat suivant :

LEMME VI.115. *Il existe une constante $a_\varepsilon > 0$ telle que pour tout $b \leq a_\varepsilon$, il existe une constante K_b dépendant seulement de b , τ , σ et h mais pas de ε telle que*

$$K_b \leq N_\varepsilon(\varphi) \leq a_\varepsilon$$

si φ est telle $0 < \varphi \leq b$. De plus, si $R < 0$, K_b ne dépend pas non plus de b .

DÉMONSTRATION. Tous les ingrédients de la preuve sont dans la Proposition 10 de Maxwell [M08], même si l'auteur ne les présente pas sous cette forme. Pour montrer la Proposition VI.119 ci-dessous, nous n'aurions besoin que de l'énoncé qui se trouve dans [M08], mais le Lemme VI.115 énoncé sous cette forme nous sera utile plus tard.

L'argument est le suivant : soit φ une fonction strictement positive et soit W solution de l'Équation (VI.114). On suppose que Θ_- (resp. Θ_+) est une sous-solution (resp. une sur-solution) de l'Équation (VI.113) avec $\Theta_- \leq \Theta_+$. Alors $\Theta_- \leq N_\varepsilon(\varphi) \leq \Theta_+$. En effet, la Proposition 4 de Maxwell [M08] montre qu'il existe une solution Θ de l'Équation (VI.113) qui satisfait $\Theta_- \leq \Theta \leq \Theta_+$. Par unicité de la solution de l'Équation (VI.113), on a $\Theta = N_\varepsilon(\varphi)$. Pour démontrer le Lemme VI.115, nous montrons que $\Theta_+ := a_\varepsilon$ est une sur-solution dès que a_ε est assez grand et si $0 < b \leq a_\varepsilon$ est tel que $\varphi \leq b$, alors, on peut trouver une sous-solution Θ_- dont le minimum k_B dépend seulement de b .

Par la théorie elliptique standard, il existe une constante C_0 qui dépend seulement de h telle que tout solution W de l'équation (VI.114) satisfait

$$\|LW\|_\infty \leq C_0\|d\tau\|_\infty\|\varphi\|_\infty^{6-\varepsilon}. \quad (\text{VI.116})$$

Soit $a_\varepsilon > 0$ assez grand pour que

$$Ra_\varepsilon + \frac{2}{3}\tau^2a_\varepsilon^5 - 2\|\sigma\|^2a_\varepsilon^{-7} - 2C_0^2\|d\tau\|_\infty^2a_\varepsilon^{5-2\varepsilon} \geq 0. \quad (\text{VI.117})$$

Alors $\Theta_+ := a_\varepsilon$ est une sur-solution de l'équation (VI.113). Occupons-nous maintenant de trouver une sous-solution.

Soit $b \leq a_\varepsilon$. Supposons que $\varphi \leq b$.

Cas 1 $R \equiv 0$ ou $R \equiv 1$. Comme dans la Proposition 10 de [M08], on considère la solution η de

$$8\Delta\eta + (R + \frac{2}{3}\tau^2)\eta = |\sigma + LW|^2. \quad (\text{VI.118})$$

Puisque $R + \frac{2}{3}\tau^2$ est positive ou nulle mais pas identiquement nulle, une telle solution existe et est strictement positive. On pose $\eta_\alpha = \alpha\eta$, α étant une constante strictement positive. On voit que

$$8\Delta\eta_\alpha + R\eta_\alpha + \frac{2}{3}\tau^2\eta_\alpha^5 - |\sigma + LW|^2\eta_\alpha^{-7} = \frac{2}{3}\tau^2(\alpha^5\eta^5 - \alpha\eta) + |\sigma + LW|^2(\alpha\eta - \alpha^{-7}\eta^{-7}).$$

Si α est assez petit, plus précisément, plus petit qu'une constante dépendant seulement de $\max(\eta)$, alors

$$8\Delta\eta_\alpha + R\eta_\alpha + \frac{2}{3}\tau^2\eta_\alpha^5 - |\sigma + LW|^2\eta_\alpha^{-7} \leq 0.$$

Ainsi $\Theta_- := \alpha\eta$ est une sous-solution de l'équation (VI.113). On fixe maintenant α telle que cette inégalité soit satisfaite. Nous avons déjà remarqué que α peut être choisi de manière à ce qu'il ne dépende que de $\max(\eta)$, ce qui fait que la constante K_b dépend seulement de $\max(\eta)$ et de $\min(\eta)$. Maintenant, comme dans la Proposition 11 de Maxwell [M08], on a

$$\min(\eta) \geq C \int_{\Sigma} |\sigma|^2 dv$$

et

$$\max(\eta) \leq C'b^{12-2\varepsilon} \leq C' \max(b^{12}, 1)$$

où C, C' dépendent seulement de g et τ . Cela termine la preuve dans ce cas.

Cas 2 $R \equiv -1$. D'après la solution du problème de la courbure scalaire prescrite (qui est résolu dans ce cas : voir [Aub98]), il existe une fonction positive η telle que la métrique $\tilde{h} := \eta^6 h$ soit à courbure scalaire $R_{\tilde{h}} = -\frac{2}{3}\tau^2$. Alors,

$$8\Delta\eta + R\eta = -\frac{2}{3}\tau^2\eta^5$$

ce qui implique que $\Theta_- := \eta$ est une sous-solution. Il faut remarquer que dans ce cas, $K_b = \min \Theta_-$ ne dépend pas de b . Cela termine la preuve du Lemme VI.115. \square

On est maintenant en mesure de trouver des solutions du système sous-critique.

PROPOSITION VI.119. *L'application N_ε possède un point fixe. Autrement dit, il existe une solution régulière $(\varphi_\varepsilon, W_\varepsilon)$, $\varphi_\varepsilon > 0$, du système (VI.111)–(VI.112).*

DÉMONSTRATION. Comme dans la Section 4.2 de [M08] on définit $U = \{\varphi \in L^\infty(M) : K_{a_\varepsilon} \leq \varphi \leq a_\varepsilon\}$. Dans l'expression ci-dessus, K_{a_ε} est la constante donnée par le Lemme VI.115 appliqué avec $b = a_\varepsilon$. En reproduisant mot pour mot les preuves de la Section 4.2 de [M08], on trouve un point fixe pour N_ε in U , c'est-à-dire un couple $(\varphi_\varepsilon, W_\varepsilon)$, $\varphi_\varepsilon > 0$, solution du système (VI.111)–(VI.112). Les résultats de régularité montrent que φ_ε et W_ε sont régulières. \square

4.2. Convergence des solutions sous-critiques. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $(\varphi_\varepsilon, W_\varepsilon)$, $\varphi_\varepsilon > 0$ la solution régulière du système (VI.111)–(VI.112) donné par la Proposition VI.119. On définit

$$\gamma_\varepsilon := \left(\int_\Sigma |LW_\varepsilon|^2 dv \right)^{1/3}$$

et on montre le lemme suivant

LEMME VI.120. *Supposons que la suite $(\gamma_\varepsilon)_\varepsilon$ soit bornée quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Alors, il existe une solution régulière (φ, W) , $\varphi > 0$, du système (VI.106)–(VI.107).*

DÉMONSTRATION. Soit $u_\varepsilon := \varphi_\varepsilon^4$. On multiplie l'équation (VI.111) par φ_ε^7 et on intègre sur Σ . Cela donne

$$\frac{7}{2} \int_\Sigma |du_\varepsilon|^2 dv + \int_\Sigma Ru_\varepsilon^2 dv + \frac{2}{3} \int_\Sigma \tau^2 u_\varepsilon^3 dv = \int_\Sigma |\sigma|^2 dv + \int_\Sigma |LW_\varepsilon|^2 dv. \quad (\text{VI.121})$$

On a utilisé que

$$\int_\Sigma |\sigma + LW_\varepsilon|^2 dv = \int_\Sigma |\sigma|^2 dv + \int_\Sigma |LW_\varepsilon|^2 dv,$$

qui provient du fait que σ est à divergence nulle. Puisque $(\gamma_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée et puisque L^*L n'a pas de noyau, la suite $(W_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $W^{1,2}(\Sigma)$ (l'espace de Sobolev des fonctions L^2 dont les dérivées au sens des distributions sont aussi dans L^2). Par réflexivité de $W^{1,2}(\Sigma)$, il existe $W \in W^{1,2}(\Sigma)$ telle qu'une sous-suite de $(W_\varepsilon)_\varepsilon$ (pour laquelle nous gardons la même notation) converge vers W faiblement dans $W^{1,2}(\Sigma)$. Supposons $R \geq 0$, alors, d'après (VI.121), on voit que $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est elle aussi bornée dans $W^{1,2}(\Sigma)$. On obtient le même résultat dans la cas où $R \equiv -1$, $(u_\varepsilon)_\varepsilon$. En effet, supposons que $\|u_\varepsilon\|_\varepsilon$ tendent vers $+\infty$ (après l'extraction possible d'une sous-suite). Nous obtenons par (VI.121) que

$$\lim_\varepsilon \int_\Sigma u_\varepsilon^2 dv = +\infty \quad (\text{VI.122})$$

(sinon, l'équation (VI.121) implique que $\int_\Sigma |du_\varepsilon|^2 dv$ est bornée et donc il est en de même de $\|u_\varepsilon\|_\varepsilon$). Avec l'équation (VI.121) et l'inégalité de Hölder, on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \int_\Sigma u_\varepsilon^3 dv &\leq \frac{2}{3 \min \tau^2} \int_\Sigma \tau^2 u_\varepsilon^3 dv \\ &\leq \frac{C}{\min \tau^2} \int_\Sigma u_\varepsilon^2 dv \\ &\leq \frac{C}{\min \tau^2} \left(\int_\Sigma u_\varepsilon^3 dv \right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Cela entraîne que $(\int_{\Sigma} u_{\varepsilon}^3 dv)_{\varepsilon}$, et ainsi $(\int_{\Sigma} u_{\varepsilon}^2 dv)_{\varepsilon}$ doit être borné ce qui contredit (VI.122).

On vient de montrer que la suite $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ est bornée dans $W^{1,2}(\Sigma)$ et donc dans $L^6(\Sigma)$ par le Théorème de Sobolev. Notons que

$$L^* L W_{\varepsilon} = u_{\varepsilon}^{3/2-\varepsilon/4} d\tau. \quad (\text{VI.123})$$

On déduit des estimées elliptiques standard que $(W_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ tend vers W dans $W^{2,4}(\Sigma)$ et donc dans $C^1(\Sigma)$. Nous évaluons maintenant l'équation (VI.111) en un point $x_{\varepsilon} \in M$ où φ_{ε} atteint son maximum $m_{\varepsilon} := \max(\varphi_{\varepsilon})$. Cela donne

$$\frac{2}{3} \tau^2 m_{\varepsilon}^5 + R m_{\varepsilon} \leq |\sigma + L W_{\varepsilon}|^2 m_{\varepsilon}^{-7},$$

car $\Delta \varphi_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}) \geq 0$. Puisque $(W_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ est borné dans $C^1(\Sigma)$ et puisque τ n'a pas de zéro sur Σ , on obtient que $(m_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ est bornée. Soit \bar{m} un majorant de $(m_{\varepsilon})_{\varepsilon}$. On applique le Lemme VI.115 avec $b = \bar{m}$ ce qui montre que $\varphi_{\varepsilon} = N_{\varepsilon}(\varphi_{\varepsilon}) \geq K_b > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il s'ensuit que la suite $(8\Delta \varphi_{\varepsilon} + R\varphi_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ est bornée dans $L^{\infty}(\Sigma)$. Par des arguments standard d'ellipticité, il existe une fonction régulière $\varphi \geq K_b > 0$ telle qu'une sous-suite de $(\varphi_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ tende vers φ in $C^2(\Sigma)$. On obtient aussi que $W_{\varepsilon} \rightarrow W$ dans $C^2(\Sigma)$. En passant à la limite dans les équations (VI.111)–(VI.112), on voit que (φ, W) est une solution du système (VI.106)–(VI.107). Cela prouve le Lemme VI.120 \square

On termine la preuve du Théorème VI.108 en montrant

LEMME VI.124. *Sous l'hypothèse (VI.110), la suite $(\gamma_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ est bornée.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'au contraire, $\gamma_{\varepsilon} \rightarrow \infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (quitte à extraire une sous-suite). Si $R \geq 0$, l'équation (VI.121) nous donne

$$\frac{2}{3} \int_{\Sigma} \tau^2 u_{\varepsilon}^3 dv \leq \int_{\Sigma} |\sigma|^2 dv + \gamma_{\varepsilon}^3 = \gamma_{\varepsilon}^3(1 + o(1)), \quad (\text{VI.125})$$

où $o(1) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Si $R \equiv -1$, on déduit de l'équation (VI.121) et l'inégalité de Hölder que

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \int_{\Sigma} \tau^2 u_{\varepsilon}^3 dv &\leq \gamma_{\varepsilon}^3(1 + o(1)) + \int_{\Sigma} u_{\varepsilon}^2 dv \\ &\leq \gamma_{\varepsilon}^3(1 + o(1)) + C \left(\int_{\Sigma} u_{\varepsilon}^3 dv \right)^{\frac{2}{3}} \\ &\leq \gamma_{\varepsilon}^3(1 + o(1)) + C \left(\int_{\Sigma} \tau^2 u_{\varepsilon}^3 dv \right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

ce qui implique encore une fois l'équation (VI.125). On multiplie l'équation (VI.112) par W_ε et on intègre sur Σ . Cela donne

$$\begin{aligned}\gamma_\varepsilon^3 &= \int_\Sigma |LW_\varepsilon|^2 dv \\ &= \frac{2}{3} \int_\Sigma (u_\varepsilon)^{3/2-\varepsilon/4} \langle d\tau, W_\varepsilon \rangle dv \\ &= \frac{2}{3} \int_\Sigma (\tau^{2/3} u_\varepsilon)^{3/2-\varepsilon/4} \langle \tau^{-1+\varepsilon/6} d\tau, W_\varepsilon \rangle dv \\ &\leq \frac{2}{3} \left(\int_\Sigma \tau^2 u_\varepsilon^3 dv \right)^{\frac{6-\varepsilon}{12}} \left(\int_\Sigma \left(\frac{|d\tau|}{\tau^{1-\varepsilon/6}} \right)^{\frac{12}{4+\varepsilon}} dv \right)^{\frac{4+\varepsilon}{12}} \left(\int_\Sigma |W_\varepsilon|^6 dv \right)^{1/6}.\end{aligned}$$

On a utilisé l'inégalité de Hölder ainsi que le fait que $\gamma_\varepsilon^{-\varepsilon/4} \leq 1$ qui provient de $\gamma_\varepsilon \rightarrow \infty$. D'après (VI.125) et puisque

$$\left(\int_\Sigma |W_\varepsilon|^6 dv \right)^{1/6} \leq C_h^{-1} \left(\int_\Sigma |LW_\varepsilon|^2 dv \right)^{1/2} = C_h^{-1} \gamma_\varepsilon^{\frac{3}{2}},$$

on obtient

$$\gamma_\varepsilon^3 \leq \gamma_\varepsilon^{3-\varepsilon/4} \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} (1 + o(1)) \right)^{\frac{6-\varepsilon}{12}} \left(\int_\Sigma \left(\frac{|d\tau|}{\tau^{1-\varepsilon/6}} \right)^{\frac{12}{4+\varepsilon}} dv \right)^{\frac{4+\varepsilon}{12}} C_h^{-1}.$$

Puisque $\gamma_\varepsilon^{-\varepsilon/4} \leq 1$, ce qui provient de $\gamma_\varepsilon \rightarrow \infty$, cela contredit (VI.110) quand $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

5. Preuve du Corollaire VI.109

Nous donnons des résultats qui étendent ceux du Théorème 2 de [IOM04]. On suppose ici que la courbure scalaire R est positive sur Σ .

En vertu du Théorème VI.108, il suffit de supposer que $\sigma \equiv 0$ et de montrer que le système (VI.106)–(VI.107) n'admet aucune solution. On le démontre par l'absurde : supposons que (VI.106)–(VI.107) admette une solution régulière (φ, W) avec $\varphi > 0$. Remarquons que

$$\int_\Sigma \varphi \Delta \varphi^7 dv = \frac{7}{16} \int_\Sigma |d\varphi^4|^2 dv.$$

Ainsi, en posant $u = \varphi^4$, en multipliant (VI.106) par φ^7 et en intégrant sur Σ , on obtient que

$$\frac{7}{2} \int_\Sigma |du|^2 dv + \int_\Sigma Ru^2 dv + \frac{2}{3} \int_\Sigma \tau^2 u^3 dv = \int_\Sigma |LW|^2 dv, \quad (\text{VI.126})$$

puisque $\sigma \equiv 0$. Comme $R \geq 0$ cela donne

$$\frac{2}{3} \int_\Sigma \tau^2 u^3 dv \leq \int_\Sigma |LW|^2 dv. \quad (\text{VI.127})$$

Maintenant, on multiplie (VI.107) par W et on intègre sur Σ . En utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |LW|^2 dv &= \frac{2}{3} \int_{\Sigma} u^{3/2} \langle d\tau, W \rangle dv \\ &\leq \frac{2}{3} \left(\int_{\Sigma} \tau^2 u^3 dv \right)^{1/2} \left(\int_{\Sigma} \left(\frac{|d\tau|}{\tau} \right)^3 dv \right)^{1/3} \left(\int_{\Sigma} |W|^6 dv \right)^{1/6}. \end{aligned}$$

D'après (VI.127) et la définition de C_h , on obtient que

$$C_h \leq \frac{\left(\int_{\Sigma} |LW|^2 dv \right)^{1/2}}{\left(\int_{\Sigma} |W|^6 dv \right)^{1/6}} \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \left\| \frac{d\tau}{\tau} \right\|_{L^3(\Sigma)},$$

puisque, de manière évidente $W \not\equiv 0$. Cela termine la démonstration du Corollaire VI.109.

CHAPITRE VII

Les systèmes isolés

Les systèmes isolés jouent un rôle très important en cosmologie. Dès que l'on veut étudier un système solaire, une planète et ses satellites ou une galaxie, on néglige l'influence des astres lointains et on est confronté à un système isolé. L'une des particularités de tels systèmes est que, dans certaines situations, on peut définir de manière cohérente leur énergie et leur impulsion, ce qui est impossible en toute généralité.

Cette étude nous amènera tout naturellement à plusieurs problèmes purement mathématiques : le problème de la masse positive et du moment-énergie positif.

1. Diagramme de Carter-Penrose

Un *système isolé* est un système physique confiné dans une portion bornée d'espace. Même si l'image que l'on peut avoir en tête est claire, il n'est pas si facile d'en trouver un modèle cohérent. L'idée directrice est la suivante : plaçons-nous du point de vue d'un observateur D dans l'espace-temps (\mathcal{M}, g) de la relativité générale et supposons qu'à tout instant t , l'espace vu par D est une hypersurface Σ_t non compacte de type espace. Toute la matière est confinée dans un domaine compact K de Σ_t ce qui se traduit par le fait que le tenseur d'énergie-impulsion est à support compact. Il est bien évidemment plausible de penser que plus on s'éloigne de K , moins l'influence du système se fera sentir, autrement dit, plus la métrique va avoir tendance à devenir plate. On va donc imposer que la limite de g à l'infini soit la métrique de Minkowski $\eta := -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$. Il faut prendre garde au fait que l'on a supposé ici que la constante cosmologique Λ de l'équation d'Einstein était nulle (rappelons que la constante cosmologique n'influence que les propriétés globales de l'espace-temps). Si on l'avait supposée non nulle, les conditions à l'infini auraient été différentes (par exemple, asymptotiquement hyperbolique). D'un point de vue riemannien, notons g_t la restriction de g à l'espace tangent $T\Sigma_t$. C'est une métrique riemannienne qui à l'infini tend vers la métrique euclidienne de \mathbb{R}^3 . On dit que Σ_t est *asymptotiquement plate* ou *asymptotiquement euclidienne*. On donnera une définition plus précise de ces notions plus loin. En fait, de manière plus générale, la plupart des situations peuvent s'étudier avec cette seule condition de platitude asymptotique, c'est-à-dire sans supposer que le tenseur d'énergie-impulsion est nul à l'infini (il est seulement asymptotiquement nul).

