



**HAL**  
open science

# Représentations galoisiennes $p$ -adiques et ( $\phi, \tau$ )-modules

Xavier Caruso

► **To cite this version:**

Xavier Caruso. Représentations galoisiennes  $p$ -adiques et ( $\phi, \tau$ )-modules. Duke Mathematical Journal, 2013, 162 (13), pp.2525-2607. hal-00528714v3

**HAL Id: hal-00528714**

**<https://hal.science/hal-00528714v3>**

Submitted on 30 Sep 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Représentations galoisiennes $p$ -adiques et $(\varphi, \tau)$ -modules

Xavier Caruso

Septembre 2012

## Résumé

Étant donné un nombre premier impair  $p$  et un corps  $p$ -adique  $K$ , on développe dans cet article, un analogue de la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de Fontaine en remplaçant la  $p$ -extension cyclotomique par l'extension  $K_\infty$  de  $K$  obtenue en ajoutant un système compatible de racines  $p^n$ -ièmes d'une uniformisante  $\pi$  fixée. Ceci nous conduit à une nouvelle classification des représentations  $p$ -adiques de  $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  via des  $(\varphi, \tau)$ -modules. Nous établissons ensuite un lien entre la théorie des  $(\varphi, \tau)$ -modules à celle des  $(\varphi, N_\nabla)$ -modules de Kisin. Comme corollaire, nous répondons à une question de Tong Liu en démontrant que, lorsque  $K$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ , toute représentation de  $E(u)$ -hauteur finie de  $G_K$  est potentiellement semi-stable.

## Abstract

Let  $p$  be an odd prime number and  $K$  be a  $p$ -adic field. In this paper, we develop an analogue of Fontaine's theory of  $(\varphi, \Gamma)$ -modules replacing the  $p$ -cyclotomic extension by the extension  $K_\infty$  obtained by adding to  $K$  a compatible system of  $p^n$ -th roots of a fixed uniformizer  $\pi$  of  $K$ . As a result, we obtain a new classification of  $p$ -adic representations of  $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  by some  $(\varphi, \tau)$ -modules. We then make a link between the theory of  $(\varphi, \tau)$ -modules discussed above and the so-called theory of  $(\varphi, N_\nabla)$ -modules developed by Kisin. As a corollary, we answer a question of Tong Liu : we prove that, if  $K$  is a finite extension of  $\mathbb{Q}_p$ , every representation of  $G_K$  of  $E(u)$ -finite height is potentially semi-stable.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>La théorie générale des <math>(\varphi, \tau)</math>-modules</b>	<b>3</b>
1.1	L'extension $K_\infty$ : définition et propriétés galoisiennes . . . . .	4
1.2	Les $(\varphi, \tau)$ -modules en caractéristique $p$ . . . . .	7
1.3	Relèvement modulo $p^n$ et en caractéristique nulle . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Réseaux dans les <math>(\varphi, \tau)</math>-modules</b>	<b>15</b>
2.1	Réseaux dans les $\varphi$ -modules étales . . . . .	15
2.2	Bornes pour la ramification . . . . .	19
2.3	Les $(\varphi, \tau)$ -réseaux . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Le cas des représentations de <math>E(u)</math>-hauteur finie</b>	<b>29</b>
3.1	Les $(\varphi, \tau)$ -modules comme complément de la théorie de Kisin . . . . .	29
3.2	Un presque quasi-inverse de $\mathcal{R}_{\varphi, \tau}$ . . . . .	32
3.3	Réseaux à l'intérieur des représentations semi-stables . . . . .	46
3.4	Bornes pour la ramification sauvage des représentations semi-stables . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Quelques perspectives</b>	<b>49</b>

---

Soit  $p$  un nombre premier impair. Soit  $K$  un corps de caractéristique nulle, complet pour une valuation discrète, dont le corps résiduel  $k$  est parfait de caractéristique  $p$ . On fixe  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$  et on s'intéresse aux représentations  $p$ -adiques du groupe de Galois  $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ . Plusieurs théories ont déjà été développées pour étudier ces représentations, et notamment celle des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules due à

Fontaine [11]. Dans cette théorie, la  $p$ -extension cyclotomique de  $K$ , notée  $K(\zeta_{p^\infty})$  et obtenue en ajoutant à  $K$  les racines  $p^n$ -ièmes de l'unité, joue un rôle essentiel. En effet, une première étape cruciale consiste à démontrer que les  $\mathbb{Q}_p$ -représentations (resp. les  $\mathbb{Z}_p$ -représentations libres ou de torsion) de type fini du groupe de Galois  $H_K = \text{Gal}(\bar{K}/K(\zeta_{p^\infty}))$  sont classifiées par certains  $\varphi$ -modules<sup>1</sup> sur le corps  $\mathcal{E}$  (resp. sur l'anneau  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ ) défini comme suit

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i u^i \mid a_i \in W[1/p], (a_i) \text{ bornée, } \lim_{i \rightarrow -\infty} a_i = 0 \right\}$$

$$\text{(resp. } \mathcal{E}^{\text{int}} = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i u^i \mid a_i \in W, \lim_{i \rightarrow -\infty} a_i = 0 \right\})$$

où  $W = W(k)$  désigne l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$ . À partir de là, on retrouve l'action complète de  $G_K$  en ajoutant à ce  $\varphi$ -module une action du quotient  $\Gamma = G_K/H_K = \text{Gal}(K(\zeta_{p^\infty})/K)$ , obtenant au final un objet appelé  $(\varphi, \Gamma)$ -module.

Certains travaux récents de Breuil et Kisin (voir [4] et [13]) ont montré que, plus encore que la  $p$ -extension cyclotomique considérée précédemment, l'extension  $K_\infty$  de  $K$ , obtenue en ajoutant un système compatible de racines  $p^n$ -ièmes d'une uniformisante  $\pi$  fixée, joue un rôle particulier pour l'étude des représentations semi-stables de  $G_K$ . Le but de cet article est de développer un analogue de la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules à partir de l'extension  $K_\infty$ . La première étape, qui consiste à classifier les représentations de  $G_\infty = \text{Gal}(\bar{K}/K_\infty)$ , fonctionne comme dans le cas classique : à une telle représentation est associée un  $\varphi$ -module sur  $\mathcal{E}$  ou  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  (selon que les coefficients soient pris dans  $\mathbb{Q}_p$  ou  $\mathbb{Z}_p$ ), et celui-ci suffit à la décrire complètement. Par contre, une fois arrivé à ce niveau, il n'est plus possible de copier à la lettre la méthode de Fontaine, tout simplement parce que l'extension  $K_\infty/K$  n'est pas galoisienne. Cela n'a donc aucun sens d'ajouter au  $\varphi$ -module précédent l'action résiduelle de  $\text{Gal}(K_\infty/K)$  puisque ce dernier groupe n'est pas défini !

Suivant certains travaux de Liu (voir [18] et [19]), on peut toutefois procéder comme suit. On considère un élément  $\tau \in G_K$  agissant trivialement sur  $K(\zeta_{p^\infty})$  — ou même seulement sur  $K(\zeta_p)$  — tel que  $\tau$  et  $G_\infty$  engendrent ensemble  $G_K$ . Dans ces conditions, connaître le  $\varphi$ -module  $M$  et l'action de  $\tau$  suffit à reconstruire l'action complète de  $G_K$  sur  $T$ . Cette action supplémentaire de  $\tau$  a un pendant au niveau des  $\varphi$ -modules. Elle ne correspond certes pas à un simple endomorphisme de  $M$  (comme cela aurait été le cas si l'extension  $K_\infty/K$  avait été galoisienne), mais à un endomorphisme semi-linéaire de  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M$  où  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  est une certaine  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ -algèbre munie d'une action de  $G_K$ . Ceci nous conduit à définir un  $(\varphi, \tau)$ -module sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$  (resp. sur  $(\mathcal{E}, \mathcal{E}_\tau)$  où  $\mathcal{E}_\tau = \mathcal{E}_\tau^{\text{int}}[1/p]$ ) comme la donnée d'un  $\varphi$ -module de type fini  $M$  sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  (resp.  $\mathcal{E}$ ) muni d'une application supplémentaire  $\tau : \mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M \rightarrow \mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M$  vérifiant un certain nombre de conditions (voir définition 1.19 pour plus de précisions). Nous démontrons alors le théorème suivant (se reporter au §§1.2.2 et 1.3.2 pour la définition des foncteurs).

**Théorème 1.** *Il existe des équivalences de catégories :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Q}_p\text{-représentations de} \\ \text{dimension finie de } G_K \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ (\varphi, \tau)\text{-modules sur } (\mathcal{E}, \mathcal{E}_\tau) \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z}_p\text{-représentations} \\ \text{libres de type fini de } G_K \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} (\varphi, \tau)\text{-modules} \\ \text{libres sur } (\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}}) \end{array} \right\}$$

et, pour tout entier  $n$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z}_p\text{-représentations de type} \\ \text{fini de } G_K \text{ annihilées par } p^n \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} (\varphi, \tau)\text{-modules sur} \\ (\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}}) \text{ annihilés par } p^n \end{array} \right\}.$$

Dans le §2, nous introduisons et étudions la notion de  $(\varphi, \tau)$ -réseau. Si  $M$  est un  $(\varphi, \tau)$ -module, un  $(\varphi, \tau)$ -réseau de  $M$  est un sous- $W[[u]]$ -module de type fini de  $M$ , qui engendre  $M$  comme  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ -module, qui est stable par  $\varphi$  et dont l'extension des scalaires à  $\mathfrak{S}_\tau$  (un certain sous-anneau de  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  qui sera défini dans le corps du texte) est stable par  $\tau$ . Une notion importante liée aux réseaux est celle de hauteur : étant donné un élément  $U \in \mathfrak{S}_\tau$ , on dit qu'un réseau  $\mathfrak{M}$  est de hauteur divisant  $U$  si le conoyau de

$$\text{id} \otimes \varphi : \mathfrak{S}_\tau \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$$

1. Les définitions précises seront données par la suite. On pourra se contenter pour l'instant de savoir que les  $\varphi$ -modules sont des modules munis d'un opérateur semi-linéaire, généralement noté  $\varphi$ .

est annulé par  $U$ . Il s'avère que l'existence d'un  $(\varphi, \tau)$ -module de hauteur divisant  $U$  à l'intérieur d'un  $(\varphi, \tau)$ -module implique des bornes explicites sur la ramification de la représentation galoisienne correspondante. Plus exactement, nous démontrerons le théorème 2 ci-après.

**Théorème 2.** *On note  $G_\infty^{(\mu)}$  et  $G_K^{(\mu)}$  les filtrations de ramification en numérotation supérieure<sup>2</sup> des groupes de Galois respectifs  $G_\infty$  et  $G_K$ . On fixe un nombre entier  $n \geq 1$  et un élément  $U \in \mathfrak{S}$  qui n'est pas multiple de  $p$ . On pose  $h = v_R(U \bmod p)$ .*

**1.** *Soit  $T$  une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation de  $G_\infty$  qui est de type fini comme  $\mathbb{Z}_p$ -module et annulée par  $p^n$ . On suppose que le  $\varphi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  associé à  $T$  admet un  $\varphi$ -réseau de hauteur divisant  $U$ . Alors pour tout  $\mu > \max(1, \frac{hp^n}{p-1})$ , le sous-groupe  $G_\infty^{(\mu)}$  agit trivialement sur  $T$ .*

**2.** *Il existe une constante  $c(K)$  ne dépendant que du corps  $K$  telle que l'assertion suivante soit vraie : pour toute  $\mathbb{Z}_p$ -représentation  $T$  de  $G_K$  de type fini comme  $\mathbb{Z}_p$ -module, annulée par  $p^n$ , dont la restriction à  $G_\infty$  correspond à un  $\varphi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  de hauteur divisant  $U$ , et pour tout  $\mu > c(K) + e \cdot \max(\frac{1}{p-1}, n + \log_p(\frac{h}{e}))$ , le groupe  $G_K^{(\mu)}$  agit trivialement sur  $T$ .*

*Remarque.* La constante  $c(K)$  dépend de façon assez explicite de la ramification absolue de  $K$  ; par exemple, lorsque  $e$  est premier avec  $p$  (i.e. lorsque  $K$  est absolument modérément ramifié), elle peut être choisie égale à  $1 + e + \frac{e}{p-1}$ .

Nous nous intéressons enfin plus particulièrement aux  $(\varphi, \tau)$ -modules qui sont de hauteur divisant  $E(u)^r$  pour un certain entier  $r$  (on dit aussi : de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$ ). L'intérêt de cette notion a été récemment mis en lumière dans un premier temps par Breuil dans [4] puis par Kisin dans [13] qui a démontré dans *loc. cit.* qu'une représentation semi-stable était nécessairement de  $E(u)$ -hauteur finie. Réciproquement, dans le §3, nous démontrons le théorème suivant :

**Théorème 3.** *On suppose que  $K$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ . On note  $s$  le plus grand entier tel que  $K$  contienne une racine primitive  $p^s$ -ième de l'unité. Alors, toute représentation de  $E(u)$ -hauteur finie de  $G_K$  devient semi-stable en restriction au sous-groupe (distingué)  $G_s = \text{Gal}(\bar{K}/K(\sqrt[p^s]{\pi}))$ .*

Il est à noter que les bornes de ramification données par le théorème 2 jouent un rôle absolument essentiel dans la démonstration du théorème 3 (il en est en fait le point de départ). En effet, elles fournissent des bornes sur l'action de  $\tau$  sur le  $(\varphi, \tau)$ -module associé à  $V$  qui sont exactement celles dont on a besoin pour construire un opérateur  $\log \tau$  sur le  $(\varphi, \tau)$ -module associée à  $V$  (en se basant la formule  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\text{id}-\tau)^i}{i}$ ). À partir de cet opérateur, on fabrique ensuite un  $(\varphi, N)$ -module filtré à la Fontaine duquel émergera finalement une représentation semi-stable. Il ne restera alors plus qu'à démontrer que cette dernière représentation coïncide avec celle dont on est partie, au moins en restriction au sous-groupe  $G_s$ .

Nous démontrons enfin au §3.4 un raffinement du théorème 2 pour les représentations semi-stable qui n'est autre que la conjecture 1.2.(1) de [7].

Ce travail puise son origine et son inspiration dans de nombreuses discussions avec Tong Liu ; à travers ces quelques lignes, l'auteur souhaite lui témoigner tous ses remerciements. L'auteur est également reconnaissant à l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) pour son soutien financier par l'intermédiaire du projet CETHop (Calculs Effectifs en Théorie de Hodge  $p$ -adique) référencé ANR-09-JCJC-0048-01.

## 1 La théorie générale des $(\varphi, \tau)$ -modules

L'objectif principal de cette première partie est de définir les foncteurs qui réalisent les équivalences de catégories énoncées dans le théorème 1 de l'introduction (et donc de définir, aussi, en particulier, l'anneau  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$ ), puis de démontrer ce théorème. Tout au long de cette section et de la suivante, nous allons petit à petit définir un certain nombre d'anneaux. La figure 1 présente un diagramme qui fait apparaître les plus importants d'entre eux, ainsi que les morphismes essentiels les reliant. Nous espérons que celui-ci pourra faciliter la lecture de cet article.

2. Pour le groupe  $G_K$ , il s'agit de la ramification usuelle telle que définie, par exemple, dans [11]. Sur le groupe  $G_\infty$ , la ramification est définie de même via l'isomorphisme de corps des normes  $G_\infty \simeq \text{Gal}(F_0^{\text{sep}}/F_0)$  où  $F_0 = \mathcal{E}^{\text{int}}/p\mathcal{E}^{\text{int}} \simeq k((u))$ . Pour plus de précisions à ce sujet, on renvoie au §2.2.1.

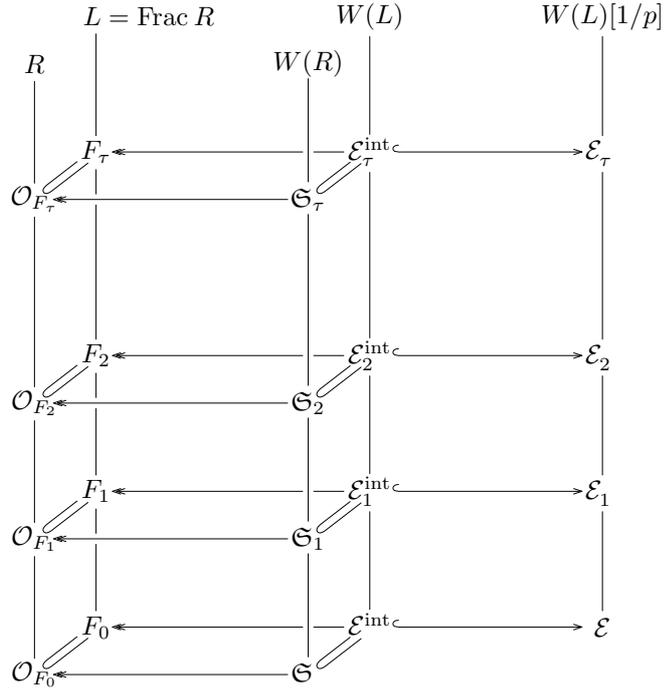


FIGURE 1 – Principaux anneaux intervenant dans la théorie des  $(\varphi, \tau)$ -modules

La partie gauche (resp. centrale, resp. droite) du diagramme concerne la théorie sur  $\mathbb{F}_p$  (resp.  $\mathbb{Z}_p$ , resp.  $\mathbb{Q}_p$ ). Les anneaux qui apparaissent au second plan concernent la théorie générale des  $(\varphi, \tau)$ -modules ; ils sont présentés et étudiés dans le §1. Au premier plan, au contraire, nous trouvons les anneaux nécessaires à l'étude des  $(\varphi, \tau)$ -réseaux ; ceux-ci sont introduits et utilisés dans le §2.

Comme dans l'introduction, on fixe un nombre premier impair  $p$  et un corps  $K$  muni d'une valuation discrète pour laquelle il est complet. On suppose que  $K$  est de caractéristique nulle et que son corps résiduel  $k$  est parfait de caractéristique  $p$ . On rappelle également que  $W$  désigne l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$  ; son corps des fractions  $W[1/p]$  s'identifie canoniquement au plus gros sous-corps de  $K$  absolument non ramifiée. L'extension  $K/W[1/p]$  est totalement ramifiée et on note  $e$  son degré. On considère  $(\zeta_{p^s})$  un système compatibles de racines primitives  $p^s$ -ièmes de l'unité et on note  $K(\zeta_{p^\infty}) = \bigcup_s K(\zeta_{p^s})$ . L'extension  $K(\zeta_{p^\infty})$  est galoisienne et son groupe de Galois  $\Gamma$  s'identifie *via* le caractère cyclotomique  $\chi$  à un sous-groupe ouvert de  $\mathbb{Z}_p^\times$ .

## 1.1 L'extension $K_\infty$ : définition et propriétés galoisiennes

Nous commençons par quelques préliminaires, en grande partie déjà connus, concernant l'extension  $K_\infty$  de Breuil-Kisin. Soit  $\pi$  une uniformisante de  $\mathcal{O}_K$ . On choisit une fois pour toutes un système compatible  $(\pi_s)$  de racines  $p^s$ -ièmes de  $\pi$ . On pose  $K_s = K(\pi_s)$  pour tout entier  $s$  et  $K_\infty = \bigcup_s K_s$ . Les extensions  $K_s/K$  ne sont pas galoisiennes, sauf éventuellement pour les premiers entiers  $s$ . De façon plus précise, la clôture galoisienne de  $K_s/K$  est l'extension  $K_s(\zeta_{p^s})$ . Ainsi  $K_s/K$  est galoisienne si, et seulement si  $\zeta_{p^s} \in K_s$ . L'extension  $K_\infty/K$ , quant à elle, n'est *jamais* galoisienne et sa clôture galoisienne est l'extension composée  $K_\infty(\zeta_{p^\infty}) = K_\infty \cdot K(\zeta_{p^\infty})$ . On pose  $G_\infty = \text{Gal}(\bar{K}/K_\infty) \subset G_K$  et  $H_\infty = \text{Gal}(\bar{K}/K_\infty(\zeta_{p^\infty})) \subset G_\infty$ .

### 1.1.1 Le cocycle $c$

Bien que  $G_\infty$  ne soit pas distingué dans  $G_K$ , on peut définir une application continue (qui bien sûr, n'est pas un morphisme de groupes)  $c : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p$  dont le « noyau » (*i.e.* l'image réciproque de  $0 \in \mathbb{Z}_p$ )

s'identifie à  $G_\infty$ . Pour cela, on remarque qu'étant donné un élément  $g \in G_K$  et un entier  $s$ , il existe un unique élément  $c_s(g) \in \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$  tel que  $g(\pi_s) = \zeta_{p^s}^{c_s(g)}\pi_s$ . La famille des  $(c_s(g))_{s \geq 1}$  vérifie la congruence  $c_{s+1}(g) \equiv c_s(g) \pmod{p^s}$ , et définit donc un élément de  $\mathbb{Z}_p$ , que l'on appelle  $c(g)$ . On vérifie sans peine que  $c$  est continue et que le fait que  $c(g)$  s'annule signifie exactement que  $g$  agit trivialement sur chacun des  $\pi_s$ , c'est-à-dire sur  $K_\infty$ . Ainsi, comme nous le disions précédemment, on a  $c^{-1}(0) = G_\infty$ . L'application  $c$  n'est certes pas un morphisme de groupes mais vérifie malgré tout une relation de 1-cocycle à savoir :

$$\forall g, h \in G_\infty, \quad c(gh) = c(g) + \chi(g)c(h). \quad (1.1)$$

On en déduit que, si  $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p^\times$  désigne le produit semi-direct de  $\mathbb{Z}_p$  par  $\mathbb{Z}_p^\times$  où  $\mathbb{Z}_p^\times$  agit sur  $\mathbb{Z}_p$  par multiplication, l'application  $\chi_\infty : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p^\times$ ,  $g \mapsto (c(g), \chi(g))$  est un morphisme de groupes dont le noyau est exactement  $H_\infty$ . En particulier, le 1-cocycle  $c : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p$  se factorise par  $G_K/H_\infty$ , et ce dernier groupe se plonge dans  $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p^\times$  via  $\chi_\infty$ . Voici un diagramme qui résume les liens entre les différents groupes que l'on vient d'introduire :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Gal}(K_\infty(\zeta_{p^\infty})/K_\infty) & \longrightarrow & G_K/H_\infty & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{Z}_p^\times \\ & & \downarrow & & \downarrow \chi_\infty & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p^\times & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p^\times \longrightarrow 0 \end{array}$$

Soulignons que les groupes qui apparaissent sur le diagramme sont tous profinis, tandis que les morphismes sont tous continus pour la topologie profinie. Par ailleurs, il résulte du diagramme que le morphisme  $\text{Gal}(K_\infty(\zeta_{p^\infty})/K_\infty) \rightarrow \mathbb{Z}_p$  est injectif. Le lemme 5.1.2 de [17] (qui stipule que les extensions  $K_\infty$  et  $K(\zeta_{p^\infty})$  sont linéairement disjointes sur  $K$ ) montre même que c'est un isomorphisme. On déduit également du même lemme que  $\chi(G_\infty) = \chi(G_K)$ . On remarque encore que si  $g \in G_K$  est tel que  $\chi(g) \equiv 1 \pmod{p}$ , alors  $\chi_\infty(g)$  appartient à l'unique pro- $p$ -Sylow de  $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p^\times$  ; il en résulte que  $\chi(g)^{p^s}$  converge vers l'élément neutre de ce groupe lorsque  $s$  tend vers l'infini, et donc que la suite des  $g^{p^s} \pmod{H_\infty}$  converge elle aussi (vers l'élément neutre de  $G_K/H_\infty$ ). En particulier, si  $a$  est un entier  $p$ -adique, l'élément  $g^a$  est bien défini dans  $G_K/H_\infty$ , et il en est donc de même de  $c(g^a)$ . Une récurrence à partir de (1.1) suivie d'un passage à la limite conduit enfin à la formule

$$\begin{aligned} c(g^a) &= c(g) \cdot [a]_{\chi(g)} \quad \text{où} \quad [a]_{\chi(g)} = a && \text{si } \chi(g) = 1. \\ &= \frac{\chi(g)^a - 1}{\chi(g) - 1} && \text{si } \chi(g) \neq 1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Dans la suite, le nombre  $[a]_{\chi(g)}$  sera appelé le  $\chi(g)$ -analogue de  $a$ .

### 1.1.2 L'élément $\tau$

Soit  $\tau : K_\infty \rightarrow \bar{K}$  le  $K$ -plongement défini par  $\tau(\pi_s) = \zeta_{p^s}\pi_s$ . Les extensions  $K_\infty$  et  $K(\zeta_p)$  étant linéairement disjointes sur  $K$ , on peut prolonger  $\tau$  à  $\bar{K}$  de façon à ce que  $\chi(\tau) \equiv 1 \pmod{p}$ . En réalité, le lemme 5.1.2 de [17] nous dit même que l'on peut imposer  $\chi(\tau) = 1$ . Toutefois, bien que cela complique légèrement les calculs, nous préférons continuer à travailler avec un  $\tau$  plus général vérifiant seulement  $\chi(\tau) \equiv 1 \pmod{p}$ . Il suit de la définition de  $\tau$  que  $c(\tau) = 1$ . En outre, en vertu de ce qui a été dit juste en dessous de cet alinéa, on peut définir  $c(\tau^a)$  et  $\chi(\tau)^a$  pour tout  $a \in \mathbb{Z}_p$ . La formule (1.2) s'écrit alors simplement  $c(\tau^a) = [a]_{\chi(\tau)}$ .

**Lemme 1.1.** *L'application  $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ ,  $a \mapsto [a]_{\chi(\tau)}$  est une bijection. De plus, pour tout  $a \in \mathbb{Z}_p$ , on a  $a \equiv [a]_{\chi(\tau)} \pmod{p}$  et les valuations  $p$ -adiques de  $a - 1$  et de  $[a]_{\chi(\tau)} - 1$  sont égales.*

*Démonstration.* Si  $\chi(\tau) = 1$ , l'application est l'identité et il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire, pour démontrer que  $a \mapsto [a]_{\chi(\tau)}$  est bijective, il suffit de remarquer que l'inverse est donnée par  $b \mapsto \frac{\log(1+(\chi(\tau)-1)b)}{\log \chi(\tau)}$ , application qui est bien définie car  $\chi(\tau) \equiv 1 \pmod{p}$  et  $p > 2$ . Pour la deuxième assertion, on écrit  $\chi(\tau) = 1 + px$ . On a alors

$$[a]_{\chi(\tau)} = a + \frac{a(a-1)}{2} \cdot px + \frac{a(a-1)(a-2)}{6} \cdot p^2x^2 + \dots + \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n!} \cdot p^n x^n + \dots$$

et il est déjà clair que  $a \equiv [a]_{\chi(\tau)} \pmod{p}$ . On remarque ensuite que de  $a \equiv 1 \pmod{p^s}$ , il suit  $[a]_{\chi(\tau)} \equiv a \pmod{p^{s+1}}$  car  $\frac{p^s}{n!}$  est toujours multiple de  $p$  dans  $\mathbb{Z}_p$  (on rappelle que l'on suppose  $p > 2$ ) et  $a - 1$  est lui, par définition, multiple de  $p^s$ . La conclusion en résulte.  $\square$

D'après le lemme, pour tout élément  $g \in G_K$ , il existe un unique  $a \in \mathbb{Z}_p$  tel que  $[a]_{\chi(\tau)} = \chi(g)$ . Notons  $\chi_\tau(g)$  cet élément ; on définit de cette manière une fonction  $\chi_\tau : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p$  qui, d'après la congruence  $a \equiv [a]_{\chi(\tau)} \pmod{p}$ , prend ses valeurs dans  $\mathbb{Z}_p^\times$ . On prendra garde au fait que  $\chi_\tau$  n'est pas un morphisme de groupes ; cependant, son « noyau » (i.e. l'image réciproque de  $1 \in \mathbb{Z}_p^\times$ ) est le sous-groupe  $H_K$ . L'égalité entre valuations établie dans le lemme 1.1 assure en outre que, pour tout entier  $m$ , l'image réciproque du sous-groupe  $1 + p^m \mathbb{Z}_p$  de  $\mathbb{Z}_p^\times$  est le sous-groupe  $\text{Gal}(\bar{K}/K(\zeta_{p^m}))$  de  $G_K$ .

**Lemme 1.2.** 1. Tout élément  $g \in G_K/H_\infty$  s'écrit de façon unique sous la forme  $\tau^a g'$  avec  $a \in \mathbb{Z}_p$  et  $g' \in G_\infty/H_\infty$   
2. Pour tout  $g \in G_\infty/H_\infty$ , le produit  $\tau^{-\chi_\tau(g)} g \tau$  calculé dans  $G_K/H_\infty$  appartient à  $G_\infty/H_\infty$ .

*Démonstration.* Pour le premier alinéa, il s'agit de montrer que l'équation  $c(\tau^{-a}g) = 0$  a une unique solution dans  $\mathbb{Z}_p$ . Or on a  $c(\tau^{-a}g) = [-a]_{\chi(\tau)} + \chi(\tau)^{-a}c(g) = \chi(\tau)^{-a}(c(g) - [a]_{\chi(\tau)})$ , à partir de quoi le lemme 1.1 permet de conclure. Pour le deuxième alinéa, il suffit de vérifier que  $c(\tau^{-\chi_\tau(g)}g\tau) = 0$ , ce qui se fait comme précédemment.  $\square$

**Proposition 1.3.** Soit  $\Gamma$  un groupe topologique et  $\rho : G_\infty/H_\infty \rightarrow \Gamma$  un morphisme de groupes continu. Se donner un prolongement continu  $\tilde{\rho} : G_K/H_\infty \rightarrow \Gamma$  de  $\rho$  revient à se donner un élément  $\tau_\Gamma \in \Gamma$  (l'image de  $\tau$ ) tel que pour tout  $g \in G_\infty/H_\infty$  vérifiant  $\chi_\tau(g) \in \mathbb{N}$ , on ait :

$$\rho(g) \cdot \tau_\Gamma = \tau_\Gamma^{\chi_\tau(g)} \cdot \rho(\tau^{-\chi_\tau(g)}g\tau). \quad (1.3)$$

*Démonstration.* D'après le premier point du lemme 1.2, il est clair que  $\tau_\Gamma = \tilde{\rho}(\tau)$  détermine entièrement  $\tilde{\rho}$ . L'unicité en résulte. Pour l'existence, on montre dans un premier temps que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \tau_\Gamma^{p^s} = 1$ . Étant donné que  $\chi(G_\infty) = \chi(G_K)$  est ouvert dans  $\mathbb{Z}_p^\times$ , il existe un entier  $s_0$  tel que  $\chi(G_\infty) \supset 1 + p^{s_0} \mathbb{Z}_p$ . Comme d'après le lemme 1.1, l'application  $a \mapsto [a]_{\chi(\tau)}$  réalise une bijection de  $1 + p^s \mathbb{Z}_p$  dans lui-même pour tout  $s$ , il existe une suite  $(g_s)_{s \geq s_0}$  d'éléments de  $G_\infty/H_\infty$  convergeant vers l'identité et telle que  $\chi_\tau(g_s) = p^s + 1$ . En appliquant la relation (1.3) avec  $g_s$ , il vient  $\tau_\Gamma^{p^s} = \rho(g_s) \cdot \tau_\Gamma \cdot \rho(\tau^{-\chi_\tau(g_s)}g_s\tau) \cdot \tau_\Gamma^{-1}$ . Un passage à la limite pour  $s$  tendant vers l'infini donne alors la conclusion annoncée. Ceci nous permet de définir  $\tau_\Gamma^a$  pour tout élément  $a \in \mathbb{Z}_p$  et en passant à la limite dans (1.3), on montre que cette dernière relation est valable pour tout  $g \in G_\infty/H_\infty$ . Il suffit maintenant de montrer que l'application  $\tilde{\rho}$  définie par

$$\forall a \in \mathbb{Z}_p, \forall g \in G_\infty/H_\infty, \quad \tilde{\rho}(\tau^a g) = \tau_\Gamma^a \rho(g)$$

est un morphisme de groupes. Il s'agit donc de vérifier que si  $g\tau^a = \tau^b h$  avec  $a, b \in \mathbb{Z}_p$  et  $g, h \in G_\infty/H_\infty$ , alors  $\rho(g)\tau_\Gamma^a = \tau_\Gamma^b \rho(h)$ . Tout d'abord, en appliquant  $c$  à l'égalité  $g\tau^a = \tau^b h$ , on obtient  $\chi(g) \cdot [a]_{\chi(\tau)} = [b]_{\chi(\tau)}$ . Si  $a = 1$ , on voit à présent que l'égalité que l'on a à démontrer n'est autre que l'hypothèse. Pour  $a \in \mathbb{N}$ , l'égalité se démontre par récurrence, tandis qu'enfin, pour  $a \in \mathbb{Z}_p$ , on utilise un argument de passage à la limite.  $\square$

Bien entendu, le cas qui nous intéressera particulièrement dans cet article est celui où le groupe  $\Gamma$  est le groupe des automorphismes linéaires ou semi-linéaires d'un certain espace. Dans cette situation, la proposition dit exactement ce qu'il faut ajouter à une représentation de  $G_\infty/H_\infty$  pour définir une représentation de  $G_K/H_\infty$ .