Regardons ces définitions d'un peu plus près : on a envie de décrire un système isolé par un tenseur d'énergie-impulsion à support compact sur les espaces vus par

un observateur et de dire qu'en l'infini spatial, la métrique est asymptotiquement plate (au sens lorentzien, c'est-à-dire qu'elle tend vers la métrique de Minkowski). Malheureusement, ces notions ne sont pas bien claires. Qu'appelle-t-on "infini spatial" ? Il dépend évidemment de l'observateur. Peut-on tout de même en donner une définition globale ? Supposons malgré tout qu'une telle définition soit trouvée et soit cohérente. La notion de "limite en l'infini spatial" est-elle bien claire ? Sur quel espace vivent les objets limites ainsi obtenus ?

Pour résoudre ces difficultés, une façon naturelle de procéder est de dire que (\mathcal{M}, g) est asymptotiquement plate s'il existe un système de coordonnées (t, x^1, x^2, x^3) dans lesquelles la limite de g_{ij} est η_{ij} (η est la métrique de Minkowski) quand $r^2 := (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ tend vers $+\infty$ dans une direction spatiale ou isotrope. Dans de nombreux problèmes mathématiques (y compris ceux de la masse positive ou du moment-énergie positif présentés à la fin de ce chapitre), on simplifie ces considérations au maximum : on se fixe une hypersurface Σ de type espace à l'infini de laquelle la métrique g est plate. Dans certaines situations, la définition ci-dessus sera suffisante (à condition de la préciser bien sûr) mais dans d'autres, elle posera un véritable problème parce qu'il faudra vérifier que les objets supposés intrinsèques que l'on étudie ne dépendent pas du choix de ces coordonnées.

Nous expliquons maintenant comment obtenir une définition adaptée à toutes les situations : il s'agit du *diagramme de Carter-Penrose* qui consiste à compactifier la variété afin de définir correctement toutes les notions d'infinis dont nous avons besoin. Cette procédure est plus compliquée que la définition ci-dessus et ne sera utilisée que dans les cas où elle s'avère indispensable (par exemple dans le Chapitre VIII). Dans les problèmes mathématiques présentés à la fin du chapitre, nous n'en aurons pas l'utilité.

Pour comprendre cette définition, plaçons d'abord dans l'espace de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta = -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2)$. Pour bien comprendre ce qui se passe, il faut considérer l'espace de Minkowski comme une variété lorentzienne munie de la métrique plate plutôt que comme un espace affine. Il y a bien sûr une manière naturelle de définir l'infini spatial et les limites correspondantes en utilisant les coordonnées canoniques de \mathbb{R}^4 . Mais nous allons utiliser un autre moyen qui nous amènera à une définition de platitude asymptotique dans le cadre de la relativité générale. Pour cela, on va travailler en coordonnées sphériques (t, r, Θ, Φ) dans lesquelles la métrique η s'écrit

$$-dt^2 + dr^2 + r^2 (d\Theta^2 + \sin^2(\Theta)d\Phi^2).$$

Notons Γ le sous-domaine de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ défini en coordonnées sphériques (T, R, Θ, Φ) par

$$-\pi < T + R < \pi \quad \text{et} \quad -\pi < T - R < \pi.$$

Attention : (R, Θ, Φ) sont bien les coordonnées sphériques sur \mathbb{S}^3 . En particulier, $0 \leq R < \pi$. La Figure 1 représente Γ dans les coordonnées (T, R) .

Alors, le point-clé est le suivant :

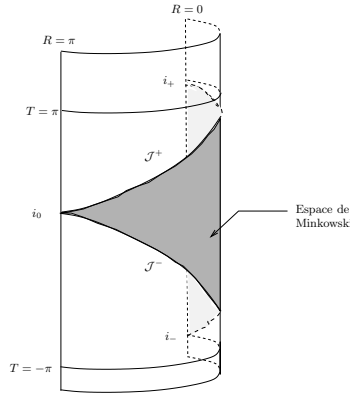


FIG. 1. Diagramme de Carter-Penrose pour l'espace de Minkowski

PROPOSITION VII.128. Notons g_{can} la métrique canonique sur $\mathbb{R} \times S^3$. L'application

$$F : \begin{cases} (\mathbb{R}^4, \eta) & \rightarrow (\Gamma, g_{\text{can}}) \\ (t, r, \Theta, \Phi) & \mapsto (\arctan(t+r) + \arctan(t-r), \\ & \arctan(t+r) - \arctan(t-r), \Theta, \Phi) \end{cases}$$

(où l'on a pris les coordonnées sphériques à la fois sur \mathbb{R}^4 et sur Γ) est un difféomorphisme conforme de facteur conforme

$$\Omega^2 := \frac{4}{(1 + (t+r)^2)(1 + (t-r)^2)}.$$

DÉMONSTRATION. Une autre façon de présenter les choses est de dire qu'on effectue le changement de coordonnées ($T := \arctan(t+r) + \arctan(t-r)$, $R := \arctan(t+r) - \arctan(t-r)$, Θ, Φ). En considérant (T, R, Θ, Φ) comme des coordonnées sphériques sur $\mathbb{R} \times S^3$, on vérifie facilement que \mathbb{R}^4 est envoyé sur Γ . Par ailleurs, on voit que dans ces coordonnées, on a

$$\eta = \frac{1}{\Omega^2} (-dT^2 + dR^2 + \sin^2(\Theta) (d\Theta^2 + \sin^2(\Theta)d\Phi^2)).$$

Or dans les coordonnées sphériques, la métrique canonique de $\mathbb{R} \times S^3$ a la forme suivante :

$$g_{\text{can}} = -dT^2 + dR^2 + \sin^2(\Theta) (d\Theta^2 + \sin^2(\Theta)d\Phi^2)$$

ce qui prouve que $\Omega^2 F^* \eta = g_{\text{can}}$. □

Revenons maintenant à notre problème de définir correctement l'"infini spatial" indépendamment des coordonnées. Soit D un observateur quelconque qui à l'instant t voit l'espace Σ . Σ est un hyperplan de type espace de (\mathbb{R}^4, η) . Écrivons $\Sigma = [\vec{v}]^\perp + P$ où \vec{v} est un vecteur unitaire de type temps orienté positivement et P est un point de \mathbb{R}^4 que l'on peut sans restreindre la généralité supposer être l'origine. "Aller à l'infini dans Σ " correspond à faire tendre r vers $+\infty$ tout en restant dans Σ . Prenons donc une suite de points $X_n = (t_n, x_n^1, x_n^2, x_n^3)$ de Σ (en

coordonnées canoniques sur \mathbb{R}^4) qui tend vers l'infini, c'est-à-dire tel que la suite $r_n^2 := (x_n^1)^2 + (x_n^2)^2 + (x_n^3)^2$ tende vers l'infini. Alors, on montre que

PROPOSITION VII.129. *Les coordonnées sphériques $(T_n, R_n, \Theta_n, \Phi_n)$ de $F(X_n)$ dans Γ sont telles que $\lim_n R_n = \pi$ et $\lim_n T_n = 0$.*

DÉMONSTRATION. Notons $(t_v, x_v^1, x_v^2, x_v^3)$ les coordonnées (canoniques) de \vec{v} dans \mathbb{R}^4 et posons $r_v^2 = (x_v^1)^2 + (x_v^2)^2 + (x_v^3)^2$. Puisque $X_n \in \Sigma = [\vec{v}]^\perp$, on a

$$0 = \eta(X_n, v) = -tt_v + x_n^1 x_v^1 + x_n^2 x_v^2 + x_n^3 x_v^3 \leq -t_n t_v + r_n r_v.$$

et donc

$$r_n \geq c_v t_n \tag{VII.130}$$

où $c_v = \frac{t_v}{r_v}$ (rappelons que $t_v > 0$ car v est orienté positivement). Par ailleurs, $0 > -1 = \eta(v, v) = -t_v^2 + r_v^2$ ce qui implique que $c_v > 1$. On obtient que $\lim_n (t_n + r_n) = +\infty$ et que $\lim_n (t_n - r_n) = -\infty$ d'où la proposition. \square

Cette proposition permet de donner un sens précis à l'infini spatial : il est matérialisé par le point $i_0 \in \bar{\Gamma} \subset \mathbb{R} \times S^3$ de coordonnées $T = 0$ et $R = \pi$ et qui est représenté sur la Figure 1. Il faut bien remarquer que $R = \pi$ en coordonnées sphériques sur S^3 correspond bien à un point unique tandis que $R = a \in]0, \pi[$ correspond à une sphère de dimension 2. On dira donc qu'

une suite de points tend vers l'infini spatial si et seulement si elle tend vers i_0 dans $\bar{\Gamma}$.

Du fait que la métrique g_{can} de $\mathbb{R} \times S^3$ est bien définie sur i_0 , on peut donner un sens à la limite de certaines quantités de l'espace de Minkowski obtenue en passant à la limite vers l'infini spatial. C'est l'un des intérêt majeur de cette approche.

REMARQUE VII.131.

- (1) De la même manière, l'*infini temporel futur* (resp. *infini temporel passé*) est matérialisé dans $\bar{\Gamma}$ par le point i_+ (resp. i_- correspondant à $R = 0$ et $T = \pi$ (resp. $T = -\pi$). Il correspond à la limite dans le futur (resp. le passé) de toute géodésique de type temps.
- (2) Toujours de la même manière, on définit un *infini futur de type lumière* et *infini passé de type lumière* matérialisés respectivement dans $\bar{\Gamma}$ par

$$\mathcal{J}^+ := \left\{ (T, R, \Theta, \Phi) \in \bar{\Gamma} \mid T + R = \pi; R > 0 \right\}$$

et

$$\mathcal{J}^- := \left\{ (T, R, \Theta, \Phi) \in \bar{\Gamma} \mid T - R = -\pi; R > 0 \right\}$$

qui correspondent aux limites des suites de points qui tendent vers l'infini avec une direction de type "lumière".

Revenons maintenant au cas général d'une variété lorentzienne (\mathcal{M}, g) . L'idée est de dire que (\mathcal{M}, g) est asymptotiquement plate si une construction similaire peut être faite. Avant d'être plus précis, nous avons besoin de rappeler quelques définitions vues dans le Chapitre VI : soit (N, G) un espace-temps et $p \in N$ un point. Le *futur* (resp. *passé*) *causal* de p est l'ensemble $J^+(p)$ (resp. $J^-(p)$) des points $x \in N$ tels qu'il existe une courbe de genre temps ou lumière orientée positivement (resp. négativement) joignant p à x . Nous dirons aussi que la métrique G est $C^{>0}$ en p si elle est continue en p et si toutes ses dérivées d'ordre 1 admettent des limites directionnelles en p qui dépendent de manière lisse de la direction. On peut maintenant donner la définition suivante :

DÉFINITION. On dit que (\mathcal{M}, g) est asymptotiquement plate à l'infini spatial s'il existe un espace-temps $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$, un point $i_0 \in \tilde{\mathcal{M}}$ et un difféomorphisme conforme $F : \mathcal{M} \rightarrow F(\mathcal{M}) \subset \tilde{\mathcal{M}}$ de facteur conforme Ω (i.e. tel que $\tilde{g} = \Omega^2 F^* g$) qui vérifient :

- (1) $\overline{J^+(i_0)} \cup \overline{J^-(i_0)} = \tilde{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$;
- (2) $\Omega(i_0) = 0$, $\nabla^{\tilde{g}} \Omega(i_0) = 0$ et $(\nabla^{\tilde{g}})^2(i_0) \Omega = \tilde{g}(i_0)$;
- (3) la métrique \tilde{g} est C^∞ sauf éventuellement en i_0 où elle n'est que $C^{>0}$.

La condition (1) traduit à peu près le fait que i_0 est spatialement lié à tout point de \mathcal{M} (en fait, on verra que ce n'est pas tout à fait vrai). La condition (2) traduit le fait que la métrique g est asymptotiquement plate et la condition (3) est une condition de régularité de \tilde{g} en i_0 qui doit être suffisamment générale pour couvrir les situations intéressantes mais pas trop restrictive non plus pour pouvoir travailler en i_0 .

Cette définition ne traduit que la notion d'espace-temps asymptotiquement vide, c'est-à-dire de système "presque isolé". Quand on veut réellement parler de système isolé, on ajoute la condition suivante :

- (4) Il existe un voisinage N de i_0 dans $\tilde{\mathcal{M}}$ tel que sur $\mathcal{M} \cap N$, g satisfait l'équation d'Einstein du vide.

REMARQUE VII.132. Le point i_0 de cette définition est nécessairement unique.

La terminologie souvent utilisée est de parler de quantité *physique* pour toute quantité relative à la métrique g et de quantité *non physique* (*unphysical* en anglais) pour toute quantité relative à la métrique \tilde{g} .

À bien des égards, cette définition peut sembler insatisfaisante. Par exemple, on ne peut pas déduire de ces hypothèses que toute hypersurface de type espace rencontre l'infini spatial. Cependant, il faut remarquer que c'est aussi le cas dans l'espace de Minkowski. En effet, si on prend une hypersurface de type espace qui est asymptotiquement de type lumière, alors, l'infini sera modélisé par un point de \mathcal{J}^+ ou de \mathcal{J}^- . Notons aussi que, contrairement à ce que disent certains livres, la condition 1 n'implique pas que l'infini spatial est spatialement lié à tout point de $F(\mathcal{M})$. Un

contre-exemple simple est le domaine $(\mathbb{R}^4 \setminus S^3) \cup (J^+(0) \cup J^-(0))$ de l'espace de Minkowski. L'origine n'est clairement pas liée spatialement à l'infini spatial. On s'est en effet arrangé pour que toute courbe qui joigne 0 à l'infini spatial rencontre le cône de lumière $(J^+(0) \cup J^-(0))$ de 0. Pour finir, remarquons que malgré tout, la définition présentée couvre bien les situations simples qui nous intéressent (par exemple le cas des espaces-temps qui sont des produits $\mathcal{M} = M \times \mathbb{R}$).

Avec le même modèle mais en changeant les conditions ci-dessus, on peut définir de même un espace-temps asymptotiquement plat à l'infini de type lumière.

2. Masse ADM d'un système isolé

Le but de section est d'expliquer comment apparaît naturellement la notion de masse ADM qui s'interprétera physiquement comme l'énergie totale d'un système isolé.

2.1. Peut-on définir une énergie locale ? Dans tout ce chapitre, on ne définit que des grandeurs totales (énergie totale, moment total). Essayons de comprendre pourquoi. Tout au long de ce texte, on s'est appuyé sur la loi physique suivante : l'énergie totale d'un système physique est constante dans le temps, indépendamment des événements qui se produisent dans ce système. Peut-on donner en relativité générale une définition de la notion d'énergie (relative à un observateur) qui soit conforme à la loi ci-dessus ? En toute généralité, on est confronté à un problème important : celui de l'énergie gravitationnelle.

Précisons un peu les choses. D'abord, rappelons que l'énergie est la capacité d'un système à exercer un travail ou une action. L'une de ces formes d'énergie est l'énergie gravitationnelle. Elle est facilement mise en évidence lorsqu'on ouvre les vannes d'un barrage sur un lac. L'eau va s'écouler avec une force considérable : l'énergie gravitationnelle s'est transformée en énergie cinétique. Pour obtenir une grandeur "énergie d'un système physique" constante dans le temps, il faut nécessairement qu'elle tienne compte de cette énergie et pas seulement de l'énergie propre de la matière (électromagnétique, cinétique, masse,...). Le problème qui se pose en relativité générale est que toutes les définitions que l'on peut trouver se déduisent du tenseur d'énergie-impulsion, qui ne rend compte que de l'énergie propre de la matière et absolument pas de l'énergie gravitationnelle.

Pour comprendre où est la difficulté, considérons deux étoiles A et B et regardons la métrique à un endroit quelconque de l'espace. Sa déformation par rapport à la métrique plate traduit l'influence des deux étoiles sur l'espace-temps. Le problème qui se pose est le suivant : comment distinguer l'influence de l'étoile A de celle de l'étoile B ? Pour cela, il faudrait pouvoir construire une fonction "densité d'énergie gravitationnelle" associée à chaque étoile, ce qu'on ne sait pas faire. Plusieurs raisons physiques (que nous ne détaillerons pas ici) font même suspecter qu'une telle construction est impossible.

Sans densité d'énergie gravitationnelle, il semble impossible de définir l'énergie d'un système. En tout généralité, lorsqu'on étudie un système physique, on ne sera pas capable d'isoler son énergie de l'énergie gravitationnelle produite par la matière qui se trouve à l'extérieur de ce système. Ce problème n'en est plus un si l'on considère qu'on est en présence d'un système isolé. On ne pourra bien évidemment toujours pas définir de notion locale d'énergie mais on va être capable de définir une énergie totale. C'est l'objet des paragraphes suivants.

REMARQUE VII.133. La situation est radicalement différente de ce qui se passe en mécanique classique pour laquelle à chaque système est associé un potentiel newtonien qui quantifie en chaque point l'influence exacte de chaque corps.

2.2. Formulations lagrangiennes et hamiltonniennes de la relativité générale. La notion de masse ADM provient de la formulation hamiltonnienne de la relativité générale dans le cadre d'un système isolé. Dans ce paragraphe, nous expliquons en quoi consiste cette formulation. Avant cela, nous aurons besoin de parler de formulation lagrangienne.

Ce paragraphe est un peu technique. Pour le lecteur pressé, l'idée est de supposer que l'espace-temps est de la forme $\mathcal{M} = M \times I$ où I est un intervalle et que l'on est en présence d'un système isolé. La masse ADM est une quantité définie sur chaque $M \times \{t\}$ et conservée dans le temps. Cette propriété en fait un candidat naturel pour être interprétée comme une énergie, ce qui sera confirmé par d'autres moyens.

2.2.1. *Formulation lagrangienne de la relativité générale.* De manière générale, plaçons-nous dans l'espace-temps (\mathcal{M}, g) de la relativité générale et supposons que dans un cadre donné, nous cherchions à trouver un tenseur ψ qui satisfait une certaine équation (E) . La *formulation lagrangienne* du problème consiste à trouver une fonctionnelle appelée *fonctionnelle d'action* de la forme

$$L : \begin{cases} \mathcal{T} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \psi & \rightarrow & \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}(\psi, \nabla\psi) dv_G \end{cases}$$

(où \mathcal{T} est l'espace de tenseurs parmi lesquels on cherche ψ) telle que ψ satisfait l'équation (E) si et seulement si ψ est un point critique de L . La métrique G est une métrique fixée sur \mathcal{M} . Dans de nombreux cas, on peut prendre $G = g$ mais comme on le verra lorsqu'on voudra obtenir une formulation lagrangienne de la relativité, il vaut mieux parfois fixer une autre métrique. La fonction \mathcal{L} s'appelle le *lagrangien* du problème. Ici, on l'a fait dépendre de ψ et de ses dérivées mais on peut aussi admettre les dérivées d'ordre supérieur. Pour illustrer cet exemple, imaginons que l'on cherche à trouver une fonction $\psi \in C^\infty(\mathcal{M})$ qui vérifie

$$\square_g \psi + m^2 \psi = 0 \tag{E}$$

où m est un réel fixé. De telles fonctions sont appelées *champs de Klein-Gordon*. Remarquons que, dans le cadre riemannien, (E) n'a pas de solution mise à part la fonction nulle. Alors, il est clair qu'une fonction $\psi \in C^\infty(\mathcal{M})$ vérifie l'équation

(E) si et seulement si elle est point critique de

$$L_{KG}(\psi) = \int_{\mathcal{M}} |\nabla\psi|_g^2 + m^2\psi^2 dv_g.$$

Autrement dit, on fixe $G = g$ et on pose

$$\mathcal{L}_{KG}(\psi, \nabla\psi) = |\nabla\psi|_g^2 + m^2\psi^2.$$

Dans le cadre de la relativité générale, le tenseur ψ est la métrique elle-même et l'équation (E) est l'équation d'Einstein (III.57). La formulation lagrangienne du provient s'obtient par le calcul suivant : soit $(g_t)_t$ une famille de métriques telle $g_0 = g$ et $\frac{d}{dt}_{t=0}g_t = h$. Prenons un domaine borné Ω de \mathcal{M} d'adhérence compacte. Un calcul que nous ne ferons pas ici (voir par exemple [LP87]) donne

$$\frac{d}{dt}_{t=0} \int_{\Omega} Scal_{g_t} dv_{g_t} = \int_{\mathcal{M}} h_{kl} E_g^{kl} dv_g + \int_{\partial\Omega} K(h) dv_g$$

où E_g est le tenseur d'Einstein de la métrique g et où $K(h)$ est une quantité construite à partir de h et de ses dérivées. Si maintenant h est à support compact et si Ω est suffisamment grand pour contenir le support de h alors le terme de bord disparaît dans l'expression ci-dessus. On voit alors que g vérifie l'équation d'Einstein du vide si et seulement si g est un point critique de $g' \rightarrow \int_{\mathcal{M}} Scal_{g'} dv_{g'}$. Il faut remarquer que pour se ramener à la situation précédente, il est judicieux de fixer une métrique quelconque G sur \mathcal{M} . On peut alors regarder la fonctionnelle d'action $g \rightarrow \int_{\mathcal{M}} L(g, \nabla g, \nabla^2 g) dv_G$ où le lagrangien \mathcal{L} est donné par $\mathcal{L}(g) = Scal_g \frac{\sqrt{-det(g)}}{\sqrt{-det(G)}}$.