### 1.1.3 Comment se dispenser de quotienter par $H_\infty$

Dans le lemme 1.2 et la proposition 1.3, nous avons systématiquement quotienter par  $H_\infty$ . Toutefois, on peut s'affranchir de cela en prenant soin de choisir au préalable un élément  $\tau \in G_K$  vérifiant  $\lim_{s \rightarrow \infty} \tau^{p^s} = \text{id}$ . Un tel choix est toujours possible car, étant donné que l'extension  $K_\infty/K$  n'admet pas de sous-extension modérément ramifiée, on peut choisir  $\tau$  dans le sous-groupe d'inertie sauvage ; comme celui-ci est un pro- $p$ -groupe, la convergence requise en résulte. Une fois ce choix fait, les démonstrations du lemme 1.2 et de la proposition 1.3 s'étendent mot pour mot en remplaçant partout  $G_K/H_\infty$  par  $G_K$  et  $G_\infty/H_\infty$  par  $G_\infty$ . En particulier, on voit que se donner une action de  $G_K$  revient, dans ce cas, à se donner une action de  $G_\infty$  et

un automorphisme  $\tau_\Gamma$  (correspondant à l'action de  $\tau$ ) vérifiant la relation de commutation (1.3). Toutefois, dans la suite, nous nous contenterons d'appliquer la proposition 1.3 au groupe quotient  $G_K/H_\infty$ , et il ne nous sera donc pas nécessaire de particulariser ainsi le choix de  $\tau$ .

Un fait notable, par contre, est qu'un corollaire de la généralisation que l'on vient d'évoquer permet de donner une description de  $G_K$  en termes de  $G_\infty$  à l'aide d'une construction de type « produit semi-direct ». On choisit pour cela un élément  $\tau$  dans le groupe d'inertie sauvage vérifiant à la fois  $c(\tau) = 1$  et  $\chi(\tau) = 0$  (un tel choix est possible). On a alors les propriétés suivantes :

- tout élément de  $G_K$  s'écrit de façon unique sous la forme  $\tau^a g$  avec  $a \in \mathbb{Z}_p$  et  $g \in G_\infty$  ;
- si  $g \in G_\infty$  et  $a \in \mathbb{Z}_p$ , alors  $h = \tau^{-a\chi(g)} g \tau^a \in G_\infty$  et on a bien sûr la relation  $g \tau^a = \tau^{a\chi(g)} h$ .

Ainsi si l'on se donne  $G_\infty$ , la restriction du caractère cyclotomique  $\chi : G_\infty \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$  et l'application  $\psi : G_\infty \rightarrow G_\infty$ ,  $g \mapsto \tau^{-\chi(g)} g \tau$ , on peut reconstruire le groupe  $G_K$  tout entier en considérant l'ensemble  $\mathbb{Z}_p \times G_\infty$  muni de la loi de groupe suivante :

$$(a, g) \cdot (b, h) = (a + b\chi(g), \psi^b(g)h).$$

On prendra garde néanmoins au fait que l'application  $\psi$  n'est pas un morphisme de groupes ; elle vérifie cependant une relation, à savoir  $\psi(gh) = \psi^{\chi(h)}(g)\psi(h)$ .

## 1.2 Les $(\varphi, \tau)$ -modules en caractéristique $p$

Dans ce paragraphe, nous mettons au point la théorie des  $(\varphi, \tau)$ -modules en caractéristique  $p$ , c'est-à-dire que nous établissons la troisième équivalence de catégories du théorème 1 de l'introduction lorsque  $n = 1$  (les anneaux  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  et  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  étant alors remplacés par des variantes plus simples). La méthode est simple et naturelle : elle consiste à mettre ensemble ce qui vient d'être fait et le théorème de Fontaine et Fontaine-Wintenberger de classification des représentations de  $G_\infty$  via les  $\varphi$ -modules étales. Nous commençons par quelques rappels à ce sujet.

### 1.2.1 Rappels sur la classification des représentations de $G_\infty$

On considère l'anneau  $R = \varprojlim \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  où les morphismes de transition sont donnés par l'élévation à la puissance  $p$  : un élément  $x \in R$  est donc une suite  $(x_s)_{s \geq 0}$  telle que  $x_{s+1}^p = x_s$  pour tout  $s$ . On note  $\text{Frac } R$  le corps des fractions de  $R$  ; c'est un corps algébriquement clos. À côté de cela, il est clair que  $R$  est muni d'une action canonique de  $G_K$  qui s'étend à  $\text{Frac } R$ . Par ailleurs, si l'on note  $v_K$  la valuation sur  $\bar{K}$  normalisée par  $v_K(K^\times) = \mathbb{Z}$ , on démontre que la formule  $v_R(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} p^s v_K(x_s)$  définit une valuation (non discrète) sur  $R$  pour laquelle il est complet. La valuation  $v_R$  s'étend naturellement à  $\text{Frac } R$  et on note encore  $v_R$  ce prolongement. Le corps résiduel  $k$  s'injecte canoniquement dans  $R$  : à un élément  $\lambda \in k$ , on associe la suite des  $\lambda^{1/p^s}$  vus comme éléments de  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ . La famille  $(\zeta_{p^s})$  (resp.  $(\pi_s)$ ) de racines  $p^s$ -ièmes de l'unité (resp. de  $\pi$ ) définit, elle aussi, un élément de  $R$  que l'on note  $\underline{\varepsilon}$  (resp.  $\underline{\pi}$ ). On a  $v_R(\underline{\varepsilon}) = 0$  et  $v_R(\underline{\pi}) = 1$ . On pose  $\eta = 1 - \underline{\varepsilon}$  de sorte que  $v_R(\eta) = \frac{ep}{p-1}$ . Par construction le groupe  $H_K$  agit trivialement sur  $\underline{\varepsilon}$  et  $\eta$  tandis que  $G_\infty$ , lui, agit trivialement sur  $\underline{\pi}$ . Dans la suite, on plongera systématiquement l'anneau  $k[[u]]$  dans  $R$  en envoyant  $u$  sur  $\underline{\pi}$ . Ce morphisme s'étend aux corps des fractions et définit ainsi un plongement du corps  $F_0 = k((u))$  dans  $\text{Frac } R$ . On appelle  $F_0^{\text{sep}}$  la clôture séparable de  $F_0$  dans  $\text{Frac } R$ . Étant donné que  $G_\infty$  agit trivialement sur  $F_0$  vu dans  $\text{Frac } R$ , tout élément de  $G_\infty$  stabilise  $F_0^{\text{sep}}$  et on obtient comme ceci un morphisme  $G_\infty \rightarrow \text{Gal}(F_0^{\text{sep}}/F_0)$ . La théorie du corps des normes de Fontaine et Wintenberger (voir [23]) affirme que c'est en fait un isomorphisme. Comme corollaire du théorème de Hilbert 90, Fontaine démontre alors la proposition suivante.

**Proposition 1.4.** *Soit  $T$  une  $\mathbb{F}_p$ -représentation du groupe  $G_\infty$ . On suppose que  $T$  est de dimension finie  $d$  sur  $\mathbb{F}_p$ . Alors l'espace  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_\infty]}(T, F_0^{\text{sep}})$  est de dimension  $d$  sur  $F_0$  et, plus précisément, le morphisme naturel*

$$F_0^{\text{sep}} \otimes_{F_0} \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_\infty]}(T, F_0^{\text{sep}}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}_p}(T, F_0^{\text{sep}})$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* C'est un cas particulier<sup>3</sup> de la proposition A.1.2.6 et de la remarque A.1.2.7 de [11].  $\square$

3. Dans cette référence, on travaille déjà avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}_p$ , ce que, de notre côté, nous ne ferons que dans le §1.3 (voir théorème 1.6).

*Remarque 1.5.* Le vrai contenu de la proposition réside dans la surjectivité de l'application. L'injectivité, quant à elle, est un fait beaucoup plus général, qui reste valable si l'on remplace  $G_\infty$  par n'importe quel groupe topologique  $H$ ,  $F_0^{\text{sep}}$  par n'importe quel corps  $L$  de caractéristique  $p$  sur lequel  $H$  agit continument, et  $F_0$  par  $L^H$  (la démonstration étant en tout point identique).

À partir de la proposition précédente, Fontaine déduit un théorème de classification des  $\mathbb{F}_p$ -représentations de dimension finie de  $G_\infty$ . Pour l'énoncer, on doit d'abord définir la notion de  $\varphi$ -module étale sur  $F_0$  : il s'agit de la donnée d'un espace vectoriel  $M$  de dimension finie sur  $F_0$  muni d'une application  $\varphi_M : M \rightarrow M$  semi-linéaire par rapport au Frobenius sur  $F_0$  (défini comme l'élévation à la puissance  $p$ ), et dont l'image contient une base de  $M$ . Étant donné un  $\varphi$ -module étale  $M$  sur  $F_0$ , il est souvent commode de considérer le linéarisé de  $\varphi_M$  défini comme l'application  $\text{id} \otimes \varphi_M : F_0 \otimes_{\varphi, F_0} M \rightarrow M$ . On a alors affaire à une application  $F_0$ -linéaire, et la condition selon laquelle l'image de  $\varphi_M$  contient une base de  $M$  se traduit en disant que  $\text{id} \otimes \varphi_M$  est un isomorphisme. Si  $T$  est une représentation de  $G_\infty$ , alors  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_\infty]}(T, F_0^{\text{sep}})$  est naturellement muni d'un endomorphisme  $\varphi$  déduit du Frobenius usuel sur  $F_0^{\text{sep}}$ , et il est facile de vérifier que c'est en fait un  $\varphi$ -module étale sur  $F_0$ .

**Théorème 1.6.** *Les foncteurs suivants sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre :*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{F}_p\text{-représentations de} \\ \text{dimension finie de } G_\infty \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{l} \varphi\text{-modules étales sur } F_0 \end{array} \right\} \\ T & \mapsto & \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_\infty]}(T, F_0^{\text{sep}}) \\ \text{Hom}_{F_0, \varphi}(M, F_0^{\text{sep}}) & \leftarrow & M \end{array}$$

où  $\text{Hom}_{F_0, \varphi}$  signifie que l'on considère les morphismes  $F_0$ -linéaires commutant à l'action de  $\varphi$  (celui-ci agissant par l'élévation à la puissance  $p$  sur  $F_0^{\text{sep}}$ ).

*Démonstration.* Voir proposition A.1.2.6 et remarque A.1.2.7 de [11]. □

### 1.2.2 Une équivalence de catégories

On pose à partir de maintenant pour simplifier les écritures  $L = \text{Frac } R$ . On note  $F_\tau$  le sous-corps de  $L$  formé des éléments fixes par  $H_\infty$  ; il contient manifestement  $(F_0^{\text{sep}})^{H_\infty}$  et donc en particulier  $F_0$ .

**Définition 1.7.** Un  $(\varphi, \tau)$ -module sur  $(F_0, F_\tau)$  est la donnée de

- un  $\varphi$ -module étale sur  $F_0$ , noté  $M$  ;
- un endomorphisme  $\tau$ -semi-linéaire  $\tau_M : F_\tau \otimes_{F_0} M \rightarrow F_\tau \otimes_{F_0} M$  qui commute à  $\varphi_{F_\tau} \otimes \varphi_M$  (où  $\varphi_{F_\tau}$  est le Frobenius usuel sur  $F_\tau$ ) et qui vérifie, pour tout  $g \in G_\infty/H_\infty$  tel que  $\chi_\tau(g) \in \mathbb{N}$ , la relation suivante :

$$\forall x \in M, \quad (g \otimes \text{id}) \circ \tau_M(x) = \tau_M^{\chi_\tau(g)}(x). \quad (1.4)$$

On est en droit de se demander d'où vient la différence entre la relation précédente et celle de la proposition 1.3 dans laquelle il apparaissait un terme supplémentaire dans le membre de droite. La raison en est — et nous attirons l'attention du lecteur sur ce point — que l'on ne demande à l'égalité (1.4) de n'être satisfaite que pour  $x \in M$  et non pas pour tout  $x \in F_\tau \otimes_{F_0} M$ . La semi-linéarité de  $\tau$  montre en réalité que l'identité (1.4) est équivalente à l'égalité suivante entre applications :

$$(g \otimes \text{id}) \circ \tau_M = \tau_M^{\chi_\tau(g)} \circ ((\tau^{-\chi_\tau(g)} g \tau) \otimes \text{id})$$

ce qui correspond bien à la formule de la proposition 1.3.

On montre comme dans la preuve de cette même proposition que pour tout  $(\varphi, \tau)$ -module  $M$ , les applications  $\tau_M^p$  forment une suite qui converge vers l'identité. On peut donc définir  $\tau_M^a$  pour  $a \in \mathbb{Z}_p$  et la relation (1.4) est alors satisfaite pour tout  $g \in G_\infty$  sans la restriction  $\chi_\tau(g) \in \mathbb{N}$ . Ceci montre en particulier que  $\tau_M^{-1}$  est défini, c'est-à-dire que  $\tau_M : F_\tau \otimes_{F_0} M \rightarrow F_\tau \otimes_{F_0} M$  est une bijection. Dans la suite, lorsque cela ne prêterait pas à confusion, on notera simplement  $\tau$  à la place de  $\tau_M$  et de même, on écrira souvent  $\varphi$  à la place de  $\varphi_M$ .

Le but de ce paragraphe est de démontrer que la catégorie des  $\mathbb{F}_p$ -représentations de dimension finie de  $G_K$  est équivalente à la catégorie des  $(\varphi, \tau)$ -modules sur  $(F_0, F_\tau)$ . À ce sujet, nous aimerions signaler au lecteur que Tavares Ribeiro s'est déjà intéressé, dans le premier chapitre de sa thèse [20], à des questions

semblables. Toutefois, le point de vue que nous adoptons est un peu différent et en fait plus proche des travaux de Liu ; notamment, nous avons constamment le souci de garder explicitement la trace du  $\varphi$ -module  $M$  décrivant l'action du sous-groupe  $G_\infty$  alors que celui-ci n'apparaît pas du tout dans les travaux de Tavares Ribeiro.

**Construction d'un foncteur** On considère, dans un premier temps, une  $\mathbb{F}_p$ -représentation  $T$  de  $G_K$  de dimension finie  $d$  et on note  $\mathcal{M}(T) = \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_\infty]}(T, F_0^{\text{sep}})$  le  $\varphi$ -module associé par le théorème 1.6. On sait que  $\mathcal{M}(T)$  est de dimension  $d$  sur  $F_0$ . Pour définir une structure de  $(\varphi, \tau)$ -module sur  $\mathcal{M}(T)$ , il reste à construire un automorphisme  $\tau$  de  $F_\tau \otimes_{F_0} \mathcal{M}(T)$ . On commence par un lemme qui donne une description alternative de cet espace.

**Lemme 1.8.** *L'application naturelle  $F_\tau \otimes_{F_0} \mathcal{M}(T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_\infty]}(T, L)$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Par la remarque 1.5, on sait que l'application  $L \otimes_{F_\tau} \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_\infty]}(T, L) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}_p}(T, L)$  est injective, et donc que l'espace  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_\infty]}(T, L)$  est de dimension au plus  $d$  sur  $F_\tau$ . Il suffit donc de montrer que le morphisme du lemme est injectif. Or, celui-ci s'écrit  $\beta \circ (F_\tau \otimes_{(F_0^{\text{sep}})^{H_\infty}} \alpha)$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les morphismes canoniques suivants :

$$\begin{aligned} \alpha : (F_0^{\text{sep}})^{H_\infty} \otimes_{F_0} \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_\infty]}(T, F_0^{\text{sep}}) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_\infty]}(T, F_0^{\text{sep}}) \\ \beta : F_\tau \otimes_{(F_0^{\text{sep}})^{H_\infty}} \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_\infty]}(T, F_0^{\text{sep}}) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_\infty]}(T, L). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont injectifs. Pour  $\alpha$ , cela résulte du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (F_0^{\text{sep}})^{H_\infty} \otimes_{F_0} \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_\infty]}(T, F_0^{\text{sep}}) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_\infty]}(T, F_0^{\text{sep}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_0^{\text{sep}} \otimes_{F_0} \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_\infty]}(T, F_0^{\text{sep}}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{F}_p}(T, F_0^{\text{sep}}) \end{array}$$

et de la proposition 1.4 qui affirme que la flèche du bas est un isomorphisme. On en vient maintenant à  $\beta$ . Il suffit de montrer que si  $f_1, \dots, f_n$  est une famille d'éléments de  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_\infty]}(T, F_0^{\text{sep}})$  qui est liée sur  $F_\tau$ , alors elle l'est déjà sur  $(F_0^{\text{sep}})^{H_\infty}$ . Soit  $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$  une relation de liaison avec tous les  $\lambda_i$  dans  $F_\tau$ . Puisque  $T$  est un ensemble fini, il existe un sous-groupe distingué d'indice fini  $H \subset H_\infty$  qui agit trivialement sur  $T$ , ce qui signifie que les fonctions  $f_i$  prennent leurs valeurs dans  $(F_0^{\text{sep}})^H$ . Les extensions  $L^H/F_\tau$  et  $(F_0^{\text{sep}})^H/(F_0^{\text{sep}})^{H_\infty}$  sont alors galoisiennes de groupes de Galois isomorphes à  $H_\infty/H$ . On considère une forme linéaire  $\ell : L^H \rightarrow (F_0^{\text{sep}})^H$  qui envoie  $\lambda_1$  sur un élément dont la trace sur  $(F_0^{\text{sep}})^{H_\infty}$  ne s'annule pas, et on définit une application  $\ell_{H_\infty} : L^H \rightarrow (F_0^{\text{sep}})^H$  en moyennant  $\ell$  comme suit :

$$\ell_{H_\infty}(x) = \sum_{h \in H/H_\infty} h \ell(h^{-1}x).$$

On vérifie sans difficulté que  $\ell_{H_\infty}$  est encore une forme linéaire. Elle est en outre  $H_\infty$ -équivariante, et donc applique  $F_\tau$  sur  $(F_0^{\text{sep}})^{H_\infty}$ . Par ailleurs, puisque  $\lambda_1$  est fixé par  $H_\infty$ , son image par  $\ell_{H_\infty}$  est égale à  $\text{tr}_{(F_0^{\text{sep}})^H/(F_0^{\text{sep}})^{H_\infty}}(\lambda_1)$ , et n'est donc pas nulle. Ainsi, en appliquant  $\ell_{H_\infty}$  à l'égalité  $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$ , on obtient une relation de liaison non triviale entre les  $f_i$  qui est à coefficients dans  $(F_0^{\text{sep}})^{H_\infty}$ , ce qui est bien ce que l'on cherchait.  $\square$

*Remarque 1.9.* La preuve que l'on vient de donner montre plus généralement que le lemme précédent vaut pour un sous-groupe fermé quelconque  $H$  de  $G_\infty$  et un sous-corps  $L$  de  $\text{Frac } R$  contenant  $F_0^{\text{sep}}$  et stable seulement par  $H$ .

Il n'est maintenant plus difficile de définir l'automorphisme  $\tau$ . À cette fin, on note que pour  $\sigma \in G_K$  et  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_\infty]}(T, L)$ , l'application  $g : x \mapsto \sigma f(\sigma^{-1}x)$  est encore  $H_\infty$ -équivariante; la formule précédente définit donc une action de  $G_K$  sur  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_\infty]}(T, L) = F_\tau \otimes_{F_0} \mathcal{M}(T)$  qui est, comme on le vérifie directement, semi-linéaire par rapport à la structure de  $F_\tau$ -espace vectoriel. De plus, pour cette action, le sous-groupe  $H_\infty$  agit trivialement (ce qui signifie que l'action se factorise par  $G_K/H_\infty$ ), tandis que le groupe  $G_\infty$ , de son côté, agit trivialement sur le sous-ensemble  $\mathcal{M}(T)$ . On définit enfin l'application  $\tau$  comme l'automorphisme de  $F_\tau \otimes_{F_0} \mathcal{M}(T)$  donné par l'action de  $\tau$ . Les remarques que l'on vient de faire, combinées au second point du lemme 1.2 assurent que l'on obtient bien comme ceci un  $(\varphi, \tau)$ -module dans le sens de la définition 1.7.

**Construction d'un quasi-inverse** On part à présent d'un  $(\varphi, \tau)$ -module  $M$  sur  $(F_0, F_\tau)$  et on cherche à lui associer une représentation  $\mathcal{T}(M)$  de  $G_K$  qui soit de dimension finie sur  $\mathbb{F}_p$ . Bien entendu, en tant que représentation de  $G_\infty$ ,  $\mathcal{T}(M)$  est la représentation associée au  $\varphi$ -module sous-jacent, i.e.  $\mathcal{T}(M) = \text{Hom}_{F_0, \varphi}(M, F_0^{\text{sep}})$ . Il reste donc à expliquer comment étendre cette action à  $G_K$  en utilisant l'automorphisme  $\tau$ . La clé est le lemme suivant.

**Lemme 1.10.** *L'application  $\mathcal{T}(M) = \text{Hom}_{F_0, \varphi}(M, F_0^{\text{sep}}) \rightarrow \text{Hom}_{F_\tau, \varphi}(F_\tau \otimes_{F_0} M, L)$  déduite de l'extension des scalaires de  $F_0$  à  $F_\tau$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* On fixe une base  $(e_1, \dots, e_d)$  de  $M$  et on appelle  $G$  l'unique matrice pour laquelle l'égalité  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)) = (e_1, \dots, e_d)G$  est vérifiée. Se donner un élément de  $\text{Hom}_{F_0, \varphi}(M, F_0^{\text{sep}})$  (resp. de  $\text{Hom}_{F_\tau, \varphi}(F_\tau \otimes_{F_0} M, L)$ ) revient à se donner les images de  $e_i$  qui sont des éléments  $x_i \in F_0^{\text{sep}}$  (resp.  $x_i \in L$ ) vérifiant le système d'équations  $(x_1^p, \dots, x_d^p) = (x_1, \dots, x_d)G$ . Or, un tel système a au plus  $p^d$  solutions dans n'importe quel corps, et on sait qu'il en a déjà ce nombre de  $F_0^{\text{sep}}$ . Toutes les solutions dans  $L$  sont donc dans  $F_0^{\text{sep}}$  et le lemme est démontré.  $\square$

Étant donné les conditions satisfaites par  $\tau$ , la proposition 1.3 s'applique et montre qu'il existe une unique action de  $G_K/H_\infty$  sur le produit tensoriel  $F_\tau \otimes_{F_0} M$  pour laquelle les éléments  $g \in G_\infty/H_\infty$  agissent par  $(g \otimes \text{id})$  et l'élément  $\tau$  agit via l'automorphisme  $\tau$ . En composant par la projection canonique  $G_K \rightarrow G_K/H_\infty$ , on obtient une action de  $G_K$  sur  $F_\tau \otimes_{F_0} M$ . Par ailleurs,  $G_K$  agit également sur  $L$  et donc sur l'espace  $\mathcal{T}(M) = \text{Hom}_{F_\tau, \varphi}(F_\tau \otimes_{F_0} M, L)$  via la formule usuelle  $\sigma \cdot f : x \mapsto \sigma f(\sigma^{-1}x)$ . La forme particulière de l'action de  $G_\infty$  sur  $F_\tau \otimes_{F_0} M$  montre immédiatement que l'action qu'on vient de définir sur  $\mathcal{T}(M)$  prolonge celle de  $G_\infty$ .

**Théorème 1.11.** *Les deux foncteurs  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{T}$  précédents induisent des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre entre la catégorie des  $\mathbb{F}_p$ -représentations de dimension finie de  $G_K$  et la catégorie des  $(\varphi, \tau)$ -modules sur  $(F_0, F_\tau)$ .*

*Démonstration.* On sait déjà, par le théorème 1.6, que les morphismes canoniques  $M \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{T}(M))$  et  $T \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{M}(T))$  sont des isomorphismes pour tout  $(\varphi, \tau)$ -module  $M$  sur  $(F_0, F_\tau)$  et toute  $\mathbb{F}_p$ -représentation  $T$  de dimension finie de  $G_K$ . Il ne reste donc qu'à vérifier que le premier commute à l'action de  $\tau$  tandis que le deuxième est  $G_K$ -équivariant, ce qui ne pose aucune difficulté.  $\square$

*Remarque 1.12.* En considérant non pas l'action de  $\tau$  mais celle de  $\tau^{p^s}$ , on obtient de la même façon une équivalence de catégories entre, d'une part, la catégorie des  $\mathbb{F}_p$ -représentations du groupe  $G_s$  et, d'autre part, la catégorie des  $(\varphi, \tau^{p^s})$ -modules sur  $(F_0, F_\tau)$  dont les objets sont la donnée de :

- un  $\varphi$ -module étale sur  $F_0$ , noté  $M$  ;
- un automorphisme  $\tau^{p^s}$ -semi-linéaire  $\tau_M^{(p^s)} : F_\tau \otimes_{F_0} M \rightarrow F_\tau \otimes_{F_0} M$  qui commute à  $\varphi$  et tel que, pour tout  $g \in G_\infty/H_\infty$

$$\forall x \in M, \quad (g \otimes \text{id}) \circ \tau_M^{(p^s)}(x) = (\tau_M^{(p^s)})^a(x)$$

où  $a$  est l'unique élément de  $\mathbb{Z}_p$  tel que  $\chi(g) \cdot [p^s]_{\chi(\tau)} = [a]_{\chi(\tau)}$ .

### 1.2.3 Quelques mots sur le corps $F_\tau$

Le corps  $F_\tau$  est important car c'est celui qui sert de base à l'action de  $\tau$  sur un  $(\varphi, \tau)$ -module. Il semble donc crucial de bien le comprendre. Or, malheureusement, comme nous allons le voir dans ce paragraphe, sa structure est loin d'être simple.

**Proposition 1.13.** *Soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $G_\infty$ . Alors  $L^H$  est l'adhérence (dans  $L$ ) du perfectisé de  $(F_0^{\text{sep}})^H$ .*

*De plus, si on note  $\mathfrak{m}_R$  l'idéal maximal de  $R$ , la projection canonique induit, pour tout  $x \in R$ , un morphisme surjectif  $R^H \rightarrow (R/\mathfrak{m}_R)^H$ .*

*Démonstration.* La première partie de la proposition s'obtient en mettant ensemble les deux ingrédients suivants : le corps  $F_0^{\text{sep}}$  est dense dans  $L$  (ce qui est contenu dans la théorie du corps des normes) et le théorème principal de [1] qui décrit les points fixes, sous l'action du groupe de Galois, du complété de la clôture algébrique d'un corps local. La seconde assertion se démontre de manière analogue en utilisant, à la place du théorème principal de [1], la proposition 2 de ce même article (p. 424), qui est un peu plus précise.  $\square$

La proposition précédente s'applique en particulier avec le groupe  $H_\infty$  et montre donc que  $F_\tau$  s'identifie à l'adhérence du perfectisé du corps  $F_\infty = (F_0^{\text{sep}})^{H_\infty}$ . L'élément (important)  $\eta = 1 - \underline{\varepsilon} \in R$ , qui est clairement stable par l'action de  $H_\infty$ , doit donc s'écrire comme une série faisant intervenir certains éléments du perfectisé de  $F_\infty$ . Cependant, obtenir une telle écriture de façon explicite ne semble pas du tout facile. Voici une autre façon d'appréhender  $F_\tau$  (qui montre encore que décrire les éléments de ce corps est une question délicate). Pour tout entier  $m$ , on note  $H_m = \text{Gal}(\bar{K}/K_\infty(\zeta^{p^m}))$  et  $F_m = (F_0^{\text{sep}})^{H_m}$ . Comme  $H_m$  est d'indice fini dans  $G_\infty$ , l'extension  $F_m/F_0$  est finie. La réunion de ces extensions, que l'on note  $F_{\text{alg}}$ , définit donc un sous-corps de  $F_\tau$  qui est algébrique sur  $F_0$ . Par ailleurs, on peut considérer le morphisme  $\iota : k[[X, Y]] \rightarrow F_\tau$  obtenu en envoyant  $X$  sur  $u$  et  $Y$  sur  $\eta$ . La proposition 1.14 ci-après montre que le corps des fractions de l'image de  $\iota$ , noté  $k((u, \eta))$ , définit un sous-corps de  $F_\tau$  qui est isomorphe à un corps de séries formelles en deux variables. C'est donc en particulier une extension purement transcendante de  $F_0$ . Les sous-corps  $F_{\text{alg}}$  et  $k((u, \eta))$  apparaissent donc, d'un point de vue algébrique, comme deux constituants « orthogonaux » de  $F_\tau$ . D'un point de vue topologique, par contre, ces corps semblent s'entremêler de façon subtile.

**Proposition 1.14.** *Le morphisme  $\iota : k[[X, Y]] \rightarrow R$ ,  $X \mapsto u$ ,  $Y \mapsto \eta$  est injectif.*

*Démonstration.* Soit une série formelle  $F \in k[[X, Y]]$  telle que  $F(u, \eta) = 0$  dans  $R$ . En faisant agir le groupe de Galois  $G_K$ , on obtient l'annulation de  $F(u(1 + \eta)^{c(g)}, (1 + \eta)^{x(g)} - 1)$  pour tout  $g \in G_K$ . Il en résulte les égalités :

$$F(u + u\eta^{p^n}, \eta) = 0 \quad \text{et} \quad F(u, \eta + \eta^{p^n} + \eta^{p^{n+1}}) = 0$$

pour tout entier  $n$  suffisamment grand. Pour tout entier  $i$ , soit  $\partial_X^{[i]}$  l'application  $\frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial X^i}$  agissant sur  $k[[X, Y]]$  (qui est bien définie). On dispose de la formule de Taylor suivante :

$$F(u + u\eta^{p^n}, \eta) = F(u, \eta) + u\eta^{p^n} \partial_X^{[1]} F(u, \eta) + \cdots + u^i \eta^{ip^n} \partial_X^{[i]} F(u, \eta) + \cdots \quad (1.5)$$

grâce à laquelle on déduit, à partir des annulations précédemment citées, que  $v_R(\partial_X^{[1]} F(u, \eta)) \geq \frac{ep^{n+1}}{p-1}$ . Comme ceci est vrai pour tout  $n$ , il vient  $\partial_X^{[1]} F(u, \eta) = 0$ . Sachant cela, l'égalité (1.5) implique maintenant que  $v_R(\partial_X^{[2]} F(u, \eta)) \geq \frac{ep^{n+1}}{p-1}$ , et donc que  $\partial_X^{[2]} F(u, \eta)$  s'annule lui aussi. Par récurrence, on démontre de la même manière que  $\partial_X^{[i]} F(u, \eta) = 0$  pour tout  $i$ . Un raisonnement analogue à partir de  $F(u, \eta + \eta^{p^n} + \eta^{p^{n+1}}) = 0$  montre que  $\partial_Y^{[j]} F(u, \eta) = 0$  (avec des notations évidentes) pour tout  $j$ . En appliquant cela non pas à la série  $F$  mais à  $\partial_X^{[i]} F$ , on obtient même  $\partial_Y^{[j]} \partial_X^{[i]} F(u, \eta) = 0$  pour tous  $i$  et  $j$ . En réduisant cette dernière égalité dans  $\bar{k}$ , on s'aperçoit alors que le coefficient de  $X^i Y^j$  dans la série formelle  $F$  s'annule lui aussi. Il en résulte que la série  $F$  est, elle-même, nulle.  $\square$

Terminons ce paragraphe en revenant un instant sur les corps  $F_m$ . L'extension  $F_1/F_0$  se comprend assez bien, et on sait même la décrire complètement lorsque le corps  $K$  est absolument non ramifié (i.e. si  $e = 1$ ). En effet, dans ce cas, une uniformisante de  $K(\zeta_p)$  est donnée par une racine  $(p-1)$ -ième de  $-p$ , que l'on note  $\varpi$ . Si  $\lambda$  désigne un élément de  $k$  tel que  $p \equiv -\pi\lambda \pmod{p^2}$ , la suite d'éléments de  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  suivante :

$$\left( \frac{1}{\lambda^{1/p^n}} \right)^{1+p+\cdots+p^{n-1}} \cdot \left( \frac{\varpi}{\pi_n^{1+p+\cdots+p^{n-1}}} \pmod{p} \right)$$

définit un élément  $v$  de  $R$ , qui appartient manifestement à  $F_1$ . Par ailleurs, un calcul immédiat montre que  $v^{p-1} = \lambda u$ . Comme  $F_1$  est de degré  $p-1$  sur  $F_0$ , il s'ensuit que  $F_1 = F_0[v] = F_0[\sqrt[p-1]{\lambda u}]$ . Lorsque  $e > 1$ , l'extension  $F_1/F_0$  est encore totalement et modérément ramifiée, et son degré est égal à celui de l'extension  $K(\zeta_p)/K$ . Par contre, dès que  $m \geq 1$ , il semble bien plus difficile de comprendre l'extension  $F_{m+1}/F_m$ . On sait néanmoins qu'elle est soit triviale, soit de degré  $p$ . D'après la théorie d'Artin-Schreier, dans le deuxième cas, elle s'écrit comme le corps de rupture d'un polynôme de la forme  $X^p - X - a_m$  avec  $a_m \in F_m$ . L'étude de la ramification sauvage de  $F_{m+1}/F_m$  permet d'accéder à la valuation de  $a_m$ , mais ne permet pas de répondre à la question plus générale suivante qui nous paraît intéressante.