De la même manière, on peut obtenir une formulation équivalente à l'équation d'Einstein en présence d'un fluide (par forcément parfait) à condition de modifier en conséquence le lagrangien. Nous n'expliquerons pas ici la manière de s'y prendre.

2.2.2. Formulation hamiltonnienne de la relativité générale. La formulation hamiltonnienne est assez proche de la formulation par conditions initiales de la relativité générale présentée au Chapitre VI. L'idée pour le problème de Cauchy est de comprendre ce qui se passe dans le futur lorsque le présent est connu. La formulation hamiltonnienne est plus "mathématique" (et donc moins "physique") : on essaye de construire des quantités dont la conservation dans le temps est équivalente aux équations d'Einstein.

Considérons que la variété \mathcal{M} possède un champ de vecteurs \vec{t} qui vérifie $\nabla_{\vec{t}}\vec{t} = 0$ ce qui signifie en gros que \mathcal{M} est feuilletée par des géodésiques de type temps. C'est l'hypothèse la plus couramment utilisée pour la formulation hamiltonnienne mais pour ce qu'on veut comprendre, on va simplifier la situation en faisant une hypothèse encore plus forte : on suppose que \mathcal{M} est un produit $M \times I$ (I est un intervalle) tel que pour tout t , $M \times \{t\}$ est une hypersurface de type espace. Notons $M_t := M \times \{t\}$. On revient au problème de trouver un tenseur ψ qui satisfait une certaine équation (E). L'idée ici est de poser $\psi_t = \psi|_{M_t}$ et de regarder (ψ_t) comme un flot hamiltonien, c'est-à-dire, en restant vague pour l'instant, de trouver une quantité qui dépend de ψ_t et qui est constante par rapport à t si et seulement si

ψ est solution de (E).

Soyons un peu plus précis : on va chercher une fonctionnelle appelée *hamiltonien* dépendant d'inconnues π, q (qui sont en général des tenseurs)

$$H(\pi, q) = \int_{M_t} \mathcal{H}(\pi(x), q(x)) dv_G(x)$$

où G est une métrique fixée sur M (comme dans la formulation lagrangienne, il est souvent mieux de fixer une métrique différente de $g_{/M_t}$), où \mathcal{H} est une fonction à valeurs réelles que l'on doit définir et qui s'appelle *densité hamiltonnienne* et où l'on a

$$q' = \frac{\partial H}{\partial \pi}(\pi, q) \quad \text{et} \quad \pi' = -\frac{\partial H}{\partial q}(\pi, q), \quad (\text{VII.134})$$

les dérivées notées ' étant à comprendre relativement à la variable de temps t .

Avant d'expliquer à quoi correspondent exactement q et π dans notre problème, il est utile de donner quelques explications. En particulier, il nous faut donner un sens à ces équations. D'abord, il faut préciser à quels espaces appartiennent π et q : ce sont des tenseurs définis sur M_t et tels que si q est un tenseur de variance (k, l) alors π est un tenseur de variance (l, k) . Regardons maintenant l'expression $\frac{\partial H}{\partial \pi}$. Il faut évidemment la comprendre comme une différentielle partielle, c'est-à-dire une forme linéaire définie sur les tenseurs de variance (l, k) . Or q' est un tenseur de variance (k, l) et peut être vu comme une forme linéaire sur les tenseurs de variance (l, k) en posant

$$q'(\eta) = \int_{M_t} (q')_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \eta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} dv_G. \quad (\text{VII.135})$$

Il faut prendre garde au fait que dans la suite, la notation q' pourra avoir deux significations différentes : soit elle représentera la dérivée $\frac{dq}{dt}$, soit elle représentera sa "forme intégrale" définie par (VII.135). Il en sera de même pour la notation π' .

Pour l'instant, contentons-nous d'admettre que q et π sont des quantités construites sur M_t à partir du tenseur ψ cherché et que l'on prend comme variables pour des raisons que l'on explique ci-dessous. On peut donc considérer que H est une fonctionnelle en l'inconnue ψ et par abus de notation, on peut écrire $H(\psi) = H(\pi, q)$. Ce que l'on veut, c'est que les deux équations (VII.134) soient vérifiées si et seulement si ψ satisfait l'équation (E).

Expliquons maintenant ce que représentent les quantités π et q . Pour construire une telle fonctionnelle H , la seule méthode que nous connaissons est de s'appuyer sur une formulation lagrangienne du problème. Supposons que c'est le cas et que

nous disposons d'une fonctionnelle d'action de la forme

$$L : \begin{cases} \mathcal{T} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \psi & \rightarrow & \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}(\psi, \nabla\psi) dv_H \end{cases}$$

où l'on a conservé les notations du paragraphe précédent mais où la métrique fixée sur $\mathcal{M} = M \times I$ est la métrique $H := G + dt^2$. Posons

$$\begin{aligned} q &= \psi_{/M_t} \\ \pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'}. \end{aligned}$$

La quantité π ainsi définie s'appelle un *moment*. Alors, on obtient une formulation hamiltonnienne en posant

$$\mathcal{H}(\pi, q) = \pi q' - \mathcal{L}(q). \quad (\text{VII.136})$$

Notons que \mathcal{L} ne dépend que de la variable q (même si elle se calcule avec ses dérivées) : il faut bien distinguer la dérivée q' de q et la variable q' . Avec un tel choix, nous obtenons ce que nous cherchons. Plus précisément,

PROPOSITION VII.137. *Le tenseur ψ est un point critique de L si et seulement si les équations (VII.134) sont vérifiées.*

DÉMONSTRATION. Commençons par supposer que ψ est un point critique de L . Posons

$$H(\pi, q) = H(\psi) = \int_{M_t} \mathcal{H}(\pi, q) dv_G.$$

Alors,

$$\frac{\partial H}{\partial \pi} = \int_{M_t} q' \cdot dv_G$$

car \mathcal{L} ne dépend que de q . Par ailleurs, d'après (VII.135), la forme linéaire $\eta \rightarrow \int_{M_t} q' \eta dv_G$ correspond exactement à ce que nous avons noté q' dans les équations (VII.134). On a donc

$$\frac{\partial H}{\partial \pi} = q'.$$

En intégrant par partie, on a aussi

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q} &= -\frac{\partial}{\partial q} \int_{M_t} \pi' q dv_G - \frac{\partial}{\partial q} \int_{M_t} \mathcal{L}(q) dv_G \\ &= -\pi' - \frac{\partial}{\partial q} \int_{M_t} \mathcal{L}(q) dv_G. \end{aligned}$$

Puisque ψ est un point critique de \mathcal{L} sur tout domaine de l'espace-temps, on a

$$\frac{\partial}{\partial q} \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_t} \mathcal{L}(q) dv_G = 0$$

pour tout t_1 et t_2 . On en déduit facilement que $\frac{\partial}{\partial q} \int_{M_t} \mathcal{L}(q) dv_G = 0$ et donc que

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\pi'.$$

Réciproquement, supposons les équations (VII.134) vérifiées. Posons

$$\begin{aligned}
J(\psi) &= \int_{t_1}^{t_2} H(\psi) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{M_t} \pi q' - \mathcal{L}(\psi) dv_G \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{M_t} \pi q' dv_G \right) dt - \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}(\psi) dv_G \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{M_t} \pi q' dv_G \right) dt - L(\psi).
\end{aligned} \tag{VII.138}$$

Pour simplifier les notations, on a oublié les dérivées de ψ dans la notation $\mathcal{L}(\psi)$. Considérons une famille ψ_a telle que $\delta(\psi_a)_{/M_t} = 0$ pour $t = t_1$ et $t = t_2$ où δ désigne, comme dans toute la suite, l'expression $\frac{d}{da_{a=0}}$. Notons π_a et q_a les quantités π et q associées. Alors, en utilisant (VII.138)

$$\delta J(\psi_a) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{M_t} (\pi_a \delta q'_a + (\delta \pi_a) q'_a) dv_G \right) dt - \delta L(\psi_a).$$

En intégrant par parties (par rapport à la variable t) et en utilisant les équations (VII.134), on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta J(\psi_a) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{M_t} (-\pi'_a \delta q_a + (\delta \pi_a) q'_a) dv_G \right) dt - \delta L(\psi_a) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{M_t} \frac{d}{da_{a=0}} (\mathcal{H}(\pi_a, q_a)) dv_G \right) dt - \delta L(\psi_a).
\end{aligned}$$

Revenons à la définition de $J = \int_{t_1}^{t_2} H dt$. Remarquons que le premier terme du membre de droite est, par définition de H égal à $\delta J(\psi_a)$. On obtient ainsi que $\delta L(\psi_a) = 0$ ce qui prouve que ψ_0 est un point critique de L_a . Cela termine la preuve de la Proposition VII.137. \square

Remarquons qu'on n'a pas utilisé la forme explicite de π dans cette démonstration. Sans être précis, π est définie pour pouvoir reconstituer ψ à partir de q et π (il y a aussi d'autres raisons physiques que nous ne mentionnerons ici).

Pour illustrer ces propos, regardons l'exemple des champs de Klein-Gordon étudiés au paragraphe précédent. On suppose, pour simplifier, que la métrique g est déjà de la forme $g = G + dt^2$. On pose $q = \psi_{/M_t}$ et $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial q'}$. En fait, on conserve la notation ψ à la place de q puisque les deux quantités sont les mêmes et puisqu'on cherche ψ . Rappelons que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{KG}(\psi, \nabla \psi) &= |\nabla \psi|_g^2 + m^2 \psi^2 \\
&= -(\psi')^2 + |\nabla_t^g \psi|^2 + m^2 q^2
\end{aligned}$$

et donc $\pi = -2\psi'$. On pose alors

$$\mathcal{H}_{KG} = \pi \psi' - \mathcal{L}_{KG} = -(\pi^2 + |\nabla \psi|_g^2 + m^2 \psi^2).$$

On vérifie alors facilement qu'en posant $(H_{KG})_t = \int_{M_t} \mathcal{H}_{KG}$, les équations (VII.134) sont équivalentes à la formulation variationnelle (c'est-à-dire lagrangienne) de l'équation de Klein-Gordon.

Il se peut que le problème soit mal posé, par exemple que les variables soient mal choisies, dans un espace trop gros. On peut arriver ainsi à une densité hamiltonienne (i.e. la fonction \mathcal{H}) qui ne dépend pas de q' mais en général, en changeant de point de vue, on arrive à régler ces questions. Nous ne attarderons pas sur ces considérations ici.

Puisque dans le paragraphe précédent, nous avons expliqué comment obtenir une formulation lagrangienne de la relativité générale (dans le vide), la méthode ci-dessus permet d'obtenir une formulation hamiltonienne du problème. Il faut bien s'y prendre mais les calculs se font et on obtient explicitement les expressions de π , \mathcal{H} en fonction de g , g_t et la seconde forme fondamentale K de M_t . Les équations (VII.134) sont explicites mais longues et nous ne les donnons pas ici.

REMARQUE VII.139. Par construction, la formulation hamiltonienne de la relativité générale fournit des relations conservées avec le temps. On verra dans le prochain paragraphe que la masse ADM est en un exemple. D'autres exemples sont les équations de contraintes (VI.99) et (VI.100) rencontrées au Chapitre VI.

2.3. Masse ADM d'un système isolé. Dans ce paragraphe, nous définissons la masse ADM d'un système isolé. D'abord, arrêtons-nous un instant sur la terminologie de "masse". Rappelons qu'il y a de nombreuses formes d'énergies : la masse est l'une d'elles et la formule $E = mc^2$ traduit cette relation. Dans le cas d'un fluide parfait sans pression au repos, ces deux notions sont confondues et souvent, dans la littérature, la terminologie utilisée prête à confusion : la masse ADM doit plutôt être pensée comme une énergie. En particulier, pour le célèbre problème de la masse positive présenté en fin de chapitre, on devrait plutôt parler d'énergie (d'ailleurs, certains, principalement les physiciens, le font).

On suppose pour simplifier que $\mathcal{M} = M \times I$ où I est un intervalle et où, pour tout t , $M_t := M \times \{t\}$ est une hypersurface de type espace. Puisqu'on étudie un système isolé, on va supposer que chaque M_t est asymptotiquement plate :

DÉFINITION. Une hypersurface Σ de (\mathcal{M}, g) est asymptotiquement plate, s'il existe un compact K et une carte

$$\eta : \begin{cases} \Sigma \setminus K & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B} \\ p & \mapsto & (x^1, x^2, x^3) \end{cases}$$

où B est la boule unité standard de \mathbb{R}^3 , telle que, si on note \bar{g} la restriction de la métrique g à l'espace tangent $T\Sigma$ et h est la seconde forme fondamentale, alors, dans les coordonnées (x^1, x^2, x^3) , $\bar{g}_{ij} \rightarrow \delta_{ij}$ et $h_{ij} \rightarrow 0$ lorsque $r^2 := (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ tend vers l'infini.

Il faudrait être plus précis sur la convergence (en fait, il faut avoir une convergence en norme C^2), sur la vitesse de convergence, et il faudrait être plus général

sur la topologie de Σ qui, à un compact près, doit, d'après cette définition, être difféomorphe à $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$. Notre but pour l'instant étant simplement de comprendre certaines notions physiques, nous allons ici nous contenter de cette définition mais nous serons plus précis quand nous énoncerons les problèmes mathématiques en fin de chapitre.

Revenons maintenant à la formulation hamiltonienne de la relativité générale et supposons donnée une métrique g solution de l'équation d'Einstein. Puisqu'on est en présence d'un système isolé, on peut se placer en dehors de ce système et appliquer les résultats trouvés dans le paragraphe précédent qui concernent l'équation d'Einstein dans le vide : on construit ainsi le hamiltonien H ainsi que les quantités π et q de manière à ce que les équations (VII.134) soient vérifiées. Prenons une famille de métriques (g_a) telle que $g_0 = g$ et dont la variation en $a = 0$ est à support compact. Notons q_a et π_a les quantités correspondantes. Les équations (VII.134) disent que

$$\begin{aligned} \delta H(g_a) &= \frac{\partial H}{\partial \pi} \delta \pi_a + \frac{\partial H}{\partial q} \delta q_a \\ &= q'_a \delta \pi_a - \pi'_a \delta q_a. \end{aligned}$$

Dans le calcul du hamiltonien devraient apparaître des termes de bord mais nous les oublions en choisissant \mathcal{H} puisque, les variations de métriques étant à support compact, ces termes disparaissent en intégrant sur M_t tout entier. Maintenant soit (g_a) une famille de métriques que nous noterons cette fois (g_t) qui vérifie toujours que $g_0 = g$ mais telle que, cette fois, la variation n'est plus à support compact mais a la propriété de conserver la platitude asymptotique de chaque M_t . Nous utiliserons la notation $(g_t)_t$ pour la raison suivante : nous considérons plus loin une métrique g solution des équations d'Einstein sur $M \times I$ et qui est asymptotiquement plate (i.e. chaque tranche est asymptotiquement plate). Nous regarderons alors la famille de métriques $g_t = g_{/M \times \{t\}}$. Puisque chaque tranche est asymptotiquement plate, cette variation de métriques conserve la platitude asymptotique.

Dans ce cadre, les termes de bord ne s'annulent plus. Pour ce type de variations, on calcule (toutes les expressions étant explicites, ce calcul est long mais direct) :

$$\delta H(g_t) = q'_t \delta \pi_t - \pi'_t \delta q_t - \delta C_t$$

où, dans les coordonnées (x^1, x^2, x^3) données par la platitude asymptotique de M_t ,

$$C_t = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_R} (\partial_j (g_t)_{ii} - \partial_i (g_t)_{ij}) \nu^j ds_\xi.$$

Dans cette expression, on a $g_t = g_{/TM_t}$. On a aussi noté S_R la sphère $S_R = \{(x^1, x^2, x^3) | r \leq R\}$ et ds_ξ l'élément de volume induit par $\xi := (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ sur S_R .

Cela nous conduit à définir un nouveau hamiltonien \tilde{H} en posant

$$\tilde{H} = H + C_t$$

(qui n'est pas exactement de la forme $\int_{M_t} \mathcal{H}$, mais ce n'est pas vraiment un problème). Ce choix nous permet d'avoir

$$\delta \tilde{H}(g_t) = q'_t \delta \pi_t - \pi'_t \delta q_t$$

même pour ce type de variations, ce qui redonne les équations (VII.134). Malheureusement, la définition de ce hamiltonien n'est pas encore suffisante. Dans les équations (VII.134), les dérivées partielles de H sont à comprendre au sens "différentielles partielles". Or dans tout ce qu'on a fait, ces différentielles partielles ne s'appliquent, pour retrouver les formules (VII.134), qu'à des tenseurs dont le support est dans la partie vide de l'espace-temps \mathcal{M} . Il faut donc modifier la densité lagrangienne \mathcal{H} à l'endroit où le tenseur d'énergie-impulsion n'est pas nul. Au final, nous travaillerons avec le lagrangien

$$\bar{H} = \int_{M_t} \bar{\mathcal{H}} dv_g + C_t$$

où $\bar{\mathcal{H}}$ est la nouvelle densité lagrangienne. On voit facilement que les équations (VII.134) s'appliquent maintenant à toute variation de métrique qui conserve la platitude asymptotique. Le résultat qui nous intéresse surtout est le suivant :

PROPOSITION VII.140. *Soit g une métrique asymptotiquement plate sur $\mathcal{M} = M \times I$, solution de l'équation d'Einstein en présence d'un système isolé. Alors $t \mapsto C_t$ est une fonction constante.*

DÉMONSTRATION. On calcule d'abord $\frac{d}{dt} \bar{H}(g_t)$. Il faut remarquer que la variation g_t est admissible : elle conserve la platitude asymptotique. Elle ne l'était pas avec le lagrangien \tilde{H} (car la variation $\frac{d}{dt} g_t$ n'est pas à support dans la partie vide de M_t). Fixons $t_0 \in I$. On a d'après les équations (VII.134) :

$$\frac{d}{dt}_{t=t_0} \bar{H}(g_t) = \frac{\partial}{\partial \pi} \bar{H} \pi' + \frac{\partial}{\partial q} \bar{H} q' = q' \pi' - \pi' q' = 0. \quad (\text{VII.141})$$

On a aussi

$$\frac{d}{dt}_{t=t_0} \bar{H}(g_t) = \frac{d}{ds}_{s=0} \bar{H}(g_{t_0} + s g'_{t_0}).$$

On écrit $g'_{t_0} = h_r + h'_r$ où $h_{r_0} = \eta g'_{t_0}$, $h'_{r_0} = (1 - \eta) \eta g'_{t_0}$, $\eta \in [0, 1]$ étant une fonction de cut-off égale à 1 sur $M_{t_0} \setminus B_{2r_0}$ et nulle sur B_{r_0} où B_{r_0} est une boule assez grande pour contenir toute la matière de M_{t_0} . Par linéarité de la différentielle, on a

$$\frac{d}{dt}_{t=t_0} \bar{H}(g_t) = \frac{d}{ds}_{s=0} \bar{H}(g_{t_0} + s h_{r_0}) + \frac{d}{ds}_{s=0} \bar{H}(g_{t_0} + s h'_{r_0}).$$

Rappelons que

$$\bar{H} = \int_{M_t} \bar{\mathcal{H}} dv_G + C_t.$$

Il est alors clair que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d}{ds}_{s=0} \bar{H}(g_{t_0} + s h_r) = \frac{d}{dt}_{t=t_0} C_t$$

et que puisque h'_r est à support compact,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d}{ds_{s=0}} \overline{H}(g_{t_0} + sh'_{r_0}) = 0.$$

Cette dernière égalité est obtenue en procédant comme pour obtenir (VII.141). On obtient ainsi, avec (VII.141),

$$\frac{d}{dt}_{t=t_0} C_t = 0$$

ce qui prouve la proposition. \square

En physique, dès qu'une quantité est conservée, on a envie de l'interpréter comme une énergie. C'est ainsi que Arnowitt, Deser et Misner [ADM62] ont introduit ce qu'on appelle communément "la masse ADM" (on devrait plutôt dire "l'énergie ADM") et qui est définie par C_t . Plus précisément,

DÉFINITION. Soit (Σ, \bar{g}) une hypersurface de type espace de \mathcal{M} , asymptotiquement plate. La masse ADM de (Σ, \bar{g}) est définie par

$$m(\bar{g}) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} (\partial_j \bar{g}_{ii} - \partial_i \bar{g}_{ij}) \nu^j ds_\xi$$

où les coordonnées utilisées sont celles fournies par la définition de la platitude asymptotique.

REMARQUE VII.142.

- (1) Le choix de la constante $\frac{1}{16\pi}$ sera justifié plus loin.
- (2) La définition de la masse ADM est purement riemannienne, ce qui permettra, comme on le verra en fin de chapitre de définir la masse d'une variété riemannienne asymptotiquement plate qui n'est pas forcément une hypersurface d'une variété lorentzienne.
- (3) La définition de la platitude asymptotique fournit des coordonnées dont le choix n'est unique. On peut montrer que la définition ci-dessus ne dépend pas de ce choix.

Exemple important : La définition de la masse ADM est purement mathématique mais plusieurs indices confirment le fait qu'elle représente bien une énergie. D'abord, on verra une autre définition dans le prochain paragraphe, plus intuitive. Ensuite, elle est bien nulle dans l'espace de Minkowski qui correspond à un espace-temps vide. Surtout, il y a l'exemple de la métrique de Schwarzschild vu au Chapitre V. On a vu que le paramètre c de la métrique g'_c définie par la formule (V.85) s'interprétait comme le double de la masse de l'objet considéré. Par ailleurs, on remarque que les hypersurfaces $t = \text{constante}$ sont asymptotiquement plates. Un calcul simple montre que leur masse ADM est égale à $\frac{c}{2}$ (ce qui donne une première justification du choix de la constante $\frac{1}{16\pi}$ dans la définition de la masse ADM).

2.4. Masse de Komar d'un système isolé. La définition de la masse ADM est très mathématique : elle apparaît naturellement en faisant des calculs pour obtenir une formulation hamiltonienne de la relativité générale en présence d'un système isolé. On va maintenant essayer de définir l'énergie totale d'un système isolé de manière plus physique. Rappelons que la notion d'énergie locale n'est pas claire de manière générale. Nous supposons que la constante cosmologique est nulle, ce qui est physiquement cohérent puisque nous travaillons à petite échelle. Notons τ le tenseur d'énergie impulsion. Puisque le système est isolé, le support de τ sur toute hypersurface complète de type espace doit être compact. Si on utilise le modèle présenté dans le Paragraphe 1 (ce qui n'est pas nécessaire ici), cela revient à dire que l'image du support de τ par le difféomorphisme conforme qui définit la platitude asymptotique ne rencontre pas l'infini spatial i_0 . Dans notre cadre, on se contentera de fixer une hypersurface Σ asymptotiquement plate.

Pour simplifier les choses, nous allons commencer par supposer que le système considéré est un fluide parfait sans pression. Pour un observateur donné, l'énergie totale du système est approximativement égale à sa masse. En effet, les vitesses des systèmes isolés étudiés en cosmologie sont généralement faibles et on néglige tout ce qui concerne l'énergie cinétique. Revenons un instant à la mécanique classique. Considérons un système isolé et prenons une grande sphère S qui contient toute la matière. Si la sphère est assez grande et si la matière se trouve à une distance raisonnable du centre, le système peut-être assimilé à une masse ponctuelle m placée au centre. Notons Φ son potentiel newtonien. Rappelons que $\Phi = -\frac{m}{r}$ où r est la distance au centre (on rappelle que, depuis le début, on a pris des conventions qui font que la constante gravitationnelle k est égale à 1). Puisque l'aire de la sphère S est $4\pi r_0^2$, r_0 étant son rayon, on a, en notant $\nu := \frac{\partial}{\partial r}$ le vecteur normal sortant sur S

$$\int_S \nabla \Phi \cdot \nu dx = m \int_S r_0^{-2} dx = 4\pi m.$$

Pour que les approximations faites soient valables, il faut que r_0 soit grand. On définit donc la masse totale (et l'énergie du système) par

$$m = \frac{1}{4\pi} \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int_S \nabla \Phi \cdot \nu dx. \quad (\text{VII.143})$$

Revenons à la relativité générale. Puisqu'elle a été construite pour retrouver les lois de Newton à vitesse faible, il paraît naturel de s'appuyer sur la formule ci-dessus pour définir la masse du système. D'abord, il faut, pour définir une énergie, se placer du point de vue d'un observateur. Il est évident que puisque de manière générale, l'énergie est liée à la vitesse, il faut choisir des observateurs convenables. Pour retrouver approximativement les lois de la mécanique classique, on va supposer que l'espace-temps (\mathcal{M}, g) est statique et que l'on se place du point de vue d'un observateur galiléen, c'est-à-dire qu'il existe des coordonnées (t, y^1, y^2, y^3) dans lesquelles la matrice de g est donnée par

$$\begin{pmatrix} -f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} & \bar{g}_{13} \\ 0 & \bar{g}_{21} & \bar{g}_{22} & \bar{g}_{23} \\ 0 & \bar{g}_{31} & \bar{g}_{32} & \bar{g}_{33} \end{pmatrix}$$

où $f, \bar{g}_{i,j}$ ne dépendent pas de t . Par ailleurs, puisqu'on se place du point de vue d'un observateur galiléen, Σ est une hypersurface dont une équation est donnée par $t = \text{constante}$. En particulier, si on suppose que $y^i = x^i$ ($i = 1, 2, 3$), la matrice de \bar{g} dans les coordonnées (t, x^1, x^2, x^3) garde la forme ci-dessus.

Dans ce cadre, on a vu à plusieurs reprises que la fonction f jouait en relativité générale le rôle du potentiel newtonnien. Prenons une grande sphère $S_{r_0} := \{(x^1, x^2, x^3) | r := (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r_0\}$ et notons ν son vecteur unitaire normal sortant. Ainsi, la formule (VII.143) devient, en relativité générale :

$$m = \frac{1}{4\pi} \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int_{S_{r_0}} \bar{g}(\nabla f, \nu) ds_{\bar{g}}$$

où $ds_{\bar{g}}$ est l'élément de volume induit par \bar{g} sur S_{r_0} .

Notons $B_{r_0} := \{(x^1, x^2, x^3) | r \leq r_0\}$ la boule de rayon r_0 . Pour obtenir une définition intrinsèque, on utilise le Théorème de Stokes puis la Proposition (III.50) pour écrire que

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{4\pi} \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int_{B_{r_0}} \Delta_{\bar{g}} f ds_{\bar{g}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} R_{ab} n^a t^b dv_{\bar{g}}. \end{aligned}$$

Ici, on a utilisé les coordonnées (t, x^1, x^2, x^3) . On a noté n^a les coordonnées du vecteur $\vec{n} := f^{-1} \frac{\partial}{\partial t}$, g -orthogonal à Σ , unitaire et orienté positivement. On a aussi noté t^b les coordonnées du champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$. Autrement dit, $t^0 = 1$, $t^b = 0$ si $b \geq 1$. En utilisant l'équation d'Einstein, on voit que $Ric = 8\pi T$ où le tenseur T est défini par $T = \tau - \frac{1}{2} \tau_{ab} g^{ab} g$. Ainsi

$$m = 2 \int_{\Sigma} T \left(\vec{n}, \frac{\partial}{\partial t} \right) dv_{\bar{g}}.$$

Cette écriture permet de donner une définition de la masse dans des conditions un peu plus générales que lorsque Σ est une hypersurface vue par un observateur galiléen d'un domaine statique. Tout d'abord, on n'a plus besoin de supposer que le fluide est parfait (la définition s'écrit indépendamment de ρ et \vec{u}). On va aussi supposer que l'espace-temps est seulement *stationnaire* :

DÉFINITION. Un domaine Ω d'un espace-temps est dit *stationnaire* s'il admet un champ de Killing ξ de type temps.

La différence par rapport à un domaine statique est qu'on ne suppose plus qu'il existe une hypersurface Σ g -orthogonale au champ ξ . On suppose seulement que le flot du champ ξ est isométrique. Pour comprendre cette nuance, imaginons une étoile sans rotation : on va obtenir des hypersurfaces Σ toutes isométriques orthogonales à ξ . Supposons maintenant que cette étoile soit en rotation : on aura toujours ce feuilletage par des hypersurfaces Σ toutes isométriques mais les lignes

de champ du fluide à l'intérieur de l'étoile seront en rotation et ξ ne sera plus orthogonal à Σ . En particulier, pour que Σ soit l'espace vu par un observateur, il faut que cet observateur se trouve très loin du système (le champ ξ est asymptotiquement orthogonal à ξ). Ce n'est absolument pas gênant puisque, justement, on a supposé dans la définition de m que l'on se plaçait à l'infini.

REMARQUE VII.144. Faire l'hypothèse que l'espace-temps est stationnaire n'est à première vue pas vraiment satisfaisant : imaginons que le système isolé soit composé de deux étoiles. Puisque les hypersurfaces Σ sont toutes isométriques, cela signifie, d'après l'équation d'Einstein que la matière est répartie de la même manière dans Σ et donc que les deux étoiles se trouvent toujours à la même distance l'une de l'autre. C'est physiquement incohérent puisque deux corps quelconques vont avoir tendance à se rapprocher sous l'effet de la gravitation. Malgré tout, du point de vue d'un observateur à l'infini, le système est assimilé à un point ce qui justifie ce modèle.

La définition ci-dessus n'impose pas de choisir Σ comme l'une de ces hypersurfaces isométriques. Cela amène finalement à la définition suivante introduite par Komar [K59]

DÉFINITION. On suppose que l'espace-temps possède un champ de Killing ξ de type temps. Soit Σ une hypersurface de type espace asymptotiquement plate. La *masse de Komar* est égale à

$$m_K = 2 \int_{\Sigma} T(\vec{n}, \xi) dv_{\bar{g}}$$

où \bar{g} est la restriction de g à Σ .

Alors, Ashtekar et Magnon-Ashtekar [AMA79] ont montré que

THÉORÈME VII.145. *Si Σ est asymptotiquement orthogonale à ξ (ce qui pour les raisons évoquées ci-dessus, est raisonnable d'un point de vue physique), les masses ADM et de Komar coïncident.*

La démonstration de ce théorème est beaucoup plus délicate qu'il n'y paraît. Nous ne la donnons pas ici (ce résultat n'est pas utile pour la suite).

3. La condition d'énergie dominante

Connaître la forme exacte du tenseur d'énergie-impulsion qui modélise le mieux la réalité est pratiquement impossible. Dans certaines situations, on va supposer qu'on a un fluide parfait. Dans d'autres, on va tenir compte de l'électromagnétisme. Mais ces hypothèses s'utilisent dans des cas très précis. Nous allons faire une hypothèse dite "condition d'énergie dominante" sur le tenseur d'énergie-impulsion qui, elle, semble réaliste dans toutes les situations et sans laquelle certains énoncés plausibles sont faux. En particulier, les problèmes mathématiques décrits en fin de chapitre s'appuient sur cette hypothèse.

Condition d'énergie dominante : Notons τ le tenseur d'énergie-impulsion. Alors, pour tout champ de vecteurs W de type temps,

- (1) $\tau(W, W) \geq 0$;
- (2) $\tau(W, \cdot)$ n'est pas de type espace (on ne distingue pas 1-formes et champs de vecteurs qui, par g , s'identifient canoniquement).

La première des deux hypothèses s'appelle la *condition faible d'énergie*. Elle pourrait s'interpréter comme une condition de positivité de l'énergie locale, bien que cette notion ne se définisse pas de manière rigoureuse. Dans le cas d'un fluide parfait sans pression, elle dit que la densité de masse ρ est positive. Hoyle et Narlikar [HN69] ont donné un modèle d'espace-temps pour lequel cette condition n'était pas satisfaite. Leur but était de proposer un modèle dans lequel la densité de matière était constante dans le temps. Pour compenser l'expansion de l'univers, il y avait création de matière ex-nihilo à tout instant, ce qui contredit toutes les mesures physiques faites : la densité moyenne de matière est en chute constante. Le théorème VII.147 empêche ce type de phénomène lorsque la condition faible d'énergie est vérifiée.

La deuxième condition dit que le flux d'énergie n'est pas de type espace, ce qui, pour un fluide parfait sans pression, dit que la matière ne peut pas voyager plus vite que la lumière (le vecteur \vec{u} ne doit pas être de type espace). De manière plus générale, elle dit qu'aucune information ne voyage plus vite que la lumière.

Soit $(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3})$ une repère g -orthonormé en un point. On suppose que $\frac{\partial}{\partial t}$ est de type temps. Alors, on montre facilement que la condition d'énergie dominante est équivalente au fait que dans ce repère,

$$\tau_{00} \geq |\tau_{ab}|$$

pour tous $a, b \in \{1, \dots, 4\}$. Cela justifie la terminologie de "condition d'énergie dominante" : comme on le verra dans le paragraphe 4, la coordonnée $(0, 0)$ du tenseur d'énergie-impulsion s'interprète comme une énergie (voir aussi le Paragraphe 5 du Chapitre III).

REMARQUE VII.146. Soit (t, x^1, x^2, x^3) des coordonnées locales. La discussion ci-dessus montre que

$$\tau \neq 0 \implies \tau_{00} > 0.$$

On donne maintenant une conséquence importante de la condition d'énergie dominante :

THÉORÈME VII.147. *Soit (\mathcal{M}, g) l'espace-temps de la relativité générale. On suppose que le tenseur d'énergie-impulsion vérifie la condition d'énergie dominante. On suppose aussi qu'il existe un champ de vecteurs \vec{t} de type temps qui ne contient pas d'orbite fermée (i.e. avec la terminologie du Chapitre VI, l'espace-temps est causalement stable). Soit U un domaine d'adhérence compacte dans \mathcal{M} . Notons Σ la partie du bord dont le vecteur normal unitaire sortant est de type temps et orienté positivement. On suppose que τ est identiquement nul sur $\partial U \setminus \Sigma$. Alors τ est identiquement nul sur U .*

Ce théorème dit que l'information ne peut pas voyager plus vite que la lumière. C'était déjà l'interprétation donnée à la deuxième hypothèse dans la condition d'énergie dominante mais cette interprétation était intuitive. Ce théorème donne un énoncé précis. En effet, on peut décomposer le bord de U en trois parties :

- Σ qui est de type espace et dont le vecteur normal sortant est orienté positivement ;
- Σ' qui est de type espace et dont le vecteur normal sortant est orienté négativement ;
- Σ'' qui n'est pas de type espace.

Alors on peut voir Σ' comme un sous-ensemble de l'espace \mathcal{E} vu par un observateur. On suppose que Σ' est vide. Imaginons qu'une information partant de $\mathcal{E} \setminus \Sigma'$ se propage. Pour entrer dans U , soit elle doit aller plus vite que la lumière, soit elle doit traverser Σ'' . Or par hypothèse, Σ'' est vide ce qui fait que cette information doit aller plus vite que la lumière. Ce théorème dit que cela n'arrive jamais. On remarque aussi que ce résultat interdit la création spontanée de matière.

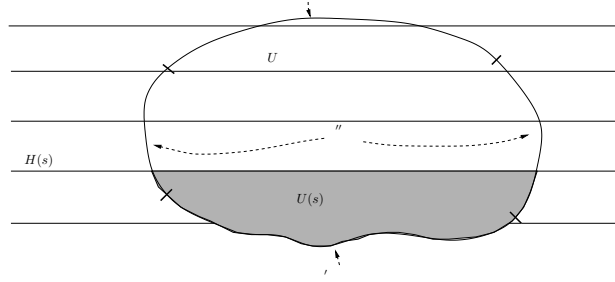


FIG. 2. Condition d'énergie dominante

DÉMONSTRATION. D'abord, le Théorème VI.97 dit que si \mathcal{M} est causalement stable, il existe une fonction t dont le gradient est partout non nul et de type temps. Sans restreindre la généralité, nous supposons que $\vec{t} = \nabla t$ et nous noterons t^a les composantes de ce vecteur quand on l'exprimera dans un système de coordonnées locales. Nous noterons pour $s \in \mathbb{R}$, $U(s) = U \cap \{t \leq s\}$. Notons enfin $H(s) = \{t = s\}$. Posons

$$x(s) := \int_{U(s)} \tau_{ab} t^a t^b dv_g = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{H(s') \cap U} \tau_{ab} t^a t^b dv_{g_{s'}} \right) ds'$$

où $g_{s'}$ est la restriction de la métrique g à $H(s')$. Alors,

$$x'(s) = \int_{H(s) \cap U} \tau_{ab} t^a t^b dv_{g_s} \geq 0. \quad (\text{VII.148})$$

On a utilisé ici la condition d'énergie dominante. Posons maintenant

$$I(s) := \int_{U(s)} \nabla^b (\tau_{ab} t^a) dv_g. \quad (\text{VII.149})$$

On a

$$I(s) = \int_{U(s)} \nabla^b(\tau_{ab})t^a dv_g + \int_{U(s)} \tau_{ab} \nabla^b t^a dv_g$$

L'équation d'Einstein impose que $\nabla^b \tau_{ab} = 0$ ce qui fait que ,

$$I(s) = \int_{U(s)} \tau_{ab} \nabla^b t^a dv_g.$$

Par ailleurs, en tout point de U , grâce à la remarque, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$\tau_{ab}(\alpha t^a t^b - \nabla^b t^a) \geq 0.$$

Par compacité de U , il existe $C > 0$ tel que

$$\tau_{ab} \nabla^b t^a \leq C \tau_{ab} t^a t^b$$

ce qui donne

$$I(s) \leq Cx(s) \tag{VII.150}$$

Revenons à la définition (VII.149) et utilisons le Théorème de Stokes :

$$I(s) = \int_{\partial U(s)} \tau_{ab} t^a n^b ds_g$$

où les n^b sont les composantes de \vec{n} , le vecteur unitaire sortant g -orthogonal à $\partial U(s)$. Le bord de $U(s)$ se décompose en trois parties : $U(s) \cap \Sigma$, $U(s) \cap (M \setminus \Sigma)$ et $H(s) \cap U$. Sur la deuxième de ces trois parties, le tenseur d'énergie-impulsion est nul. Sur $U(s) \cap \Sigma$, le vecteur \vec{n} est orienté positivement. La condition d'énergie dominante implique que $\tau_{ab} t^a n^b \geq 0$. On en déduit que

$$I(s) \geq \int_{H(s) \cap U} \tau_{ab} t^a n^b ds_g.$$

Par ailleurs, sur $H(s) \cap U$, \vec{t} et \vec{n} sont proportionnels donc il existe $c > 0$ tel que

$$I(s) \geq c \int_{H(s) \cap U} \tau_{ab} t^a t^b ds_g = cx'(s)$$

En revenant à (VII.150), on obtient qu'il existe une constante C_0 (égale à C/c) telle que $x'(s) \leq C_0 x(s)$. Supposons que x n'est pas identiquement nul. Alors, il existe a tel que $x > 0$ sur $]a, b[$ et tel que $x(a) = 0$ car x est nul au voisinage de $-\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ petit. On a

$$\ln(x(b)) - \ln(x(a + \varepsilon)) = \int_{a+\varepsilon}^b \frac{x'(s)}{x(s)} ds \leq C_0(b - (a + \varepsilon)).$$

On arrive à une contradiction en faisant tendre ε vers 0 ce qui termine la démonstration du théorème. \square

4. Le quadrivecteur de moment-énergie

Plaçons-nous en relativité restreinte et considérons un fluide parfait sans pression. De la même manière qu'en relativité générale, on peut définir le tenseur d'énergie-impulsion par l'expression

$$\tau = \rho d\vec{u} \otimes d\vec{u}$$

où $d\vec{u} := g(\cdot, \vec{u})$. Considérons maintenant un observateur galiléen D dirigé en un point par un vecteur \vec{n} de norme -1 et orienté positivement. Maintenant, appelons F l'espace vu par cet observateur. Le vecteur \vec{n} est le vecteur orthogonal unitaire orienté positivement. On écrit

$$\vec{u} = a\vec{n} + \vec{k}$$

où $\vec{k} \in F$. Alors, la vecteur $\frac{\vec{k}}{a}$ est la vitesse du fluide par rapport à l'observateur D au point considéré. On note $v = \frac{1}{a}\sqrt{g(\vec{k}, \vec{k})}$ la vitesse au sens habituel. Posons maintenant

$$\vec{P} = -\tau_{ab}n^a$$

où les n^a désignent les composantes du vecteurs \vec{n} dans la base canonique. On a

$$\vec{P} = -\rho d\vec{u}(\vec{n}) \vec{u} = -\rho g(\vec{u}, \vec{n}) (a\vec{n} + \vec{k}) = \rho(a^2\vec{n} + a\vec{k}).$$

Par ailleurs, puisque $g(\vec{u}, \vec{u}) = -1$, on a $a^2(-1 + v^2) = -1$ si bien que

$$\vec{P} = \frac{\rho}{1 - v^2}(\vec{n} + \vec{k}/a)$$

Alors, exprimé dans une base $(\vec{n}, \vec{f}^1, \vec{f}^2, \vec{f}^3)$ où $(\vec{f}^1, \vec{f}^2, \vec{f}^3)$ est une base de \vec{F} , on trouve que \vec{P} a pour composantes

$$\begin{pmatrix} E \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

où

$$E = \frac{\rho}{1 - v^2}$$

et

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \frac{\rho\vec{k}/a}{1 - v^2}.$$

Autrement dit, en se rappelant que ρ est la densité de masse, \vec{E} est la densité d'énergie du fluide (voir le Paragraphe 3.2 du Chapitre III) vu par D tandis que les trois dernières composantes de \vec{P} représentent la densité d'impulsion du fluide vu par D . Le vecteur \vec{P} s'appelle le *quadrivecteur de moment-énergie* du fluide vu par D au point considéré.