**Question 1.15.** *Est-il possible, peut-être seulement sous l'hypothèse  $e = 1$ , de décrire explicitement un élément  $a_m \in F_m$  tel que  $F_{m+1}$  soit le corps de rupture sur  $F_m$  du polynôme  $X^p - X - a_m$  ?*

*Plus généralement étant donné deux entiers  $m$  et  $m'$  avec  $1 \leq m < m'$ , peut-on décrire l'extension  $F_{m'}/F_m$  en termes d'extensions d'Artin-Schreier-Witt ?*

Comme me l'a signalé Berger, la compatibilité entre corps des normes et corps de classe (démontrée dans [14], §3) semble *a priori* une bonne piste pour étudier ce problème. Les calculs restent, malgré tout, encore à faire.

### 1.2.4 Une variante déperfectisée

Le théorème 1.11 que l'on a démontré précédemment reste valable — et la démonstration est identique — si le corps  $L$  est remplacé par  $L_{\text{np}} = k((u, \eta))^{\text{sep}}$  (la clôture séparable de  $k((u, \eta))$  dans  $\text{Frac } R$ ). (Dans la notation, « np » signifie « non parfait ».) En particulier, si l'on pose  $F_{\tau, \text{np}} = L_{\text{np}}^{H_\infty}$ , on a une équivalence de catégories entre la catégorie des  $\mathbb{F}_p$ -représentations galoisiennes de  $G_K$  et la catégorie des  $(\varphi, \tau)$ -modules sur  $(F_0, F_{\tau, \text{np}})$ .

De surcroît, dans certains cas, le calcul des points fixes de  $L_{\text{np}}$  sous l'action de sous-groupes de  $G_\infty$  est plus simple, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 1.16.** *Si  $H$  est un sous-groupe d'indice fini de  $G_\infty$ , alors  $L_{\text{np}}^H = (F_0^{\text{sep}})^H$ .*

*Démonstration.* Étant donné que  $F_0 = k((u))$  est inclus dans  $k((u, \eta))$ , on a clairement  $(F_0^{\text{sep}})^H \subset L_{\text{np}}^H$ . Pour démontrer l'inclusion réciproque, on considère un élément  $x \in L_{\text{np}}^H$ . Comme  $x$  est stable par l'action de  $H$ , son polynôme minimal sur  $k((u, \eta))$  est à coefficients dans  $k((u, \eta))^H$ . Soit  $v$  une uniformisante de  $(F_0^{\text{sep}})^H$  de façon à ce que  $(F_0^{\text{sep}})^H = k((v))$ . On a alors  $k((u, \eta)) \subset k((v, \eta)) \subset k((v))((\eta))$  et  $H$  agit encore sur ce dernier espace en fixant  $v$  et en envoyant  $\eta$  sur  $(1 + \eta)^{\chi(\cdot)} - 1$ . Étant donné que  $H$  est d'indice fini dans  $G_\infty$ , son image par le caractère cyclotomique  $\chi$  n'est pas triviale et on a donc  $k((v))((\eta))^H = k((v))$ . On en déduit que  $k((u, \eta))^H = k((v))^H = F_0$  et, donc, que le polynôme minimal de  $x$  est à coefficients dans  $F_0$ , d'où on déduit que  $x$  est élément de  $F_0^{\text{sep}}$ . Comme  $x$  est en outre fixe par  $H$ , on a bien  $x \in (F_0^{\text{sep}})^H$ .  $\square$

On prendra garde au fait que, dans la proposition ci-dessus, l'hypothèse « d'indice fini » est essentielle. En particulier, la conclusion de la proposition ne vaut malheureusement pas si  $H = H_\infty$  (qui est pourtant le cas qui nous intéresse le plus). Il est d'ailleurs facile de s'en convaincre puisque l'élément  $\eta$  appartient manifestement à  $L_{\text{np}}^{H_\infty}$ , sans pour autant être dans  $(F_0^{\text{sep}})^{H_\infty}$  car, comme cela a été vu, il n'est pas algébrique sur  $F_0$ .

*Remarque 1.17.* De la même façon, on peut, à la place de  $L$  ou de  $L_{\text{np}}$ , utiliser des versions partiellement déperfectisées comme le corps  $L_{u\text{-np}} = k((u, \eta^{1/p^\infty}))$  ou  $L_{\eta\text{-np}} = k((u^{1/p^\infty}, \eta))$ . Le cas de  $L_{u\text{-np}}$  sera utile dans la suite.

## 1.3 Relèvement modulo $p^n$ et en caractéristique nulle

Le théorème 1 de l'introduction se déduit enfin du théorème 1.11 pour  $L = F_\infty$  à l'aide d'arguments classiques de dévissage. Ce sont ces arguments que nous nous proposons de présenter dans cette partie. Afin surtout de mettre en place les notations, nous commençons par rappeler brièvement comment ceux-ci fonctionnent dans le cas classique des  $\varphi$ -modules et des représentations de  $G_\infty$ .

### 1.3.1 La théorie de Fontaine modulo $p^n$ et en caractéristique nulle

L'idée de base consiste à remplacer l'anneau  $R$  par l'anneau des vecteurs de Witt  $W(\text{Frac } R)$ ; c'est naturellement une  $W$ -algèbre munie d'une action de  $G_K$ . L'anneau  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  défini dans l'introduction par, rappelons-le :

$$\mathcal{E}^{\text{int}} = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i u^i \mid a_i \in W, \lim_{i \rightarrow -\infty} a_i = 0 \right\}$$

se plonge dans  $W(\text{Frac } R)$  en envoyant  $u$  sur le représentant de Teichmüller  $[\pi]$ . Muni de la valuation  $p$ -adique,  $v_{\mathcal{E}}(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i u^i) = \min_{i \in \mathbb{Z}} v_p(a_i)$ ,  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  est un anneau de valuation discrète qui admet  $F_0$  pour corps résiduel. On note  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{ur}}$  l'unique sous-algèbre étale (infinie) de  $W(\text{Frac } R)$  ayant pour corps résiduel  $F_0^{\text{sep}} \subset \text{Frac } R$ . Si l'on pose  $\mathcal{E} = \text{Frac } \mathcal{E}^{\text{int}}$  et  $\mathcal{E}^{\text{ur}} = \text{Frac } \mathcal{E}^{\text{int}, \text{ur}}$ , le groupe de Galois de l'extension  $\mathcal{E}^{\text{ur}}/\mathcal{E}$  s'identifie à celui de l'extension résiduelle  $F_0^{\text{sep}}/F_0$  et donc finalement à  $G_\infty$ . L'anneau  $W(\text{Frac } R)[1/p]$  est naturellement muni d'un opérateur de Frobenius et celui-ci définit par restriction des endomorphismes de  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ ,  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{ur}}$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}^{\text{ur}}$ . Sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ , par exemple, on voit aisément qu'il agit en appliquant le Frobenius traditionnel

aux coefficients et en envoyant  $u$  sur  $u^p$ . On définit un  $\varphi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  (resp. sur  $\mathcal{E}$ ) comme la donnée d'un  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ -module de type fini (resp. d'un  $\mathcal{E}$ -espace vectoriel de dimension finie)  $M$  munie d'une application  $\varphi : M \rightarrow M$  semi-linéaire par rapport au Frobenius et dont l'image engendre  $M$ .

**Théorème 1.18.** *Les foncteurs suivants sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre :*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Q}_p\text{-représentations de} \\ \text{dimension finie de } G_\infty \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \varphi\text{-modules étales sur } \mathcal{E} \right\} \\ T & \mapsto & \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_\infty]}(T, \mathcal{E}^{\text{ur}}) \\ \text{Hom}_{\mathcal{E}, \varphi}(M, \mathcal{E}^{\text{ur}}) & \leftarrow & M \end{array}$$

On dispose d'énoncés analogues pour les  $\mathbb{Z}_p$ -représentations libres d'une part, et annulées par  $p^n$  d'autre part, que nous laissons au lecteur le soin d'écrire. On fait remarquer quand même qu'afin d'obtenir ces énoncés, il convient de remplacer l'anneau de périodes  $\mathcal{E}^{\text{ur}}$  par  $\mathcal{E}^{\text{int,ur}}$  et  $\mathcal{E}^{\text{int,ur}}/p^n \mathcal{E}^{\text{int,ur}}$  respectivement. On peut également écrire une équivalence de catégories mettant en jeu à gauche la catégorie de toutes les  $\mathbb{Z}_p$ -représentations annulées par une puissance de  $p$  (non précisée); dans le cas, l'anneau de périodes  $\mathcal{E}^{\text{ur}}$  doit être remplacé par le produit tensoriel  $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{E}^{\text{int,ur}}$  (qui n'est pas un anneau, mais seulement un  $\mathcal{E}^{\text{int,ur}}$ -module) ou, ce qui revient au même, par le quotient  $\mathcal{E}^{\text{ur}}/\mathcal{E}^{\text{int,ur}}$ .

### 1.3.2 Définition générale des $(\varphi, \tau)$ -modules

On pose  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}} = W(F_\tau)$  et  $\mathcal{E}_\tau = \text{Frac } \mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$ . Le corps  $F_\tau$  étant parfait, la valuation  $p$ -adique fait de  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  un anneau de valuation discrète, complet, dont le corps résiduel s'identifie à  $F_\tau$ . En outre,  $\mathcal{E}_\tau$  s'obtient à partir de  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  simplement en inversant  $p$ . Tous les anneaux que l'on vient de définir sont munis d'un endomorphisme de Frobenius que l'on note  $\varphi$  ou  $\varphi_A$  ( $A$  étant l'anneau sur lequel le Frobenius agit) dans les cas où il sera important de le préciser. La définition des  $(\varphi, \tau)$ -modules est désormais la même qu'en caractéristique  $p$  (voir définition 1.7) à part que les anneaux de base sont ceux que l'on vient de définir. On la redonne ci-dessous pour plus de clarté.

**Définition 1.19.** Un  $(\varphi, \tau)$ -module sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$  (resp.  $(\mathcal{E}, \mathcal{E}_\tau)$ ) est la donnée de

- un  $\varphi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  (resp. sur  $\mathcal{E}$ ), noté  $M$ ;
- un endomorphisme  $\tau$ -semi-linéaire  $\tau_M : \mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M \rightarrow \mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M$  qui commute à  $\varphi_{\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}} \otimes \varphi_M$  et vérifie, pour tout  $g \in G_\infty/H_\infty$  tel que  $\chi_\tau(g) \in \mathbb{N}$ , la relation suivante :

$$\forall x \in M, \quad (g \otimes \text{id}) \circ \tau_M(x) = \tau_M^{\chi_\tau(g)}(x). \quad (1.6)$$

On souhaite à présent démontrer le théorème 1 de l'introduction, c'est-à-dire que les catégories de  $(\varphi, \tau)$ -modules sont équivalentes aux catégories correspondantes de représentations galoisiennes. L'étape essentielle pour cela consiste à étendre les lemmes 1.8 et 1.10 (qui constituaient la clé de la démonstration dans le cas de caractéristique  $p$ ) à la nouvelle situation relevée. À partir de maintenant, on supposera toujours implicitement que les  $\mathbb{Q}_p$ -représentations (resp.  $\mathbb{Z}_p$ -représentations) considérées sont de dimension finie sur  $\mathbb{Q}_p$  (resp. de type fini comme  $\mathbb{Z}_p$ -module). Si  $T$  est une telle représentation du groupe  $G_\infty$ , on note  $\mathcal{M}(T)$  le  $\varphi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  ou sur  $\mathcal{E}$  qui lui est associé par la théorie de Fontaine. De même, si  $M$  est un  $\varphi$ -module étale défini sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  ou sur  $\mathcal{E}$ , on note  $\mathcal{T}(M)$  la représentation  $p$ -adique qui lui correspond.

**Lemme 1.20.** *Pour toute  $\mathbb{Z}_p$ -représentation de torsion (resp.  $\mathbb{Z}_p$ -représentation libre, resp.  $\mathbb{Q}_p$ -représentation)  $T$  de  $G_\infty$ , l'application naturelle*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} \mathcal{M}(T) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_\infty]}(T, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(L)) \\ (\text{resp. } \mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} \mathcal{M}(T) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_\infty]}(T, W(L)), \\ \text{resp. } \mathcal{E}_\tau \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{M}(T) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p[H_\infty]}(T, W(L)[1/p])) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Pour tout  $\varphi$ -module étale  $M$  défini sur  $\mathcal{O}_\mathcal{E}$  et de torsion (resp. défini sur  $\mathcal{O}_\mathcal{E}$  et libre, resp. défini sur  $\mathcal{E}$ ), l'application naturelle

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(M) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}, \varphi}(\mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(L)) \\ (\text{resp. } \mathcal{T}(M) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}, \varphi}(\mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M, W(L)), \\ \text{resp. } \mathcal{T}(M) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{E}_\tau, \varphi}(\mathcal{E}_\tau \otimes_{\mathcal{E}} M, W(L)[1/p])) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* On ne démontre que la première partie du lemme, la seconde étant totalement analogue. On prouve tout d'abord le résultat lorsque  $T$  est une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation annihilée par  $p^n$ . On raisonne par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , le résultat à démontrer est exactement l'assertion du lemme 1.8 ; il n'y a donc plus rien à faire. Pour passer de  $n$  à  $n + 1$ , on considère  $T$  une représentation annihilée par  $p^{n+1}$ . Elle s'insère dans la suite exacte  $0 \rightarrow pT \rightarrow T \rightarrow T/pT \rightarrow 0$  qui donne naissance au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} \mathcal{M}(T/pT) & \longrightarrow & \mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} \mathcal{M}(T) & \longrightarrow & \mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} \mathcal{M}(pT) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_\infty]}(T/pT, CW(L)) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_\infty]}(T, CW(L)) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_\infty]}(pT, CW(L)) \end{array}$$

où  $CW(L) = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(L)$ . La ligne du haut est exacte car, d'une part, le foncteur  $\mathcal{M}$  l'est et, d'autre part,  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  est plat sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ . Les flèches horizontales de gauche et de droite sont des isomorphismes par hypothèse de récurrence, et finalement la ligne du bas est exacte par exactitude à gauche du foncteur Hom. Une chasse au diagramme montre alors que la flèche verticale centrale est aussi un isomorphisme.

Le cas où  $T$  est une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation quelconque (toujours supposée de type fini comme  $\mathbb{Z}_p$ -module) s'obtient alors par passage à la limite, tandis que celui où  $T$  est une  $\mathbb{Q}_p$ -représentation s'en déduit en inversant  $p$ .  $\square$

Il nous reste à définir des foncteurs dans les deux sens entre la catégorie des  $\mathbb{Z}_p$ -représentations (resp.  $\mathbb{Q}_p$ -représentations) de  $G_K$  et celle des  $(\varphi, \tau)$ -modules sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$  (resp. sur  $(\mathcal{E}, \mathcal{E}_\tau)$ ) puis à montrer que ceux-ci réalisent des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre. Pour cela, à la lumière du lemme précédent, il suffit de reprendre presque *verbatim* les constructions du §1.2.2, ce que nous laissons en exercice au lecteur. On réécrit toutefois explicitement les deux propriétés essentielles qui façonnent la construction de ces foncteurs : *primo*, le  $\varphi$ -module sous-jacent au  $(\varphi, \tau)$ -module associé à une représentation  $T$  est  $\mathcal{M}(T)$  et *secundo*, dans le cas où  $T$  est définie sur  $\mathbb{Z}_p$  par exemple, l'action de  $\tau$  sur  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} \mathcal{M}(T)$  provient *via* le lemme 1.20 de son action naturelle sur l'espace  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_\infty]}(T, W(L))$ .

### 1.3.3 Variante déperfectisée

De même que, comme nous l'avons expliqué au §1.2.4, il était possible en caractéristique  $p$  de remplacer le corps  $L$  par le corps plus petit  $L_{\text{np}} = k((u, \eta))^{\text{sep}}$ , on peut, dans la situation relevée considérée ici, remplacer  $W(L)$  par un anneau plus petit qui n'est pas parfait. Pour construire ce remplaçant, on définit en premier lieu l'anneau  $\mathcal{F}_{\text{np}}^{\text{int}}$  comme le complété  $p$ -adique du localisé de  $W[[u, \eta]]$  en l'idéal premier  $p$  (cet idéal est bien premier car le quotient  $W[[u, \eta]]/pW[[u, \eta]]$  s'identifie à  $k[[u, \eta]]$  qui est manifestement intègre). Clairement,  $\mathcal{F}_{\text{np}}^{\text{int}}$  est un anneau de Cohen de  $k((u, \eta))$ . On définit alors  $\mathcal{F}_{\text{np}}^{\text{int, sep}}$  comme le complété  $p$ -adique de l'unique extension étale infinie de  $\mathcal{F}_{\text{np}}^{\text{int}}$  incluse dans  $W(L)$  dont le corps résiduel s'identifie à  $L_{\text{np}}$  ; c'est notre substitut à  $W(L)$ . On pose  $\mathcal{E}_{\text{np}, \tau}^{\text{int}} = (\mathcal{F}_{\text{np}}^{\text{int, sep}})^{H_\infty}$  et  $\mathcal{E}_{\text{np}, \tau} = \mathcal{E}_{\text{np}, \tau}^{\text{int}}[1/p] = \text{Frac } \mathcal{E}_{\text{np}, \tau}^{\text{int}}$ .

Les arguments du §1.3.2 se généralisent directement à cette nouvelle situation ; on en déduit que le théorème 1 de l'introduction est encore valable si on remplace  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  et  $\mathcal{E}_\tau$  par  $\mathcal{E}_{\text{np}, \tau}^{\text{int}}$  et  $\mathcal{E}_{\text{np}, \tau}$  respectivement. En d'autres termes, l'opérateur  $\tau$  n'est pas uniquement défini sur  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  (resp. sur  $\mathcal{E}_\tau$ ) mais sur l'anneau plus petit  $\mathcal{E}_{\text{np}, \tau}^{\text{int}}$  (resp.  $\mathcal{E}_{\text{np}, \tau}$ ).

De la même façon qu'au §1.2.4, on peut aussi introduire des variantes partiellement déperfectisées de  $W(L)$ ,  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  et  $\mathcal{E}_\tau$ . Par exemple, en autorisant par exemple les racines  $p^n$ -ièmes de  $\eta$  (mais pas celles de  $u$ ), on obtient par comme ceci les anneaux  $\mathcal{F}_{u\text{-np}}^{\text{int}}$ ,  $\mathcal{F}_{u\text{-np}}^{\text{int, sep}}$ ,  $\mathcal{E}_{u\text{-np}, \tau}^{\text{int}}$  et  $\mathcal{E}_{u\text{-np}, \tau}$  qui joueront un rôle dans la suite de cet article (voir la démonstration de la proposition 2.22).

### 1.3.4 Deux exemples

Le premier exemple que nous aimerions présenter est celui d'une représentation  $T$  (définie au choix sur  $\mathbb{F}_p$ ,  $\mathbb{Z}_p$  ou  $\mathbb{Q}_p$ ) dont la restriction au sous-groupe  $G_\infty$  est triviale, c'est-à-dire dont le  $\varphi$ -module correspondant est trivial. Cette hypothèse est en réalité très restrictive car, si l'action du sous-groupe  $G_\infty$  est triviale, il en est nécessairement de même de tous ses conjugués. Or, si  $s$  désigne le plus grand entier pour lequel

le corps  $K$  admet une racine primitive  $p^s$ -ième de l'unité, les conjugués de  $G_\infty$  engendrent ensemble le sous-groupe (distingué) d'indice fini  $G_s$ . En particulier, si  $K$  ne contient pas de racine primitive  $p$ -ième de l'unité (par exemple si son indice de ramification absolu  $e$  est strictement plus petit que  $p - 1$ ), une représentation de  $G_K$ , dont la restriction à  $G_\infty$  est triviale, est, elle-même, triviale. Dans le cas général, l'action se factorise par le quotient  $G_K/G_s$  qui est un groupe cyclique de cardinal  $p^s$  engendré par l'image de  $\tau$ .

Autrement dit, se donner une représentation  $T$  dont la restriction à  $G_\infty$  est triviale, revient à se donner un automorphisme  $\tau$  de  $T$  d'ordre  $p^s$ . Le  $(\varphi, \tau)$ -module  $M$  associé à  $T$  se décrit alors comme suit (la vérification est immédiate et laissée au lecteur) : on a  $M = \mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$  et l'automorphisme  $\tau_M$  sur  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M = \mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$  est  $\tau \otimes \tau$ .

Venons-en maintenant à notre second exemple, qui est celui du caractère cyclotomique, ou plus généralement d'une de ses puissances. En réalité, cet exemple a été traité par Liu dans son article [19] (voir exemple 3.2.3) au cours de son étude des réseaux dans les représentations semi-stables. Comme le calcul n'est pas évident et demande de connaître un peu de théorie de Hodge  $p$ -adique, nous préférons nous contenter ici de donner le résultat en renvoyant à *loc. cit.* pour la preuve.

Soit  $\mathfrak{t} \in W(R)$  un élément non divisible par  $p$  vérifiant  $\varphi(\mathfrak{t}) = c^{-1}E(u)\mathfrak{t}$  où  $c = \frac{E(0)}{p}$  est un élément inversible dans  $\mathbb{Z}_p$  (on rappelle, à toutes fins utiles, que  $E(u)$  désigne le polynôme minimal sur  $W[1/p]$  de l'uniformisante  $\pi$  choisie, et que  $c$ 'est donc un polynôme d'Eisenstein). L'existence d'un tel élément  $\mathfrak{t}$  découle du calcul de *loc. cit.* mais peut aussi se voir comme la conséquence du lemme 2.7 qui sera démontré dans la suite<sup>4</sup>. Avec ces notations, le  $(\varphi, \tau)$ -module associé à la représentation  $\mathbb{Z}_p(n)$  (avec  $n \in \mathbb{Z}$ ), c'est-à-dire la représentation  $T = \mathbb{Z}_p w$  où l'action de Galois est donnée par  $gw = \chi(g)^n w$ , est engendré par la fonction  $f : T \rightarrow \mathcal{E}^{\text{int,ur}}, w \mapsto \mathfrak{t}^n$ . Concrètement, il est décrit par les formules suivantes :

$$M = \mathcal{E}^{\text{int}} \cdot f \quad ; \quad \varphi(f) = c^{-n}E(u)^n \cdot f \quad \text{et} \quad \tau(f) = \left(\frac{\tau(\mathfrak{t})}{\mathfrak{t}}\right)^n \cdot f.$$

Les éléments  $\mathfrak{t}$ ,  $\tau(\mathfrak{t})$  et  $E(u)$  sont inversibles dans  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ , de sorte que les égalités précédentes ont bien un sens, même lorsque  $n$  est négatif. Les  $(\varphi, \tau)$ -modules correspondant à  $\mathbb{F}_p(n)$  et  $\mathbb{Q}_p(n)$  sont donnés par des formules analogues.

## 2 Réseaux dans les $(\varphi, \tau)$ -modules

Nous avons démontré dans la section précédente que la catégorie des  $\mathbb{Z}_p$ -représentations galoisiennes de  $G_K$  est équivalente à celle des  $(\varphi, \tau)$ -modules sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$ . Ce résultat peut paraître satisfaisant, mais il se heurte néanmoins à un problème pratique important lié au fait que l'anneau  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  est difficile à manipuler concrètement. On peut certes écrire ses éléments comme des séries, mais celles-ci requièrent une infinité de variables et des conditions de convergence subtiles.

Dans cette partie, nous aimerions montrer en quoi l'introduction de réseaux à l'intérieur des  $(\varphi, \tau)$ -modules permet d'apporter des éléments de réponse au problème précédent. Nous commençons par introduire la notion de réseau dans les  $\varphi$ -modules étales dans le §2.1, puis montrons dans le §2.2 comment celle-ci peut être utilisée pour établir des bornes explicites portant sur la ramification des représentations galoisiennes. Forts de ces résultats préliminaires, nous en arrivons ensuite, dans le §2.3, au cœur de notre problème en introduisant la notion de  $(\varphi, \tau)$ -réseau puis en démontrant le théorème 2.25 qui donne des contraintes fortes sur la forme des éléments de  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  — et notamment de leur représentation sous forme de séries — qui interviennent dans l'expression de l'automorphisme  $\tau$  (par exemple sous forme matricielle dans le cas d'un module libre).

### 2.1 Réseaux dans les $\varphi$ -modules étales

#### 2.1.1 Définitions et rappels

Comme dans [13], on pose  $\mathfrak{S} = W[[u]]$ . Cet anneau se plonge naturellement dans  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  et dans  $W(R)$  en envoyant comme d'habitude  $u$  sur le représentant de Teichmüller de  $\pi$ . En particulier,  $\mathfrak{S}$  apparaît comme un sous-anneau de l'intersection  $\mathcal{E}^{\text{int}} \cap W(R)$ , et on démontre en fait facilement qu'il s'identifie à cette

4. Le même lemme assure également que la condition  $\varphi(\mathfrak{t}) = c^{-1}E(u)\mathfrak{t}$  détermine  $\mathfrak{t}$  à multiplication près par un élément inversible de  $\mathbb{Z}_p$ .

intersection. Il est clair par ailleurs que le Frobenius (agissant sur  $W(L)$  par exemple) stabilise  $\mathfrak{S}$ , et que ce dernier anneau est également stable par l'action de  $G_\infty$ .

**Définition 2.1.** Soit  $M$  un  $\varphi$ -module étale défini sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ . Un  $\varphi$ -réseau dans  $M$  est la donnée d'un sous- $\mathfrak{S}$ -module de type fini  $\mathfrak{M}$  de  $M$  qui est stable par  $\varphi$  et qui est tel que  $\mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} = M$ .

*Remarque 2.2.* Dans le cas où  $M$  est un module libre sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ , on se restreindra souvent aux  $\varphi$ -réseaux qui sont eux-même libres (de type fini et même rang) sur  $\mathfrak{S}$ . Ce n'est en fait pas une véritable restriction car il suit du théorème de structure des modules sur  $\mathfrak{S}$  (voir, par exemple, théorème 3.1, chap. 5 de [15] pour un énoncé de ce théorème) que si  $\mathfrak{M}$  est un  $\varphi$ -réseau quelconque dans  $M$ , alors  $(\mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{M}[1/p]$  est un  $\varphi$ -réseau libre.

Voici une autre définition importante qui est essentiellement due à Fontaine et qui, en un certain sens, mesure la complexité d'un réseau.

**Définition 2.3.** Soit  $\mathfrak{M}$  un  $\varphi$ -réseau à l'intérieur d'un  $\varphi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ . Soit encore  $U$  un élément de  $W(R)$  et  $h$  un nombre entier positif ou nul.

On dit que  $\mathfrak{M}$  est de hauteur divisant  $U$  (resp. de  $U$ -hauteur  $\leq h$  pour un certain entier  $h$ ) si le conoyau de l'application  $\text{id} \otimes \varphi : W(R) \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M} \rightarrow W(R) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  est annulé par  $U$  (resp.  $U^h$ )<sup>5</sup>.

Finalement, on dit que  $\mathfrak{M}$  est de  $U$ -hauteur finie s'il est de  $U$ -hauteur  $\leq h$  pour un certain entier  $h$ .

*Remarque 2.4.* La définition précédente de la hauteur a, en réalité, surtout un intérêt lorsque  $U \in \mathfrak{S}$ , auquel cas on peut se contenter de vérifier que le conoyau de  $\text{id} \otimes \varphi : \mathfrak{S} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$  est annulé par  $U$  (sans aller jusqu'à étendre les scalaires à  $W(R)$ ). Toutefois, lorsque, dans la suite, nous manipulerons les  $(\varphi, \tau)$ -réseaux, nous aurons besoin à plusieurs reprises de considérer des  $U \notin \mathfrak{S}$ , et c'est pourquoi nous avons préféré donner directement la définition générale précédente.

Dans le cas des  $\varphi$ -modules de  $p$ -torsion, on a le lemme suivant qui dénote un comportement exemplaire des réseaux.

**Lemme 2.5.** *Tout  $\varphi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  annulé par une puissance de  $p$  admet un  $\varphi$ -réseau.*

*Tout  $\varphi$ -réseau dans un  $\varphi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  qui est annulé par une puissance de  $p$  est de  $u$ -hauteur finie.*

*Démonstration.* La première assertion résulte de la remarque suivante qui découle directement de la définition de  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  : si  $\mathfrak{M}$  est un réseau quelconque dans un  $\varphi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  annulé par une puissance de  $p$ , alors il existe un entier  $n$  tel que  $u^n \mathfrak{M}$  soit stable par  $\varphi$ .

La seconde assertion, quant à elle, peut se voir comme une conséquence du théorème de classification des modules sur  $\mathfrak{S} = W[[u]]$ . En effet, étant donné un  $(\varphi, \tau)$ -réseau  $\mathfrak{M}$  comme dans la définition, le théorème en question assure que le conoyau de  $\text{id} \otimes \varphi : \mathfrak{S} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$  est de longueur finie comme  $\mathfrak{S}$ -module. Il suffit alors pour conclure de remarquer que  $u$  n'est pas inversible dans  $\mathfrak{S}$ .  $\square$

Les résultats du lemme précédent ne s'étendent pas au cas des  $\varphi$ -modules libres sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ . Dans le §2.1.2 ci-après, nous examinerons l'équivalent de la première partie du lemme. En ce qui concerne la deuxième partie du lemme, nous attirons l'attention du lecteur sur le fait trivial suivant : tout  $\varphi$ -réseau vivant dans un  $\varphi$ -module étale libre est de hauteur divisant  $U$  pour un certain  $U \in \mathfrak{S}$  (il suffit de prendre pour  $U$  le déterminant de  $\varphi$  agissant sur le réseau). Par contre, il n'est pas vrai que  $U$  peut toujours être choisi de la forme  $u^n$  pour un certain entier  $n$ .

### 2.1.2 Un critère pour l'existence de $\varphi$ -réseaux

Soit  $M$  un  $\varphi$ -réseau étale libre sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ . Soit  $T$  la  $\mathbb{Z}_p$ -représentation de  $G_\infty$  qui lui correspond. Les données  $T$  et  $M$  sont alors liées par la formule  $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_\infty]}(T, \mathcal{E}^{\text{int}, \text{ur}})$ . Une structure entière naturelle à l'intérieur de  $M$  (et donc un candidat potentiel pour être un réseau) est l'espace  $\mathfrak{M} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_\infty]}(T, \mathfrak{S}^{\text{ur}})$  où  $\mathfrak{S}^{\text{ur}} = W(R) \cap \mathcal{E}^{\text{int}, \text{ur}}$ .

**Proposition 2.6.** *En reprenant les notations précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *le sous-module  $\mathfrak{M}$  de  $M$  est un  $\varphi$ -réseau ;*

---

5. On notera en particulier que les locutions « de  $U$ -hauteur  $\leq 1$  » et « de hauteur divisant  $U$  » sont synonymes.

2. le  $\varphi$ -module  $M$  admet un  $\varphi$ -réseau qui est libre sur  $\mathfrak{S}$  ;
3. le  $\varphi$ -module  $M$  admet un  $\varphi$ -réseau.

*Démonstration.* Le lemme 2.1.10 de [13] montre que la première condition implique la deuxième. Comme cette dernière implique clairement la troisième, il suffit de montrer que la troisième condition implique la première. Soit  $\mathfrak{M}'$  un  $\varphi$ -réseau dans  $M$  (qui existe, par hypothèse). La première étape consiste à démontrer que  $\mathfrak{M}'$  est inclus dans  $\mathfrak{M}$ . On considère les éléments de  $\mathfrak{M}'$  comme des morphismes  $\mathbb{Z}_p$ -linéaires et  $G_\infty$ -équivariants de  $T$  dans  $\mathcal{E}^{\text{int,ur}}$ . Soit  $X$  le sous- $\mathfrak{S}$ -module de  $\mathcal{E}^{\text{int,ur}}$  engendré par les images des éléments de  $\mathfrak{M}'$ . Il est stable par  $\varphi$  (puisque  $\mathfrak{M}'$  l'est) et de type fini sur  $\mathfrak{S}$  (puisque  $\mathfrak{M}'$  l'est). On en déduit qu'il est inclus dans  $W(R)$ , ce qui est bien ce que l'on avait annoncé. La conclusion s'obtient maintenant facilement. En effet, de l'inclusion  $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ , on déduit que  $\mathcal{E}^{\text{int,ur}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  contient  $\mathcal{E}^{\text{int,ur}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}' = M$  et, par suite, que  $\mathfrak{M}$  est un  $\varphi$ -réseau de  $M$ .  $\square$

La proposition précédente permet en particulier de montrer que certaines représentations  $T$  correspondent à des  $\varphi$ -modules n'admettant pas de  $\varphi$ -réseau. C'est par exemple le cas de la représentation  $\mathbb{Z}_p(-1)$ , comme nous nous proposons de le vérifier pour conclure ce numéro. Soit  $w$  un générateur de  $\mathbb{Z}_p(-1)$ . D'après le deuxième exemple traité dans le §1.3.4, le  $\varphi$ -module associé  $M$  est engendré par la fonction  $f : \mathbb{Z}_p(-1) \rightarrow \mathcal{E}^{\text{int,ur}}$ ,  $w \mapsto V^{-1}$  où  $V$  vérifie l'équation  $\varphi(V) = c^{-1}E(u)V$  et où, dans cette dernière égalité,  $E(u)$  désigne le polynôme minimal de l'uniformisante  $\pi$  et  $c = \frac{E(0)}{p} \in \mathbb{Z}_p^\times$ . D'après la proposition 2.6, pour montrer que  $M$  n'admet pas de  $\varphi$ -réseau, il suffit de montrer qu'aucun élément non nul de  $M$  ne prend ses valeurs dans  $W(R)$ . Autrement dit, il suffit de montrer que  $\mathcal{E}^{\text{int}} \cap VW(R)$  est réduit à 0.