Remarque importante : *Puisque la matière ne peut pas voyager plus vite que la lumière, on a $v = \frac{1}{a}\sqrt{g(\vec{k}, \vec{k})} \leq 1$ ce qui implique que \vec{P} est de genre temps.*

De même, en relativité générale, on définit $\vec{P} = -\tau_{ab}n^b$ où les n^b sont les composantes du vecteur normal à une hypersurface de type espace. Cependant, ce vecteur n'a pas vraiment de sens physique, tout comme l'énergie locale n'en avait pas. Par contre, dans le cas d'un système isolé, on peut définir un quadrivecteur de moment-énergie ADM dont la première composante est la masse ADM et dont les trois autres composantes (P^1, P^2, P^3) sont

$$P^k = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_R} 2(h_{ik} - \delta_{ik}h_{jj})ds_\xi$$

où comme pour la masse ADM, Σ est une hypersurface asymptotiquement plate de seconde forme fondamentale h et ds_ξ est la métrique induite par la métrique euclidienne sur la sphère S_R . La manière d'aboutir à ces formules est similaire à celle qui permet d'obtenir la masse ADM et nous ne la détaillerons pas ici.

5. Masse positive et moment-énergie positif

Les considérations précédentes conduisent à plusieurs problèmes mathématiques qui, encore actuellement, sont activement étudiés. Dans ce paragraphe, nous présentons les problèmes de la masse positive et du moment-énergie positif.

5.1. Masse positive. On notera ξ la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^3 .

DÉFINITION. Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension 3.

– Un *bout asymptotiquement plat* de (M, g) est un ensemble ouvert E de M difféomorphe au complément d'une boule dans \mathbb{R}^3 tel que, dans les coordonnées induites par ce difféomorphisme, la métrique g satisfasse :

$$|g_{ij} - \xi_{ij}| \leq \frac{C}{|x|}, \quad |\partial_k g_{ij}| \leq \frac{C}{|x|^2}, \quad \text{Ric}^g \geq \frac{-C}{|x|^2}g,$$

pour $|x|$ grand.

– La variété riemannienne (M, g) est *asymptotiquement plate* s'il existe un compact K de M tel que $(M \setminus K, g)$ est une union de bouts asymptotiquement plats.

L'exemple le plus simple est (\mathbb{R}^3, ξ) qui est une variété asymptotiquement plate avec un bout. Un autre exemple est la métrique de Schwarzschild qui apparaît dans le Chapitre V.

Théorème de la masse positive : *Soit (M, g) une variété asymptotiquement plate (connexe) de dimension 3 dont la courbure scalaire est partout positive ou nulle. Alors,*

$$m^g(E) \geq 0$$

(où m^g est la masse ADM définie sur chaque bout comme dans le paragraphe 2.3) sur chaque bout E avec égalité si et seulement si (M, g) est isométrique à (\mathbb{R}^3, ξ) .

Remarquons que nous sommes sortis du cadre lorentzien. Ce théorème a été d'abord montré par Schoen et Yau dans [SY79]. Witten [Wit81] a trouvé une preuve plus simple en toute dimension lorsque la variété est spin (ce qui est toujours le cas en dimension 3). Lockhamp a publié sous forme de preprint une preuve

complète du problème mais à ma connaissance, aucun mathématicien n'a réussi à comprendre complètement son argument.

Donnons aussi quelques explications sur les hypothèses de ce théorème. L'idée ici est de considérer que M est une hypersurface de genre espace totalement géodésique d'un espace-temps (\mathcal{M}, G) . Sous la condition d'énergie dominante, il est plausible de dire que l'énergie totale (c'est-à-dire la masse ADM) vue par un observateur doit être positive. Dans cette situation, la condition d'énergie dominante se traduit par le fait que la courbure scalaire sur M est positive ou nulle. En effet, prenons un système de coordonnées tel que la matrice de G vérifie $G_{00} = -1$, $G_{a0} = 0$ pour $a \geq 1$, $G_{ab} = g_{ab}$ pour $a, b \geq 1$. On peut aussi se débrouiller pour que $g_{ab} = \delta_{ab}$ en prenant des coordonnées normales. La condition d'énergie dominante dit que les composantes du tenseur d'Einstein E vérifient : $E_{00} \geq E_{ab}$ et donc $3E_{00} \geq g^{ab}E_{ab}$ (puisque $g^{ab} = \delta^{ab}$ pour $a, b \geq 1$). Or $R_{00} = 0$ (car, puisque M est totalement géodésique, $Ric_G = Ric_{dt^2} + Ric_g = Ric_g$). Donc $E_{00} = -\frac{1}{2}RG_{00} = \frac{1}{2}R$. Ici R est à la fois la courbure scalaire de g et de G . On aboutit finalement à $\frac{3}{2}R \geq -\frac{1}{2}R$, c'est-à-dire à $R \geq 0$.

5.2. Moment-énergie positif. Soit (\mathcal{M}, g) un espace-temps de la relativité générale et M une hypersurface de type espace asymptotiquement plate. Dans ce cadre, cela signifie que M est asymptotiquement plate au sens du paragraphe précédent mais qu'en plus la courbure moyenne h vérifie sur chaque bout

$$h_{ij} = O(r^{-2}) \text{ et } \partial_k h_{ij} = O(r^{-3}).$$

Alors,

Théorème du moment-énergie positif : *Sous la condition d'énergie dominante, le quadrivecteur de moment-énergie ADM est de type temps ou lumière. S'il est de type lumière, alors, la métrique G est plate le long de M .*

Ce théorème a été démontré par Parker et Taubes [PT82]. La condition d'énergie dominante dit que la matière ne voyage pas plus vite que la lumière, ce qui est nécessaire pour dire que le quadrivecteur de moment-énergie est de type temps (voir Paragraphe 4).

CHAPITRE VIII

Effondrement gravitationnel et trous noirs

Le but de ce chapitre est d'étudier les trous noirs sans supposer, comme dans le Chapitre V, que l'espace-temps possède des symétries en espace. Plus généralement, on se propose de préciser la notion de singularités d'un espace-temps. Elles peuvent se présenter sous diverses formes mais la conjecture de la censure cosmique stipule que dans la réalité physique, outre le Big-Bang, seules celles de type trou noir peuvent exister. On sera alors conduit à la conjecture de Penrose dont l'énoncé est purement mathématique et qui concerne la masse ADM d'une variété asymptotiquement plate, lorsque le système isolé étudié est un trou noir.

1. Singularités de l'espace-temps

Une bonne définition de "singularité de l'espace-temps" n'est pas si facile à formuler. Le Big-Bang en est une ainsi que les trous noirs et les trous blancs qui apparaissent dans le Chapitre V. Une possibilité pourrait être de définir une singularité comme un endroit où la métrique et ses dérivées explosent mais la notion d'endroit n'est pas bien claire. On va donc plutôt s'appuyer sur l'existence de géodésiques incomplètes. Il faut prendre garde au fait que certaines singularités sont, avec cette définition, créées artificiellement en enlevant un point régulier à un espace-temps. Il sera donc souvent commode de travailler soit avec des espaces-temps inextensibles ou alors, si on impose certaines conditions, causales par exemple, travailler avec des espaces-temps dont toute extension perd les propriétés requises.

Revenons maintenant sur la signification physique de l'incomplétude des géodésiques. Lorsque la géodésique est de type temps, la présence d'une singularité réelle est évidente : il existe des observateurs ou des particules dont la durée de vie dans le futur ou le passé est finie. De même, si une géodésique de type lumière est incomplète (rappelons que d'après la remarque (I.169), cette notion a bien un sens), cela signifie qu'un photon a durée de vie finie dans le passé ou dans le futur. Notons que cette durée de vie est mesurée par un observateur extérieur car le temps propre d'un photon n'a pas de sens. Même si la signification physique est moins claire, il faut garder cet aspect dans la définition des singularités : on peut en effet construire des exemples où toutes les géodésiques de type temps sont complètes mais où il existe des géodésiques de type lumière incomplètes. Pour finir, notons que l'existence de géodésiques incomplètes de type espace n'a pas vraiment de sens physique. C'est pourquoi nous adopterons la définition suivante :

DÉFINITION. On dit qu'un espace-temps (\mathcal{M}, g) possède une singularité s'il existe des géodésiques incomplètes de type temps ou lumière.

Maintenant, nous allons essayer de trouver des moyens de détecter la présence de singularités. Pour cela, nous avons besoin d'introduire quelques notions.

La condition forte d'énergie : Nous avons déjà vu dans le chapitre VII la condition faible d'énergie ainsi que la condition d'énergie dominante. Nous avons maintenant besoin de la condition forte d'énergie : on suppose que la métrique g de l'espace-temps vérifie

$$\text{Ric}(\xi, \xi) \geq 0 \quad (\text{VIII.151})$$

pour tout vecteur ξ de type temps. En utilisant l'équation d'Einstein (III.57), on voit que cette condition est équivalente à

$$\tau(\xi, \xi) \geq -\frac{1}{2}T \quad (\text{VIII.152})$$

pour tout ξ de type temps, où τ est le tenseur d'énergie-impulsion et où $T := g^{ab}\tau_{ab}$ est sa trace. Supposons qu'on soit en présence d'un fluide parfait. Puisque τ est symétrique, il existe en chaque point une base g -orthonormée $(\vec{t}, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ dans laquelle la matrice de τ est diagonale. À part dans le cas de fluides très particuliers où la densité de masse est nulle, on peut supposer que \vec{t} est de type temps et que pour tout $i = 1, 2, 3$, \vec{x}_i est de type espace. La valeur propre ρ correspondant au vecteur \vec{t} est la *densité d'énergie* (qui est la somme de la densité de masse et de l'énergie causée par la pression) tandis que les trois autres valeurs propres p_1, p_2, p_3 sont appelées *pressions principales*. Alors,

- la condition faible d'énergie est équivalente à $\rho \geq 0$ et $\rho + p_i \geq 0$ pour tout i ;
- la condition forte d'énergie est équivalente à $\rho + \sum_{i=1}^3 p_i \geq 0$ et $\rho + p_i \geq 0$ pour tout i ;
- la condition d'énergie dominante est équivalente à $\rho \geq |p_i|$ pour tout i .

On admet généralement qu'un espace-temps physiquement cohérent satisfait ces trois conditions. Dans ce paragraphe, on aura surtout besoin de la condition forte d'énergie. Remarquons que pour qu'elle soit fautive, il faudrait que ou bien la densité d'énergie soit négative, ou bien que ce soit les pressions principales qui le soient, et avec une valeur absolue "grande" relativement à la densité de masse.

L'expansion : Considérons un champ de vecteurs ξ . Nous définissons le 2-tenseur $B_{ab} := \nabla_a \xi_b$. Examinons la signification physique de B . Soit p un point et $\gamma(t)$ la courbe intégrale de ξ passant par p . Supposons maintenant qu'en p , la matrice de la forme bilinéaire B_p exprimée dans une base (X_1, \dots, X_4) de $T_p\mathcal{M}$ soit diagonale. Regardons comment se comporte le champ de vecteurs ξ au voisinage de p . Pour simplifier les notations, on identifie \mathcal{M} à \mathbb{R}^4 et $T\mathcal{M}$ à $\mathbb{R}^4 \times T_p\mathcal{M}$ au voisinage de p . Lorsque ε tend vers 0, $\xi(p + \varepsilon X_i)$ se comporte comme $\xi(p) + \lambda_i \varepsilon X_i$ où λ_i est la valeur propre de B_p associée à X_i . Ainsi, si $\lambda_i > 0$, la courbe intégrale de ξ passant par $p + \varepsilon X_i$ va avoir tendance à s'éloigner de γ tandis que si $\lambda_i < 0$, cette courbe intégrale va au contraire avoir tendance à s'approcher de γ . Le champ de tenseurs B mesure la "dispersion" des courbes intégrales de σ au voisinage d'un point.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où le champ de vecteurs ξ est unitaire et tangent à une congruence de géodésiques de type temps. Dans ce cas, B est purement spatial : c'est-à-dire que

$$B(\xi, \cdot) = B(\cdot, \xi) = 0.$$

En effet, $B_{ab}\xi^b = (\nabla_a \xi_b)\xi^b = \nabla_a(\xi_b \xi^b) - \xi^b \nabla_a \xi_b$, c'est-à-dire, puisque g est parallèle $2B_{ab}\xi^b = \nabla_a(\xi_b \xi^b) = 0$ en se rappelant que $\xi_b \xi^b = 1$.

Remarquons que puisque ξ est unitaire, on peut définir une métrique h spatiale par :

$$g_{ab} = h_{ab} - \xi_a \xi_b. \quad (\text{VIII.153})$$

La métrique h n'est définie que sur l'espace vectoriel g -orthogonal à ξ dans l'espace tangent du point considéré. Ce n'est donc pas une métrique. Malgré tout, nous conservons cette terminologie parce, lorsque ξ est orthogonal à une famille d'hypersurfaces, h est simplement la restriction de g à ces hypersurfaces et est alors une métrique riemannienne.

DÉFINITION. La trace $\Theta := B^{ab}h_{ab}$ est appelée *expansion* au point p .

La raison pour ne prendre la trace que par rapport à la partie spatiale de g est claire. Cela dit, B étant purement spatiale, le résultat aurait été le même en prenant la trace par rapport à g . Il n'est peut-être pas inutile de donner une deuxième interprétation géométrique de l'expansion : prenons une surface S orthogonale à la congruence et notons S_t l'évolution de la surface S le long de la congruence au temps t (i.e. pour chaque point p de S , il existe une géodésique γ telle que $\gamma(t_0) = p$. La surface S_t est définie comme l'ensemble des points $\gamma(t_0 + t)$). On suppose que sur S , l'expansion est strictement négative. Alors, au moins pour t petit, l'aire de S_t est plus petite que celle de S .

Intuitivement, il est facile de s'imaginer qu'une expansion trop négative va conduire à une "convergence des géodésiques" conduisant à une singularité. Cette intuition est illustrée par le théorème suivant :

THÉORÈME VIII.154. *Supposons que ξ est un champ de vecteurs tangents à une congruence de géodésiques de type temps toutes orthogonales à une famille d'hypersurfaces. On suppose aussi que la condition forte d'énergie est satisfaite. S'il existe un point sur une géodésique de la congruence pour lequel $\Theta < 0$, alors Θ explose (vers $-\infty$) le long de cette géodésique en un temps fini.*

DÉMONSTRATION. (une esquisse) On calcule que, si s est le paramètre de la géodésique considérée, on a :

$$\frac{d}{ds}\Theta(s) = -\frac{1}{3}\Theta(s) - \sigma^{ab}\sigma_{ab} + w^{ab}w_{ab} - R_a b \xi^a \xi^b$$

où

$$\sigma_{ab} := \frac{1}{2}(B_{ab} + B_{ba}) - \frac{1}{3}\Theta h_{ab}, \quad w_{ab} = \frac{1}{2}(B_{ab} - B_{ba})$$

où h est définie par (VIII.153). Le fait que ξ soit orthogonale à une hypersurface permet de dire que $w_{ab} = 0$ et la condition forte d'énergie implique finalement que

$$\frac{d}{ds}\Theta(s) + \frac{1}{3}\Theta(s) \leq 0.$$

Puisque qu'il existe s_0 tel que $\Theta(s_0) < 0$, on en déduit que $\Theta(s)$ explose au plus tard en $s = s_0 + \frac{3}{\Theta(s_0)}$. \square

Ce théorème n'est pas tout à fait satisfaisant : il ne montre pas que l'espace-temps est singulier mais seulement que la congruence considérée l'est. Malgré tout, avec d'autres hypothèses, on peut montrer que la singularité obtenue grâce à ce résultat est vraiment une singularité de l'espace-temps.

On voudrait maintenant étendre la définition précédente lorsque la congruence considérée est constituée de géodésiques de type lumière. Là encore, B est purement spatial puisque cette fois $\xi^a \xi_a = 0$. Dans ce cadre, on comprend bien qu'il n'aurait pas de sens de prendre la trace de B par rapport à g , d'où la définition de l'expansion donnée ci-dessus qui coïncide pourtant avec la trace totale de B lorsque les géodésiques sont de type temps. Puisque ξ est de type lumière, la métrique g ne prend jamais la forme (VIII.153). Ce n'est pas un vrai problème : il suffit de définir h en prenant la restriction de g à l'orthogonal de ξ . Remarquons que la métrique h obtenue est dégénérée, ce qui n'est pas non plus un vrai problème puisque nous n'avons pas besoin de calculer h^{-1} dans la définition de l'expansion. Malgré tout, dans certaines situations, en particulier lorsque l'on cherche un analogue du Théorème (VIII.154), la dégénérescence de h présente des difficultés qui se résolvent en remplaçant h par une métrique non dégénérée bien choisie (voir [Wa84])

Les surfaces piégées : Commençons par considérer une sphère S centrée en l'origine et paramétrée par $r = r_0$ et $t = cst$ dans les coordonnées sphériques de l'espace de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta = dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2)$. S est donc de dimension 2. Pour fixer les choses, on peut considérer que $r_0 = 1$ et $t = 0$. Soit maintenant $p \in S$. Pour simplifier, on prend $p = (0, 1, 0, 0)$. L'espace tangent à S en p est donc engendré par $V_1 = (0, 0, 1, 0)$ et $V_2 = (0, 0, 0, 1)$. L'ensemble de tous les vecteurs tangents aux géodésiques de type lumière issues de p (que nous normalisons avec une coordonnée temporelle égale à 1, ce qui n'a de sens que dans l'espace de Minkowski) est donné par $T = \{(1, v_1, v_2, v_3) | v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1\}$. Soit $\vec{v} = (1, v_1, v_2, v_3) \in T$. Notons $E_{\vec{v}}$ l'orthogonal à \vec{v} . Il est clair que $V_1, V_2 \in E_{\vec{v}}$ si et seulement si $\vec{v} \in \{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0)\}$.

Cette construction se généralise à tout espace-temps et on peut formuler :

PROPOSITION VIII.155. *Considérons une surface S de dimension 2 de type espace d'un espace-temps (M, g) . En tout point p de S , il existe exactement deux géodésiques de type lumière issues de p et orthogonales à S en p . L'ensemble de ces géodésiques forment deux congruences C_S^1 et C_S^2 que nous appellerons congruences*

orthogonales de type lumière associées à S . Leurs expansions respectives seront notées Θ_1 et Θ_2 .

Pour être précis, ce ne sont pas de vraies congruences au sens donné dans le Chapitre III puisque toutes les géodésiques considérées sont issues de S et leur réunion est donc d'intérieur vide.

Lorsque la surface S borde un domaine Ω borné dans une hypersurface de type espace qui contient S , l'une des congruences orthogonales de type lumière associées se dirige vers l'intérieur de Ω : on l'appellera la *congruence entrante* tandis que l'autre, la *congruence sortante*, se dirige vers l'extérieur de Ω . On notera parfois Θ^e et Θ^s à la place Θ^1 et Θ^2 leurs expansions respectives.

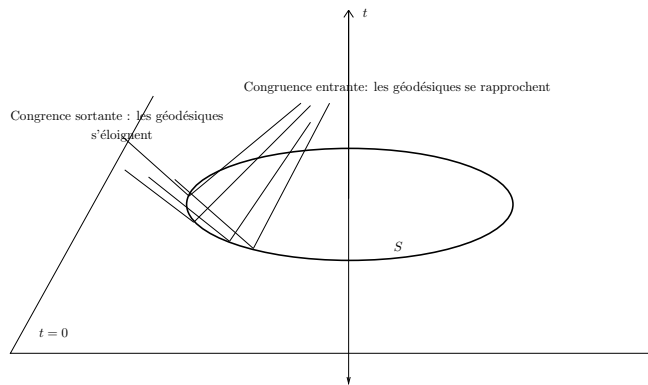


FIG. 1. Sphère non piégée dans l'espace de Minkowski

On a vu plus haut une interprétation de l'expansion en termes d'aire : dans ce cadre, on peut dire que l'aire du front d'onde diminue avec le temps (c'est-à-dire qu'en faisant évoluer la surface S par l'une ou l'autre des congruences définies ci-dessus, la nouvelle surface obtenue a une aire plus petite).

Revenons maintenant au cadre de Minkowski avec les notations ci-dessus : on calcule facilement qu'en tout $p \in S$, $\Theta^e(p) = -2$ et $\Theta^s(p) = 2$. Autrement dit, les géodésiques de la congruence entrante ont tendance à se rapprocher et celles de la congruence sortante à s'éloigner, ce qui correspond tout à fait à l'intuition (voir la Figure 1). Plaçons-nous maintenant dans l'espace de Schwarzschild. Contrairement à la surface S ci-dessus, toutes les sphères de la forme $\{p\} \times S^2$ où $p \in \omega_2$ vérifient $\Theta^e, \Theta^s < 0$. On a utilisé les notations du Chapitre V. Cela s'interprète physiquement en remarquant que dans le trou noir de l'espace-temps de Schwarzschild, les rayons lumineux vont être confinés dans une région "bornée" et vont avoir tendance à se rapprocher. On peut raisonnablement penser qu'une surface ayant une telle propriété devrait permettre de détecter des trous noirs ou tout au moins des singularités, ce qui nous amène à la définition suivante :

DÉFINITION. Une surface S de dimension 2, compacte, de type espace d'un espace-temps (M, g) est appelée *surface piégée* si les congruences Θ^1 et Θ^2 sont strictement négatives sur S .

Conformément à l'intuition et au prix de quelques hypothèses, les surfaces piégées permettent effectivement de détecter des singularités, comme le montre le résultat suivant prouvé par Penrose en 1965 :

THÉORÈME VIII.156. *Considérons un espace-temps (\mathcal{M}, g) . On suppose que*

- *la condition forte d'énergie est satisfaite ;*
- *(\mathcal{M}, g) possède une surface de Cauchy non compacte (il est donc globalement hyperbolique) ;*
- *il existe une surface piégée S .*

Alors, il existe au moins une géodésique de type lumière incomplète (et donc il existe une singularité dans (\mathcal{M}, g) .)

DÉMONSTRATION. (Une esquisse) Avant de commencer la démonstration, nous présentons deux résultats que nous admettrons mais qui, intuitivement, se comprennent bien.

Résultat A : *Soit S une surface compacte de type espace. Le bord $\partial I^+(S)$ du futur chronologique de S (voir Chapitre VI) est une variété C^0 fermée et achronale délimitée par les deux congruences orthogonales associée à S . De plus, supposons qu'une géodésique de l'une de ces congruences en rencontre une autre (le point de rencontre est dit conjugué à S), alors, à partir de ce point, elle cesse d'être dans le bord de $I^+(S)$. Bien évidemment, elle reste dans $I^+(S)$.*

La première partie du résultat se comprend bien et n'est d'ailleurs pas trop difficile à montrer rigoureusement (mais la démonstration n'est pas très instructive). Le fait que $\partial I^+(S)$ soit achronale se déduit du fait qu'aucune courbe de cet ensemble n'est de type temps. Pour comprendre intuitivement la deuxième partie, il suffit d'imaginer ce qui se passe dans le cas où S est la sphère $r = 1$ et $t = 0$ de l'espace de Minkowski déjà étudiée ci-dessus. La Figure 2 illustre bien la situation.

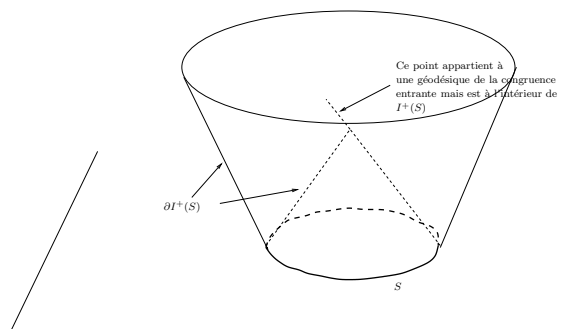


FIG. 2

Résultat B : *Soit S une surface piégée. Notons $\alpha = \sup_{p \in S} \max(\Theta^1(p), \Theta^2(p))$. Alors, toute géodésique de type lumière orthogonale à S en rencontre une autre en un temps majoré par $\frac{2}{|\alpha|}$.*

L'expression "en un temps majoré par $\frac{2}{|\alpha|}$ " dans l'énoncé ci-dessus n'est pas très habile dans le sens où une géodésique de type lumière ne possède pas de temps

propre. Cependant, pour chacune de ces géodésiques, une paramétrisation affine est implicitement choisie à travers le champ ξ qui intervient dans la définition de B (et la valeur de l'expansion dépend de ce choix). Le sens de l'expression "en un temps majoré par $\frac{2}{|\alpha|}$ " est donc à comprendre relativement à ce choix de paramètre.

Intuitivement, ce résultat dit que puisque les géodésiques ont tendance à se rapprocher, elles vont finir par se rencontrer (voir aussi la Figure 2 où seule la congruence entrante de géodésiques orthogonales à S a une expansion négative : ces géodésiques se rencontrent en un temps fini). Ce résultat est un peu long à démontrer de manière rigoureuse.

Les résultats A et B ont la conséquence suivante :

Conséquence : *Supposons que (\mathcal{M}, g) n'a pas de singularité, alors le bord $\partial I^+(S)$ du futur chronologique de S est compact.*

En effet, notons C_i les deux congruences orthogonales de type lumière associées à S . On définit pour $i = 1, 2$ $f_i : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ qui à (p, t) associe le point $\gamma(t)$ où γ est la géodésique de la congruence C_i qui passe par p et qui est choisie pour que $\gamma(0) = p$. Puisque (\mathcal{M}, g) n'a pas de singularité, γ est définie sur \mathbb{R} et la définition de f_i a bien un sens. Alors, $\partial I^+(S)$ est un sous-ensemble fermé du compact $K := f_1(S \times [0, \frac{2}{\alpha}]) \cup f_2(S \times [0, \frac{2}{\alpha}])$. En effet, $\partial I^+(S)$ est fermé et par le résultat A , puisque $\partial I^+(S)$ est délimité par $C_1 \cup C_2$, on a

$$\partial I^+(S) \subset f_1(S \times \mathbb{R}) \cup f_2(S \times \mathbb{R}).$$

Par ailleurs, d'après le résultat B et la deuxième partie du résultat A , pour tout $p \in S$, $t > \frac{2}{|\alpha|}$, $f_i(p, t) \notin \partial I^+(S)$. Cela prouve bien que $\partial I^+(S) \subset K$ et ainsi $\partial I^+(S)$ est compact.

On est maintenant en mesure de démontrer le Théorème (VIII.156). Puisque (\mathcal{M}, g) est orienté en temps (on rappelle que tous les espaces-temps avec lesquels nous travaillons satisfont cette hypothèse), on peut choisir un champ de vecteurs \vec{t} de type temps en tout point de \mathcal{M} . Ce champ de vecteurs permet de "projeter" $\partial I^+(S)$ sur la surface de Cauchy Σ donnée par l'énoncé du théorème de la façon suivante : à un point $p \in \partial I^+(S)$, on associe un point $\psi(p) \in \Sigma$ en suivant la courbe intégrale de \vec{t} qui passe par p . Le point $\psi(p)$ est unique puisque S est de Cauchy. Comme ψ est clairement continue, $\psi(\partial I^+(S))$ est un ensemble compact de Σ . Par ailleurs, ψ est injective puisque $\partial I^+(S)$ est achronale et ainsi $\psi : \partial I^+(S) \rightarrow \psi(\partial I^+(S))$ est un homéomorphisme lorsque l'on munit $\psi(\partial I^+(S))$ de la topologie induite par celle de Σ . Puisque $\psi(\partial I^+(S))$ est une sous-variété C^0 , pour tout point $q \in \psi(\partial I^+(S))$, il existe un voisinage de q dans $\psi(\partial I^+(S))$ homéomorphe à une boule ouverte, ce qui implique que $\psi(\partial I^+(S))$ doit être ouverte dans Σ . C'est impossible car $\psi(\partial I^+(S))$ est compacte et Σ est non compacte. Cela démontre le Théorème (VIII.156). \square

Le Théorème (VIII.156) a tout de même un inconvénient : supposons que dans un espace-temps satisfaisant la condition forte d'énergie, on trouve une surface piégée. Alors, on ne peut pas en déduire qu'il existe une singularité : il se pourrait que l'espace-temps ne soit pas globalement hyperbolique. En fait, on peut se passer de cette hypothèse (au prix d'autres hypothèses moins fortes) mais nous nous limiterons ici à ce résultat.

2. Trous noirs

Là encore, il est moins facile qu'on ne pourrait le penser de donner une définition précise d'un trou noir. Intuitivement, c'est une région de l'espace-temps qui ne laisse sortir aucun rayon lumineux, ni aucune matière. Malheureusement, on ne peut pas se borner à cette propriété sans quoi le futur causal $J^+(p)$ de tout point p de l'espace de Minkowski serait qualifié de trou noir. Il faut en plus que dans un certain sens, les rayons lumineux ne puissent pas aller à l'infini. On est confronté au même problème que celui rencontré dans le Chapitre VII lorsqu'on cherchait à modéliser les systèmes isolés : on avait alors besoin d'une notion d'infini spatial. Ici, c'est d'un infini futur de type lumière dont nous avons besoin.

2.1. Retour sur le diagramme de Carter-Penrose. Comme dans le Chapitre VII, nous allons avoir recours au diagramme de Carter-Penrose pour définir l'infini futur de type lumière. Pour cela, rappelons que l'espace de Minkowski se compactifie comme sur la Figure 1 du Chapitre VII en utilisant des coordonnées $(T, R, \vartheta, \varphi)$, vues comme des coordonnées sphériques sur $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ et définies par

$$\begin{cases} T & := \arctan(t+r) + \arctan(t-r), \\ R & := \arctan(t+r) - \arctan(t-r). \end{cases}$$

où $(t, r, \vartheta, \varphi)$ sont les coordonnées sphériques sur \mathbb{R}^4 . Plus de précisions sont données dans le Chapitre VII. Avec ce modèle, l'infini futur de type lumière est modélisé par

$$\mathcal{J}^+ := \left\{ (T, R, \vartheta, \varphi) \in \bar{\Gamma} \mid T + R = \pi; R > 0 \right\}.$$

Vérifions que cet ensemble correspond bien à nos attentes. Toute droite de type lumière dans l'espace de Minkowski est paramétrée en coordonnées sphériques par

$$\{(s + t_0, s + r_0, \vartheta_0, \varphi_0) \mid s \in \mathbb{R}\}$$

où $t_0, r_0, \vartheta_0, \varphi_0$ sont fixés. L'infini futur correspond à ce qui se passe quand s tend vers l'infini. On a alors

$$T_\infty := \lim_{s \rightarrow \infty} T = \pi/2 + \arctan(t_0 - r_0) \quad \text{et} \quad R_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} R = \pi/2 - \arctan(t_0 - r_0)$$

ce qui montre, puisque $T_\infty + R_\infty = \pi$ que la limite est bien dans \mathcal{J}^+ .

Considérons maintenant un espace-temps (\mathcal{M}, g) asymptotiquement plat défini comme dans le Paragraphe 1 du Chapitre VII. L'infini futur (resp passé) \mathcal{J}^+ (resp. \mathcal{J}^-) de type lumière est défini par

$$\mathcal{J}^+ \text{ (resp. } \mathcal{J}^-) = \partial J^+(i_0) \setminus i_0 \text{ (resp. } \partial J^-(i_0) \setminus i_0).$$

Pour être tout à fait précis, il serait nécessaire de donner des conditions supplémentaires sur le facteur conforme, ce qu'on ne fera pas ici.

Nous allons dans le paragraphe suivant donner une définition générale de trou noir dans le cadre d'un espace-temps asymptotiquement plat. Ce n'est pas une restriction importante puisqu'on étudie un objet "petit" et que l'on peut négliger au voisinage du trou noir l'influence de tout autre corps céleste. Il est malgré tout possible de donner une définition plus générale en étendant la notion des diagrammes de Carter-Penrose au cadre non-asymptotiquement plat mais les difficultés techniques sont importantes relativement au gain obtenu.

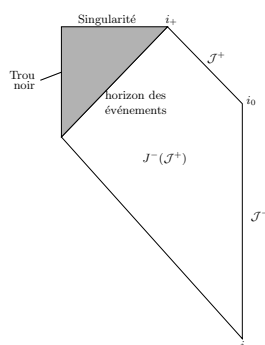


FIG. 3. Diagramme de Carter-Penrose pour l'espace de Schwarzschild

Pour atteindre notre but, nous allons nous inspirer du cas sphérique. Le diagramme de Carter-Penrose de l'espace de Schwarzschild est représenté sur la Figure 3 (que nous dessinons "à plat" plutôt que sur un demi-cylindre pour plus de lisibilité).

On voit très nettement que les géodésiques de type temps ou lumière de la région "trou noir" vont venir s'écraser sur la partie notée "singularité" et n'ont aucun moyen d'atteindre ni l'infini temporel futur i_+ ni l'infini futur de type lumière \mathcal{J}^+ . C'est sur cette propriété que nous allons nous appuyer pour donner la définition générale d'un trou noir.

2.2. Trou noir d'un espace-temps asymptotiquement plat. Nous supposons donc que l'espace-temps (\mathcal{M}, g) est asymptotiquement plat, ce qui comme nous l'avons déjà expliqué, n'est pas très restrictif. Les définitions plus générales ont une complexité technique qui n'est pas justifiée par rapport à ce qu'elles apportent. Dans le diagramme de Carter-Penrose de l'espace de Schwarzschild (voir Figure 3), la région extérieure est caractérisée par le fait qu'il existe des géodésiques de types temps ou lumière qui atteignent i_+ ou \mathcal{J}^+ . Cette partie est exactement égale au passé causal $J^-(\mathcal{J}^+)$ (voir Chapitre VI). Bien évidemment, ce passé causal est à comprendre dans la compactification conforme de (\mathcal{M}, g) que nous noterons $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ et qui est donnée par la définition de la platitude asymptotique de (\mathcal{M}, g) . Notons qu'il y a un abus de notations puisque le passé causal de \mathcal{J}^+ peut s'étendre à l'extérieur de \mathcal{M} (on rappelle que via cette compactification conforme, \mathcal{M} est un

domaine de \tilde{M}). Il est évident que nous ne travaillons que dans \mathcal{M} et c'est pourquoi nous garderons cette notation au lieu d'utiliser $\mathcal{M} \cap J^-(\mathcal{J}^+)$. Pour éviter des problèmes provenant de situations physiques non plausibles, nous allons supposer que cette région extérieure au trou noir a de bonnes propriétés. Nous allons faire l'hypothèse que (\mathcal{M}, g) est *asymptotiquement prédictible au sens fort* :

DÉFINITION. Un espace-temps asymptotiquement plat (\mathcal{M}, g) est *asymptotiquement prédictible au sens fort* si $\overline{J^-(\mathcal{J}^+)}$ est globalement hyperbolique. Dans cette définition, l'adhérence est bien évidemment à comprendre au sens de la topologie de (\tilde{M}, \tilde{g}) .

On est maintenant en mesure de donner une définition de trou noir :

DÉFINITION.

- Un espace-temps asymptotiquement prédictible au sens fort possède un *trou noir* si \mathcal{M} n'est pas contenu dans $J^-(\mathcal{J}^+)$. La *région de trou noir* \mathcal{B} est définie par $\mathcal{B} := \mathcal{M} \setminus J^-(\mathcal{J}^+)$. Nous parlerons souvent de *trou noir* pour une composante connexe de \mathcal{B} .
- Le bord d'un trou noir (ou le bord de la région extérieur au trou noir) $\partial\mathcal{B} = \partial J^-(\mathcal{J}^+)$ est appelé *horizon des événements*.

Il est important de noter que

un espace-temps asymptotiquement prédictible au sens fort ne contient que des singularités de type trou noir,

c'est-à-dire cachées derrière l'horizon des événements, du moins si l'on suppose que l'horizon des événements ne possède pas lui-même de singularité. C'est une hypothèse généralement admise par les physiciens. Imaginons en effet qu'une géodésique γ de type temps ou lumière inextensible ne soit pas prolongeable après un temps fini T . Supposons aussi que quand t est proche de T , $\gamma(t)$ est dans $J^-(\mathcal{J}^+)$. Alors dans l'espace-temps compactifié (\tilde{M}, \tilde{g}) , l'adhérence $\overline{J^-(\mathcal{J}^+)}$ est compact et dans cet espace, la limite P de $\gamma(t)$ lorsque $t \rightarrow T$ a un sens (alors que dans (\mathcal{M}, g) , ce n'était pas le cas du fait que la notion de complétude n'a pas de sens sur une variété lorentzienne). Puisque γ est inextensible, il est clair P n'est pas dans l'intérieur de $J^-(\mathcal{J}^+)$ ce qui ne laisse qu'une possibilité : $P \in \partial J^-(\mathcal{J}^+)$. L'ensemble $\overline{\mathcal{J}^+}$ représente les "infinis de M " et par conséquent, toute géodésique qui échoue à cet endroit est définie jusqu'en $+\infty$. Ainsi, nécessairement, par définition, P appartient à l'horizon des événements, ce qui est exclu par hypothèse. Cela prouve que la géodésique va pénétrer dans la région de trou noir.

Supposons maintenant que l'espace-temps ne soit qu'asymptotiquement plat et pas nécessairement asymptotiquement prédictible au sens fort. Alors, il peut y avoir des singularités visibles depuis \mathcal{J}^+ c'est-à-dire telles qu'il existe une géodésique γ qui n'est pas prolongeable après un temps fini T et qui vérifie que pour tout $t < T$ proche de T , $\gamma(t) \in J^-(\mathcal{J}^+)$.

DÉFINITION. Une telle singularité est appelée *singularité nue*.

Un exemple de singularité nue est celle de type "Big-Crunch" (Chapitre IV). Un autre exemple est donné par l'espace-temps de Kerr (voir Paragraphe 3) qui selon les valeurs des paramètres va posséder soit une singularité de type "trou noir" soit une singularité nue.

2.3. Effondrement gravitationnel et conjecture de la censure cosmique. Revenons un instant au cas sphérique : on a vu dans le Chapitre V que si la masse de l'objet considéré est trop grande relativement à son rayon, il y aura formation d'un trou noir et le système ne sera pas stable. C'est ce qu'on appelle l'*effondrement gravitationnel*. La question qui se pose naturellement est de savoir si cette situation est générique. On pourrait suspecter que le fait de se placer en symétrie sphérique parfaite (ce qui est physiquement déraisonnable) provoque la naissance du trou noir. Il n'en est rien : prenons un espace-temps à symétrie sphérique, qu'il est naturel de supposer globalement hyperbolique, et voyons-le comme le développement maximal de Cauchy associé à des conditions initiales (Σ_0, h_0, K_0) (voir Chapitre VI). À l'extérieur de l'étoile, la métrique est de Schwarzschild et on a vu que les sphères $\{p\} \times S^2$ où $p \in \omega_2$ étaient des surfaces piégées. Maintenant, considérons un espace-temps (\mathcal{M}, g) issu de conditions initiales proches de (Σ_0, h_0, K_0) qui brisent la symétrie sphérique. Alors, le Théorème VI.101, qui donne la continuité par rapport aux conditions initiales, va impliquer que (\mathcal{M}, g) va lui aussi posséder des surfaces piégées. En particulier, si on suppose des conditions physiquement plausibles sur le tenseur d'énergie-impulsion, en particulier si on suppose la condition forte d'énergie, le Théorème VIII.156 va impliquer que l'espace-temps (\mathcal{M}, g) a une singularité et que, toujours en vertu de la continuité par rapport aux conditions initiales, cette singularité sera de type trou noir (cela se démontre rigoureusement). On a montré qu'

un effondrement gravitationnel dans un espace-temps physiquement plausible d'un objet "presque sphérique" induit une singularité de type trou noir.