On pose  $\mathfrak{S}' = \mathcal{E}^{\text{int}} \cap VW(R)$ . De  $VW(R) \subset W(R)$ , on déduit facilement que  $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ . Il est clair par ailleurs que cette inclusion induit un morphisme injectif  $\mathfrak{S}'/p\mathfrak{S}' \rightarrow \mathfrak{S}/p\mathfrak{S} = k[[u]]$ . On en déduit que  $\mathfrak{S}'/p\mathfrak{S}'$  est un  $k[[u]]$ -module libre de rang  $\leq 1$ , et donc que  $\mathfrak{S}'$  est un  $\mathfrak{S}$ -module libre de rang  $\leq 1$ . Soit  $a$  un élément de  $\mathfrak{S}$ , éventuellement nul, qui engendre  $\mathfrak{S}'$ . D'après une variante du théorème de préparation de Weierstrass (voir, par exemple, théorème 2.1, chap. 5 de [15]), on peut supposer que  $a$  est un polynôme ; on le note à partir de maintenant  $A(u)$ . Soit  $A^\sigma$  le polynôme obtenu à partir de  $A$  en appliquant le Frobenius  $\sigma$  à chacun de ses coefficients. On a  $\varphi(A(u)) = A^\sigma(u^p)$ . D'autre part, on vérifie que le quotient  $\frac{\varphi(A(u))}{E(u)}$  appartient encore à  $\mathfrak{S}'$ . Il en résulte que  $A(u)E(u)$  divise  $A^\sigma(u^p)$  dans  $\mathfrak{S}$ . Les éléments de  $\mathfrak{S}$  définissant des séries convergentes sur le disque de centre 0 et de rayon 1, la divisibilité trouvée implique que le polynôme  $A^\sigma$  s'annule en  $\pi^p$ . Par la théorie des polygones de Newton, il en résulte que  $A$  s'annule en un élément de valuation  $p$ , à partir de quoi on trouve que  $A^\sigma$  admet une racine de valuation  $p^2$ . Par récurrence, on démontre que  $A^\sigma$  admet une racine de valuation  $p^n$  pour tout entier  $n$ . Ceci n'est évidemment possible que si  $A(u)$  est le polynôme nul, c'est-à-dire si  $\mathfrak{S}' = 0$ . On a donc finalement bien démontré ce que l'on souhaitait.

### 2.1.3 Calcul de la représentation galoisienne associée

On fixe un  $\varphi$ -module  $M$  sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ , ainsi qu'un  $\varphi$ -réseau  $\mathfrak{M}$  à l'intérieur de  $M$ . On suppose que l'on est dans l'alternative suivante : soit  $M$  est annulé par  $p^n$  pour un certain  $n$ , soit  $M$  est libre comme module sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ . Dans le deuxième cas, on pose  $n = \infty$ , et on convient que  $W_\infty(R) = W(R)$ . Soit  $\mathcal{T}(M)$  la représentation galoisienne associée à  $M$ . Dans ce paragraphe, nous donnons plusieurs formules permettant de calculer  $\mathcal{T}(M)$  directement à partir de  $\mathfrak{M}$ . La plus simple consiste évidemment à commencer par retrouver  $M$  en étendant les scalaires à  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ , ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\mathcal{T}(M) = \text{Hom}_{\mathcal{E}^{\text{int}}, \varphi}(\mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}, \mathcal{E}^{\text{int,ur}}/p^n \mathcal{E}^{\text{int,ur}}).$$

Toutefois, on aimerait justement éviter cette solution, car l'un des intérêts d'utiliser des réseaux est bien sûr de travailler avec  $\mathfrak{S}$  à la place de  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ . La proposition B.1.8.3 de [11] permet de faire cela. Elle implique par exemple que :

$$\mathcal{T}(M) = \text{Hom}_{\mathfrak{S}, \varphi}(\mathfrak{M}, W_n(R) \cap \mathcal{E}^{\text{int,ur}}/p^n \mathcal{E}^{\text{int,ur}}) = \text{Hom}_{\mathfrak{S}, \varphi}(\mathfrak{M}, W_n(R)). \quad (2.1)$$

Cette formule implique en particulier que tout morphisme de  $\mathfrak{M}$  dans  $W_n(R)$  qui est compatible à  $\varphi$  prend nécessairement ses valeurs dans  $\mathcal{E}^{\text{int,ur}}/p^n \mathcal{E}^{\text{int,ur}}$  (ce que l'on peut démontrer directement sans difficulté).

En s'inspirant de [7], on peut enfin donner une troisième description de  $\mathcal{T}(M)$  qui fait intervenir non pas  $W_n(R)$ , mais plutôt certains de ces quotients. Cette idée, qui pourrait sembler inutilement complexe à première vue, va en fait s'avérer très fructueuse tout au long de ce chapitre (comme elle l'a déjà d'ailleurs

été dans [7]) : elle sera la clé pour obtenir des bornes sur la ramification dans le §2.2, mais aussi dans le §2.3.3 lorsque l'on s'évertuera à établir des congruences afin de préciser la forme de l'opérateur  $\tau$ . On se donne à partir de maintenant un élément  $U \in W(R)$  qui n'est pas multiple de  $p$  et on suppose que  $\mathfrak{M}$  est de hauteur divisant  $U$ .

**Lemme 2.7.** *Il existe un élément  $V \in W(R)$  qui n'est pas multiple de  $p$  et qui vérifie  $\varphi(V) = UV$ .*

*Démonstration.* On construit  $V$  par approximations successives : par récurrence, on construit une suite  $(V_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $W(R)$  telle que  $V_{n+1} \equiv V_n \pmod{p^n}$  et  $\varphi(V_n) = UV_n$  pour tout  $n$ . Pour construire  $V_1$ , il suffit d'extraire une racine  $(p-1)$ -ième de  $U$  dans  $R$ , ce qui est possible puisque  $\text{Frac } R$  est algébriquement clos et que  $R$  est intégralement clos. Si maintenant  $V_n$  est construit, on cherche  $V_{n+1}$  sous la forme  $V_n + p^n X$  avec  $X \in W(R)$ . La condition que doit vérifier  $X$  s'écrit :

$$\varphi(X) - UX \equiv \frac{UV_n - \varphi(V_n)}{p^n} \pmod{p}.$$

Si  $x$  et  $a$  désignent respectivement la réduction de  $X$  et  $\frac{UV_n - \varphi(V_n)}{p^n}$  modulo  $p$ , trouver  $X$  revient à résoudre l'équation  $x^p - Ux = a$  dans  $R$ . Or, par le même argument que précédemment, cette équation a bien une solution dans  $R$ , et la récurrence se termine ainsi. Enfin  $V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$  existe et vérifie  $\varphi(V) = UV$ .  $\square$

*Remarque 2.8.* Il est évident que si  $V$  vérifie  $\varphi(V) = UV$  et si  $a \in \mathbb{Z}_p$ , alors  $aV$  vérifie la même équation. Un examen de la preuve précédente montre que ce sont les seuls. Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'équation  $\varphi(V) = UV$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module libre de rang 1. On notera en particulier que l'idéal engendré par  $V$  est uniquement déterminé en fonction de  $U$ .

On rappelle que l'on a noté  $\mathfrak{m}_R$  l'idéal maximal de  $R$ , c'est-à-dire l'idéal formé des éléments de  $R$  de valuation strictement positive. Pour tout élément  $X \in W(R)$ , on pose

$$\mathcal{T}_X(\mathfrak{M}) = \text{Hom}_{\mathfrak{S}, \varphi}(\mathfrak{M}, W_n(R)/(X \cdot W_n(\mathfrak{m}_R))).$$

La réduction modulo  $X \cdot W_n(\mathfrak{m}_R)$  définit des morphismes canoniques  $\rho_X : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}_X(\mathfrak{M})$  et  $\rho_{Y,X} : \mathcal{T}_Y(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathcal{T}_X(\mathfrak{M})$  pour tout  $Y \in W(R)$  multiple de  $X$ . En particulier, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{T}(M) & \\ \rho_{UV} \swarrow & & \searrow \rho_V \\ \mathcal{T}_{UV}(\mathfrak{M}) & \xrightarrow{\rho_{UV,V}} & \mathcal{T}_V(\mathfrak{M}) \end{array}$$

qui est manifestement commutatif.

**Proposition 2.9.** *Le morphisme  $\rho_V$  est injectif, et son image s'identifie dans  $\mathcal{T}_V(M)$  à l'image de  $\rho_{UV,V}$*

*Démonstration.* On démontre d'abord l'injectivité. Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\mathcal{T}(M)$  tels que  $f \equiv g \pmod{V \cdot W_n(\mathfrak{m}_R)}$ . Étant donné que  $\mathfrak{M}$  est de type fini, il existe un nombre réel  $\nu > 0$  tel que la congruence  $f \equiv g$  ait lieu modulo  $V \cdot W_n(\mathfrak{a}_R^{\geq \nu})$  où  $\mathfrak{a}_R^{\geq \nu}$  désigne l'idéal des éléments de  $R$  de valuation  $\geq \nu$ . On pose  $I = W_n(\mathfrak{a}_R^{\geq \nu})$  ; on a alors  $\bigcap_{i \geq 0} \varphi^i(I) = 0$  et  $\varphi(I) \subset I$ . Pour tout entier  $i$ , on pose  $I_i = V\varphi^i(I)$  et on note  $f_i$  (resp.  $g_i$ ) la réduction de  $f$  (resp. de  $g$ ) modulo  $I_i$ . On va montrer, par récurrence, que  $f_i = g_i$  pour tout entier  $n$ . Puisque  $\bigcap_{i \geq 0} I_i = 0$ , il en résultera que  $f = g$ , et donc l'injectivité souhaitée. L'égalité  $f_0 = g_0$  ayant déjà été justifiée, il suffit de traiter l'hérédité. Soit  $\psi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{S} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ ,  $x \mapsto (\text{id} \otimes \varphi)^{-1}(Ux)$ . Le morphisme  $f$  induit alors une application linéaire :

$$\text{id} \otimes f_i : \mathfrak{S} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{S} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \frac{W_n(R)}{I_i W_n(R)} = \frac{\mathfrak{S} \otimes_{\mathfrak{S}, \varphi} W_n(R)}{\varphi(I_i) W_n(R)} = \frac{\mathfrak{S} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} W_n(R)}{UI_{i+1} W_n(R)}.$$

Le fait que  $f$  commute à  $\varphi$  implique la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M} & \xleftarrow{\psi} \mathfrak{M} \xrightarrow{x \mapsto Ux} & \mathfrak{M} \\ \downarrow \text{id} \otimes f_i & & \downarrow f \text{ mod } UI_{i+1} \\ \frac{\mathfrak{S} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} W_n(R)}{UI_{i+1} W_n(R)} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \varphi} & \frac{W_n(R)}{UI_{i+1} W_n(R)} \end{array} \quad (2.2)$$

Comme on a bien sûr un diagramme analogue pour  $g$ , on déduit que l'égalité  $f_i = g_i$  implique

$$U \cdot (f \bmod UI_{i+1}) = U \cdot (g \bmod UI_{i+1})$$

et donc finalement  $f_{i+1} = g_{i+1}$  en divisant par  $U$  (qui n'est pas diviseur de zéro dans  $W_n(R)$ ).

On en vient maintenant à la preuve de la propriété concernant les images. Soit  $f_{UV}$  un élément de  $\mathcal{T}_{UV}(\mathfrak{M})$ . Il s'agit de démontrer que  $\rho_{UV,V}(f_{UV})$ , qui est une application de  $\mathfrak{M}$  dans  $W_n(R)/V \cdot W_n(\mathfrak{m}_R)$  compatible au Frobenius, se relève en un morphisme  $\mathfrak{M} \rightarrow W_n(R)$  encore compatible au Frobenius. Étant donné que  $\mathfrak{M}$  est de type fini, il existe un idéal  $I$  comme précédemment tel que  $f_{UV}$  se relève en un morphisme  $f_{UVI} : \mathfrak{M} \rightarrow W(R)/UVI$ . On pose  $f_0 = f_{UVI} \bmod I_0$ . On va construire par récurrence sur  $i$ , une suite d'applications  $f_i : \mathfrak{M} \rightarrow W_n(R)/I_i W_n(R)$  telles que  $f_{i+1} \equiv f_i \pmod{I_i}$  pour tout  $i$ . Le diagramme (2.2) assure que, si l'on pose

$$\alpha_i = (\text{id} \otimes \varphi) \circ (\text{id} \otimes f_i) \circ \psi : \mathfrak{M} \rightarrow W(R)/UI_{i+1}$$

un bon candidat pour  $f_{i+1}$  est  $\frac{\alpha_i}{U}$ . Mais pour pouvoir le définir ainsi, il faut montrer au préalable que  $U$  divise  $\alpha_i$ . Or, ce dernier fait est vrai et suit des deux remarques suivantes : *primo*, comme  $f_0$  se relève modulo  $UVI$  (le relèvement étant donné par  $f_{UVI}$ ), l'élément  $U$  (et même en fait  $UV$ ) divise  $\alpha_0$ , et *secundo*, comme  $f_i \equiv f_0 \pmod{V}$ , on a  $\alpha_i \equiv \alpha_0 \pmod{UV}$ . On peut donc bien considérer l'application  $\frac{\alpha_i}{U}$  qui est défini sur  $\mathfrak{M}$  mais, à cause de la division par  $U$ , prend ses valeurs dans  $W(R)/I_{i+1}$  (et pas  $W(R)/UI_{i+1}$  comme c'était le cas pour  $\alpha_i$ ). Enfin, de la congruence  $f_{i-1} \equiv f_i \pmod{I_{i-1}}$ , on déduit  $\alpha_{i-1} \equiv \alpha_i \pmod{\varphi(I_{i-1})}$ , puis  $f_i \equiv f_{i+1} \pmod{I_i}$  étant donné que  $\varphi(I_{i-1}) = UI_i$ . Enfin, en passant à la limite, on obtient une application  $f : \mathfrak{M} \rightarrow W(R)$  qui relève  $f_0$  et qui commute à  $\varphi$ .  $\square$

Il suit de la proposition précédente que  $\mathcal{T}(M)$  s'identifie à l'image de  $\rho_{UV,V}$  et donc, comme nous l'avions annoncé, nous avons bien obtenu une description de cette représentation galoisienne qui ne fait pas intervenir  $W_n(R)$  lui-même mais seulement deux de ces quotients.

*Remarque 2.10.* La proposition 2.9 vaut encore avec  $n = \infty$  ; pour l'établir, il suffit de passer à la limite sur  $n$ .

## 2.2 Bornes pour la ramification

Sans surprise, le but de ce numéro est de démontrer le théorème 2 de l'introduction. On commence par quelques brefs rappels au sujet des filtrations de ramification dans le §2.2.1. Les deux paragraphes suivants sont consacrés à la preuve du théorème, tandis que dans le §2.2.4, on établit une réciproque partielle.

### 2.2.1 Rappels sur les filtrations de ramification

Soit  $\kappa$  un corps complet pour une valuation discrète dont le corps résiduel est parfait de caractéristique  $p$  (dans les applications qui nous intéressent, on prendra  $\kappa = K$  ou  $\kappa = F_0 = k((u))$ ). Pour toute extension finie  $\kappa'$  de  $\kappa$ , on appelle  $v_{\kappa'}$  la valuation sur  $\kappa'$  normalisée par  $v_{\kappa'}(\kappa'^{\times}) = \mathbb{Z}$ . Si  $\kappa'$  est une extension galoisienne finie de  $\kappa$  de groupe de Galois  $G$ , la *filtration de ramification en numérotation inférieure* de  $G$  est la filtration  $(G_{(\lambda)})_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$  définie comme suit :

$$G_{(\lambda)} = \{ \sigma \in G \mid v_{\kappa'}(\sigma(x) - x) \geq \lambda, \forall x \in \mathcal{O}_{\kappa'} \}$$

où  $\mathcal{O}_{\kappa'}$  est l'anneau des entiers de  $\kappa'$ . Les  $G_{(\lambda)}$  sont des sous-groupes distingués de  $G$ , et la filtration qu'ils forment est décroissante, exhaustive et séparée. On introduit encore la fonction  $\varphi_{\kappa'/\kappa} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$\varphi_{\kappa'/\kappa}(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{\text{Card } G_{(t)}}{\text{Card } G_{(1)}} dt.$$

C'est une fonction affine par morceaux, concave et bijective, dont on note  $\psi_{\kappa'/\kappa}$  l'inverse. La *filtration de ramification en numérotation supérieure* est définie par l'égalité  $G^{(\mu)} = G_{(\psi_{\kappa'/\kappa}(\mu))}$  pour tout réel  $\mu \geq 0$ . On renvoie à [21], chap. IV pour les propriétés usuelles la concernant, et en particulier le théorème d'Herbrand. La filtration de ramification en numérotation supérieure s'étend à une extension galoisienne  $\kappa'/\kappa$  non nécessairement finie en posant :

$$\text{Gal}(\kappa'/\kappa)_{(\mu)} = \varprojlim_{\kappa''} \text{Gal}(\kappa''/\kappa)_{(\mu)}$$

où la limite projective est prise sur toutes les extensions finies galoisiennes  $\kappa''$  de  $\kappa$  incluses dans  $\kappa'$ . Dans le cas où  $\kappa'/\kappa$  est une extension algébrique séparable non galoisienne, on ne peut certes pas définir de filtration sur le groupe de Galois puisque celui-ci n'existe pas mais les fonctions  $\varphi_{\kappa'/\kappa}$  et  $\psi_{\kappa'/\kappa}$ , elles, ont encore un sens ; on peut les définir, par exemple, grâce aux formules :

$$\psi_{\kappa'/\kappa}(\mu) = \int_0^\mu [I_\kappa : I_{\kappa'} G_\kappa^{(t)}] dt \quad \text{et} \quad \varphi_{\kappa'/\kappa} = \psi_{\kappa'/\kappa}^{-1}$$

où  $I_\kappa$  et  $I_{\kappa'}$  sont respectivement les sous-groupes d'inertie des groupes de Galois absolus de  $\kappa$  et  $\kappa'$  (voir [23], §1.2.1). La théorie qui vient d'être rappelée brièvement s'applique en particulier aux corps  $\kappa = K$  et  $\kappa = F_0$ . Les groupes de Galois absolus  $G_K$  et  $\text{Gal}(F_0^{\text{sep}}/F_0) \simeq G_\infty$  héritent ainsi d'une filtration de ramification en numération supérieure.

## 2.2.2 Bornes pour les représentations de $G_\infty$

On démontre dans ce paragraphe l'assertion 1 du théorème 2. Soient  $M$  un  $\varphi$ -module  $M$  sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  annulé par  $p^n$ , et  $\mathfrak{M}$  un  $\varphi$ -réseau de  $M$  de hauteur divisant  $U$ , pour un élément  $U \in \mathfrak{S}$  qui n'est pas multiple de  $p$ . Comme dans l'énoncé du théorème, on note  $T$  la représentation galoisienne associée à ces données et on pose  $h = v_R(U \bmod p)$ . Pour tout nombre réel  $v \geq 0$  et tout anneau  $A$  muni d'une valuation (par exemple  $A \subset R$ ), on note encore  $\mathfrak{a}_A^{>v}$  l'idéal des éléments de  $A$  de valuation strictement plus grande que  $v$ . Enfin, si  $F$  est une extension algébrique de  $F_0$ , on désigne par  $\mathcal{O}_F$  son anneau des entiers. Dans le cas où  $F$  est inclus dans  $F_0^{\text{sep}}$ , on a simplement  $\mathcal{O}_F = F \cap R$ .

Comme cela se fait usuellement dans ce genre de situations, on va utiliser la propriété  $(P_m)$  de Fontaine (introduite dans [10], proposition 1.5). Rappelons qu'ici  $m$  est un nombre réel positif ou nul et que, par définition, une extension  $F$  de  $F_0$  vérifie  $(P_m)$  si, et seulement si pour toute extension algébrique  $E$  de  $F_0$ , s'il existe un morphisme de  $\mathcal{O}_{F_0}$ -algèbres  $\mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_E/\mathfrak{a}_E^{>m}$ , alors il existe un  $F_0$ -plongement de  $F$  dans  $E$ . Le lien avec la filtration de ramification en numération supérieure est donnée par la proposition suivante qui, dans cette formulation, est due à Yoshida (voir [24]).

**Proposition 2.11.** *Soit  $F$  une extension finie galoisienne de  $F_0$  de groupe de Galois  $G$ . On définit :*

- l'entier  $m_0$  comme la borne inférieure des réels  $m$  tels que  $(P_m)$  soit satisfaite, et
- l'entier  $\mu_0$  comme la borne inférieure des réels  $\mu$  tel que  $G^{(\mu)} = \{\text{id}_F\}$ .

Alors  $m_0 = \mu_0$ .

Notons  $\rho : G_\infty \rightarrow \text{GL}(T)$  le morphisme donnant l'action de  $G_\infty$  sur  $T$ , et  $F$  l'extension finie galoisienne de  $F_0$  qui est en correspondance avec le sous-groupe distingué  $\ker \rho$  de  $G_\infty$ . D'après la proposition précédente, pour démontrer la première assertion du théorème 2, il suffit de prouver que l'extension  $F$  vérifie la propriété  $(P_m)$  pour  $m = \frac{hp^n}{p-1}$ .

**Lemme 2.12.** *Soit  $E$  une extension de  $F_0$  incluse dans  $F_0^{\text{sep}}$ . Alors l'application injective naturelle*

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}, \varphi}(\mathfrak{M}, W_n(\mathcal{O}_E)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}, \varphi}(\mathfrak{M}, W_n(R)) = T$$

(déduite de l'inclusion  $W_n(\mathcal{O}_E) \rightarrow W_n(R)$ ) est un isomorphisme si, et seulement si  $E$  contient  $F$ .

*Démonstration.* Il est clair que si l'application du lemme est un isomorphisme, alors le groupe de Galois absolu de  $E$  agit trivialement sur  $T$ . D'où  $F \subset E$ . Pour la réciproque, on remarque qu'en vertu de l'égalité (2.1), on sait que tous les morphismes  $f : \mathfrak{M} \rightarrow W_n(R)$  compatibles à  $\varphi$  prennent leurs valeurs dans  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{ur}}$  et donc, en particulier, dans  $W_n(\mathcal{O}_{F_0^{\text{sep}}})$ . Par ailleurs, par définition de  $F$ , son groupe de Galois absolu  $G_F$  agit trivialement sur  $T$ , ce qui implique que tous les morphismes  $f$  comme précédemment prennent leurs valeurs dans  $W_n(\mathcal{O}_{F_0^{\text{sep}}})^{G_F} = W_n(\mathcal{O}_F)$ . Il en résulte que, si  $F \subset E$ , l'application du lemme est bien bijective.  $\square$

Pour tout réel  $v \geq 0$ , on introduit à présent le sous-ensemble  $W_n(\mathfrak{a}_R^{>v})$  de  $W_n(R)$  formé des éléments dont toutes les coordonnées sont dans  $\mathfrak{a}_R^{>v}$ . C'est un idéal de  $W_n(R)$ , et le quotient de  $W_n(R)/W_n(\mathfrak{a}_R^{>v})$  s'identifie à  $W_n(R/\mathfrak{a}_R^{>v})$ . D'après le lemme 2.7, il existe  $V \in W(R)$ , non multiple de  $p$ , tel que  $\varphi(V) = UV$ . on fixe un tel élément  $V$  ; il vérifie  $V^{p-1} = U \pmod{p}$ , ce qui implique que  $v_R(V \bmod p) = \frac{h}{p-1}$ .

**Lemme 2.13.** *On a  $W_n(\mathfrak{a}_R^{>m}) \subset UV \cdot W_n(\mathfrak{m}_R)$  pour  $m = \frac{hp^n}{p-1}$ .*

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n$  et donc, pour éviter les confusions, on notera  $m(n)$  à la place de  $m$  tout au long de la démonstration. Pour  $n = 1$ , on remarque que  $v_R(UV \bmod p) = m(1)$  et donc que les deux idéaux considérés sont égaux. On suppose à présent que l'inclusion  $W_n(\mathfrak{a}_R^{>m(n)}) \subset UV \cdot W_n(\mathfrak{m}_R)$  est satisfaite et on considère un élément  $X = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in W_{n+1}(\mathfrak{a}_R^{>m(n+1)})$ . On veut montrer que  $X \in UV \cdot W_{n+1}(\mathfrak{m}_R)$ . Soient  $\lambda \in R$  un élément quelconque de valuation  $hp$  et  $[\lambda] \in W(R)$  son représentant de Teichmüller. Un calcul immédiat sur les valuations montre que les composantes du vecteur de Witt de longueur  $n$  suivant :

$$\frac{1}{[\lambda]}(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{x_1}{\lambda}, \frac{x_2}{\lambda^p}, \dots, \frac{x_n}{\lambda^{p^{n-1}}} \right)$$

sont toutes dans  $\mathfrak{a}_R^{>m(n)}$ . L'hypothèse de récurrence s'applique donc et assure qu'il existe  $Y \in W_n(\mathfrak{m}_R)$  tel que  $\frac{1}{[\lambda]}(x_1, \dots, x_n) = UVY$ . On note encore  $Y$  un élément de  $W_{n+1}(\mathfrak{m}_R)$  qui relève  $Y$  et on pose

$$\Delta = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) - [\lambda]UVY.$$

Les  $n$  premières coordonnées de  $\Delta$  sont nulles, tandis que, si on pose  $[\lambda]UVY = (z_1, \dots, z_{n+1})$ , la dernière coordonnée de  $\Delta$  s'exprime comme un polynôme homogène de degré  $p^n$  en les  $x_1, \dots, x_{n+1}, z_1, \dots, z_{n+1}$ , à condition de donner le poids  $p^{i-1}$  aux variables  $x_i$  et  $z_i$ . Comme, en outre,  $z_i$  s'écrit comme le produit de  $\lambda^{p^i}$  par un élément de  $\mathfrak{m}_R$ , on en déduit que la dernière coordonnée de  $\Delta$  est de valuation strictement supérieure à  $m(n+1)$ . Ainsi,  $\Delta$  appartient à  $p^n UV \cdot W_{n+1}(\mathfrak{m}_R)$  et donc *a fortiori* de  $UV \cdot W_{n+1}(\mathfrak{m}_R)$ . Il s'ensuit enfin que  $X \in UV \cdot W_{n+1}(\mathfrak{m}_R)$  comme voulu.  $\square$

Nous sommes prêts à vérifier la propriété  $(P_m)$  pour le corps  $F$  et le nombre  $m = \max(1, \frac{hp^n}{p-1})$ . Soit  $E$  une extension algébrique de  $F_0$  incluse dans  $F_0^{\text{sep}}$ . Soit également  $f : \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_E/\mathfrak{a}_E^{>m}$  un morphisme de  $\mathcal{O}_{F_0}$ -algèbres. On considère la composée suivante :

$$\begin{aligned} \Psi_V : T = \text{Hom}(\mathfrak{M}, W_n(\mathcal{O}_F)) &\rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{M}, W_n(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_F^{>m})) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{M}, W_n(\mathcal{O}_E/\mathfrak{a}_E^{>m})) \\ &\rightarrow \text{Hom}\left(\mathfrak{M}, \frac{W_n(\mathcal{O}_E)}{UVW_n(\mathfrak{m}_R) \cap W_n(\mathcal{O}_E)}\right) \rightarrow \text{Hom}\left(\mathfrak{M}, \frac{W_n(\mathcal{O}_E)}{VW_n(\mathfrak{m}_R) \cap W_n(\mathcal{O}_E)}\right) \end{aligned}$$

où la deuxième flèche est induite par  $f$  et l'existence de la troisième résulte du lemme 2.13. Une adaptation de la proposition 2.9 assure que, pour tout  $\psi_F \in T$ , il existe une unique application  $\psi_E \in \text{Hom}(\mathfrak{M}, W_n(\mathcal{O}_E))$  telle que  $\Psi_V(\psi_F)$  s'identifie à  $\psi_E \bmod VW_n(\mathfrak{m}_R) \cap W_n(\mathcal{O}_E)$ . Ceci permet de construire un morphisme  $\Psi : T \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{M}, W_n(\mathcal{O}_E))$  relevant  $\Psi_V$ .

**Lemme 2.14.** *Le morphisme  $\Psi$  précédent est injectif.*

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , on considère  $u_F$  une uniformisante de  $F$ . Son polynôme minimal sur  $F_0$  est un polynôme d'Eisenstein que l'on note  $P$ . L'élément  $x = f(u_F) \in \mathcal{O}_E/\mathfrak{a}_E^{>m}$  est alors une racine de  $P$ . Comme  $m \geq 1$ , le coefficient constant de  $P$  ne s'annule pas dans  $\mathcal{O}_E/\mathfrak{a}_E^{>m}$ . On en déduit que  $x$  a la même valuation que  $u_F$  puis que  $f$  induit une application injective  $f_{h/(p-1)} : \mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_F^{>h/(p-1)} \rightarrow \mathcal{O}_E/\mathfrak{a}_E^{>h/(p-1)}$ . Ainsi le morphisme

$$\text{Hom}\left(\mathfrak{M}, \frac{\mathcal{O}_E}{V\mathfrak{m}_R \cap \mathcal{O}_E}\right) = \text{Hom}\left(\mathfrak{M}, \mathcal{O}_E/\mathfrak{a}_E^{>h/(p-1)}\right) \rightarrow \text{Hom}\left(\mathfrak{M}, \mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_F^{>h/(p-1)}\right) = \text{Hom}\left(\mathfrak{M}, \frac{\mathcal{O}_F}{V\mathfrak{m}_R \cap \mathcal{O}_F}\right)$$

est, lui aussi, injectif, ce qui permet de conclure.