Rien ne dit qu'il n'est pas possible de produire des singularités nues si l'espace-temps est loin d'être à symétrie sphérique. Malgré tout, il est naturel de penser que les objets qui se créent dans l'univers sont toujours suffisamment proche de la situation symétrique. Cela conduit à penser que toute singularité produite par un effondrement gravitationnel est de type "trou noir". D'où

Conjecture de la censure cosmique (version faible, formulation physique) : *toute singularité due à un effondrement gravitationnel est cachée dans un trou noir et n'est pas visible pour un observateur éloigné.*

ce qui se formule mathématiquement par :

Conjecture de la censure cosmique (version faible, formulation mathématique) : *Considérons des conditions initiales (Σ_0, h_0, K_0) où (Σ_0, h_0) est une variété riemannienne complète, satisfaisant de bonnes conditions de décroissance à l'infini (pour que le développement maximal de Cauchy soit asymptotiquement*

plat). On suppose que le tenseur d'énergie-impulsion τ a des propriétés physiquement plausibles (il vérifie les conditions forte d'énergie et d'énergie dominante). Le développement maximal de Cauchy associé aux conditions initiales (Σ_0, h_0, K_0) et à τ est alors asymptotiquement prédictible au sens fort.

REMARQUE VIII.157. Dans la formulation physique, on ne parle que de singularités dues à un effondrement gravitationnel et dans la formulation mathématique, on ne regarde que les singularités qui se forment après un temps donné. La raison en est simple : le Big-Bang qui est une singularité nue ne doit pas être proscrit par l'énoncé de la conjecture.

Nous n'avons pas donné dans le Chapitre VI de définition de "développement maximal de Cauchy" en présence de matière et nous ne serons pas plus précis ici, mais le sens d'un tel objet, au moins approximativement, se comprend bien. Remarquons aussi que la formulation mathématique est un peu plus forte : on ne dit pas seulement que toutes les singularités sont de type "trou noir" mais on dit que l'espace-temps est asymptotiquement prédictible au sens fort, ce qui est plus contraignant d'après la discussion précédente. Pour finir, mentionnons que la terminologie de "Conjecture de la censure cosmique" est issue d'une plaisanterie de Penrose et Hawking : elle stipule que les singularités nues sont cachées.

2.4. Propriétés générales des trous noirs. Dans ce paragraphe, nous donnons sans grande rigueur deux propriétés des trous noirs. Nous nous plaçons donc dans un espace-temps (\mathcal{M}, g) asymptotiquement prédictible au sens fort, dont le tenseur d'énergie-impulsion a une forme plausible (condition forte d'énergie et condition d'énergie dominante) et nous supposons qu'il existe une région \mathcal{B} de trou noir. On suppose que (\mathcal{M}, g) est un développement de Cauchy maximal et est donc de la forme $I \times \Sigma$ où I est un intervalle de \mathbb{R} et où Σ est une variété non compacte. Via cette écriture, parler de "l'instant t " a un sens. Notons ainsi $\mathcal{B}_t := \mathcal{B} \cap \{t\} \times \Sigma$ le (ou les si \mathcal{B} a plusieurs composantes connexes) trou noir à l'instant t . On montre d'abord le résultat suivant :

THÉORÈME VIII.158. *Un trou noir ne peut ni disparaître ni se diviser.*

DÉMONSTRATION. (une esquisse) Pour simplifier, supposons qu'à l'instant t_0 , \mathcal{B}_{t_0} a exactement une composante connexe (c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un trou noir). Prenons une géodésique γ de genre temps issue de \mathcal{B}_{t_0} et montrons qu'elle intersecte \mathcal{B}_t pour tout $t \geq t_0$. C'est en fait évident puisque $\Sigma_t := \{t\} \times \Sigma$ étant une surface de Cauchy, γ doit intersecter Σ_t . Par ailleurs, puisqu'aucune géodésique de genre temps ne peut sortir de \mathcal{B} , le point d'intersection de γ et Σ_t est dans \mathcal{B} donc dans \mathcal{B}_t . Cela montre que \mathcal{B}_t a au moins une composante connexe. Cela traduit le fait qu'un trou noir ne peut pas s'éteindre.

Supposons maintenant que \mathcal{B}_t a plusieurs composantes connexes (disons deux pour simplifier) : B_1 et B_2 . Prenons $p \in \mathcal{B}_{t_0}$. Le cône de lumière $J^+(p)$ de p est entièrement inclus dans \mathcal{B} puisqu'aucun rayon lumineux ne peut sortir d'un trou noir. Par ailleurs, on montre facilement que $J^+(p)$ est connexe et donc entièrement inclus à l'instant t soit dans B_1 soit dans B_2 . Le cône de lumière à l'instant t étant

clairement "continu" par rapport à p , le cône de lumière de tout point de \mathcal{B}_{t_0} à l'instant t est contenu toujours dans la même composante connexe de \mathcal{B}_t (i.e. dans B_1 ou B_2). Il peut donc y avoir création de trou noir mais \mathcal{B}_{t_0} n'a pas pu se diviser. \square

Le résultat précédent était intéressant pour préciser l'image que l'on a en tête d'un trou noir. Le résultat suivant est plus technique mais il jouera un rôle important pour la formulation de l'inégalité de Penrose (voir ci-dessous).

THÉORÈME VIII.159. (*Hawking, 1971*) *L'aire de l'horizon des événements $H_t := \partial(\mathcal{B}) \cap \Sigma_t$ à l'instant t est décroissante dans le temps.*

DÉMONSTRATION. (une esquisse très imprécise) On montre d'abord que toute surface piégée est nécessairement contenue à l'intérieur du trou noir. À l'aide de ce résultat, on réussit à en déduire que les expansions Θ^1 et Θ^2 associées à H_t (voir le paragraphe concernant les surfaces piégées) sont positives ou nulles, sans quoi H_t pénétrerait à l'intérieur de \mathcal{B} , contredisant sa définition. Pour finir, fixons $t_0 \in I$ et choisissons l'une des deux congruences - appelons-la C - de type lumière orthogonales à la surface H_{t_0} . On montre que chacune de ses géodésiques croise H_t (où $t \geq t_0$ est fixé) en un point exactement. Cela permet de construire une application injective $\psi : H_{t_0} \rightarrow H_t$. On a vu dans le paragraphe concernant les surfaces piégées que l'expansion d'une congruence caractérisait l'évolution de l'aire du front d'onde. Ainsi, dans ce cadre, puisque l'expansion de C est positive ou nulle, l'aire de H_{t_0} est plus petite que celle de $\psi(H_{t_0})$. Comme $\psi(H_{t_0}) \subset H_t$, on en déduit que l'aire de H_{t_0} est plus petite que celle de H_t . \square

3. Espace-temps de Kerr

Il est fréquent de rencontrer en cosmologie des objets en rotation et donc pas à symétrie sphérique (il faudrait pour cela travailler dans un espace-temps de dimension 3). L'espace-temps de Kerr fournit une solution particulièrement intéressante de l'équation d'Einstein : il décrit une singularité "en rotation" qui est selon la valeur des paramètres, soit une singularité nue soit un trou noir en rotation (ce qui physiquement, a une existence tout aussi probable qu'un trou noir statique).

On se place sur \mathbb{R}^4 en coordonnées sphériques. La métrique de Kerr est définie par

$$g_k = \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\Theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \Theta d\varphi^2 - dt^2 + \frac{2Mr}{\rho^2} (a \sin^2 \Theta d\varphi - dt)^2 \quad (\text{VIII.160})$$

où a, M sont des paramètres dont nous préciserons le sens plus loin, où

$$\rho = r^2 + a^2 \cos^2 \Theta \quad \text{et} \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2.$$

Il y a plusieurs remarques à faire :

– lorsque $a = 0$, on retrouve la métrique de Schwarzschild ;

- les coefficients de la matrice de g_k dans ces coordonnées ne dépendent ni de t ni de φ : les champs de vecteurs $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$ sont donc des champs de Killing. En particulier,
 - les hypersurfaces $t = \text{constante}$ sont isométriques entre elles ce qui implique que l'espace-temps de Kerr est stationnaire (voir le Chapitre VII). Par contre, à part dans le cas où $a \neq 0$, ces hypersurfaces ne sont pas orthogonales au champ de vecteurs $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ et donc l'espace-temps de Kerr n'est pas statique. En fait, ces hypersurfaces "tournent" quand t augmente ;
 - puisque $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$ est un champ de Killing, on a dans chaque hypersurface $t = \text{constante}$ un groupe à un paramètre de rotations axiales (qui correspond à l'action de $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$ sur l'hypersurface considérée) qui sont des isométries. On dit que l'espace-temps de Kerr est *axymétrique*.
- la métrique de Kerr n'est irrégulière qu'aux points où ρ ou Δ s'annulent.

Le paramètre M s'interprète comme la masse de l'objet considéré tandis que a s'interprète comme le rapport du moment cinétique de Komar sur la masse. Sans donner plus d'explications, nous retiendrons que ce paramètre indique la vitesse de rotation du trou noir. Selon les valeurs de a et M , l'espace-temps de Kerr a deux structures causales de natures différentes, dont nous allons faire une étude séparée.

3.1. Le cas $a^2 > M^2$. Dans ce cas, $\Delta > r - 2Mr + M^2 = (r - M)^2 \geq 0$ et seul $\rho = 0$ peut donner une singularité, ce qui ne se produit que lorsque $r = 0$ et $\Theta = \frac{\pi}{2}$. Autrement dit, si l'on s'approche de $r = 0$ en venant d'une autre direction que $\Theta = \frac{\pi}{2}$, on ne rencontre pas de singularité.

Pour comprendre ce qui se passe, il convient de travailler dans d'autres coordonnées appelées *coordonnées de Kerr-Schild*. Nous ne les écrivons pas explicitement mais on construit de nouvelles coordonnées (x, y, z, t) dans laquelle la métrique de Kerr prend la forme suivante :

$$g_r = - dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left(dt^2 + \frac{rxdx + ydy}{r^2 + a^2} - a(ydx - xdy) + \frac{zdz}{r} \right). \quad (\text{VIII.161})$$

Le t qui apparaît dans cette expression n'est pas celui qui apparaît dans l'expression (VIII.160) mais comme il s'agit de la variable de temps, on ne changera pas la notation. Les coordonnées (x, y, z) ne sont pas les coordonnées sur \mathbb{R}^3 à partir desquelles on a construit les coordonnées sphériques (r, Θ, φ) . On a par contre la relation suivante :

$$r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2) - a^2z^2 = 0. \quad (\text{VIII.162})$$

Une première remarque est que l'expression (VIII.161) montre que l'espace-temps de Kerr est asymptotiquement plat. Nous allons essayer de comprendre ce qui ce passe. On va noter Σ_t les hypersurfaces $t = \text{constante}$. Dans Σ_t , les surfaces S_r qui

correspondent à $r = \text{constante}$ ($r \neq 0$) sont des ellipsoïdes confocaux. Avec ces coordonnées, on approche de la singularité lorsque $r \rightarrow 0$. Dans ce cas, les surfaces S_r , qui sont invariantes par les rotations autour de l'axe des z , dégèrent en le disque

$$x^2 + y^2 \leq a^2; \text{ et } z = 0.$$

que nous noterons S_0 . Autrement dit, pour r petit, S_r est un ellipsoïde circulaire dont l'épaisseur devient de plus en plus petite.

REMARQUE VIII.163. Le bord ∂S_0 est une vraie singularité de la métrique : la courbure γ diverge. Par contre, à l'intérieur de disque, la métrique est régulière. En fait, supposons qu'une suite de points tende vers un point de ∂S_0 : cela correspond dans les coordonnées (r, Θ, φ) à ce que r tende vers 0 et Θ tende vers $\frac{\pi}{2}$. Si la suite tend vers un point de l'intérieur de S_0 , cela correspond toujours à $r = 0$ mais cette fois $\Theta \neq \frac{\pi}{2}$.

La situation est maintenant la suivante : on est sur \mathbb{R}^3 (on reste toujours dans les hypersurfaces Σ_t) et on a mis en évidence un disque de singularités dont en fait, seul le cercle bordant est réellement singulier. On peut raisonnablement se dire que cet espace-temps est inextensible. Ce n'est pas le cas : d'abord, même si au départ $r > 0$, on peut construire le même espace-temps avec $r < 0$, ce qui ne change rien puisque r n'apparaît dans la définition de la métrique qu'avec des puissances paires. On a construit ainsi (Σ^+, g_k) et (Σ^-, g_k) qui sont isométriques mais dont les surfaces S_r sont paramétrées pour l'un avec des valeurs positives de r et pour l'autre avec des valeurs négatives de r . On peut coller Σ^+ et Σ^- le long de S_0 (en faisant bien attention à prendre la bonne orientation). On obtient un Σ qui est cette fois inextensible. Dans cette procédure, il faut prendre garde au fait que l'on recolle deux copies de \mathbb{R}^3 le long d'un disque, c'est-à-dire le long d'une surface de codimension 2 ce qui n'est pas a priori évident. Pour avoir une bonne image en tête, supprimons la coordonnée y : cela revient à recoller deux copies de \mathbb{R}^2 le long d'un segment. Ce n'est plus une variété. Mais il faut se souvenir que S_0 est une position limite d'ellipsoïdes. Pour visualiser les choses, il suffit d'imaginer que le segment de recollement dans \mathbb{R}^2 est une position limite d'ellipses. Pour avoir une bonne image en tête, on peut imaginer qu'on recolle les deux copies de \mathbb{R}^2 le long d'ellipses proches de la position limite (voir Figure 4).

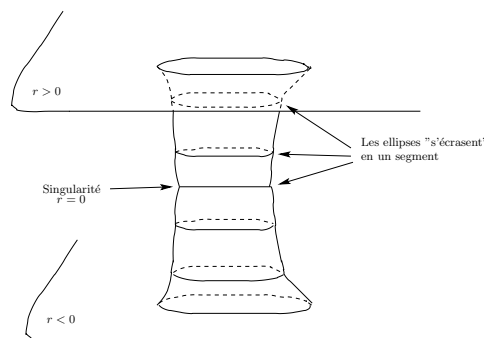


FIG. 4. Extension de l'espace-temps de Kerr à $r < 0$

Regardons maintenant la structure causale de l'espace-temps de Kerr. Il y a deux choses importantes à remarquer :

- les hypersurfaces Σ_t ne sont pas de type espace. En particulier, le champ de Killing $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ n'est plus de type temps lorsque l'on s'approche de la singularité (le bord de S_0). Ainsi les courbes d'équation $t = \text{constante}$, $\Theta = \text{constante}$ et $r = \text{constante}$ (*petite*) fournissent des courbes fermées de type temps.
- Carter a montré qu'à partir de tout point en dehors de la singularité, on pouvait construire une courbe causale (de type lumière ou temps) qui atteint l'infini futur de type lumière \mathcal{J}^+ . En d'autres termes, un observateur situé en \mathcal{J}^+ voit la singularité : c'est exactement la définition d'une singularité nue que nous avons donnée plus haut.

Un espace-temps dans lequel une singularité nue existe n'est pas satisfaisant d'un point de vue physique : en tout cas, les lois habituelles de la relativité ne sont plus valides. Par exemple, dans ce cas précis, l'existence de courbes fermées de type temps est un réel problème. C'est aussi pour éviter ces situations que l'on ne sait pas traiter que la conjecture de la censure cosmique à été formulée.

REMARQUE VIII.164. En admettant que la conjecture de la censure cosmique est vraie, il n'existe pas de singularités nues. En particulier, il n'existe pas de situations physiques où $a^2 > M^2$. Cela signifie qu'un trou noir doit avoir une vitesse de rotation pas trop grande comparativement à sa masse.

3.2. le cas $a^2 < M^2$. Dans ce cas, il y a deux singularités supplémentaires qui correspondent à l'annulation cette fois possible de Δ : elles se produisent sur les sphères S_{r_+} et S_{r_-} où

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}.$$

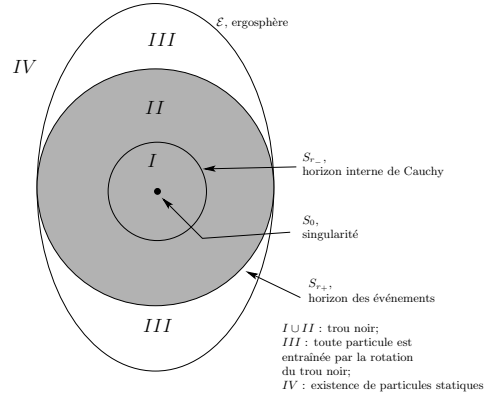
On peut encore une fois faire un travail sur les coordonnées : comme dans le cas $a^2 > M^2$, on peut étendre l'espace-temps à $r < 0$. La singularité $r = 0$ est toujours une vraie singularité parce qu'elle correspond à une divergence des courbures. Par contre, les deux singularités $S_{r_{\pm}}$ n'en sont pas vraiment : un changement de coordonnées permet de les supprimer. Nous ne ferons pas ici ces choix optimaux de coordonnées.

Pour visualiser les choses, plaçons-nous encore une fois dans une hypersurface Σ_t correspondant à $t = \text{constante}$, c'est-à-dire dans \mathbb{R}^3 . La situation est alors la suivante : nous avons une singularité en $r = 0$ (qui correspond à un point puisque, contrairement au cas précédent, nous n'avons fait aucun changement de coordonnées particulier) et deux boules concentriques $B_{r_-} \subset B_{r_+}$ de bords respectifs S_{r_-} et S_{r_+} . Une autre surface importante est l'*ergosphère* \mathcal{E} définie par

$$r = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2(\Theta)}$$

qui n'est pas une sphère. Toutes ces surfaces délimitent des régions que nous représentons sur la Figure 5 et que nous notons *I, II, III* et *IV*.

Propriétés des régions *I, II, III* et *IV* :

FIG. 5. L'espace-temps de Kerr dans le cas $a^2 < M^2$

- (1) On peut voir que S_{r_+} est un horizon des événements de type lumière. Autrement dit, la région $I \cup II$ est une région de trou noir et $III \cup IV = J^-(\mathcal{J}^+)$.
- (2) Dans la région II , le cône de lumière (plus exactement, il s'agit la projection du cône de lumière sur le facteur Σ dans la décomposition $\mathcal{M} = \Sigma \times I$) de tout point est strictement orienté vers l'intérieur. Cela signifie que toute géodésique causale issue d'un point de II atteindra la région I en un temps fini. On regarde encore une fois les trajectoires des points via la projection sur le facteur Σ . Cette propriété n'est plus vraie dans la région I et toute géodésique causale de I n'atteindra pas forcément la singularité. La région I est en fait une sorte de "trou noir dans le trou noir" : toute géodésique causale qui y pénètre ne peut en ressortir. C'est pourquoi la sphère S_{r_-} est appelée *horizon interne de Cauchy*.
- (3) La région III est à l'extérieur du trou noir mais à l'intérieur de l'ergosphère. Dans cette région le champ de vecteurs $(\frac{\partial}{\partial t})$ est de genre espace. Ainsi les courbes

$$r = \text{constante}, \Theta = \text{constante} \text{ et } \varphi = \text{constante}$$

ne sont pas de genre temps. Cela signifie qu'il n'y a aucun observateur statique dans cette région : tout observateur est entraîné par la rotation du trou noir.

- (4) La région IV est celle où tout se passe bien : le champ de vecteurs $(\frac{\partial}{\partial t})$ est de genre temps. Puisque c'est un champ de Killing, les courbes

$$r = \text{constante}, \Theta = \text{constante} \text{ et } \varphi = \text{constante}$$

sont des courbes de type temps. Ces observateurs sont statiques.

Nous n'étudions pas le cas $a^2 = M^2$: tout se passe comme dans le cas $a^2 < M^2$ exceptés que les régions I et II sont vides.

4. Inégalité de Penrose

4.1. Énoncé. On va voir que les résultats obtenus dans ce chapitre conduisent à conjecturer qu'une certaine inégalité, formulée pour la première fois par Penrose, est vraie :

Inégalité de Penrose *Soit (M, g) une variété riemannienne asymptotiquement plate (connexe) de dimension 3 dont la courbure scalaire est partout positive ou nulle et intégrable sur M . On suppose que M a un bord minimal compact et que M ne contient aucune autre surface minimale compacte. Alors*

$$m^g(E) \geq \sqrt{\frac{|\partial M|_g}{16\pi}} \quad (\text{VIII.165})$$

où E est un bout de M et où $|\partial_i M|_g$ est l'aire de ∂M . L'égalité a lieu si et seulement si (M, g) est isométrique à un demi-espace de Schwarzschild spatial (dont la définition est donnée ci-dessous).