Pour l'hérédité, on suppose que  $\mathfrak{M}$  est annulé par  $p^{n+1}$  et on considère la suite exacte  $0 \rightarrow p\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}/p\mathfrak{M} \rightarrow 0$ . Les modules  $p\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{M}/p\mathfrak{M}$  sont encore des  $\varphi$ -réseaux à l'intérieur, respectivement de  $pM$  et  $M/pM$ . En outre, ils sont tous les deux de hauteur divisible par  $U$ . En effet, c'est évident pour  $\mathfrak{M}/p\mathfrak{M}$  et, pour  $p\mathfrak{M}$ , on raisonne comme suit. On note tout d'abord que l'application  $\text{id} \otimes \varphi : W(R) \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M}/p\mathfrak{M} \rightarrow W(R) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}/p\mathfrak{M}$  est injective, ce qui implique que le morphisme suivant induit par l'inclusion naturelle de  $p\mathfrak{M}$  dans  $\mathfrak{M}$  :

$$\text{coker}(\text{id} \otimes \varphi : W(R) \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} (p\mathfrak{M}) \rightarrow W(R) \otimes_{\mathfrak{S}} (p\mathfrak{M})) \longrightarrow \text{coker}(W(R) \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M} \rightarrow W(R) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})$$

est, lui aussi, injectif. Comme l'espace d'arrivée est annulé par  $U$ , on en déduit qu'il en est de même de l'espace de départ, ce qui veut bien dire que  $p\mathfrak{M}$  est de hauteur divisant  $U$ . On considère maintenant le diagramme suivant :

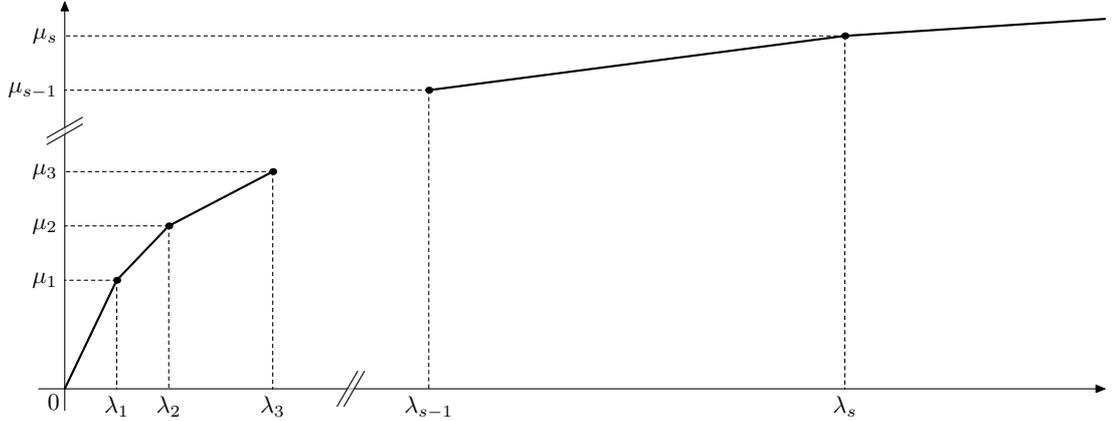
$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{T}(\mathfrak{M}/p\mathfrak{M}) & \longrightarrow & \mathcal{T}(\mathfrak{M}) & \longrightarrow & \mathcal{T}(p\mathfrak{M}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \text{Hom}(\mathfrak{M}/p\mathfrak{M}, \mathcal{O}_E) & & \text{Hom}(\mathfrak{M}, W_{n+1}(\mathcal{O}_E)) & & \text{Hom}(p\mathfrak{M}, W_n(\mathcal{O}_E)) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{T}(\mathfrak{M}/p\mathfrak{M}) & \longrightarrow & \mathcal{T}(\mathfrak{M}) & \longrightarrow & \mathcal{T}(p\mathfrak{M}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

où les flèches verticales du haut sont les morphismes  $\Psi$  correspondant respectivement à  $\mathfrak{M}/p\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{M}$  et  $p\mathfrak{M}$ , et les flèches verticales du bas sont les inclusions canoniques. Par hypothèse de récurrence, on sait que les flèches verticales en haut à gauche et en haut à droite sont injectives. Un chasse au diagramme termine alors la récurrence.  $\square$

Il est maintenant aisé de conclure. Du lemme 2.14, il découle que l'ensemble  $\text{Hom}(\mathfrak{M}, W_n(\mathcal{O}_E))$  a au moins autant d'éléments que  $T$ . L'inclusion naturelle  $\text{Hom}(\mathfrak{M}, W_n(\mathcal{O}_E)) \rightarrow T$  est donc nécessairement une bijection. Le lemme 2.12 assure que  $E$  contient  $F$ , ce qui est exactement ce qu'il fallait vérifier pour établir la propriété  $(P_m)$ .

### 2.2.3 Bornes pour les représentations de $G_K$

Expliquons à présent comment la deuxième partie du théorème 2 se déduit de la première. On rappelle tout d'abord que la théorie du corps des normes ne se contente pas de fournir un isomorphisme canonique entre les groupes  $G_\infty$  et  $G_{F_0} = \text{Gal}(F_0^{\text{sep}}/F_0)$ , mais qu'elle compare aussi les filtrations de ramification en numérotation supérieure. Précisément, le corollaire 3.3.6 de [23] affirme que pour tout réel  $\mu \geq 0$ , les groupes  $G_{F_0}^{(\mu)}$  et  $G_\infty \cap G_K^{(\varphi_{K_\infty/K}(\mu))}$  se correspondent *via* l'isomorphisme du corps des normes. De surcroît, la fonction  $\varphi_{K_\infty/K}$  a été calculée dans [7], §4.3. Voici sa représentation graphique :



où  $\lambda_s = 1 + \frac{ep^s}{p-1}$  et  $\mu_s = 1 + e(s + \frac{1}{p-1})$ . Si l'on souhaite une formule explicite, on peut écrire pour tout  $\lambda \geq \lambda_1$  :

$$\varphi_{K_\infty/K}(\lambda) = 1 + es + e \cdot \left( \frac{p^{\{s\}}}{p-1} - \{s\} \right) \quad (2.3)$$

où  $s = \log_p \left( \frac{(p-1)(\lambda-1)}{e} \right) \geq 1$  et où  $\{s\}$  désigne sa partie décimale. On voit en particulier que pour sur l'intervalle  $[\lambda_1, +\infty[$ , la fonction  $\varphi_{K_\infty/K}$  s'écrit comme la somme de la fonction  $\lambda \mapsto e \cdot \log_p \lambda$  et d'une fonction bornée.

Rappelons qu'au début de l'introduction, nous avons défini l'extension  $K(\zeta_{p^\infty})/K$  obtenue en ajoutant toutes les racines primitives  $p^n$ -ième de l'unité et que nous avons posé  $\Gamma = \text{Gal}(K(\zeta_{p^\infty})/K)$ . Le caractère cyclotomique  $\chi$  identifie  $\Gamma$  à un sous-groupe d'indice fini de  $\mathbb{Z}_p^\times$ . Ce groupe est, par ailleurs, muni de la filtration de ramification en numérotation supérieure, notée  $(\Gamma^{(s)})_{s \geq 0}$  dans la suite.

**Lemme 2.15.** *Il existe une constante  $c_0(K) \geq 0$  ne dépendant que de  $K$  telle que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , on ait  $\gamma \in \Gamma^{(1+es-c_0(K))}$  où  $s$  est la valuation  $p$ -adique de  $\chi(\gamma) - 1$ .*

*Démonstration.* Le lemme est une conséquence directe d'un théorème très général de Sen (voir [22]). Nous donnons toutefois ci-dessous une autre démonstration, plus élémentaire. Si le corps  $K$  n'est pas absolument ramifiée, le lemme résulte d'un calcul classique que l'on peut trouver par exemple dans [21], chap. IV, §4 ; on peut alors même choisir  $c_0(K) = 0$  (attention au décalage d'indice dans la numérotation des groupes de ramification entre notre convention et celle de *loc. cit.*).

Pour le cas général, on pose  $K' = W[1/p]$  (c'est la sous-extension maximale non absolument ramifiée de  $K$ ) et  $\Gamma' = \text{Gal}(K'(\zeta_{p^\infty})/K') \simeq \mathbb{Z}_p^\times$ . Le groupe  $\Gamma$  apparaît naturellement comme un sous-groupe de  $\Gamma'$  et d'après le théorème d'Herbrand, on a l'égalité :

$$\Gamma^{(\mu)} = \Gamma \cap (\Gamma')^{(\varphi_{K'/K}(\mu))}.$$

Ainsi, en utilisant le cas déjà traité d'un corps de base non absolument ramifié, on obtient  $\gamma \in \Gamma^{(\psi_{K'/K}(1+s))}$ . Or à partir d'un certain moment, la fonction  $\psi_{K'/K}$  est affine de pente  $e$ . On en déduit qu'il existe une constante  $c_0(K) \geq 0$  telle que  $\psi_{K'/K}(1+s) \geq 1+es-c_0(K)$ . Le lemme s'ensuit.  $\square$

*Remarque 2.16.* Dans le cas où l'extension  $K/K'$  est modérément ramifiée — c'est-à-dire dans le cas où  $e$  est premier avec  $p$  —, la fonction  $\psi_{K'/K}$  vaut l'identité sur  $[0, 1]$ , et est tout de suite après affine de pente  $e$ . On en déduit que, dans ce cas, on peut prendre  $c_0(K) = 0$ , c'est-à-dire que  $\gamma \in \Gamma^{(1+es)}$ .

Étant donné que l'image de  $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$  est d'indice finie dans  $\mathbb{Z}_p^\times$ , il existe un entier  $s_0(K)$  — ne dépendant bien sûr que de  $K$  — tel que  $1 + p^{s_0(K)}\mathbb{Z}_p \subset \chi(\Gamma)$ . Soit  $s$  un nombre entier vérifiant :

$$s \geq s_0(K) \quad \text{et} \quad s > \frac{c_0(K)}{e} + \max\left(\frac{1}{p-1}, n + \log_p\left(\frac{h}{e}\right)\right). \quad (2.4)$$

On choisit en outre un élément  $\tau \in G_K$  tel que  $c(\tau) = 1$  et  $\chi(\tau) = 1$ . Soient  $\mu$  un nombre réel  $> 1 + e(s + \frac{1}{p-1})$  et  $g \in G_K^{(\mu)}$ . D'après ce que l'on sait à propos de la ramification de l'extension  $K_\infty/K$ , on a  $g \in G_s$ . D'après le lemme 1.2 et la discussion menée au §1.1.3, quitte à modifier un peu  $\tau$ , on peut écrire  $g$  sous la forme  $g = \tau^a g'$  pour un certain  $g' \in G_\infty$ . Du fait que  $g$  fixe  $K_s$  point par point, on déduit qu'il en est de même pour  $\tau^a$ , et donc que  $p^s$  divise  $a$ . Par ailleurs, puisque  $s$  est choisi supérieur ou égal à  $s_0(K)$ , il existe un élément  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\chi(\gamma) = 1 + a$ . L'autre inégalité supposée sur  $s$  (voir formule (2.4)), quant à elle, implique, avec le lemme 2.15, que  $\gamma \in \Gamma^{(\mu_0)}$  avec  $\mu_0 = 1 + e \cdot \max(\frac{1}{p-1}, n + \log_p(\frac{h}{e}))$ . Par ailleurs, étant donné que les extensions  $K_\infty/K$  et  $K(\zeta_{p^\infty})/K$  sont linéairement disjointes, le groupe de Galois  $\text{Gal}(K_\infty(\zeta_{p^\infty})/K_\infty)$  s'identifie canoniquement à  $\Gamma$ . *Via* cette identification, on a en outre l'égalité :

$$\text{Gal}(K_\infty(\zeta_{p^\infty})/K_\infty) \cap G_K^{(\mu_0)} = \Gamma^{(\mu_0)}.$$

On en déduit que  $\gamma$  (qui, pour l'instant, vit dans  $\Gamma$ ) se relève en un élément de  $G_K$  qui appartient à  $G_\infty \cap G_K^{(\mu_0)}$ . À partir de maintenant, on fixe  $\gamma$  un tel relevé ; il vérifie encore  $\chi(\gamma) = 1 + a$ . La relation de commutation  $\gamma\tau \equiv \tau\chi(\gamma)\gamma \pmod{H_\infty}$  entraîne donc l'existence d'un élément  $g'' \in H_\infty$  tel que  $\tau^a = \gamma\tau\gamma^{-1}\tau^{-1}g''$ . On a alors l'écriture  $g''g' = (\gamma\tau\gamma^{-1}) \cdot \gamma^{-1} \cdot g$ , de laquelle on déduit que  $g''g' \in G_K^{(\mu_0)}$  (puisque  $\mu > 1 + e(s + \frac{1}{p-1}) > \mu_0$ ). Ainsi  $g''g' \in G_\infty \cap G_K^{(\mu_0)} = G_\infty^{\psi_{K_\infty/K}(\mu_0)}$ . Or, un calcul facile basé sur la formule (2.3) montre que  $\psi_{K_\infty/K}(\mu_0) > \max(1, \frac{hp^n}{p-1})$ . L'assertion 1 du théorème 2 implique alors que  $g''g'$  agit trivialement sur  $T$ . Comme, de même,  $\gamma$  était élément de  $G_\infty \cap G_K^{(\mu_0)}$ , il agit aussi trivialement sur  $T$ . Ainsi, de l'écriture  $g = \gamma\tau\gamma^{-1}\tau^{-1} \cdot (g''g')$ , on déduit que  $g$ , à son tour, agit trivialement sur  $T$ . Comme ceci est valable pour tout  $g \in G_K^{(\mu)}$ , tout  $\mu > 1 + e(s + \frac{1}{p-1})$  et tout  $s$  vérifiant les inégalités (2.4), on a finalement démontré qu'en posant <sup>6</sup>

$$c(K) = 1 + \frac{e}{p-1} + e \cdot s_0(K) + c_0(K),$$

le sous-groupe  $G_K^{(\mu)}$  agit trivialement sur  $T$  pour tout  $\mu > c(K) + e \cdot \max(\frac{1}{p-1}, n + \log_p(\frac{h}{e}))$ . Le théorème 2 est démontré.

6. La constante peut être encore légèrement améliorée, mais la forme que nous donnons nous a semblé un peu plus agréable.

Lorsque  $K$  est absolument modérément ramifiée, on a déjà vu, dans la remarque 2.16, que l'on pouvait prendre  $c_0(K) = 0$ . Par ailleurs, il est facile de voir que l'entier  $s_0(K)$  peut être, dans ce cas, choisi égal à 1. La formule qui a été obtenue précédemment donne alors la valeur  $1 + e + \frac{e}{p-1}$  pour  $c(K)$ . En réalité, un examen de la preuve précédente montre que, dès que  $h \geq e$ , on peut même prendre  $c(K) = 1 + \frac{e}{p-1}$ .

## 2.2.4 Une réciproque partielle au théorème 2

Le théorème 2 que nous venons de démontrer permet de contrôler la ramification d'une représentation de torsion de  $G_\infty$  ou  $G_K$  en fonction de la hauteur du  $\varphi$ -module associé. Dans le cas des objets annulés par  $p$ , il se trouve qu'être de hauteur divisant  $U$  (pour un élément  $U \in \mathfrak{S}$ ) équivaut à être de  $u$ -hauteur  $\leq h = v_R(U \bmod p)$ . Ainsi, la ramification d'une  $\mathbb{F}_p$ -représentation est contrôlée par la  $u$ -hauteur du  $\varphi$ -module associé, qui est simplement un nombre entier : dans le cas des représentations de  $G_\infty$  par exemple, si cette  $u$ -hauteur est  $\leq h$ , alors le sous-groupe  $G_\infty^{(\mu)}$  agit trivialement pour tout  $\mu > \frac{hp}{p-1}$ .

On peut alors se demander si, réciproquement, la ramification de la représentation contrôle la  $u$ -hauteur du  $\varphi$ -module associé. La proposition suivante apporte une réponse affirmative à cette question.

**Proposition 2.17.** *Soit  $T$  une  $\mathbb{F}_p$ -représentation de dimension finie de  $G_\infty$ , et soit  $h$  un entier tel que  $G_\infty^{(\mu)}$  agisse trivialement sur  $T$  pour tout  $\mu > \frac{hp}{p-1}$ . Alors le  $\varphi$ -module étale associé à  $T$  admet un  $\varphi$ -réseau de  $u$ -hauteur  $\leq hp$ .*

*Soit  $T$  une  $\mathbb{F}_p$ -représentation de dimension finie de  $G_K$ , et soit  $h$  un entier strictement positif tel que  $G_K^{(\mu)}$  agisse trivialement sur  $T$  pour tout  $\mu > 1 + \frac{e}{p-1} + e \cdot (1 + \log_p(\frac{h}{e}))$ . Alors le  $(\varphi, \tau)$ -module associé à  $T$  admet un  $(\varphi, \tau)$ -réseau de  $u$ -hauteur  $\leq hp$ .*

*Remarque 2.18.* On prendra garde d'une part à ce que la borne portant sur  $\mu$  ne fait pas intervenir la constante  $c(K)$  comme c'était le cas dans le théorème 2 et d'autre part à ce que la borne que l'on obtient au final pour la  $u$ -hauteur est bien  $hp$ , et non pas  $h$ .

*Démonstration.* La deuxième partie de la proposition se déduit de la première en utilisant les liens rappelés précédemment entre les filtrations de ramification sur  $G_\infty$  et  $G_K$ . Nous laissons cet exercice au lecteur et nous concentrons à partir de maintenant sur la preuve de la première affirmation.

Le  $\varphi$ -module étale associé à la représentation  $T$  est  $M = \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_\infty]}(T, F_0^{\text{sep}})$  et admet un  $\varphi$ -réseau canonique donné par  $\mathfrak{M} = \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_\infty]}(T, \mathcal{O}_{F_0^{\text{sep}}})$ . Montrons que  $\mathfrak{M}$  est de  $u$ -hauteur  $\leq hp$ . Étant donné notre hypothèse, il existe une extension galoisienne finie  $F$  sur  $F_0$  telle que, d'une part,  $\mathfrak{M} = \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_\infty]}(T, \mathcal{O}_F)$  et, d'autre part, le sous-groupe de ramification  $\text{Gal}(F/F_0)^{(\mu)}$  soit trivial pour tout  $\mu > \frac{hp}{p-1}$ . Le corps  $F$  est à l'évidence un  $F_0$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un opérateur de Frobenius, qui est tout simplement l'élévation à la puissance  $p$  : c'est donc un  $\varphi$ -module. Son anneau des entiers  $\mathcal{O}_F$  définit en outre un  $\varphi$ -réseau à l'intérieur de  $F$ . Le lemme 3.2 de [16] implique que ce  $\varphi$ -réseau est de  $u$ -hauteur  $\leq [(p-1)v_R(\mathfrak{d}_{F/F_0})]$  où  $\mathfrak{d}_{F/F_0}$  est la différentielle de l'extension  $F/F_0$  et où  $[x]$  désigne la partie entière supérieure du nombre réel  $x$ . De la proposition 1.3 de [10] et de la borne sur la ramification de  $F$ , il suit  $v_R(\mathfrak{d}_{F/F_0}) \leq \frac{hp}{p-1}$ , d'où on déduit que le  $\varphi$ -réseau  $\mathcal{O}_F$  est de  $u$ -hauteur  $\leq hp$ .

Reste à montrer comment cela implique que  $\mathfrak{M}$  est, lui-même, de  $u$ -hauteur  $\leq hp$ . Soit  $f$  un élément de  $\mathfrak{M}$  ; c'est un morphisme de  $T$  dans  $\mathcal{O}_F$  compatible à l'action de Galois. On veut montrer que  $u^{hp}f$  est dans l'image de  $\text{id} \otimes \varphi_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{S} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ . Or, l'application  $u^{hp}f$  prend manifestement ses valeurs dans le sous-ensemble  $u^{hp}\mathcal{O}_F$  qui est inclus dans l'image de  $\text{id} \otimes \varphi_{\mathcal{O}_F} : \mathfrak{S} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_F$  puisque  $\mathcal{O}_F$  est de  $u$ -hauteur  $\leq hp$ . Par ailleurs, on vérifie facilement que cette dernière application est injective. Il existe par suite un morphisme  $g : T \rightarrow \mathfrak{S} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathcal{O}_F$  qui est compatible à l'action de Galois, et permet de factoriser  $u^{hp}f$  comme suit :  $u^{hp}f = (\text{id} \otimes \varphi_{\mathcal{O}_F}) \circ g$ . Ce morphisme  $g$  définit un élément de  $\mathfrak{S} \otimes_{\mathfrak{S}, \varphi} \mathfrak{M}$  qui s'envoie sur  $u^{hp}f$  par  $\text{id} \otimes \varphi_{\mathfrak{M}}$ . Ceci montre bien que  $u^{hp}f$  est dans l'image de  $\text{id} \otimes \varphi_{\mathfrak{M}}$ .  $\square$

Le résultat précédent s'étend aux représentations annulées par une puissance de  $p$  comme suit.

**Proposition 2.19.** *Soit  $T$  une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation de longueur finie de  $G_\infty$  (resp. de  $G_K$ ), soit  $n$  un entier tel que  $p^n T = 0$ , et soit  $h$  un entier tel que  $G_\infty^{(\mu)}$  (resp.  $G_K^{(\mu)}$ ) agisse trivialement sur  $T$  pour tout  $\mu > \frac{hp}{p-1}$  (resp. pour tout  $\mu > 1 + \frac{e}{p-1} + e \cdot (1 + \log_p(\frac{h}{e}))$ ). Alors, pour tout élément  $U \in W(R)$  tel que  $v_R(U \bmod p) \geq hp$ , le  $\varphi$ -module étale (resp. le  $(\varphi, \tau)$ -module) associé à  $T$  admet un  $\varphi$ -réseau (resp. un  $(\varphi, \tau)$ -réseau) de  $U$ -hauteur  $\leq n$ .*

*Démonstration.* De même que pour la proposition 2.17, il suffit de traiter le cas «  $G_\infty$  ». Si  $T$  une représentation vérifiant les hypothèses de l'énoncé, il existe une extension finie galoisienne  $F/F_0$  telle que  $\text{Gal}(F_0^{\text{sep}}/F)$  agisse trivialement sur  $T$  et  $\text{Gal}(F/F_0)^{(\mu)}$  soit trivial pour tout  $\mu > \frac{hp}{p-1}$ . Soit  $\mathcal{E}^{\text{int},F}$  l'unique extension étale de  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  incluse dans  $\mathcal{E}^{\text{int},\text{ur}}$  dont le corps résiduel est égal à  $F$ . Le  $\varphi$ -module associé à  $T$  s'écrit alors  $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_\infty]}(T, \mathcal{E}^{\text{int},F})$  et un  $\varphi$ -réseau naturel à l'intérieur de  $M$  est  $\mathfrak{M} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_\infty]}(T, \mathfrak{S}^F/p^n \mathfrak{S}^F)$  avec  $\mathfrak{S}^F = \mathcal{E}^{\text{int},F} \cap W(R)$ . Pour conclure, il suffit de démontrer que  $\mathfrak{S}^F/p^n \mathfrak{S}^F$ , vu comme  $\varphi$ -module sur  $\mathfrak{S}$ , est de  $U$ -hauteur  $\leq n$ . Or, par la démonstration de la proposition 2.17, on sait que cette propriété vaut pour  $n = 1$  (puisque  $\mathfrak{S}^F/p \mathfrak{S}^F$  s'identifie à l'anneau des entiers de  $F$ ) et, par ailleurs, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}^F/p^{n-1} \mathfrak{S}^F \rightarrow \mathfrak{S}^F/p^n \mathfrak{S}^F \rightarrow \mathfrak{S}^F/p \mathfrak{S}^F \rightarrow 0$$

à partir de laquelle on conclut par récurrence.  $\square$

On remarquera que, si pour  $n = 1$ , l'écart entre les bornes appraissant dans le théorème 2 d'une part et la proposition 2.17 ne différaient que par la constante  $c(K)$  dans la borne sur  $\mu$  et par un facteur  $p$  dans celle sur la  $u$ -hauteur, ce même écart se creuse de façon drastique lorsque  $n$  augmente : dans la proposition 2.19, la présence de  $n$  n'apparaît plus dans la borne sur  $\mu$  mais dans celle sur la hauteur !

## 2.3 Les $(\varphi, \tau)$ -réseaux

Avant de pouvoir définir des réseaux dans les  $(\varphi, \tau)$ -modules sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$ , il est nécessaire introduire des sous-anneaux de  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  et  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  sur lesquels ces réseaux seront définis. Le sous-anneau de  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  que l'on va considérer est bien entendu  $\mathfrak{S}$ , qui est déjà l'anneau qui intervenait dans la définition de  $\varphi$ -réseaux. L'égalité  $\mathfrak{S} = \mathcal{E}^{\text{int}} \cap W(R)$  nous conduit à choisir comme sous-anneau de  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$ , l'intersection  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \cap W(R)$  que l'on note  $\mathfrak{S}_\tau$ . Celle-ci est stable par le Frobenius et l'action de  $G_K$ .

**Définition 2.20.** Soit  $M$  un  $(\varphi, \tau)$ -module sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$ . Un  $(\varphi, \tau)$ -réseau dans  $M$  est la donnée d'un  $\varphi$ -réseau  $\mathfrak{M}$  dans  $M$  tel que le sous-module  $\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  de  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} \mathfrak{M}$  soit stable par l'opérateur  $\tau$ .

Pour  $U \in W(R)$  et  $h \in \mathbb{N}$ , on dit que  $\mathfrak{M}$  est de hauteur divisant  $U$  (resp. de  $U$ -hauteur  $\leq h$ ) s'il l'est en tant que  $\varphi$ -module.

*Remarque 2.21.* Comme  $-1$  est la limite dans  $\mathbb{Z}_p$  d'une suite d'entiers positifs, la définition ci-dessus implique que tout  $(\varphi, \tau)$ -réseau  $\mathfrak{M}$  de  $M$  est tel que  $\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  est stable par  $\tau^{-1}$ .

### 2.3.1 Un théorème d'existence dans le cas de torsion

Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante.

**Proposition 2.22.** *Tout  $(\varphi, \tau)$ -module sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$  qui est annulé par une puissance de  $p$  admet un  $(\varphi, \tau)$ -réseau.*

Pour cela, on fixe  $M$  un  $(\varphi, \tau)$ -module sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$  annulé par une puissance de  $p$  et on considère l'ensemble  $\mathcal{F}_\varphi(M)$  (resp.  $\mathcal{F}_{\varphi, \tau}(M)$ ) des  $\varphi$ -réseaux (resp.  $(\varphi, \tau)$ -réseaux) à l'intérieur de  $M$ . On veut démontrer que  $\mathcal{F}_{\varphi, \tau}(M)$  est non vide. On sait déjà (voir lemme 2.5) que  $\mathcal{F}_\varphi(M)$  n'est pas vide. Pour tout entier  $h$ , soit  $\mathcal{F}_\varphi^{\leq h}(M)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{F}_\varphi(M)$  formé des  $\varphi$ -réseaux de  $u$ -hauteur  $\leq h$ . Étant donné que  $M$  est annulé par une puissance de  $p$ , on sait par la deuxième partie du lemme 2.5 que  $\mathcal{F}_\varphi(M)$  est la réunion des  $\mathcal{F}_\varphi^{\leq h}(M)$ . On en déduit qu'il existe un entier  $h$  tel que  $\mathcal{F}_\varphi^{\leq h}(M)$ , lui-même, est non vide. Par ailleurs, la relation d'inclusion fait de  $\mathcal{F}_\varphi^{\leq h}(M)$  un ensemble partiellement ordonné dont les propriétés essentielles sont dégagées dans [6], §3.2. En particulier, le corollaire 3.2.6 nous apprend que  $\mathcal{F}_\varphi^{\leq h}(M)$  admet un plus petit et un plus grand élément. La proposition 2.22 que nous voulons démontrer résulte ainsi directement du lemme suivant.

**Lemme 2.23.** *Le plus petit élément de  $\mathcal{F}_\varphi^{\leq h}(M)$  appartient à  $\mathcal{F}_{\varphi, \tau}^{\leq h}(M)$ .*

*Démonstration.* Pour cette démonstration, nous allons avoir besoin de travailler avec une version partiellement déperfectisée des  $(\varphi, \tau)$ -modules (voir §1.3.3). Plus précisément, on considère l'anneau  $\mathcal{E}_{u\text{-np}, \tau}^{\text{int}}$  introduit dans ce numéro et on pose  $\mathfrak{S}_{u\text{-np}, \tau} = W(R) \cap \mathcal{E}_{u\text{-np}, \tau}^{\text{int}}$ .

Soit  $\mathfrak{M}$  le plus petit élément de  $\mathcal{F}_\varphi^{\leq h}(M)$ . C'est en particulier un  $\varphi$ -réseau dans  $M$  de  $u$ -hauteur  $\leq h$ . Nous allons montrer que  $\mathfrak{S}_{u\text{-np},\tau} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  est stable par  $\tau$  ce qui impliquera, à l'évidence, que  $\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  est, lui aussi, stable par  $\tau$  comme voulu. On pose :

$$\mathfrak{M}' = M \cap \tau^{-1}(\mathfrak{S}_{u\text{-np},\tau} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}).$$

Du fait que  $\varphi$  et  $\tau$  commutent, on déduit facilement que  $\mathfrak{M}'$  est un  $\varphi$ -réseau dans  $M$ . Pour conclure, il suffit de montrer qu'il est de  $u$ -hauteur  $\leq h$ . En effet, par minimalité de  $\mathfrak{M}$ , on aura alors  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}'$  d'où, en appliquant  $\tau$ , on trouvera  $\tau(\mathfrak{M}) \subset \tau(\mathfrak{M}') \subset \mathfrak{S}_{u\text{-np},\tau} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Reste donc à montrer que  $\mathfrak{M}'$  est de  $u$ -hauteur  $\leq h$ . Soit  $x \in \mathfrak{M}'$ . Comme  $M$  et  $\mathfrak{S}_{u\text{-np},\tau} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  sont de  $u$ -hauteur  $\leq h$ , on a les écritures suivantes :

$$u^h x = \sum_{i=0}^{p-1} u^i \varphi(x_i) \quad \text{et} \quad u^h \tau(x) = \sum_{i=0}^{p-1} u^i \varphi(y_i) \quad (2.5)$$

avec  $x_i \in M$  et  $y_i \in \mathfrak{S}_{u\text{-np},\tau} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . On déduit de la deuxième de ces égalités et de la formule  $\tau(u) = [\underline{\varepsilon}]u$ , que :

$$u^h x = \sum_{i=0}^{p-1} u^i \varphi([\underline{\varepsilon}]^{(h-i)/p} y_i). \quad (2.6)$$

avec, à nouveau,  $[\underline{\varepsilon}]^{(h-i)/p} y_i \in \mathfrak{S}_{u\text{-np},\tau} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Or, du fait que  $\mathfrak{S}_{u\text{-np},\tau}$  est un  $\varphi(\mathfrak{S}_{u\text{-np},\tau})$ -module libre de base  $1, u, \dots, u^{p-1}$  (car c'est le cas après réduction modulo  $p$ ), on déduit des deux expressions de  $u^h x$  données respectivement par (2.6) et la première égalité de (2.5), que  $x_i = [\underline{\varepsilon}]^{(h-i)/p} y_i$  pour tout  $i \in \{0, \dots, p-1\}$ . Il s'ensuit que  $x_i \in \mathfrak{M}'$ , ce qui démontre que  $\mathfrak{M}'$  est de  $u$ -hauteur  $\leq h$  comme annoncé.  $\square$

### 2.3.2 Réduction modulo $UV$ des $(\varphi, \tau)$ -réseaux

On fixe un élément  $U \in \mathfrak{S}_\tau$  qui n'est pas multiple de  $p$  et on se donne un  $\varphi$ -réseau  $\mathfrak{M}$  de hauteur divisant  $U$  dans un  $\varphi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  (qui peut, oui ou non, avoir de la torsion). D'après le lemme 2.7, il existe  $V \in W(R)$  tel que  $\varphi(V) = UV$ . En réalité, un examen de la démonstration de ce lemme montre que  $V$  peut être choisi dans  $\mathfrak{S}_\tau$  (et même, en fait, qu'il ne peut être choisi en dehors de  $\mathfrak{S}_\tau$ ). On suppose, dans ce numéro, que  $V \in \mathfrak{S}_\tau$ . On pose en outre  $\mathfrak{S}_\tau^+ = \mathfrak{S}_\tau \cap W(\mathfrak{m}_R)$ ; c'est un idéal de  $\mathfrak{S}_\tau$  que l'on peut encore définir comme l'idéal noyau du morphisme  $\mathfrak{S}_\tau \rightarrow W(\bar{k})$  déduit de la projection canonique  $W(R) \rightarrow W(\bar{k})$ . Étant donné un entier  $p$ -adique  $a$ , ainsi qu'un élément  $X \in W(R)$ , on définit  $\mathcal{A}_X(\mathfrak{M})$  comme l'ensemble des automorphismes  $\tau^a$ -semi-linéaires

$$\tau_X^{(a)} : (\mathfrak{S}_\tau / X \mathfrak{S}_\tau^+) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \rightarrow (\mathfrak{S}_\tau / X \mathfrak{S}_\tau^+) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$$

commutant à  $\varphi$  et tels que pour tout  $g \in G_\infty / H_\infty$ , on ait

$$(g \otimes \text{id}) \circ \tau_X^{(a)} = (\tau_X^{(a)})^b \circ ((\tau^{ab} g \tau) \otimes \text{id}). \quad (2.7)$$

où  $b$  est l'unique élément de  $\mathbb{Z}_p$  tel que  $\chi(g) \cdot [b]_{\chi(\tau)} = [a]_{\chi(\tau)}$ . Si  $X$  divise  $Y$ , la réduction modulo  $X \mathfrak{S}_\tau^+$  définit une application canonique  $\rho_{Y,X} : \mathcal{A}_Y(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathcal{A}_X(\mathfrak{M})$ . Par ailleurs,  $\mathcal{A}_0(\mathfrak{M})$  est exactement l'ensemble des  $\tau$  qui font de  $\mathfrak{M}$  un  $(\varphi, \tau)$ -réseau. La proposition suivante, qui est très semblable à la proposition 2.9, montre que  $\mathcal{A}_0(\mathfrak{M})$  se retrouve entièrement à partir du morphisme  $\rho_{UV,V} : \mathcal{A}_{UV}(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathcal{A}_V(\mathfrak{M})$ .