Demi-espace de Schwarzschild spatial : il s'agit d'une tranche spatiale de l'espace de Schwarzschild qui correspond à l'extérieur du trou noir. Plus précisément, il s'agit de $(\mathbb{R}^3 \setminus B(0, \frac{m}{2}), G)$ où $m > 0$, $B(0, \frac{m}{2})$ est la boule euclidienne de rayon $\frac{m}{2}$ et où G est la métrique conforme à la métrique euclidienne de \mathbb{R}^3 définie par

$$G := \left(1 + \frac{m}{2|x|}\right)^4 \xi.$$

Cette conjecture est maintenant prouvée : Huisken et Ilmanen [HI69] l'ont démontrée lorsque le bord de M est connexe en utilisant le flot de la courbure moyenne inverse et Bray [Br01] a donné une preuve complète en utilisant une autre méthode. Cette inégalité peut s'écrire en toute dimension n et la méthode de Bray en fournit une preuve jusqu'en dimension 8. Le cas des dimensions supérieures est encore ouvert. Pour des précisions sur les preuves évoquées ci-dessus, on renvoie le lecteur à Herzlich [Her03] qui décortique les idées mises en oeuvre de manière très claire.

5. D'où vient cette conjecture ?

D'abord les hypothèses sur la courbure sont similaires à celles vues pour le problème de la masse positive du Chapitre (VII). La formulation physique serait plutôt la suivante :

Inégalité de Penrose (formulation physique) : *Soit (\mathcal{M}, g) un espace-temps asymptotiquement prédictible au sens fort et qui contient un trou noir. Soit Σ une surface de Cauchy. Alors,*

$$m(\Sigma) \geq \sqrt{\frac{|H|}{16\pi}} \quad (\text{VIII.166})$$

où $m(\Sigma)$ est la masse ADM de Σ et où $|H|$ est l'aire de l'horizon des événements H de Σ .

C'est cette version que nous allons regarder. Pour cela, prenons un espace-temps globalement hyperbolique (\mathcal{M}, g) où $\mathcal{M} = I \times \Sigma$ (I est un intervalle). Pour tout

$t \in I$, on définit

$$\alpha(t) = \frac{m(\Sigma_t)}{\sqrt{|H_t|}}$$

où $\Sigma_t = \{t\} \times \Sigma$ et où H_t est l'horizon des événements associé à Σ_t . D'après le Théorème VIII.159, le dénominateur de $\alpha(t)$ est croissant tandis que d'après la définition de la masse ADM donnée dans le Chapitre VII, son numérateur est constant. Ainsi, la fonction α tend vers son minimum lorsque $t \rightarrow \sup I$.

La question est maintenant de savoir ce qui se passe lorsque $t \rightarrow \sup I$. Il est raisonnable de penser que le trou noir, qui aura absorbé toute la matière alentours va progressivement se "symétriser", soit de manière sphérique s'il n'y aucune rotation, soit de manière axymétrique s'il est en rotation. Même s'il n'existe pas pour l'espace-temps de Kerr de théorème analogue au Théorème V.83, il y a tout de même quelques résultats intéressants d'unicité si on impose d'être dans le vide et dans un espace-temps stationnaire. On peut donc penser qu'il est très probable que lorsque $t \rightarrow \sup I$, la surface Σ_t évolue vers une surface de Cauchy d'un espace de Kerr. Ainsi, si pour l'espace-temps de Kerr de paramètres a, m , on définit $\alpha_{a,M}(t)$ de la même manière que l'on a défini α , on obtient qu'il existe t_0, a, M (avec $a^2 > M^2$ pour rester dans le cas d'un trou noir) tels que pour tout t , $\alpha(t) \geq \alpha_{a,M}(t_0)$. Or on calcule facilement que

$$\min_{a,M,t_0} \alpha_{a,M}(t_0) = \frac{1}{\sqrt{16\pi}} \quad (\text{VIII.167})$$

ce qui conduit immédiatement à l'inégalité de Penrose.

REMARQUE VIII.168. – L'égalité dans l'inégalité de Penrose n'est atteinte que dans le cas où Σ est une surface de Cauchy de l'espace de Schwarzschild. La raison en est simple : le minimum dans (VIII.167) est atteint lorsque $a = 0$, c'est-à-dire pour l'espace de Schwarzschild. On peut en fait ajouter un terme positif ou nul au membre de droite de l'inégalité de Penrose, qui est nul seulement lorsque $a = 0$ et qui rend l'inégalité optimale pour toute surface de Cauchy de l'espace de Kerr. Ce terme fait intervenir le *moment cinétique de Komar* que nous ne définirons pas ici. On peut encore écrire une égalité plus générale : il existe des espaces-temps appelés *espaces-temps de Kerr chargés* qui modélisent les trous noirs chargés en rotation et qui dépendent de trois paramètres : a, M, e . Pour $e = 0$, on retrouve l'espace de Kerr usuel. Pour ces espaces chargés, l'inégalité de Penrose modifiée avec le moment cinétique de Komar n'est pas non plus optimale. On peut encore une fois ajouter un terme au membre de droite dépendant de e et donnant l'égalité pour toute surface de Cauchy d'un espace de Kerr, chargé ou non.

– Si pour ces inégalités, on est capable de fournir des contre-exemples, c'est que les hypothèses faites sont physiquement fausses. Il y alors deux possibilités : soit la conjecture de la censure cosmique (version faible) est fausse, soit c'est l'hypothèse qui dit qu'un trou noir quelconque évolue dans le temps vers un trou noir de Kerr qui est fausse. Tous les physiciens semblent d'accord pour dire que la première hypothèse a beaucoup plus de chance d'être fausse que la seconde.

ANNEXE A

Quelques précisions sur la géométrie lorentzienne

Ce paragraphe a pour but de préciser les notions de géométrie riemannienne qui gardent un sens en géométrie lorentzienne et celles qui au contraire, sont spécifiques à la géométrie riemannienne.

1. Variétés lorentziennes, courbures, géodésiques

Pour une introduction rapide à la géométrie différentielle et au calcul tensoriel, on pourra par exemple voir [Heb97].

DÉFINITION. Une *variété lorentzienne* (\mathcal{M}, g) est une variété \mathcal{M} de dimension 4 munie d'un champ de tenseurs g (appelé *métrique lorentzienne*) deux fois covariant tel que pour tout $p \in \mathcal{M}$, g_p est une forme bilinéaire symétrique de signature $(-, +, +, +)$ définie sur l'espace tangent $T_m\mathcal{M}$.

On peut montrer que toute variété de classe C^k ($k \geq 2$) de dimension 4 paracompacte et **non compacte** admet une métrique lorentzienne de classe C^{k-1} . Par contre, si la variété est compacte, il faut et il suffit que sa caractéristique d'Euler-Poincaré soit nulle, ce qui est assez restrictif (par exemple, le tore T^4 admet une telle structure alors la sphère S^4 n'en admet pas).

Remarque importante : Une variété lorentzienne est métrisable mais ce n'est pas un espace métrique. Autrement dit, il n'existe pas de métrique canonique donnant la topologie de \mathcal{M} . En particulier les notions de parties bornées, suites de Cauchy (et donc de variété lorentzienne complète) n'ont pas de sens.

Soit (\mathcal{M}, g) une variété lorentzienne. Comme en géométrie riemannienne, il existe une unique connexion à torsion nulle et pour laquelle g est parallèle (voir [Heb97] pour les définitions de ces notions). Cette connexion est appelée *connexion de Levi-Civita* ou *connexion lorentzienne* de g . Notons D cette connexion. Soit (x^1, \dots, x^4) une carte. Définissons les *symboles de Christoffel* Γ_{ij}^k de la métrique par $D \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. Alors comme dans le cas riemannien, on a

$$\Gamma_{il}^k = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) g^{kl}.$$

Notons qu'il est naturel de travailler en coordonnées parce que dans les situations que nous serons amenés à étudier, on aura bien souvent une carte plus ou moins canonique.

DÉFINITION.

- (1) Soit D une connexion. Le champ de tenseurs R trois fois covariant et une fois contravariant défini par

$$R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z$$

est appelé *tenseur de courbure* de la connexion. Lorsque D est la connexion lorentzienne, R est appelé la *courbure lorentzienne*.

- (2) Si D est la connexion lorentzienne, le champ de tenseurs deux fois covariant donné par

$$R_{ij} = R_{ikj}^k$$

est appelé *courbure de Ricci* de la métrique g .

- (3) La fonction

$$R = R_{ij}g^{ij}$$

est appelée *courbure scalaire* de la métrique g .

Soit (x_1, \dots, x_4) une carte de \mathcal{M} . Alors, comme dans le cas riemannien, on a

$$R_{\alpha\beta} = \partial_i \Gamma_{\alpha\beta}^i - \partial_\beta \Gamma_{\alpha i}^i + \Gamma_{im}^m \Gamma_{\alpha\beta}^m - \Gamma_{\beta m}^i \Gamma_{i\alpha}^m.$$

Remarque : Sur une variété lorentzienne, on ne peut pas définir la courbure sectionnelle. En effet, dans la définition riemannienne de la courbure sectionnelle, on divise par $g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2$. Dans le cas riemannien, ce terme est toujours non nul alors qu'en lorentzien, ce n'est plus le cas.

DÉFINITION. Un chemin différentiable $c : I \rightarrow \mathcal{M}$ (I est un intervalle de \mathbb{R}) est une *géodésique* si pour tout $t \in I$, $D_{c'(t)}c' = 0$ où c' est le champ de vecteurs tangents le long de la courbe c .

REMARQUE I.169. Une géodésique de type temps ou espace sera paramétrée par la longueur. Il faut remarquer que l'équation des géodésiques impose aussi un paramétrage particulier (on parle de paramétrage *affine* pour les géodésiques de type lumière). Tous ces paramétrages se déduisent les uns des autres par une transformation affine. Ce point est très important : il permet par exemple de donner un sens à l'incomplétude des géodésiques de type lumière.

Il découle du théorème de Cauchy-Lipschitz qu'il existe toujours une unique géodésique maximale dès que l'on fixe une condition initiale $c(0) = p$ et $c'(0) = v$ (où $v \in T_p\mathcal{M}$). On peut montrer les deux résultats suivants :

THÉORÈME I.170. *Soit (\mathcal{M}, g) une variété lorentzienne munie de sa connexion lorentzienne. Si une courbe $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$, C^1 par morceaux de type temps réalise le maximum de pseudo-longueur (définie par $l(c) = \int_a^b \sqrt{-g(c', c')}$) entre $c(a)$ et $c(b)$ parmi toutes les courbes de genre temps joignant ces deux points, alors c est une géodésique.*

On a une réciproque locale à ce théorème :

THÉORÈME I.171. *Soit (\mathcal{M}, g) une variété lorentzienne munie de sa connexion lorentzienne. Pour tout $p \in \mathcal{M}$, il existe un voisinage V_p géodésiquement convexe tel que pour tout $q, r \in V_p$ q et r peuvent être joints par une géodésique de type temps ou isotrope qui réalise le maximum de pseudo-longueur parmi les courbes de type temps ou isotropes joignant q à r .*

Hypersurfaces de \mathcal{M} :

DÉFINITION. Soit (\mathcal{M}, g) une variété lorentzienne et N une hypersurface de \mathcal{M} . On dit que N est de *type espace* (resp. de *type temps*, resp. *isotrope*) si en tout point $p \in N$ les vecteurs orthogonaux sont de type temps (resp. de type espace, resp. isotropes).

REMARQUE I.172. Les vecteurs tangents à une hypersurfaces de type espace sont de type espace mais les vecteurs tangents à une hypersurface de type temps ou isotrope peuvent être des trois types.

PROPOSITION I.173. Soit (\mathcal{M}, g) une variété lorentzienne et N une hypersurface de \mathcal{M} . Notons G la restriction de g à TN . Alors,

- Si N est type espace, G est définie positive en tout point de N et par conséquent (N, G) est une variété riemannienne.
- Si N est de type temps, G est de signature $(-, +, +)$ en tout point de N .
- Si N est isotrope, G est dégénérée en tout point de N .

2. Intégration sur les variétés lorentziennes

Soit (\mathcal{M}, g) une variété lorentzienne orientée (au sens classique, pas orientée en temps comme on l'a défini dans le chapitre II).

DÉFINITION. La *forme volume* η est l'unique 4-forme différentielle sur \mathcal{M} qui vérifie, pour une carte quelconque (x^1, \dots, x^4) dans l'orientation de \mathcal{M}

$$\eta = \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4.$$

(si \mathcal{M} n'est pas orientable, on peut se limiter à des domaines ouverts orientables et les orienter). La démonstration de l'existence et l'unicité de η est identique à l'analogue en géométrie riemannienne (sauf qu'ici $\det(g_{ij}) < 0$). On obtient ainsi sur une variété lorentzienne orientée (de la même manière que sur une variété riemannienne) une *mesure de Radon positive* en posant : pour tout $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact,

$$\int_{\mathcal{M}} f dv_g := \int_{\mathcal{M}} f \eta.$$

Si \mathcal{M} n'est pas orientable, on peut, comme en géométrie riemannienne définir une mesure de Radon positive canonique en travaillant localement. Par contre, la forme η n'existera pas dans ce cadre.

Soit N est une hypersurface orientée dans \mathcal{M} . Notons G la restriction de g à TN . Alors,

- Si N est de type espace, la métrique G définit sans ambiguïté la forme volume et la mesure de Radon positive riemannienne.
- Si N est de type temps, la métrique G est de signature $(-, +, +)$ et définit sans ambiguïté une forme volume et une mesure de Radon positive construites sur une variété de dimension 3 exactement comme ci-dessus.

DÉFINITION. Soit $p \in N$. Le *vecteur orthogonal unitaire* est l'unique $v \in T_p\mathcal{M}$ compatible avec les orientations de \mathcal{M} et N , orthogonal à N et tel que $g(v_p, v_p) = -1$ (resp. $g(v_p, v_p) = 1$) si N est de type espace (resp. de type temps).

REMARQUE I.174. Cette notion n'a pas de sens si N est isotrope car alors la direction orthogonale est isotrope également.

DÉFINITION. Soit X un champ de vecteurs continu sur \mathcal{M} . Le *flux de X à travers N* est l'intégrale

– $\int_N g(v, X)$ si N est de type espace ;

– $\int_N g(v, X)$ si N est de type temps.

Ici, v est le champ des vecteurs orthogonaux unitaires à X .

Soit maintenant un domaine ouvert orienté Ω tel que $\bar{\Omega}$ soit une variété à bord lipschitzienne compacte. On suppose que l'ensemble des points p de $\partial\Omega$ au voisinage desquels $\partial\Omega$ n'est pas C^1 est de mesure nulle dans $\partial\Omega$ (la notion "de mesure nulle" est intrinsèque sur une variété).

THÉORÈME I.175. (*Stokes-Gauss*) On suppose que $\partial\Omega$ est de type espace ou de type temps. Soit X un champ de vecteurs C^1 sur $\bar{\Omega}$. Alors,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_g(X) = \varepsilon \int_{\partial\Omega} g(v, X) = \text{flux de } X \text{ à travers } \partial\Omega$$

où l'on a pris sur $\partial\Omega$ l'orientation induite par Ω et où $\varepsilon = -1$ (resp. $\varepsilon = 1$) si N est de type espace (resp. temps)

REMARQUE I.176. Si $\partial\Omega$ n'est pas d'un type unique ou possède des parties isotropes de mesure non nulle, on peut quand même énoncer le théorème. Voir [Haw73].

Bibliographie

- [AMA79] A. Ashtekar et A. Magnon-Ashtekar, *On conserved quantities in general relativity*, J. Math. Physics., **20** (1979), 793–800.
- [ADM62] R. L. Arnowitt, S. Deser, et C. W. Misner, *Canonical analysis of general relativity*, Recent developments in general relativity, Pergamon, Oxford, (1962), 127–136.
- [Aub98] T. Aubin, *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Berlin Springer-Verlag, 1998.
- [Bar86] R. Bartnik, *The mass of an asymptotically flat manifold*, Commun. Pure Appl. Math., **39**, (1986), 661–693.
- [BI04] R. Bartnik et J. Isenberg, *The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields*, Birkhäuser, Basel, 2004, 1–38.
- [Br01] H. Bray, *Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem*, Journal of Differential Geometry, **59**, No 2 (2001), 177–267.
- [Br10] H. Bray, *On dark matter, spiral galaxies, and the axioms of General Relativity*, Preprint ArXiv 1004.4016, (2010), 63 pages.
- [CB09] Y. Choquet-Bruat, *General relativity and the Einstein equation*, Oxford University Press, 2009.
- [CBG69] Y. Choquet-Bruat et R. Geroch, *Global aspects of the Cauchy problem in general relativity*, Comm. Math. Phys. **14** (1969), 329–335. University Press, 2009.
- [CGP10] P.T. Chruściel, G.J. Galloway, D. Pollack, *Mathematical general relativity : a sampler*, Preprint Arxiv : <http://arxiv.org/abs/1004.1016>.
- [DH09] O. Druet et E. Hebey, *Stability and instability for Einstein-scalar field Lichnerowicz equations on compact Riemannian manifolds*, Mathematische Zeitschrift, **263** (2009), p. 33–67.
- [FB52] Y. Fourès-Bruhat, *Théorèmes d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, Acta Math, **88** (1952), 141–225.
- [Gi09] R. Gicquaud, *De l'équation de prescription de courbure scalaire aux équations de contrainte en relativité générale sur une variété asymptotiquement hyperbolique*, à paraître dans Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Preprint arXiv <http://arxiv.org/abs/0802.3279> (2008), 41 pages.
- [GS10] R. Gicquaud et A. Sakovich, *A large class of non constant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on an asymptotically hyperbolic manifold*, En préparation.
- [Haw73] S. Hawking et G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge monograph on Mathematical Physics, 1973.
- [Heb97] E. Hebey, *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*, Diderot Éditeur, Arts et sciences, 1997.
- [HPP08] E. Hebey, F. Pacard, D. Pollack, *A variational analysis of Einstein-scalar field Lichnerowicz equations on compact Riemannian manifolds*, Commun.Math.Phys., **278** (2008), p. 117–132.
- [Her03] M. Herzlich, *L'inégalité de Penrose, [d'après H. Bray, G. Huisken et T. Ilmanen, ...]*, Séminaire Bourbaki n 883, Astérisque, **282** (2003), Soc. math. France, Paris, 85–111.

- [HN69] F. Hoyle et J.V. Narlikar, *A new model for the expanding universe*, Proc. Roy. Soc. London. A **277**, 1963, 1–23.
- [HI69] G. Huisken et T. Ilmanen, *The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality*, Journal of Differential Geometry, **59**, No 3 (2001), 353–437.
- [IOM04] J. Isenberg et N. Ó Murchadha, *Non-CMC conformal data sets which do not produce solutions of the Einstein constraint equations*, Classical Quantum Gravity, **21** (2004), No 3, 233–241.
- [K59] A. Komar, *Covariant conservation laws in general relativity* Phys. Rev. **113** (1959), 934–936..
- [LP87] J. M. Lee and T. H. Parker. *The Yamabe problem*. Bull. Am. Math. Soc., New Ser., **17** (1987), 37–91.
- [Lu01] J.P. Luminet, *L'univers chiffonné*, Folio Essais, Collection : le temps des sciences, 2001.
- [M08] D. Maxwell, *A class of solutions of the vacuum Einstein constraint equations with freely specified mean curvature*, Preprint arXiv <http://arxiv.org/abs/0804.0874>.
- [PT82] T. Parker et C. Taubes, *On Witten's proof of the positive energy theorem*, Comm. Math. Phys., **84** (1982), 223–238.
- [PU05] P. Peter et J.P. Uzan, *Cosmologie primordiale*, Belin, Collection : Échelles, 2005.
- [SY79] R. Schoen et S.-T. Yau. *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*. Comm. Math. Phys., **65**, (1979), 45–76.
- [Va09] N. Vasset, *Quelques aspects des horizons de trous noirs en relativité numérique*, Thèse de l'Université de Paris VII, 2009.
- [Wa84] R.M. Wald, *General relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [Wit81] E. Witten. *A new proof of the positive energy theorem*. Commun. Math. Phys., **80**, (1981), 381–402.