**Proposition 2.24.** *On se donne  $\mathfrak{M}$  un  $\varphi$ -réseau de hauteur divisant  $U$  (avec  $U$  comme précédemment). L'application  $\rho_{0,V} : \mathcal{A}_0(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathcal{A}_V(\mathfrak{M})$  est injective et son image s'identifie à celle de  $\rho_{UV,V} : \mathcal{A}_{UV}(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathcal{A}_V(\mathfrak{M})$ .*

*Démonstration.* En utilisant la commutation de  $\tau^{-a}$  et  $\varphi$ , on démontre tout de suite que  $\mathfrak{M}$  est de hauteur divisant  $\tau^{-a}(U)$  pour tout  $a \in \mathbb{Z}_p$ . En reprenant la preuve de la proposition 2.9, on démontre alors qu'étant donné un élément  $\tau_{UV}^{(a)} \in \mathcal{A}_{UV}(\mathfrak{M})$ , il existe une unique application  $\tau^a$ -semi-linéaire  $\tau^{(a)} : \mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  qui commute à  $\varphi$  et est congrue à  $\tau_{UV}^{(a)}$  modulo  $V \mathfrak{S}_\tau^+$ . L'injectivité de  $\rho_{0,V}$  résulte de cela, tandis que pour établir l'égalité annoncée entre les images, il suffit de prouver que l'application  $\tau^{(a)}$  construite vérifie la relation (2.7).

Pour cela, le plus rapide est sans doute de remarquer qu'étant donné un élément  $b \in \mathbb{Z}_p$ , on peut appliquer ce qui précède avec  $ab$  à la place de  $a$ . On obtient comme cela en particulier l'existence d'une unique application  $\tau^{ab}$ -semi-linéaire  $\tau^{(ab)} : \mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  qui est congrue à  $(\tau_0^{(a)})^b$  modulo  $V\mathfrak{S}_\tau^+$  et qui commute à  $\varphi$ . Or, pour  $g \in G_\infty/H_\infty$  et  $b$  tel que  $\chi(g) \cdot [b]_{\chi(\tau)} = [a]_{\chi(\tau)}$ , les deux applications  $\tau^b$  et  $(g \otimes \text{id}) \circ \tau \circ ((\tau^{-b}g\tau)^{-1} \otimes \text{id})$  sont  $\tau^{ab}$ -semi-linéaires, congrues à  $(\tau_0^{(a)})^b$  modulo  $I_0$  et commutent à  $\varphi$ ; on en déduit donc bien qu'elles coïncident.  $\square$

La proposition 2.24 implique que, si  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{M}'$  sont deux  $(\varphi, \tau)$ -réseaux de hauteur divisant  $U$ , alors on a l'égalité :

$$\text{Hom}_{\varphi, \tau}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}') = \text{image}(\text{Hom}_{\varphi, \tau, UV}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}') \rightarrow \text{Hom}_{\varphi, \tau, V}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')) \quad (2.8)$$

où, si  $X$  est un élément de  $\mathfrak{S}_\tau$ , la notation  $\text{Hom}_{\varphi, \tau, X}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$  désigne l'ensemble des applications  $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$  qui commutent à  $\varphi$  et dont la réduction modulo  $X\mathfrak{S}_\tau^+$  commute à  $\tau \bmod X\mathfrak{S}_\tau^+$ . On en déduit que le foncteur de réduction modulo  $UV\mathfrak{S}_\tau^+$  induit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des  $(\varphi, \tau)$ -réseaux sur  $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_\tau)$  de hauteur divisant  $U$  dans la catégorie des  $(\varphi, \tau)$ -réseaux sur  $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_\tau/UV\mathfrak{S}_\tau^+)$  où les morphismes sont définis par la formule du membre de droite de (2.8).

### 2.3.3 L'action de $\tau$ sur un $(\varphi, \tau)$ -réseau

L'objectif de ce numéro est de démontrer le théorème suivant (qui jouera un rôle clé dans la suite) qui donne un contrôle sur l'action de  $\tau$  agissant sur un  $(\varphi, \tau)$ -réseau en fonction de la hauteur de celui-ci.

**Théorème 2.25.** *Il existe une constante  $c'(K)$  ne dépendant que de  $K$  telle que pour toute donnée de*

- deux éléments  $U$  et  $V$  de  $W(R)$  non multiples de  $p$  tels que  $\varphi(V) = UV$ , et
- un  $(\varphi, \tau)$ -réseau  $\mathfrak{M}$  de hauteur divisant  $U$  à l'intérieur d'un  $(\varphi, \tau)$ -module  $M$ ,

*on ait, en notant  $s_0$  le plus petit entier  $\geq \log_p(v_R(U \bmod p)) + c'(K)$ , l'inclusion suivante :*

$$(\tau^{p^s} - \text{id})(\mathfrak{M}) \subset (V\mathfrak{S}_\tau^+ + p^{s-s_0}\mathfrak{S}_\tau) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \quad (2.9)$$

*pour tout entier  $s \geq s_0$ .*

*Remarque 2.26.* On sait par le lemme 2.7 que, dès que l'on se donne un élément  $U \in W(R)$ , il existe  $V$  vérifiant la condition requise. En outre, d'après la remarque 2.8, l'idéal engendré par  $V$  — et donc en particulier l'inclusion (2.9) — ne dépend que de  $U$ . Ainsi, l'élément  $V$  ne joue pas véritablement de rôle dans le théorème précédent, hormis le fait qu'il permet de l'énoncer relativement simplement.

*Démonstration.* On se donne des éléments  $U, V \in W(R)$  tels que  $U$  ne soit pas multiple de  $p$  et  $\varphi(V) = UV$ . On fixe un  $(\varphi, \tau)$ -module  $M$  sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$  ainsi qu'un  $(\varphi, \tau)$ -réseau  $\mathfrak{M}$  de  $M$  de hauteur divisant  $U$ . Comme d'habitude, on désigne par la lettre  $T$  la représentation de  $G_K$  associée à  $M$ . On suppose en outre pour commencer que  $\mathfrak{M}$  est annulé par  $p^n$  pour un certain entier  $n$ , et on considère un nombre entier  $t$  vérifiant les deux conditions suivantes :

- on a  $\tau^{p^t}(u) \equiv u \pmod{p^n, UV\mathfrak{S}_\tau^+}$ ;
- il existe un élément  $\gamma_t \in G_\infty$  agissant trivialement sur  $T$  et tel que  $v_p(\chi(\gamma_t) - 1) = t$  (où  $v_p$  est la valuation  $p$ -adique normalisée par  $v_p(p) = 1$ ).

On expliquera, dans la suite de la démonstration, comment déterminer un tel  $t$ , mais pour l'instant on se contente de supposer qu'il est donné. Afin de minimiser les confusions, on notera tout au long de la preuve  $\tau_{\mathfrak{M}, \text{triv}}$  l'automorphisme  $\tau$  agissant sur  $\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . De  $\tau^{p^t}(u) \equiv u \pmod{p^n, UV\mathfrak{S}_\tau^+}$ , on déduit que l'application  $\tau^{p^t}$ -semi-linéaire

$$\tau_{\mathfrak{M}, \text{triv}}^{(p^t)} = \tau^{p^t} \otimes \text{id} : \frac{\mathfrak{S}_\tau}{UV\mathfrak{S}_\tau^+} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \rightarrow \frac{\mathfrak{S}_\tau}{UV\mathfrak{S}_\tau^+} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$$

est bien définie. La proposition 2.24 s'applique et montre qu'il existe une application  $\tilde{\tau}_{\mathfrak{M}, \text{triv}}^{(p^t)} : \mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  qui commute avec  $\varphi$ , vérifie la relation (2.7) et est congrue à  $\tau_{\mathfrak{M}, \text{triv}}^{(p^t)}$  modulo  $V\mathfrak{S}_\tau^+$ . L'automorphisme  $\tilde{\tau}_{\mathfrak{M}, \text{triv}}^{(p^t)}$  prolongé à  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M$  définit une structure de  $(\varphi, \tau^{p^t})$ -module sur  $\mathfrak{M}$  à laquelle il correspond une représentation  $T_{\text{triv}}$  du sous-groupe  $G_t$ . Puisque les représentations  $T$  et  $T_{\text{triv}}$  sont liées au même  $\varphi$ -module, leurs restrictions à  $G_\infty$  coïncident.

On rappelle que l'on a supposé l'existence d'un élément  $\gamma_t \in G_\infty$  qui agit trivialement sur  $T$  et qui est tel que  $v_p(\chi(\gamma_t) - 1) = t$ . L'élément  $\tau^{\chi_\tau(\gamma_t)-1}$  est égal au produit  $\gamma_t \tau \gamma_t^{-1} \tau^{-1}$  dans le quotient  $G_K/H_\infty$  ; autrement dit, il existe  $h \in H_\infty$  tel que  $\tau^{\chi_\tau(\gamma_t)-1} = \gamma_t \tau \gamma_t^{-1} \tau^{-1} h$ . On en déduit que  $\tau^{\chi_\tau(\gamma_t)-1}$  agit sur  $T$  de la même manière que  $h$ . Puisque  $\gamma_t$  appartient à  $G_\infty$ , il agit également trivialement sur  $T_{\text{triv}}$  et, en reprenant le raisonnement précédent, on trouve que  $\tau^{\chi_\tau(\gamma_t)-1}$  agit sur  $T_{\text{triv}}$  de la même façon que  $h$ . Au final, le sous-groupe de  $G_K$  engendré par  $G_\infty$  et  $\tau^{\chi_\tau(\gamma_t)-1}$  agit donc de la même façon sur  $T$  et  $T_{\text{triv}}$ . Or, par le lemme 1.1, on sait que la valuation  $p$ -adique de  $\chi_\tau(\gamma_t) - 1$  est égale à  $t$  ; le sous-groupe engendré par  $G_\infty$  et  $\tau^{\chi_\tau(\gamma_t)-1}$  n'est donc rien d'autre que  $G_t$ . Nous venons ainsi de démontrer que  $T_{\text{triv}}$  s'identifie à la représentation  $T$  restreinte au sous-groupe  $G_t$ . Au niveau des  $(\varphi, \tau)$ -modules, cela nous donne l'égalité  $\tau_{\mathfrak{M}}^{p^t} = \tilde{\tau}_{\mathfrak{M}, \text{triv}}^{(p^t)}$ , d'où il résulte notamment que  $\tau_{\mathfrak{M}}^{p^t} \equiv \tau^{p^t} \otimes \text{id} \pmod{V\mathfrak{S}_\tau^+}$ . Pour  $x \in \mathfrak{M}$ , on obtient en particulier  $\tau_{\mathfrak{M}}^{p^t}(x) \equiv x \pmod{V\mathfrak{S}_\tau^+}$ . Cette congruence reste clairement vraie si  $t$  est remplacée par un entier  $s \geq t$ . Autrement dit, on a l'inclusion

$$(\tau_{\mathfrak{M}}^{p^s} - \text{id})(\mathfrak{M}) \subset V\mathfrak{S}_\tau^+ \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \quad (2.10)$$

valable pour tout  $s \geq t$ .

Déterminons maintenant des conditions simples sur le nombre  $t$  permettant d'assurer qu'il satisfait aux deux hypothèses faites au début de la démonstration. On a en fait déjà étudié la deuxième hypothèse au §2.2.3 (voir en particulier la formule (2.4)) : on a montré qu'elle est vérifiée dès que

$$t \geq s_0(K) \quad \text{et} \quad t > \frac{c_0(K)}{e} + \max\left(\frac{1}{p-1}, n + \log_p\left(\frac{h}{e}\right)\right)$$

où  $s_0(K)$  et  $c_0(K)$  étaient des constantes ne dépendant que du corps  $K$ .

Examinons maintenant la première condition. Elle stipule que  $\tau^{p^t}(u) \equiv u \pmod{p^n, UV\mathfrak{S}_\tau^+}$ , c'est-à-dire que la réduction modulo  $p^n$  de  $\tau^{p^t}(u) - u$  est dans l'idéal  $UV \cdot W_n(\mathfrak{m}_R)$ . Or la différence  $\tau^{p^t}(u) - u$  se calcule facilement ; elle vaut  $u([\underline{\varepsilon}]^{p^t} - 1) \in W(R)$  où on rappelle que  $\underline{\varepsilon}$  est l'élément de  $R$  défini par le système compatible  $(\zeta_{p^s})$  de racines primitives  $p^s$ -ièmes de l'unité, qui avait été fixé au début de l'article. En particulier, étant donné que  $v_R(\underline{\varepsilon}) = \frac{p}{p-1}$ , on voit clairement sur cette écriture que  $\tau^{p^t}(u) - u \in W(\mathfrak{a}_R^{>p^{t+1}/(p-1)})$ . Par le lemme 2.13, on en déduit que la réduction modulo  $p^n$  de  $\tau^{p^t}(u) - u$  est dans l'idéal  $UV \cdot W_n(\mathfrak{m}_R)$  dès que  $p^t \geq hp^{n-1}$ , c'est-à-dire dès que  $t \geq n - 1 + \log_p h$ .

Au final, en mettant ensemble les résultats des deux alinéas précédents, on trouve qu'il existe une constante  $c'(K)$  ne dépendant que du corps  $K$  telle que tout nombre entier  $t \geq c'(K) + n + \log_p h$  vérifie les hypothèses requises. L'inclusion (2.10) est donc vraie pour de tels  $t$ .

On revient à présent dans la situation du théorème : on se donne un  $(\varphi, \tau)$ -réseau  $\mathfrak{M}$  de hauteur divisant  $U$  à l'intérieur d'un  $(\varphi, \tau)$ -module  $M$ , on appelle  $s_0$  le plus petit entier supérieur ou égal à  $c'(K) + \log_p h$  et on se donne un entier  $s \geq s_0$ . On pose  $n = s - s_0$ . L'inclusion (2.10) s'applique alors avec les paramètres  $\mathfrak{M}/p^n\mathfrak{M}$  (qui est manifestement annulé par  $p^n$ ) et  $s$  et donne :

$$(\tau_{\mathfrak{M}}^{p^s} - \text{id})(\mathfrak{M}/p^n\mathfrak{M}) \subset V\mathfrak{S}_\tau^+ \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}/p^n\mathfrak{M}$$

soit, encore :

$$(\tau_{\mathfrak{M}}^{p^s} - \text{id})(\mathfrak{M}) \subset (V\mathfrak{S}_\tau^+ + p^n\mathfrak{S}_\tau) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$$

c'est-à-dire ce que l'on souhaitait démontrer.  $\square$

*Remarque 2.27.* En supposant que  $\mathfrak{M}$  est annulé par  $p^n$  (et bien sûr toujours qu'il est de hauteur divisant  $U$ ), l'inclusion (2.10) — qui était la clé de la démonstration ci-dessus — s'étend aux entiers  $s < t$  sous la forme suivante :

$$(\tau_{\mathfrak{M}}^{p^s} - \text{id})(\mathfrak{M}) \subset (W_n(\mathcal{O}_{F_m}^{\text{perf}}) + V\mathfrak{S}_\tau^+) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$$

où, pour un entier  $m$  donné, on a noté  $\mathcal{O}_{F_m}^{\text{perf}}$  l'anneau des entiers du perfectisé de  $(F_0^{\text{sep}})^{H_m}$  avec  $H_m = \text{Gal}(\bar{K}/K_\infty(\zeta_{p^m}))$ . Pour démontrer cela, on fixe un entier  $s < t$ , et on considère un élément  $\gamma \in G_\infty$  tel que  $v_p(\chi(\gamma) - 1) \geq t - s$ . Le commutateur  $\gamma \tau^{p^s} \gamma^{-1} \tau^{-p^s}$  est alors égal à  $\tau^{p^s(\chi_\tau(\gamma)-1)}$  dans le quotient  $G_K/H_\infty$  et appartient donc à  $G_t$ . Ainsi, d'après ce qui a été vu dans la démonstration précédente, cet élément agit trivialement sur  $\mathfrak{M}$  modulo  $V\mathfrak{S}_\tau^+$ . Il en résulte que pour  $x \in \mathfrak{M}$ , on a  $(\gamma \otimes \text{id}) \circ \tau^{p^s}(x) \equiv \tau^{p^s}(x) \pmod{V\mathfrak{S}_\tau^+}$ . Comme ceci est vrai pour tout  $\gamma$  tel que  $v_p(\chi(\gamma) - 1) \geq t - s$ , on en déduit l'inclusion annoncée.

### 3 Le cas des représentations de $E(u)$ -hauteur finie

L'élément  $E(u)$  qui apparaît dans la locution «  $E(u)$ -hauteur finie » est le polynôme minimal de l'uniformisante  $\pi$  sur  $W[1/p]$ . Il s'agit d'un polynôme d'Eisenstein de degré  $e$ . C'est donc en particulier un élément de  $W(R)$  qui n'est pas multiple de  $p$ . Ainsi, il fait bien sens de parler de  $\varphi$ -modules de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$  pour un certain entier  $r$  ou de  $E(u)$ -hauteur finie. Une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation de  $G_\infty$  ou de  $G_K$  est dite de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$  (resp. de  $E(u)$ -hauteur finie) si le  $\varphi$ -module qui lui est associé l'est, tandis qu'une  $\mathbb{Q}_p$ -représentation est ainsi qualifiée si elle admet un réseau stable par Galois satisfaisant à cette propriété.

Reprenant des idées de Breuil, Kisin a élaboré dans [13] une théorie prometteuse pour étudier les représentations semi-stables (ainsi que leurs déformations) et a, au passage, montré que celles-ci entretenaient un lien étroit avec les représentations de  $E(u)$ -hauteur finie. Précisément, il a démontré qu'une représentation semi-stable dont tous les poids de Hodge-Tate sont dans  $\{0, 1, \dots, r\}$  est de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$ . Or, la théorie que nous avons développée dans cet article donne une description des représentations de  $G_K$  de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$  en termes de  $(\varphi, \tau)$ -modules. Dans ce dernier chapitre, nous étudions comment cette nouvelle description s'insère dans la théorie de Kisin. Comme corollaire, nous obtenons le théorème 3 de l'introduction, ainsi qu'une description, en termes de la théorie de Kisin, des réseaux dans les représentations semi-stables.

#### 3.1 Les $(\varphi, \tau)$ -modules comme complément de la théorie de Kisin

Le polynôme  $E(u)$  étant un polynôme d'Eisenstein, son coefficient constant  $E(0)$  s'écrit sous la forme  $pc$  où  $c$  est un élément inversible dans  $\mathbb{Z}_p$ . On pose  $U = \frac{E(u)}{c}$ ; il est alors clair qu'être de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$  est équivalent à être de  $U$ -hauteur  $\leq r$ . Soit  $t$  un élément de  $W(R)$  tel que  $\varphi(t) = Ut$  (un tel élément existe bien d'après le lemme 2.7).

##### 3.1.1 Un concentré de théorie de Kisin

On commence par quelques rappels très sommaires concernant l'anneau  $A_{\text{cris}}$  de Fontaine. Il est défini comme le complété  $p$ -adique de l'enveloppe à puissances divisées de  $W(R)$  par rapport à l'idéal principal engendré par  $E(u)$  (et compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal  $(p)$ ). La série

$$\log([\underline{x}]) = \sum_{n \geq 1} \frac{(1 - [\underline{x}])^n}{n}$$

converge dans  $A_{\text{cris}}$  vers un élément  $t$  qui joue un rôle très important en théorie de Hodge  $p$ -adique. Il vérifie  $\varphi(t) = pt$  et  $\gamma(t) = \chi(\gamma)t$  pour tout  $\gamma \in G_K$ .

On en vient à présent aux rappels sur la théorie de [13]. On se borne à présenter uniquement ce qui sera utile dans la suite. Soit  $\mathcal{O}$  l'anneau des séries en la variable  $u$  convergeant sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. Il contient clairement  $\mathfrak{S}[1/p]$  et se plonge dans  $A_{\text{cris}}$  en envoyant comme d'habitude  $u$  sur  $[\underline{x}]$ . L'élément  $\lambda$  défini par le produit convergeant suivant :

$$\lambda = \prod_{n=0}^{\infty} \varphi^n \left( \frac{E(u)}{E(0)} \right) = \prod_{n=0}^{\infty} \varphi^n \left( \frac{U}{p} \right) \in \mathcal{O}$$

est solution de l'équation  $\frac{U}{p} \cdot \varphi(\lambda) = \lambda$ . Par ailleurs, d'après l'exemple 5.3.3 de [18]<sup>7</sup>, il est possible de choisir  $t$  de façon à ce que l'égalité  $\varphi(\lambda t) = -t$  soit satisfaite, ce que nous supposons dans la suite. L'élément  $\lambda$  permet de munir l'anneau  $\mathcal{O}$  d'un opérateur de dérivation  $N_\nabla$  défini par  $N_\nabla = -u\lambda \frac{d}{du}$ , puis de définir la catégorie  $\text{Mod}_{\mathcal{O}}^{\varphi, N_\nabla}$  dont un objet consiste en la donnée des points suivants :

- un  $\mathcal{O}$ -module  $\mathcal{M}$  libre de rang fini ;
- un morphisme  $\varphi$ -semi-linéaire  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  qui est tel que le conoyau de  $\text{id} \otimes \varphi : \mathcal{O} \otimes_{\varphi, \mathcal{O}} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  soit annulé par une puissance de  $E(u)$  ;
- un opérateur  $N_\nabla : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  vérifiant la loi de Leibniz (i.e.  $N_\nabla(ax) = N_\nabla(a)x + aN_\nabla(x)$  pour tout  $a \in \mathcal{O}$  et  $x \in \mathcal{M}$ ) et la relation  $N_\nabla \circ \varphi = p \cdot \frac{E(u)}{E(0)} \cdot \varphi \circ N_\nabla$ .

7. Les notations de [18] correspondent à celles de cet article si l'on pose  $c = \varphi(\lambda)$ .

Si l'on note  $\text{Rep}_{[0,+\infty[}^{\text{st}}(G_K)$  la catégorie des représentations semi-stables de  $G_K$  à poids de Hodge Tate positifs ou nuls, un résultat essentiel de [13] est la construction d'un foncteur pleinement fidèle  $\mathcal{K} : \text{Rep}_{[0,+\infty[}^{\text{st}}(G_K) \rightarrow \text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_{\nabla}, 0}$ . On note  $\text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_{\nabla}, 0}$  son image essentielle<sup>8</sup>. Kisin démontre encore deux résultats importants pour ce qui va suivre, à savoir que pour tout objet  $\mathcal{M}$  de  $\text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_{\nabla}, 0}$ ,

- A. le  $\varphi$ -module  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}$  (muni de l'opérateur  $\varphi$  déduit par extension des scalaires) est étale et correspond *via* la théorie de Fontaine à la représentation  $\mathcal{K}^{-1}(\mathcal{M})$  restreinte à  $G_{\infty}$ , et
- B. pour tout réseau  $T \subset \mathcal{K}^{-1}(\mathcal{M})$  stable par  $G_{\infty}$ , il existe dans le  $\varphi$ -module sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  correspondant (qui vit à l'intérieur de  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}$ ) un unique  $\varphi$ -réseau libre sur  $\mathfrak{S}$  qui est de  $E(u)$ -hauteur finie.

La propriété B précédente permet de construire un foncteur  $\mathcal{R}_{\varphi} : \text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_{\nabla}, 0} \rightarrow \text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\varphi} \otimes \mathbb{Q}_p$ , où  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\varphi}$  désigne la catégorie des  $\varphi$ -réseaux de  $E(u)$ -hauteur finie (dans un  $\varphi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ ) libres sur  $\mathfrak{S}$ , et où  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\varphi} \otimes \mathbb{Q}_p$  est sa catégorie à isogénie près<sup>9</sup>. Enfin, si l'on note  $\mathcal{T}_{\varphi}$  le foncteur qui à un  $\varphi$ -réseau  $\mathfrak{M}$  fait correspondre la représentation de  $G_{\infty}$  associée à  $\mathcal{E} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ , et si l'on définit  $\text{Rep}_{[0,+\infty[}^{E(u)}(G_{\infty})$  comme la catégorie des représentations de  $G_{\infty}$  qui sont de  $E(u)$ -hauteur finie, la propriété A nous dit que la composée  $\mathcal{T}_{\varphi} \circ \mathcal{R}_{\varphi} \circ \mathcal{K}$  n'est autre que la restriction de l'action de  $G_K$  à  $G_{\infty}$ . Le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Rep}_{[0,+\infty[}^{\text{st}}(G_K) & \xrightarrow{\text{res}} & \text{Rep}_{[0,+\infty[}^{E(u)}(G_{\infty}) \\
 \mathcal{K} \downarrow \sim & & \uparrow \mathcal{T}_{\varphi} \\
 \text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_{\nabla}, 0} & \xrightarrow{\mathcal{R}_{\varphi}} & \text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\varphi} \otimes \mathbb{Q}_p
 \end{array} \tag{3.1}$$

dans lequel  $\text{res}$  désigne le foncteur de restriction de l'action de  $G_K$  à  $G_{\infty}$ , résume de façon concise — et, qui plus est, commode pour notre propos — les résultats de Kisin qui viennent d'être rappelés.

### 3.1.2 Une démonstration directe de l'unicité dans la propriété B

La démonstration que Kisin donne dans [13] de la propriété B énoncée précédemment utilise de façon essentielle des théorèmes difficiles portant sur les  $\varphi$ -modules sur l'anneau  $\mathcal{O}$ . Dans ce paragraphe, nous donnons une démonstration alternative de la partie « unicité », qui est plus élémentaire (et plus simple), dans le sens où elle ne fait intervenir à aucun moment ni l'anneau  $\mathcal{O}$ , ni la théorie de Kisin. Nous démontrons même un résultat très légèrement plus général qui s'énonce comme suit.

**Proposition 3.1.** *Soient  $\mathfrak{M}_1$  et  $\mathfrak{M}_2$  deux  $\varphi$ -réseaux libres sur  $\mathfrak{S}$  de  $E(u)$ -hauteur finie. Soit également un morphisme  $f : \mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_2$ . Alors  $f(\mathfrak{M}_1) \subset \mathfrak{M}_2$ .*

On rappelle avant d'entamer la démonstration que si  $\mathfrak{M}$  est un  $\varphi$ -réseau (pas nécessairement libre sur  $\mathfrak{S}$ ) à l'intérieur d'un  $\varphi$ -module  $M$  libre sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ , il résulte du théorème de classification des modules sur  $\mathfrak{S}$  que  $\text{Libre}(\mathfrak{M}) = (\mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{M}[1/p]$  est un  $\varphi$ -réseau libre sur  $\mathfrak{S}$ . En outre, si  $\mathfrak{M}$  est de  $E(u)$ -hauteur finie, il en est de même de  $\text{Libre}(\mathfrak{M})$  et les  $E(u)$ -hauteurs sont, dans ce cas, égales.

Quitte à remplacer  $\mathfrak{M}_1$  par  $\text{Libre}(f(\mathfrak{M}_1) + \mathfrak{M}_2)$  (qui est encore de  $E(u)$ -hauteur finie comme on le vérifie sans peine), on peut supposer que  $f$  est l'identité et que  $\mathfrak{M}_1$  contient  $\mathfrak{M}_2$ . Il s'agit alors de montrer que  $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$ . En passant aux déterminants, on peut supposer que  $\mathfrak{M}_1$  et  $\mathfrak{M}_2$  sont libres de rang 1 sur  $\mathfrak{S}$ . Si le vecteur  $e_1$  forme une base de  $\mathfrak{M}_1$ , il existe un élément  $a \in \mathfrak{S}$  tel que  $e_2 = ae_1$  soit une base de  $\mathfrak{M}_2$ . D'après une variante du théorème de préparation de Weierstrass (voir par exemple théorème 2.1, chap. 5 de [15]),  $a$  s'écrit comme le produit d'un élément inversible de  $\mathfrak{S}$  et d'un polynôme  $A(u)$  à coefficients dans  $W$  de la forme  $A(u) = u^d + p(a_{d-1}u^{d-1} + \dots + a_0)$ . On veut montrer que  $A(u)$  est inversible dans  $\mathfrak{S}$ , c'est-à-dire concrètement que  $d = 0$ . Soit  $A^{\sigma}$  le polynôme obtenu en appliquant le Frobenius sur  $W$  à tous les coefficients de  $A$ . On a  $\varphi(A(u)) = A^{\sigma}(u^p)$ . Du fait que, par hypothèse,  $\mathfrak{M}_2$  est un  $\varphi$ -module de hauteur  $E(u)$ -hauteur finie, on déduit l'existence d'un élément  $b \in \mathfrak{S}$  qui divise une puissance de  $E(u)$  dans  $\mathfrak{S}$  et qui vérifie l'égalité  $\varphi(e_2) = be_2$ .

**Lemme 3.2.** *L'élément  $b$  s'écrit sous la forme  $E(u)^n b'$  où  $n$  est un entier et  $b'$  est inversible dans  $\mathfrak{S}$ .*

8. Kisin donne en fait une caractérisation de cette image essentielle en termes de filtrations par les pentes à la Kedlaya. Nous ne détaillons par ce point dans ces rappels car il ne nous sera pas utile dans la suite.

9. Cela signifie que les objets sont les mêmes, mais que les ensembles de morphismes sont tensorisés par  $\mathbb{Q}$

*Démonstration.* Le fait que  $\mathfrak{S}$  soit un anneau intègre et que l'idéal principal engendré par  $E(u)$  soit premier (puisque le quotient s'identifie à l'anneau intègre  $\mathcal{O}_K$ ) implique le résultat dans le cas où  $b$  est un diviseur de  $E(u)$  (et non d'une puissance de  $E(u)$ ). Pour le cas général, on raisonne de la même façon par récurrence sur la plus petite puissance de  $E(u)$  que  $b$  divise.  $\square$

On utilise maintenant que  $\mathfrak{M}_1$  est, lui aussi, par hypothèse, un  $\varphi$ -module de  $E(u)$ -hauteur finie. La formule  $\varphi(e_1) = A^\sigma(u^p)be_2$  implique que  $A(u)$  divise  $A^\sigma(u^p)b$  dans  $\mathfrak{S}$  (puisque  $\mathfrak{M}_1$  est stable par  $\varphi$ ) et que le quotient  $\frac{A^\sigma(u^p)b}{A(u)}$  est divisible par une puissance de  $E(u)$  (puisque  $\mathfrak{M}_1$  est de  $E(u)$ -hauteur finie). En écrivant  $b$  sous la forme  $E(u)^nb'$  comme dans le lemme précédent, on obtient les deux divisibilités suivantes dans  $\mathfrak{S}$  :

$$A(u) \text{ divise } A^\sigma(u^p)E(u)^n \quad \text{et} \quad A^\sigma(u^p) \text{ divise } A(u)E(u)^m$$

pour un certain entier  $m$ . Quitte à augmenter  $n$  et  $m$ , on peut supposer que ces deux nombres sont strictement positifs. Comme  $\mathfrak{S} \subset \mathcal{O}$ , on peut évaluer les séries appartenant à  $\mathfrak{S}$  en tout élément de l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . Les divisibilités qui viennent d'être écrites assurent ainsi que toute racine du polynôme  $A(u)$  (resp.  $A^\sigma(u^p)$ ) qui appartient à l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$  est également racine du produit  $A^\sigma(u^p)E(u)^n$  (resp.  $A(u)E(u)^m$ ). On suppose à présent, par l'absurde, que  $d > 0$ . La théorie des polygones de Newton affirme que les polynômes  $A(u)$  et  $A^\sigma(u)$  admettent chacun  $d$  racines (comptées avec multiplicité) dans l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$  et que les valuations de ces racines, notées  $v_1, \dots, v_d$ , se correspondent deux à deux. On peut bien entendu supposer que les  $v_i$  sont triées par ordre croissant. Si  $x$  désigne une racine de  $A(u)$  de valuation  $v_d$  et si  $v_d < \infty$ , on ne peut avoir  $A^\sigma(x^p) = 0$  puisque la valuation de  $x^p$  dépasse tous les  $v_i$ . Ainsi, on a nécessairement  $E(x) = 0$ , ce qui signifie que  $x$  est un conjugué de  $\pi$ . En particulier,  $v_d$  ne peut valoir que  $+\infty$  ou  $1$ . De la même façon, si  $y$  désigne une racine  $p$ -ième d'une racine de  $A^\sigma(u)$  de valuation  $v_1$ , on a  $A(y) \neq 0$ , et donc  $E(y) = 0$ . Il s'ensuit que  $v_1 \in \{p, +\infty\}$ . Clairement la seule façon de concilier les contraintes que l'on vient d'obtenir est d'avoir  $v_i = +\infty$  pour tout  $i$ , c'est-à-dire  $A(u) = u^d$ . Mais, ce cas n'est pas non plus possible car  $A^\sigma(u) = u^{pd}$  ne divise manifestement pas  $A(u)E(u)^m = u^d E(u)^m$  si  $d$  est strictement positif. Ainsi se termine donc la démonstration de la proposition 3.1.

### 3.1.3 L'apport des $(\varphi, \tau)$ -modules

La théorie des  $(\varphi, \tau)$ -modules, qui a été développée dans cet article, fournit des objets qui s'insèrent de façon très naturelle dans le diagramme (3.1) et permet de le compléter de façon satisfaisante. C'est ce que nous nous proposons de présenter dans ce paragraphe. Plus précisément, nous allons construire le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Rep}_{[0, +\infty[}^{\text{st}}(G_K) & \hookrightarrow & \text{Rep}_{[0, +\infty[}^{E(u)}(G_K) & \xrightarrow{\text{res}} & \text{Rep}_{[0, +\infty[}^{E(u)}(G_\infty) \\
\downarrow \kappa \sim & & \uparrow \sim \mathcal{T}_{\varphi, \tau} & & \uparrow \sim \mathcal{T}_\varphi \\
\text{Mod}_{\mathcal{O}}^{\varphi, N_{\nabla}, 0} & \xrightarrow{\mathcal{R}_{\varphi, \tau}} & \text{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi, \tau} \otimes \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{\text{oubli de } \tau} & \text{Mod}_{\mathfrak{S}}^\varphi \otimes \mathbb{Q}_p \\
& & \searrow \mathcal{R}_\varphi & & 
\end{array} \tag{3.2}$$

Les notations  $\text{Rep}_{[0, +\infty[}^{E(u)}(G_K)$  et  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi, \tau}$  qui apparaissent dans le diagramme (3.2) font respectivement référence à la catégorie des représentations de  $G_K$  de  $E(u)$ -hauteur finie et à celle des  $(\varphi, \tau)$ -réseaux libres sur  $\mathfrak{S}$  de  $E(u)$ -hauteur finie. Le foncteur  $\mathcal{T}_{\varphi, \tau}$ , quant à lui, est celui qui fait correspondre à un  $(\varphi, \tau)$ -réseau  $\mathfrak{M}$  de  $E(u)$ -hauteur finie la représentation de  $G_K$  associée au  $(\varphi, \tau)$ -module  $\mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Le diagramme (3.2) indique que c'est une équivalence de catégories, ce qui est effectivement le cas :

**Proposition 3.3.** *Les foncteurs  $\mathcal{T}_\varphi$  et  $\mathcal{T}_{\varphi, \tau}$  sont des équivalences de catégories.*

*Démonstration.* La pleine fidélité des deux foncteurs suit de la proposition 3.1. L'essentielle surjectivité de  $\mathcal{T}_\varphi$  est vraie par définition des représentations de  $E(u)$ -hauteur finie. Il ne reste donc qu'à démontrer l'essentielle surjectivité de  $\mathcal{T}_{\varphi, \tau}$ , et il suffit pour cela de justifier que si  $\mathfrak{M}$  est un  $\varphi$ -réseau libre sur  $\mathfrak{S}$ , de  $E(u)$ -hauteur finie, dans un  $(\varphi, \tau)$ -module sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$ , alors  $\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  est automatiquement stable par  $\tau$ .

Soit  $h$  un entier tel que  $\mathfrak{M}$  soit de  $E(u)$ -hauteur  $\leq h$ . Pour tout entier  $n$ , on pose  $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}/p^n \mathfrak{M}$ . Bien entendu,  $\mathfrak{M}_n$  est, lui aussi, de  $E(u)$ -hauteur  $\leq h$ . Après avoir remarqué que le quotient  $\frac{\tau(E(u))}{E(u)}$  est

un élément inversible de  $\mathfrak{S}_{u\text{-np},\tau}$ , on peut reprendre l'argumentation développée au §2.3.1 en remplaçant partout «  $u$ -hauteur  $\leq h$  » par «  $E(u)$ -hauteur  $\leq h$  » et démontrer, ce faisant, qu'il existe dans  $\mathfrak{M}_n[1/u]$  un  $(\varphi, \tau)$ -réseau  $\mathfrak{M}'_n$  contenu dans  $\mathfrak{M}_n$ . D'autre part, par le lemme 4.1.2 de [18] (appliqués aux deux de  $\mathfrak{M}_n$  et  $\mathfrak{M}'_n$ ), il existe une constance  $c$  indépendante de  $n$  telle que  $\mathfrak{M}_n \subset p^c \cdot \mathfrak{M}'_n$ . On en déduit que  $\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_n$  est stable par l'opération  $p^c \tau$  puis, en passant à la limite, qu'il en est de même de  $\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Or, par construction, on sait également que  $\tau$  stabilise également  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Comme  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \cap (p^{-c} \mathfrak{S}_\tau) = \mathfrak{S}_\tau$ , on en déduit que  $\tau$  stabilise  $\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . La proposition est démontrée.  $\square$

On en vient enfin à la construction du foncteur  $\mathcal{R}_{\varphi,\tau} : \text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_\nabla, 0} \rightarrow \text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\varphi, \tau} \otimes \mathbb{Q}_p$ . On considère pour cela  $\mathcal{M}$  un objet de  $\text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_\nabla, 0}$ , et on fixe un réseau  $T$  de  $\mathcal{K}^{-1}(\mathcal{M})$  stable par  $G_K$ . Soit  $M$  le  $(\varphi, \tau)$ -module sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$  qui lui est associé. D'après la propriété B, il existe dans  $M$  un unique  $\varphi$ -réseau  $\mathfrak{M}$  qui est libre sur  $\mathfrak{S}$  et de  $E(u)$ -hauteur finie, et d'après la démonstration de la proposition 3.3, le produit tensoriel  $\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  est stable par  $\tau$ . L'objet  $\mathfrak{M}$  est donc un  $(\varphi, \tau)$ -réseau qui, à cause du choix de  $T$ , n'est défini qu'à isogénie près. Autrement dit, c'est un objet de la catégorie  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\varphi, \tau} \otimes \mathbb{Q}_p$ , et on peut donc poser  $\mathcal{R}_{\varphi,\tau}(\mathcal{M}) = \mathfrak{M}$ .

## 3.2 Un presque quasi-inverse de $\mathcal{R}_{\varphi,\tau}$

### 3.2.1 Énoncé des résultats

Du diagramme (3.2), il suit immédiatement que le foncteur  $\mathcal{R}_{\varphi,\tau}$  est pleinement fidèle. En contrepartie, il n'est généralement pas essentiellement surjectif. Ceci traduit le fait qu'il existe des représentations de  $E(u)$ -hauteur finie qui ne sont pas semi-stables. Pour construire un contre-exemple, on choisit  $K = \mathbb{Q}_p(\sqrt[p]{1})$  et on pose  $L = K(p_1)$  où  $p_1$  est une racine  $p$ -ième de  $p$  fixée. L'extension  $L/K$  est alors galoisienne et son groupe de Galois  $\text{Gal}(L/K)$  est cyclique d'ordre  $p$ . On peut donc faire agir ce dernier non trivialement sur un  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel  $V_1$  de dimension  $p$  (en permutant cycliquement les vecteurs d'une base). On obtient de cette façon une représentation  $V_1$  de  $G_K$  dont la restriction à  $G_\infty$  est triviale et donc de  $E(u)$ -hauteur finie. La proposition suivante, appliquée avec  $V_2 = \mathbb{Q}_p^p$  munie de l'action triviale, montre qu'elle n'est cependant pas semi-stable.

**Proposition 3.4.** *Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux représentations semi-stables de  $G_K$ . On suppose qu'il existe une extension totalement ramifiée  $L/K$  et un isomorphisme  $G_L$ -équivariant  $f : V_1 \rightarrow V_2$ . Alors  $f$  est  $G_K$ -équivariant.*

*Démonstration.* Exercice.  $\square$

Dans l'exemple que l'on vient de présenter, on observe que, certes, la représentation  $V_1$  n'est pas semi-stable mais qu'elle coïncide néanmoins avec une représentation semi-stable sur le sous-groupe  $G_1$ . Dans le langage des  $(\varphi, \tau)$ -modules, cela signifie que, certes, l'objet  $\mathfrak{M}$  de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\varphi, \tau} \otimes \mathbb{Q}_p$  correspondant à  $V_1$  n'est pas dans l'image essentielle de  $\mathcal{R}_{\varphi,\tau}$  mais qu'il existe néanmoins un objet  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_\nabla, 0}$  dont l'image par  $\mathcal{R}_{\varphi,\tau}$  est isomorphe à  $\mathfrak{M}$  comme  $(\varphi, \tau^p)$ -module. Il s'avère que ceci est un phénomène général, comme le précise le théorème suivant (qui sera démontré dans les §§3.2.3 et 3.2.4).

**Théorème 3.5.** *On suppose que  $K$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ <sup>10</sup>. Alors, il existe un unique foncteur  $\mathcal{S}_{\varphi, N_\nabla} : \text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\varphi, \tau} \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow \text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_\nabla, 0}$  tel que :*

- pour tout objet  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_\nabla, 0}$ , il y a un isomorphisme canonique

$$f_{\mathcal{M}} : \mathcal{S}_{\varphi, N_\nabla} \circ \mathcal{R}_{\varphi,\tau}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}$$

dans la catégorie  $\text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_\nabla, 0}$  ;

- pour tout objet  $\mathfrak{M} \in \text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\varphi, \tau} \otimes \mathbb{Q}_p$ , il y a un isomorphisme canonique

$$f_{\mathfrak{M}} : \mathcal{R}_{\varphi,\tau} \circ \mathcal{S}_{\varphi, N_\nabla}(\mathfrak{M}) \simeq \mathfrak{M}$$

qui commute à  $\varphi$  et à  $\tau^{p^s}$  où  $s$  désigne le plus grand entier tel que  $K_s/K$  soit galoisienne.

10. Il est probable que le théorème demeure sans cette hypothèse.

Si, de plus,  $\mathfrak{M}$  est de dimension  $d$  et si  $t$  est un entier tel que  $p^t(p-1) > d$ , alors l'isomorphisme  $f_{\mathfrak{M}}$  commute également à  $\tau^{p^t}$ .

Le théorème ci-dessus se transpose bien sûr directement dans le langage des représentations. Il affirme qu'il existe un unique foncteur  $\mathcal{S}$  allant de la catégorie de représentations de  $E(u)$ -hauteur finie dans celle des représentations semi-stables à poids de Hodge-Tate positifs qui jouit des deux propriétés suivantes :

- si  $V$  est une représentation semi-stable (et donc, en particulier de  $E(u)$ -hauteur finie d'après le résultat de Kisin), alors  $\mathcal{S}(V) \simeq V$ , et
- si  $V$  est une représentation de  $E(u)$ -hauteur finie, alors il existe un isomorphisme  $V \rightarrow \mathcal{S}(V)$  qui est  $G_s$ -équivariant (où  $s$  désigne à nouveau le plus grand entier tel que  $K_s/K$  soit galoisienne) et également  $G_t$ -équivariant pour tout entier  $t$  tel que  $p^t(p-1) > \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ .

Ce résultat implique clairement le théorème 3 de l'introduction. Par ailleurs, en combinant ce qui précède avec la proposition 3.4, on trouve que  $V$  est semi-stable si, et seulement si  $V$  est isomorphe à  $\mathcal{S}(V)$  (en tant que  $G_K$ -représentation) : le foncteur  $\mathcal{S}$  permet donc, en un sens, de caractériser les représentations semi-stables parmi celles qui sont de  $E(u)$ -hauteur finie.

### 3.2.2 Logarithmes tronqués

En guise de préliminaire à la démonstration du théorème 3.5, nous étudions dans ce numéro les applications *logarithmes tronqués* qui joueront un rôle essentiel dans la suite.

Soit  $A$  est une  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre topologique (non nécessairement commutative). Si  $a$  est un élément de  $A$  et si  $m$  est un entier strictement positif, on définit le *logarithme tronqué d'ordre  $m$*  de  $a$  par :

$$\log_m a = \sum_{i=1}^{p^m-1} \frac{(1-a)^i}{i}.$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la fonction  $\log_m$  vérifie des propriétés sympathiques sous des hypothèses de convergence très faibles. Plus précisément, on se donne  $\Lambda \subset A$  un sous- $\mathbb{Z}_p$ -module fermé et on introduit la définition suivante.

**Définition 3.6.** Un élément  $a \in A$  est dit  $\Lambda$ -borné à l'ordre  $m$  si  $\Lambda$  est stable par multiplication à gauche par  $a$  et si  $\frac{(1-a)^i}{i} \in \Lambda$  pour tout  $i \in \{1, \dots, p^m\}$ .

Si  $a$  est  $\Lambda$ -borné à tout ordre, on dira simplement que  $a$  est  $\Lambda$ -borné.

Pour tout entier  $i > 0$ , on note  $\ell(i)$  la partie entière de  $\log_p i$  et on convient que  $\ell(0) = 0$ . Si  $A$  est  $\Lambda$ -borné à l'ordre  $m$ , on a :

$$(1-a)^i = p^{\ell(i)} \cdot (1-a)^{i-p^{\ell(i)}} \cdot \frac{(1-a)^{p^{\ell(i)}}}{p^{\ell(i)}} \quad (3.3)$$

d'où on déduit que  $(1-a)^i \in p^{\ell(i)}\Lambda$  pour tout  $i \in \{1, \dots, p^m\}$  et  $(1-a)^i \in p^m\Lambda$  pour tout  $i > p^m$ .

**Proposition 3.7.** Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $A$   $\Lambda$ -bornés à l'ordre  $m$ . On suppose que  $a$  et  $b$  commutent. Alors  $ab$  est  $\Lambda$ -borné à l'ordre  $m$  et on a :

$$\log_m(ab) \equiv \log_m a + \log_m b \pmod{p^{m-1}\Lambda}$$

pour tout entier strictement positif  $m$ .

*Démonstration.* En élevant à la puissance  $i$  l'égalité  $1 - ab = (1-a) + a(1-b)$ , on obtient :

$$(1-ab)^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \cdot a^j (1-a)^{i-j} (1-b)^j.$$

En isolant le terme en  $j = 0$  et en utilisant l'égalité  $\frac{1}{i} \cdot \binom{i}{j} = \frac{1}{j} \cdot \binom{i-1}{j-1}$ , il vient :

$$\frac{(1-ab)^i}{i} = \frac{(1-a)^i}{i} + \sum_{j=1}^i \binom{i-1}{j-1} \cdot a^j (1-a)^{i-j} \cdot \frac{(1-b)^j}{j}$$

d'où il résulte déjà que  $ab$  est  $\Lambda$ -borné à l'ordre  $m$ . Maintenant, en sommant l'égalité précédente sur tous les  $i$  compris entre 1 et  $p^m - 1$ , on trouve :

$$\begin{aligned}\log_m(ab) &= \log_m a + \sum_{1 \leq j \leq i \leq p^m - 1} \binom{i-1}{j-1} \cdot a^j (1-a)^{i-j} \cdot \frac{(1-b)^j}{j} \\ &= \log_m a + \sum_{j=1}^{p^m-1} \left( a^j \cdot \sum_{i=j}^{p^m-1} \binom{i-1}{j-1} \cdot (1-a)^{i-j} \right) \cdot \frac{(1-b)^j}{j}\end{aligned}\quad (3.4)$$

Pour étudier le terme dans la parenthèse ci-dessus, on commence par remarquer qu'on a l'identité  $\sum_{i=0}^{\infty} X^i = \frac{1}{1-X}$  où  $X$  est une variable formelle. En dérivant  $j-1$  fois cette égalité, on obtient la nouvelle formule  $\sum_{i=j}^{\infty} \binom{i-1}{j-1} X^{i-j} = \frac{1}{(1-X)^j}$ , soit encore l'identité  $(1-X)^j \cdot \sum_{i=j}^{\infty} \binom{i-1}{j-1} X^{i-j} = 1$  valable dans l'anneau  $\mathbb{Z}[[X]]$  des séries formelles à coefficients entiers. Étant donné que  $1-X$  est inversible dans cet anneau, on en déduit la congruence :

$$(1-X)^j \cdot \sum_{i=j}^{p^m-1} \binom{i-1}{j-1} X^{i-j} \equiv 1 \pmod{X^{p^m-j}}.$$

En appliquant ce qui précède avec  $X = 1-a$  et en se rappelant, d'une part, que  $\Lambda$  est stable par multiplication par  $a$  (et donc aussi par  $1-a$ ) et, d'autre part, que, d'après l'égalité (3.3), l'élément  $(1-a)^{p^m-j}$  appartient à  $p^{\ell(p^m-j)}\Lambda$ , on obtient :

$$a^j \cdot \sum_{i=j}^{p^m-1} \binom{i-1}{j-1} \cdot (1-a)^{i-j} \equiv 1 \pmod{p^{\ell(p^m-j)}\Lambda}.$$

En reportant dans (3.4), on obtient :

$$\log_m(ab) - (\log_m a + \log_m b) \in \sum_{j=1}^{p^m-1} \frac{p^{\ell(p^m-j)+\ell(j)}}{j} \cdot \Lambda.$$

Pour conclure, il suffit donc de démontrer que, pour tout  $j$  compris entre 1 et  $p^m - 1$ , on a  $\ell(p^m - j) + \ell(j) - v_p(j) \geq m - 1$  (où  $v_p$  désigne la valuation  $p$ -adique). Or, on peut écrire un tel entier  $j$  sous la forme  $j = p^v \cdot j'$  avec  $j'$  premier à  $p$ . Un calcul immédiat donne alors :

$$\ell(p^m - j) + \ell(j) - v_p(j) = v + \ell(p^{m-v} - j') + \ell(j').$$

Si  $j' \geq \frac{p^{m-v}}{2}$ , on a  $\ell(j') \geq m - v - 1$  et l'inégalité voulue est bien vérifiée. Si, au contraire,  $j' < \frac{p^{m-v}}{2}$ , on a  $\ell(p^{m-v} - j') \geq m - v - 1$  et l'inégalité voulue est de même démontrée.  $\square$

**Proposition 3.8.** *Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $A$  qui sont  $\Lambda$ -bornés à l'ordre  $m$ . On suppose que  $a$  et  $b$  commutent et qu'ils sont congrus modulo  $p^m\Lambda$ . Alors  $\log_m(a) \equiv \log_m(b) \pmod{p^{m-1}\Lambda}$ .*

*Démonstration.* La factorisation

$$(1-a)^i - (1-b)^i = (b-a) \cdot \left( (1-a)^{i-1} + (1-a)^{i-2}(1-b) + \dots + (1-b)^{i-2} \right)$$

montre que la différence  $\frac{(1-a)^i}{i} - \frac{(1-b)^i}{i}$  appartient à  $\sum_{j=0}^{i-1} p^{m+\ell(j)+\ell(i-j)-v_p(i)}\Lambda$ . Or, si  $j \geq \frac{i}{2}$ , on a  $\ell(j) \geq \ell(i) - 1$  tandis que, dans le cas contraire, on a  $\ell(i-j) \geq \ell(i) - 1$ . Ainsi on a toujours  $m + \ell(j) + \ell(i-j) - v_p(i) \geq m + \ell(i) - 1 - v_p(i) \geq m - 1$  et la proposition en découle.  $\square$

**Corollaire 3.9.** *Soit  $a \in A$  un élément  $\Lambda$ -borné à l'ordre  $m$ . On suppose que  $a^{p^s}$  converge vers 1 dans  $A$  quand  $s$  tend vers l'infini. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z}_p$  :*

$$\log_m(a^n) \equiv n \cdot \log_m(a) \pmod{p^{m-1}\Lambda}.$$

*Démonstration.* On remarque, pour commencer, que l'on peut écrire :

$$a^{p^m} = (1 + (a - 1))^{p^m} = \sum_{j=0}^{p^m} \binom{p^m}{j} (a - 1)^j.$$

Sachant que, pour tout  $j \in \{1, \dots, p^m\}$ , la valuation  $p$ -adique du coefficient binomial  $\binom{p^m}{j}$  est égale à  $m - v_p(j)$ , on déduit de l'égalité précédente et du fait que  $a$  est  $\Lambda$ -borné à l'ordre  $m$  que  $a^{p^m} \equiv 1 \pmod{p^m \Lambda}$ .

On choisit à présent un entier  $n'$  congru à  $n$  modulo  $p^m$  et on écrit  $n = n' + p^m q$  pour un certain  $q \in \mathbb{Z}_p$ . On a alors  $a^n = a^{n'} \cdot (a^{p^m})^q$ . Par ailleurs, on sait que  $a^{p^m}$  s'écrit sous la forme  $1 + b$  avec  $b \in p^m \Lambda$ . Comme  $\Lambda$  est stable par multiplication par  $a$ , il l'est aussi par multiplication par  $b$ . Comme il est en outre fermé, on trouve en développant  $(1 + b)^q$ , que  $(a^{p^m})^q \equiv 1 \pmod{p^m \Lambda}$  puis que  $a^n \equiv a^{n'} \pmod{p^m \Lambda}$ . Par la proposition 3.7, il vient alors  $\log_m(a^n) \equiv \log_m(a^{n'}) \pmod{p^{m-1} \Lambda}$  et une application répétée de la proposition 3.8 montre enfin que

$$\log_m(a^{n'}) \equiv n' \cdot \log_m(a) \equiv n \cdot \log_m(a) \pmod{p^{m-1} \Lambda}$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

### 3.2.3 La construction du foncteur $\mathcal{S}_{\varphi, N_{\nabla}}$

On en vient à présent à la démonstration du théorème 3.5. On suppose donc que  $K$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ ; en particulier, son corps résiduel  $k$  est un corps fini. Étant donné que les catégories  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi, \tau} \otimes \mathbb{Q}_p$  sont équivalentes entre elles pour les différents  $\tau$ , on peut choisir un  $\tau$  particulier pour construire  $\mathcal{S}_{\varphi, N_{\nabla}}$ . Pour la suite, on en fixe donc un qui appartient à l'inertie sauvage (de sorte que  $\tau^{p^n}$  converge vers l'identité dans  $G_K$ ) et qui vérifie en outre  $\chi(\tau) = 1$  (on rappelle qu'un tel élément existe toujours par le lemme 5.1.2 de [17]).

Soit  $\mathfrak{M}$  un objet de la catégorie  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi, \tau} \otimes \mathbb{Q}_p$ , c'est-à-dire un  $(\varphi, \tau)$ -réseau défini sur  $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_{\tau})$  qui est de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$  pour un certain entier  $r$ . La définition du foncteur  $\mathcal{R}_{\varphi, \tau}$  conduit à poser simplement  $\mathcal{S}_{\varphi, N_{\nabla}}(\mathfrak{M}) = \mathcal{O} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  pour définir sa structure de  $\mathcal{O}$ -module, et à munir celui-ci du Frobenius  $\varphi \otimes \varphi$ . Ne reste donc plus qu'à définir l'opérateur  $N_{\nabla}$ . La discussion menée dans le §5.1 de [17] montre que celui-ci doit s'obtenir *via* la formule :

$$N_{\nabla} = \frac{1}{pt} \cdot \log \tau = \frac{1}{pt} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\text{id} - \tau)^i}{i}.$$

Toutefois, il n'est pas clair que cette formule ait un sens puisque aussi bien la division par  $t$  que la convergence de la somme posent *a priori* problème. Nous allons démontrer dans la suite que ce n'est pas le cas, puis que l'opérateur  $N_{\nabla}$  ainsi obtenu est défini sur  $\mathcal{O}$ . Lors de la démonstration, nous allons être amené à introduire un certain nombre de modules sur  $\mathfrak{S}$ ; pour donner au lecteur une vision d'ensemble de la situation, nous les avons regroupés dans le diagramme de la figure 2.

**L'espace  $W(R)^{\text{dp}}$**  On rappelle que  $A_{\text{cris}}$  est défini comme le complété  $p$ -adique de l'enveloppe à puissances divisées de  $W(R)$  par rapport à l'idéal principal engendré par l'élément  $E(u)$  vu dans  $W(R)$ . Suivant les notations habituelles, on pose  $B_{\text{cris}}^+ = A_{\text{cris}}[1/p]$ . Pour tout entier  $m$ , on définit  $W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$  comme le sous  $W(R)$ -module de  $B_{\text{cris}}^+$  engendré par  $W(R)$  et les éléments de la forme  $\frac{t^{p^s}}{p^s} x$  pour  $0 \leq s \leq m$  et  $x \in W(\mathfrak{m}_R)$ .

Clairement, les  $W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$  forment une suite croissante pour l'inclusion; on note  $W(R)^{\text{dp}}$  l'adhérence dans  $B_{\text{cris}}^+$  de  $\bigcup_{m \geq 0} W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$ . Les éléments de cet espace sont les éléments de  $B_{\text{cris}}^+$  qui s'écrivent sous la forme  $x_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{t^{p^s}}{p^s} x_s$  avec  $x_0 \in W(R)$  et  $x_s \in W(\mathfrak{m}_R)$  pour  $s \geq 1$  (on notera qu'il n'y a aucune condition de convergence à imposer sur les  $x_s$  pour que la somme converge). De l'égalité  $\varphi(t) = Ut$ , on déduit que les  $W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$  sont tous stables par  $\varphi$ . Ils sont également stables par l'action de  $G_K$  étant donné que l'on a, d'une part,  $g(t) = \chi(g) \cdot t$  pour tout  $g \in G_{\infty}$  et que, d'autre part, on sait que le quotient  $\frac{\tau(t)}{t}$  est un élément de  $W(R)$  (voir le deuxième exemple du §1.3.4).

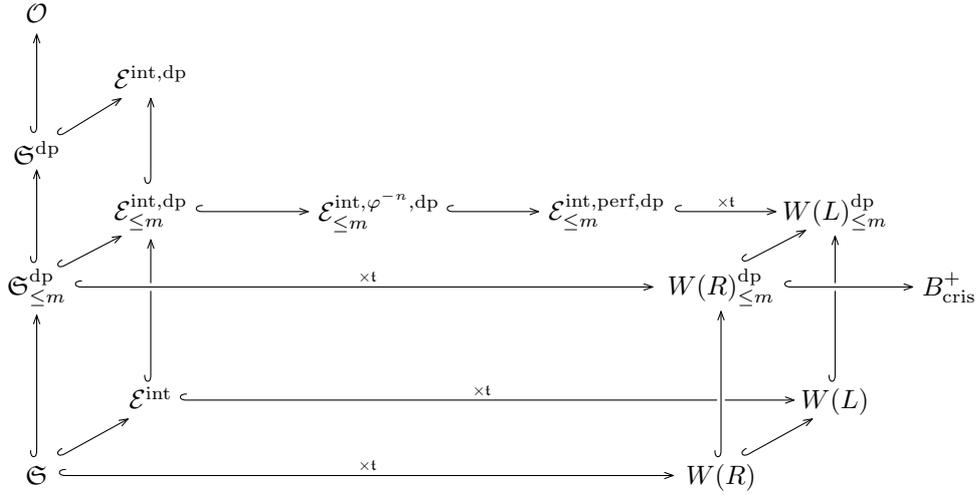


FIGURE 2 – Divers  $\mathfrak{S}$ -modules intervenant dans la démonstration du théorème 3.5

La stratégie de la preuve est la suivante. On construit d'abord des versions tronquées  $\log_m \tau$  de l'opérateur  $\log \tau$  qui dépendent d'un entier  $m$  et sont définies *a priori* sur l'anneau  $W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$ . On montre ensuite que, modulo des termes qui tendent vers 0 avec  $m$ , ces versions tronquées sont définies sur  $\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int,dp}}$  empruntant le chemin suivant :  $W(L)_{\leq m}^{\text{dp}}$ ,  $\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int,perf,dp}}$ ,  $\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int,\varphi}^{-n},\text{dp}}$  puis  $\mathcal{E}^{\text{int,dp}}$ . On recolle ensuite les  $\log_m \tau$  pour former un véritable opérateur  $\log \tau$  défini sur  $\mathcal{E}^{\text{int,dp}}$  et on démontre pour finir que celui-ci est en réalité défini sur un certain localisé explicite de  $\mathfrak{S}^{\text{dp}}$  qui s'injecte dans  $\mathcal{O}$ .

**Proposition 3.10.** *Il existe une constante  $c$  (qui dépend de  $\mathfrak{M}$ ) telle que, pour tout entier  $i \in \{1, \dots, p^m\}$ , on ait :*

$$\frac{(\text{id} - \tau)^i}{i}(\mathfrak{M}) \subset p^{-c} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}.$$

Pour cette même constante  $c$ , on a également :

$$\frac{(\text{id} - \tau)^i}{i}(\mathfrak{M}) \subset p^{-c} \cdot W(R)^{\text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$$

pour tout entier  $i \geq 1$ .

*Démonstration.* On vérifie que  $\frac{(\text{id} - \tau)^i}{i} = \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{i-1}{j-1} \frac{\tau^j - \text{id}}{j}$ . Il suffit donc de montrer que, pour tout  $j \in \{1, \dots, p^m\}$ , on a

$$\left( \frac{\tau^j - \text{id}}{j} \right) (\mathfrak{M}) \subset p^{-c} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$$

pour une certaine constante  $c$ . De plus, étant donné que  $W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$  est stable par  $\tau$ , il suffit de vérifier l'inclusion précédente lorsque  $j$  est une puissance de  $p$ , i.e.  $j = p^s$  avec  $s \leq m$ . Comme  $\mathfrak{M}$  est de  $E(u)$ -hauteur finie, il est de  $E(u)$ -hauteur  $\leq p^h$  pour tout  $h$  supérieur ou égal à un entier  $h_0$ . Le théorème 2.25 affirme alors qu'il existe une constante  $c' \geq 0$  ne dépendant que de  $K$  telle que pour tout  $h$  compris entre  $h_0$  et  $s - c'$ , on ait l'inclusion :

$$(\tau^{p^s} - \text{id})(\mathfrak{M}) \subset (t^{p^h} W(\mathfrak{m}_R) + p^{s-h-c'} W(R)) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}.$$

En prenant l'intersection sur tous les  $h$ , on obtient :

$$(\tau^{p^s} - \text{id})(\mathfrak{M}) \subset p^{s-c'} \cdot \left( p^{-h_0} W(R) + \sum_{h=h_0}^{s-c'} \frac{t^{p^h}}{p^h} W(\mathfrak{m}_R) \right) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}.$$

Or, puisque  $s \leq m$ , ce dernier espace est inclus dans  $\mathfrak{M} \subset p^{s-c} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  avec  $c = c' + h_0$ . La proposition en résulte.  $\square$

Le lemme ci-dessus montre que le terme général de la série  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\text{id}-\tau)^i}{i}(x)$  (pour  $x \in \mathfrak{M}$ ) définissant  $(\log \tau)(x)$  vit dans un espace « borné » (dans le sens où les dénominateurs en  $p$  sont contrôlés). Ceci nous autorise à utiliser les résultats du §3.2.2 sur les logarithmes tronqués avec  $a = \tau$ . Plus précisément, soit  $A$  l'algèbre des applications  $\mathbb{Q}_p$ -linéaires de  $B_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  dans lui-même et, pour tout entier  $m$ , soit  $\Lambda_m$  le sous-ensemble de  $A$  formé des fonctions qui envoient  $\mathfrak{M}$  sur  $p^{-c} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . La proposition 3.10 dit alors exactement que  $\tau \in A$  est  $\Lambda_m$ -borné à l'ordre  $m$ . Les propositions 3.7, 3.8 et le corollaire 3.9 peuvent donc être appliqués dans ce contexte. On retiendra en particulier que pour tout  $n \in \mathbb{Z}_p$ , tout entier  $m$  et tout  $x \in \mathfrak{M}$ , on a la congruence :

$$(\log_m \tau^n)(x) \equiv n \cdot (\log_m \tau)(x) \pmod{p^{m-c-1} W(R)_{\leq m}^{\text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}}. \quad (3.5)$$

qui nous sera bien utile dans la suite.

La suite de la démonstration consiste à borner, par étapes successives, l'image des applications  $\log_m \tau$  définie sur  $\mathfrak{M}$  jusqu'à arriver à un espace suffisamment petit qui nous permettra en quelque sorte de recoller les  $\log_m \tau$  pour former une authentique application  $\log \tau$ . On montrera alors que celle-ci prend ses valeurs dans  $t\mathcal{O} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ , ce qui nous permettra de définir l'opérateur  $N_{\nabla}$  que nous avons évoqué précédemment et, par suite, de conclure.

**Un argument galoisien** Le premier argument utilisé pour restreindre l'image de  $\log_m \tau$  met à profit la relation de commutation (1.6) qui apparaît dans la définition des  $(\varphi, \tau)$ -modules. Étant donné que  $\chi(\tau) = 1$ , celle-ci s'écrit simplement  $\tau^{\chi(g)} = (g \otimes \text{id}) \circ \tau \circ (g \otimes \text{id})^{-1}$  (pour  $g \in G_{\infty}/H_{\infty}$ ), l'égalité ayant lieu dans l'espace des endomorphismes de  $\mathfrak{S}_{\tau} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . En prenant le logarithme et en utilisant (3.5), on obtient, pour tout  $x \in \mathfrak{M}$ , la congruence

$$\chi(g) \cdot (\log_m \tau)(x) \equiv (g \otimes \text{id}) \circ (\log_m \tau)(x) \pmod{p^{m-c-1} W(R)_{\leq m}^{\text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}}. \quad (3.6)$$

(on rappelle que  $G_{\infty}$  agit trivialement sur  $\mathfrak{M}$ ). On en déduit que  $\log_m \tau(x) \in p^{-c} \cdot X_{m, m-1} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  où

$$X_{m, n} = \left\{ \xi \in W(R)_{\leq m}^{\text{dp}} \mid \forall g \in G_{\infty}, g(\xi) \equiv \chi(g)\xi \pmod{p^n W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}} \right\}$$

et  $c$  est la constante introduite dans la proposition 3.10. On est ainsi amené à étudier les  $X_{m, n}$ . Pour cela, on rappelle que l'on avait posé  $L = \text{Frac } R$  et que l'on note  $v_p$  la valuation  $p$ -adique normalisée par  $v_p(p) = 1$ . On introduit l'espace  $W(L)_{\leq m}^{\text{dp}} = W(L) + W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$  (où la somme est calculée dans  $p^{-m} W(L)$ ) et on note  $\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int, perf, dp}}$  l'ensemble des séries (formelles) de la forme

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}[1/p]} a_q u^q, \quad a_q \in p^{-m} \cdot W$$

vérifiant les conditions de convergence suivantes :

- a) pour tout entier  $n \geq 0$ , on a  $v_p(a_q) \geq -n$  dès que  $q \leq e \cdot \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$  ;
- b) le coefficient  $a_q$  tend vers 0 lorsque  $q$  tend vers  $-\infty$  ;
- c) pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble des  $q \in \mathbb{Z}[1/p]$  tels que  $|a_q|_p > \varepsilon$  est discret <sup>11</sup>.

**Lemme 3.11.** *L'élément  $t$  appartient à  $W(\mathfrak{m}_R)$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de démontrer que l'image  $\bar{t}$  de  $t$  dans  $W(\bar{k})$  est nulle. Or, en réduisant l'équation  $\varphi(t) = Ut$  dans  $W(\bar{k})$ , on trouve  $\sigma(\bar{t}) = p\bar{t}$  où  $\sigma$  désigne le Frobenius naturel sur  $W(\bar{k})$ . En prenant les valuations, on obtient  $v_K(\bar{t}) = v_K(\bar{t}) + 1$ , ce qui n'est possible que si  $\bar{t}$  est nul.  $\square$

Le lemme 3.11 ci-dessus, le fait que  $v_R(t \bmod p) = \frac{e}{p-1}$  ainsi que les conditions a), b) et c) qui apparaissent dans la définition de  $\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int, perf, dp}}$  assurent que l'association  $\sum_q a_q u^q \mapsto t \sum_q a_q [\pi^q]$  définit un morphisme  $\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int, perf, dp}} \rightarrow W(L)_{\leq m}^{\text{dp}}$  pour tout  $m$ . Celui-ci est injectif car la multiplication par  $t$  est déjà

11. Avec la condition précédente, cela revient à dire qu'il intersecte tous les intervalles  $] -\infty, A]$  selon un ensemble fini.

injective sur  $p^{-m} \cdot W(L)$  (et que tout est plongé dans cet espace); dans la suite, son image sera notée  $\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int,perf,dp}}(1)$  et l'image d'un élément  $x \in \mathcal{E}^{\text{int,perf,dp}}$  dans  $W(L)^{\text{dp}}$  sera notée simplement  $\mathfrak{t}x$ .

Pour simplifier les écritures, on pose dans la suite  $s_m(n) = e \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1}$  lorsque  $n$  est élément de  $\{1, \dots, m\}$  et on convient que  $s_m(0) = -\infty$  pour tout  $m$  et  $s_m(n) = +\infty$  pour  $n > m$ . Soit également  $F_0^{\text{perf}}$  l'adhérence dans  $L = \text{Frac } R$  du perfectisé de  $F_0$ . Pour tout  $v \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , on note  $\mathfrak{a}_{F_0^{\text{perf}}}^{>v}$  l'ensemble des éléments de  $F_0^{\text{perf}}$  de valuation strictement supérieure à  $v$  et on convient que  $\mathfrak{a}_{F_0^{\text{perf}}}^{>-\infty} = 0$ .

**Lemme 3.12.** *Pour tout entier  $m$ , on a un isomorphisme canonique :*

$$\prod_{n=0}^m \frac{\mathfrak{a}_{F_0^{\text{perf}}}^{>s_m(n)}}{\mathfrak{a}_{F_0^{\text{perf}}}^{>s_m(n+1)}} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int,perf,dp}}}{p \mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int,perf,dp}}}.$$

*Démonstration.* La clé consiste à remarquer que  $F_0^{\text{perf}}$  s'identifie à l'ensemble des séries  $\sum_{q \in \mathbb{Z}[1/p]} a_q u^q$  telles que  $a_q \in k$  pour tout  $q$  et satisfaisant aux conditions b) et c) mentionnées précédemment et que, sous cette identification,  $\mathfrak{a}_{F_0^{\text{perf}}}^{>v}$  correspondant aux séries pour lesquelles  $a_q = 0$  pour tout  $q \leq v$ . Le morphisme qui apparaît dans l'énoncé du lemme est alors celui qui envoie une famille  $(P_n)_{n \geq 0}$  sur la somme  $\sum_{0 \leq n \leq m} p^{-n} P_n$ . Le fait qu'il soit bien défini et qu'il réalise un isomorphisme entre les espaces considérés est enfin une vérification immédiate.  $\square$

De même, on démontre que, pour tout entier  $m$ , on a un isomorphisme canonique :

$$\prod_{n=0}^m \frac{\mathfrak{a}_L^{>s(n)}}{\mathfrak{a}_L^{>s(n+1)}} \xrightarrow{\sim} \frac{W(L)_{\leq m}^{\text{dp}}}{p W(L)_{\leq m}^{\text{dp}}} \quad (3.7)$$

où la flèche provient de la multiplication par  $\mathfrak{t}$ .

**Proposition 3.13.** *Pour tous entiers  $n$  et  $m$ , on a :*

$$\left\{ x \in \frac{W(L)_{\leq m}^{\text{dp}}}{p^n W(L)_{\leq m}^{\text{dp}}} \mid \forall g \in G_\infty, g(x) = \chi(g)x \right\} = \frac{\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int,perf,dp}}(1)}{p^n \mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int,perf,dp}}(1)}.$$

*Démonstration.* Étant donné que  $G_\infty$  agit trivialement sur les éléments  $[\underline{x}^q]$  et par la formule  $g(\mathfrak{t}) = \chi(g)\mathfrak{t}$  sur l'élément  $\mathfrak{t}$ , l'ensemble de droite est inclus dans celui de gauche. Comme ils sont tous deux complets pour la topologie  $p$ -adique (puisque annulés par une puissance de  $p$ ), il suffit de démontrer qu'il y a égalité modulo  $p$ , c'est-à-dire lorsque  $n = 1$ . Dans ce cas, c'est une conséquence immédiate du lemme 3.12 de la formule (3.7) et de la proposition 1.13.  $\square$

Il résulte de la proposition que l'ensemble  $X_{n,m}$  défini plus haut est inclus dans  $\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int,perf,dp}}(1) + p^n W(L)_{\leq m}^{\text{dp}}$  et donc que, pour tout entier  $m$ , l'application  $\log_m \tau$  envoie  $\mathfrak{M}$  sur  $p^{-c} \cdot (\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int,perf,dp}}(1) + p^{m-1} W(L)_{\leq m}^{\text{dp}}) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ .

**Une relation de Leibniz** Le but de ce paragraphe est de démontrer que les opérateurs  $\log_m \tau$  vérifient des relations de Leibniz approchées qui nous seront utiles par la suite. Pour tout entier  $m$ , on pose :

$$t_m = \log_m[\underline{\varepsilon}] = \sum_{i=1}^{p^m-1} \frac{(1 - [\underline{\varepsilon}])^i}{i}.$$

Du fait que  $v_R(1 - \underline{\varepsilon}) = \frac{ep}{p-1} < v_R(\mathfrak{t} \bmod p) = \frac{e}{p-1}$ , on déduit que  $t_m \in W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$  pour tout  $m$ .

**Proposition 3.14.** *Pour tout entier  $m$ , tout  $a \in \mathfrak{S}$  et tout  $x \in \mathfrak{M}$ , on a la congruence :*

$$(\log_m \tau)(ax) \equiv t_m \cdot u \frac{da}{du} \cdot x + a \cdot (\log_m \tau)(x) \pmod{p^{m-c-1} W(R)_{\leq m}^{\text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}}$$

où la constante  $c$  est celle de la proposition 3.10.

*Démonstration.* Par continuité et  $W$ -linéarité, il suffit de démontrer la proposition lorsque  $a$  est une puissance de  $u$ . Dans ce cas, on part de la relation de commutation  $\tau \circ u^n = u^n [\underline{\varepsilon}]^n \circ \tau$ . En revenant à la définition du logarithme tronqué, on en déduit que  $(\log_m \tau) \circ u^n = u^n \circ \log_m([\underline{\varepsilon}]^n \circ \tau)$ . Comme  $\tau$  commute à la multiplication par  $[\underline{\varepsilon}]$  (étant donné que  $\tau$  fixe cet élément), et que la multiplication  $[\underline{\varepsilon}]$  est  $\Lambda_m$ -borné à l'ordre  $m$  (pour l'espace  $\Lambda_m$  défini juste après la démonstration de la proposition 3.10), la proposition 3.7 s'applique et entraîne la congruence :

$$(\log_m \tau) \circ u^n \equiv nu^n t_m + u^n \log_m \tau \pmod{p^{m-1} u^n \Lambda_m}$$

Comme  $\Lambda_m$  est stable par multiplication par  $u^n$ , la même congruence est *a fortiori* vraie modulo  $p^{m-1} \cdot \Lambda_m$  et la formule annoncée dans la proposition en résulte.  $\square$

**L'élément  $t_m$**  On rappelle que  $W(R)$  est muni d'un morphisme d'anneaux  $\theta$  à valeurs dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  défini comme l'anneau des entiers du complété  $p$ -adique de  $\bar{K}$ . Il est bien connu que le noyau de  $\theta$  est un idéal principal engendré par n'importe lequel de ses éléments dont la réduction modulo  $p$  a pour valuation  $e$ . Des exemples de tels éléments sont  $E(u)$  ou encore  $\frac{[\underline{\varepsilon}]-1}{[\underline{\varepsilon}^{1/p}]-1} = \frac{\eta}{\varphi^{-1}(\eta)}$ . On introduit l'idéal :

$$F^1 W(R) = \{ x \in W(R) \mid \theta(\varphi^i(x)) = 0, \forall i \}.$$

**Lemme 3.15.** *On a  $F^1 W(R) = \varphi(\mathfrak{t}) \cdot W(R) = (1 - [\underline{\varepsilon}]) \cdot W(R)$ .*

*Démonstration.* On donne uniquement la démonstration de la première égalité, la seconde étant absolument analogue. Pour tout entier  $i > 0$ , l'élément  $\varphi^i(\mathfrak{t})$  est égal à  $E(u)\varphi(E(u)) \cdots \varphi^{i-1}(E(u))\mathfrak{t}$  et est donc multiple de  $E(u)$ . Ainsi  $\varphi^i(\mathfrak{t}) \in \ker \theta$  pour tout  $i > 0$ , et, par suite,  $\varphi(\mathfrak{t}) \in F^1 W(R)$ . On a ainsi démontré l'inclusion  $F^1 W(R) \supset \varphi(\mathfrak{t}) \cdot W(R)$ .

Pour démontrer l'inclusion réciproque, on introduit l'idéal  $I$  de  $R$  défini comme le quotient de  $F^1 W(R)$  par  $pF^1 W(R) = F^1 W(R) \cap pW(R)$ . Manifestement,  $I$  contient un élément de valuation  $\frac{ep}{p-1}$ , qui est la réduction modulo  $p$  de  $\varphi(\mathfrak{t})$ . Par ailleurs, on remarque que tout élément  $x \in F^1 W(R)$  est nécessairement multiple de  $\alpha_i = \frac{\varphi^{-i}(\eta)}{\varphi^{-(i+1)}(\eta)}$  pour tout entier  $i \geq 0$  (étant donné que  $\varphi(x)$  est dans le noyau de  $\theta$ ). Comme tous les idéaux principaux engendrés par les  $\alpha_i$  sont premiers (car les quotient  $W(R)/\alpha_i W(R)$  sont tous isomorphes à  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  qui est intègre), on en déduit que  $x$  est multiple de  $\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_i$  pour tout  $i$ . Or la réduction modulo  $p$  de ce produit a pour valuation  $e + \frac{e}{p} + \cdots + \frac{e}{p^i} = \frac{ep}{p-1} \cdot (1 - p^{-(i+1)})$ . Ainsi,  $v_R(x \bmod p) \geq \frac{ep}{p-1} \cdot (1 - p^{-(i+1)})$  et, comme ceci est vrai pour tout  $i$ , on obtient  $v_R(x \bmod p) \geq \frac{ep}{p-1}$ . On en déduit que  $I$  est l'idéal de  $R$  des éléments de valuation  $\geq \frac{ep}{p-1}$ . Il résulte de cela que le morphisme d'inclusion  $\iota : \varphi(\mathfrak{t}) \cdot W(R) \rightarrow F^1 W(R)$  induit un isomorphisme modulo  $p$ . Comme les espaces de départ et d'arrivée sont complets pour la topologie  $p$ -adique, il suit que  $\iota$  est lui-même un isomorphisme, ce qui signifie que  $F^1 W(R) = \varphi(\mathfrak{t}) \cdot W(R)$ .  $\square$

Il résulte du lemme et du fait que  $1 - [\underline{\varepsilon}]$  peut s'écrire sous la forme  $\mathfrak{t}^p \alpha + p\beta$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $W(R)$  (ce qui suit de l'égalité  $v_R(1 - \underline{\varepsilon}) = pv_R(\mathfrak{t} \bmod p)$ ), que la fraction

$$t'_m = \frac{t_m}{\mathfrak{t}} = \sum_{i=1}^{\infty} E(u) \cdot \frac{1 - [\underline{\varepsilon}]}{\varphi(\mathfrak{t})} \cdot \frac{(1 - [\underline{\varepsilon}])^{i-1}}{i}$$

appartient à  $W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$ . D'autre part, étant donné que  $[\underline{\varepsilon}]$  est  $(W(R)_{\leq m}^{\text{dp}})$ -borné à l'ordre  $m$  (dans la  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre  $B_{\text{cris}}^+$  par exemple), le corollaire 3.9 implique :

$$g(t_m) = \log_m([\underline{\varepsilon}]^{\chi(g)}) \equiv \chi(g) \cdot t_m \pmod{p^{m-1} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}}$$

$$\varphi(t_m) = \log_m([\underline{\varepsilon}]^p) \equiv p \cdot t_m \pmod{p^{m-1} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}}$$

la première congruence étant vraie pour tout  $g \in G_{\infty}$ . Ainsi  $t'_m$  est fixe par  $G_{\infty}$  modulo  $p^{m-2} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$  (on perd une puissance de  $p$  à cause de la division par  $\mathfrak{t}$ ). Soit  $\mathfrak{S}_{\leq m}^{\text{perf,dp}}$  (resp.  $\mathfrak{S}_{\leq m}^{\text{dp}}$ ) le sous-ensemble de  $\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int,perf,dp}}$  formé des séries  $\sum a_q u^q$  pour lesquelles  $a_q = 0$  dès que  $q < 0$  (resp. dès que  $q < 0$  ou non entier). En reprenant l'argument de la démonstration de la proposition 3.13, on démontre que  $t'_m$  s'écrit comme la

somme d'un élément  $x \in \mathfrak{S}_{\leq m}^{\text{perf}, \text{dp}}$  et d'un élément de  $y \in p^{m-2} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$ . De plus, la congruence portant sur  $\varphi(t_m)$  implique que  $x \equiv \frac{E(u)}{E(0)} \cdot \varphi(x) \pmod{p^{m-3} \cdot \mathfrak{S}_{\leq m}^{\text{perf}, \text{dp}}}$ . En remarquant que tous les itérés de l'opérateur  $\frac{E(u)}{E(0)} \cdot \varphi$  envoient  $p^{m-2} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$  sur  $p^{m-3} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$ , on démontre en itérant la congruence précédente que l'on a nécessairement  $x \in \mathfrak{S}_{\leq m}^{\text{dp}} + p^{m-3} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$ . Comme  $x$  est aussi dans  $\mathfrak{S}_{\leq m}^{\text{perf}, \text{dp}} + p^{m-2} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$ , on trouve en prenant l'intersection de ces deux espaces que  $x \in \mathfrak{S}_{\leq m}^{\text{dp}} + p^{m-3} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$ . Au final, on a donc démontré que :

$$t_m \in \mathfrak{t} \cdot \mathfrak{S}_{\leq m}^{\text{dp}} + p^{m-3} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}. \quad (3.8)$$

**Élimination des puissances fractionnaires** Nous revenons à notre problématique consistant à restreindre l'image de  $\log_m \tau$ . Pour tout entier  $m$ , on définit  $\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int}, \varphi^{-n}, \text{dp}}$  le sous-espace de  $\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int}, \text{perf}, \text{dp}}$  formé des séries  $\sum_q a_q u^q$  pour lesquelles  $a_q = 0$  dès que  $p^n q$  n'est pas un entier. Dans la suite, on notera simplement  $\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int}, \text{dp}}$  au lieu de  $\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int}, \varphi^{-0}, \text{dp}}$ . En outre, si  $E$  est l'un de ces espaces, on notera  $E(1)$  son image dans  $W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}$  par la multiplication par  $\mathfrak{t}$ . On se propose de démontrer, dans ce paragraphe, qu'il existe une constance  $c' \geq c$  telle que, pour tout entier  $m$  suffisamment grand, on ait :

$$(\log_m \tau)(\mathfrak{M}) \subset p^{-c'} \cdot \left( \mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int}, \text{dp}}(1) + p^m \cdot W(L)_{\leq m}^{\text{dp}} + \frac{\mathfrak{t}^{p^m}}{p^m} W(R) \right) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \quad (3.9)$$

Pour éliminer ainsi les puissances fractionnaires de  $u$ , l'idée principale consiste à réduire petit à petit les dénominateurs qui apparaissent sur les puissances de  $u$  en utilisant le Frobenius  $\varphi$  et, plus précisément, les deux faits suivant le concernant : *primo*, il commute à  $\log_m \tau$  et *secundo* son image est assez grande (ce qui se traduit concrètement par la finitude de la  $E(u)$ -hauteur de  $\mathfrak{M}$ ). Dans toute la suite, on considère un entier  $h$  tel que  $\mathfrak{M}$  soit de  $E(u)$ -hauteur  $\leq p^h$ . On a alors le lemme suivant qui précise l'idée générale que l'on vient d'énoncer.

**Lemme 3.16.** *On suppose qu'il existe un  $\mathfrak{S}$ -module  $D$  tel que  $(\log_m \tau)(\mathfrak{M}) \subset D \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Alors :*

$$E(u)^{p^h} \cdot (\log_m \tau)(\mathfrak{M}) \subset (\mathfrak{S}\varphi(D) + \mathfrak{S}t_m + p^{m-c-1} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}}) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}.$$

*Démonstration.* On considère un élément  $x \in \mathfrak{M}$ . Comme  $\mathfrak{M}$  est supposé de  $E(u)$ -hauteur  $\leq p^h$ , on peut écrire  $E(u)^{p^h} x$  sous la forme :

$$E(u)^{p^h} x = \varphi(x_0) + u\varphi(x_1) + \cdots + u^{p-1}\varphi(x_{p-1})$$

où les  $x_i$  sont des éléments de  $\mathfrak{M}$ . En appliquant  $\log_m \tau$  à cette égalité, en utilisant la relation de Leibniz approchée démontrée précédemment (voir proposition 3.14) et le fait évident que  $\log_m \tau$  commute à  $\varphi$ , on obtient la congruence :

$$E(u)^{p^h} (\log_m \tau)(x) \equiv -t_m \cdot u \frac{dE(u)^{p^h}}{du} \cdot x + \sum_{i=0}^{p-1} (it_m u^i \varphi(x_i) + u^i \varphi \circ (\log_m \tau)(x_i)) \pmod{p^{m-c-1} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}}$$

Dans le membre de droite de l'expression ci-dessus, le premier terme et le premier terme de la somme appartient à  $t_m \mathfrak{M}$ , tandis que le deuxième terme de la somme appartient à  $\mathfrak{S}\varphi(D) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Le lemme en résulte.  $\square$

Il s'agit maintenant d'appliquer le lemme 3.16 avec le bon  $D$ . À cette fin, on introduit les ensembles suivants paramétrés par les deux entiers  $m$  et  $n$  :

$$\begin{aligned} A_m &= p^{-h} \cdot W(L) + W(L)_{\leq m}^{\text{dp}} \\ B_{m,n} &= p^{-h} \cdot \mathcal{E}_{\leq 0}^{\text{int}, \varphi^{-n}, \text{dp}}(1) + \mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int}, \varphi^{-n}, \text{dp}}(1) \\ C_m &= \frac{\mathfrak{t}^{p^m}}{p^m} \cdot W(R). \end{aligned}$$

On rassemble ci-dessous quelques propriétés de ces espaces.

**Lemme 3.17.** *Pour tous entiers  $m, n$  avec  $m \geq h$  et  $n \geq 1$ , on a :*

$$A_m \subset \frac{E(u)^{p^h}}{p} \cdot A_m \quad ; \quad B_{m,n} \subset \frac{E(u)^{p^h}}{p} \cdot B_{m,n}$$

$$\varphi(A_m) \subset E(u)^{p^h} A_m \quad ; \quad \varphi(B_{m,n}) \subset E(u)^{p^h} B_{m,n-1} \quad ; \quad \varphi(C_m) \subset E(u)^{p^h} C_m.$$

*Démonstration.* La dernière inclusion est évidente étant donné que  $\varphi(\mathfrak{t}^{p^m}) = \mathfrak{t}^{p^m} \cdot U^{p^m}$  (où on rappelle que  $U = \frac{E(u)}{E(0)/p}$  et que  $\frac{E(0)}{p}$  est un élément inversible dans  $W(R)$  puisqu'il l'est déjà dans  $\mathbb{Z}_p$ ). La méthode pour démontrer les quatre autres inclusions consiste à remarquer que  $E(u)^{p^h}$  est inversible dans  $W(L)$  et à exprimer son inverse de façon appropriée. Précisément, on commence par observer que  $v_R(E(u)^{p^h} \bmod p) = v_R(\mathfrak{t}^{(p-1)p^h} \bmod p)$ , ce qui montre que l'on peut écrire  $E(u)^{p^h}$  s'écrit comme un produit  $\alpha \cdot (\mathfrak{t}^{(p-1)p^h} - p\beta)$  où  $\alpha$  est un élément inversible dans  $W(R)$  et où  $\beta \in W(R)$ . On en déduit que :

$$\frac{1}{E(u)^{p^h}} = \alpha^{-1} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta^i}{\mathfrak{t}^{(i+1)(p-1)p^h}} \cdot p^i. \quad (3.10)$$

À partir de là, il est facile de démontrer la première inclusion. En effet, il suffit de vérifier que si  $x$  est dans  $p^{-h} \cdot W(L)$  ou s'il s'écrit  $x = \frac{\mathfrak{t}^{p^s}}{p^s} \cdot y$  avec  $y \in W(\mathfrak{m}_R)$ , alors  $\frac{p}{E(u)^{p^h}} \cdot x \in A_m$ , et ceci s'obtient en remplaçant la division par  $E(u)^{p^h}$  par l'expression donnée par la formule (3.10) et en constatant que chaque terme de la somme obtenue est, lui-même, dans  $A_m$ . La troisième inclusion (*i.e.* la première inclusion de la deuxième ligne) se démontre pareillement. Pour les inclusions faisant intervenir les  $B_{m,n}$ , la méthode est similaire sauf qu'au lieu d'utiliser la formule (3.10), on utilise la formule

$$\frac{1}{E(u)^{p^h}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F(u)^i}{u^{(i+1)p^h}} \cdot p^i$$

qui s'obtient en écrivant  $E(u)^{p^h}$  sous la forme  $u^{ep^h} + pF(u)$  avec  $F(u) \in \mathfrak{S}$ . □

On pose à présent  $D_{m,n} = p^{-c-1} \cdot (p^{m-1}A_m + B_{m,n} + C_m)$ . Sachant que  $(\log_m \tau)(\mathfrak{M}) \subset p^{-c} \cdot (\mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int,perf,dp}}(1) + p^{m-1}W(L)_{\leq m}^{\text{dp}}) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ , on s'aperçoit, en revenant aux définitions, que pour tout couple  $(m, s)$ , il existe un entier  $n$  tel que  $(\log_m \tau)(\mathfrak{M}) \subset D_{m,n} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Par ailleurs, il résulte du lemme 3.17 et de l'appartenance  $t_m \in B_{m,0} + p^{m-3}A_m$  (qui découle de (3.8)) que, pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\mathfrak{S}\varphi(D_{m,n}) + \mathfrak{S}t_m + p^{m-c-1} \cdot W(R)_{\leq m}^{\text{dp}} \subset E(u)^{p^h} \cdot D_{m,n-1}$$

pourvu que l'on ait pris soin de choisir la constante  $c$  supérieure ou égale à 3 (ce qui est bien sûr toujours possible). Une application itérée du lemme 3.16 montre alors que, si  $m \geq h$ , on a  $(\log_m \tau)(\mathfrak{M}) \subset D_{m,s,0} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ , d'où il découle l'inclusion (3.9).

**Passage à la limite sur  $m$**  La clé pour effectuer le passage à la limite est le lemme suivant.

**Lemme 3.18.** *Pour tout entier  $m$ , l'image  $Q_m$  de  $W(R)_{\leq m}^{\text{dp}} \cap \mathcal{E}_{\leq m}^{\text{int,dp}}(1)$  dans le quotient*

$$\frac{W(L)_{\leq m}^{\text{dp}}}{p^m \cdot W(L)_{\leq m}^{\text{dp}} + \frac{\mathfrak{t}^{p^m}}{p^m} \cdot W(R)}$$

*est finie.*

*Démonstration.* Exercice. (On rappelle, à toutes fins utiles, que l'on a supposé que le corps résiduel  $k$  de  $W$  est fini.) □

Il suit du lemme que la limite projective des  $Q_m$  (muni de la topologie de la limite projective) est un ensemble compact. On en déduit, à l'aide de l'inclusion (3.9) que l'on a démontrée précédemment, que, pour tout  $x \in \mathfrak{M}$ , il existe une suite strictement croissante d'entiers  $(m_k)_{k \geq 1}$  telle que la suite extraite des  $(\log_{m_k} \tau)(x)$  converge, pour la topologie de la limite projective, vers un élément de  $\mathcal{E}^{\text{int,dp}}(1) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ .

Comme  $\frac{t^{p^m}}{p^m}$  converge vers 0 dans  $B_{\text{cris}}^+$  quand  $m$  tend vers l'infini, cette même suite converge également pour la topologie usuelle de  $B_{\text{cris}}^+$  (i.e. la topologie  $p$ -adique).

Soit  $e_1, \dots, e_d$  une base de  $\mathfrak{M}$  sur  $\mathfrak{S}$ . Quitte à extraire à nouveau, on peut supposer que, pour tout indice  $i \in \{1, \dots, d\}$ , la suite des  $(\log_{m_k} \tau)(e_i)$  est convergente. On note  $pt \cdot x_i$  sa limite, de sorte que  $x_i$  soit un élément de  $p^{-c'} \cdot \mathcal{E}^{\text{int}, \text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Ceci nous permet de définir un opérateur  $N_{\nabla} : \mathfrak{M} \rightarrow p^{-c'} \cdot \mathcal{E}^{\text{int}, \text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  en posant :

$$N_{\nabla} \left( \sum_{i=1}^d a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^d N_{\nabla}(a_i) \otimes e_i + a_i x_i \quad (a_i \in \mathfrak{S}).$$

Par construction,  $N_{\nabla}$  vérifie la relation de Leibniz :

$$N_{\nabla}(ax) = N_{\nabla}(a)x + aN_{\nabla}(x) \quad (3.11)$$

pour tout  $a \in \mathfrak{S}$  et tout  $x \in \mathfrak{M}$ . À partir de là, il suit de la proposition 3.14 que  $(\log_{m_k} \tau)(x)$  converge vers  $pt \cdot N_{\nabla}(x)$  pour tout  $x \in \mathfrak{M}$ . Enfin, le fait que  $\varphi$  commute à tous les  $\log_m \tau$  implique que l'on a la relation :

$$N_{\nabla} \circ \varphi(x) = U \cdot (\varphi \otimes \varphi) \circ N_{\nabla}(x) \quad (3.12)$$

pour tout  $x \in \mathfrak{M}$ .

**Élimination des puissances négatives** Soit  $\mathfrak{S}^{\text{dp}}$  le sous-espace de  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{dp}}$  formé des séries  $\sum_q a_q u^q$  (avec  $q \in \mathbb{Z}$ ) pour lesquelles  $a_q = 0$  dès que  $q$  est strictement négatif. On note également  $N$  le plus grand entier (éventuellement nul) pour lequel  $E(u) \in \varphi^N(\mathfrak{S})$ . On pose

$$D_n(u) = \varphi^{-1}(E(u)) \cdot \varphi^{-2}(E(u)) \cdots \varphi^{-n}(E(u))$$

pour tout entier  $n \leq N$ .

**Lemme 3.19.** Soit  $x \in \mathcal{E}^{\text{int}, \text{dp}}$  vérifiant  $tx \in W(R)^{\text{dp}}$ . Alors, il existe  $y \in \mathfrak{S}^{\text{dp}}$  tel que  $D_N(u) \cdot (x + y) \in \mathfrak{S}$ .

*Démonstration.* En écrivant  $x$  comme la somme d'un élément de  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  et d'un élément de  $\mathfrak{S}^{\text{dp}}$ , on voit qu'il suffit de démontrer que tout élément  $x \in \mathcal{E}^{\text{int}}$  tel que  $tx \in W(R)$  vérifie :

$$\varphi^{-1}(E(u)) \cdot \varphi^{-2}(E(u)) \cdots \varphi^{-n}(E(u)) \cdot x \in \mathfrak{S}.$$

On note  $\mathfrak{S}'$  l'ensemble des éléments  $x$  de  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  tels que  $tx \in W(R)$ . L'ensemble des  $v_R(x \bmod p)$  pour  $x$  parcourant  $\mathfrak{S}'$  est clairement minoré par  $-\frac{e}{p-1}$  ; on peut donc considérer un élément  $a \in \mathfrak{S}'$  tel que  $v_R(a \bmod p)$  soit minimal. Comme  $1 \in \mathfrak{S}'$ , on a de surcroît  $v_R(a \bmod p) \leq 0$ . L'élément  $a$  est tel que  $a\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$ , et il est facile de vérifier que cette inclusion induit un isomorphisme modulo  $p$ . On en déduit que  $\mathfrak{S}' = a\mathfrak{S}$ . Par ailleurs, comme  $1 \in \mathfrak{S}'$ , il existe un élément  $b \in \mathfrak{S}$  tel que  $ab = 1$ . D'après une variante du théorème de préparation de Weierstrass (voir par exemple théorème 2.1, chap. 5 de [15]),  $b$  s'écrit comme le produit d'un élément inversible de  $\mathfrak{S}$  et d'un polynôme  $B \in W[u]$  de la forme  $B(u) = u^d + p(b_{d-1}u^{d-1} + \cdots + b_0)$ . On a l'égalité

$$t \cdot \frac{E(u)}{\varphi(B(u))} = c \cdot \varphi \left( \frac{t}{B(u)} \right)$$

qui montre que la fraction  $\frac{E(u)}{\varphi(B(u))}$  appartient à  $\mathfrak{S}'$ , et s'écrit donc sous la forme  $\frac{C(u)}{B(u)}$  pour une certaine série  $C(u) \in \mathfrak{S}$ . On en déduit que  $\varphi(B(u))$  divise le produit  $B(u)E(u)$  dans  $\mathfrak{S}$ . Il résulte directement de cette divisibilité que  $B(u)$  n'est pas multiple de  $u$ .

Si  $B(u)$  n'a aucune racine non nulle dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ , alors  $c$ 'est un polynôme constant qui est inversible dans  $\mathfrak{S}$ . Dans ce cas, on obtient donc  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$  et le lemme est démontré. Supposons maintenant qu'au contraire  $B(u)$  admette une racine non nulle dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . Le polynôme  $B^\sigma$  obtenu en appliquant  $\sigma$  à  $B$  admet alors lui aussi au moins une racine non nulle dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . Soit  $x$  une telle racine de valuation minimale et  $y$  une racine  $p$ -ième de  $x$ . De  $\varphi(B(u)) = B^\sigma(u^p)$ , on déduit que  $y$  est une racine du polynôme  $\varphi(B(u))$ . Par ailleurs, comme  $x$  a été choisi de valuation minimale,  $y$  n'annule pas  $B(u)$ . Comme il annule, par contre, le produit  $B(u)E(u)$ , on a nécessairement  $E(y) = 0$ . Comme  $E(u)$  est irréductible dans  $\mathfrak{S}$  (car  $c$ 'est un polynôme d'Eisenstein), on a nécessairement :

$$E(u) \text{ divise } \varphi(B(u)). \quad (3.13)$$

Nous allons à présent montrer que  $E(u)$  dans l'image de  $\varphi$ . Pour cela, on repart de l'égalité  $E(y) = 0$  qui montre que  $y$  et  $\pi$  sont conjugués sous Galois dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . Il en est donc de même de  $x = y^p$  et  $\pi^p$ . Comme  $x$  est annulé par  $B^\sigma$  qui est de degré  $\leq \frac{e}{p-1}$ , on en déduit que le corps  $K' = W[1/p](\pi^p)$  est de degré au plus  $\frac{e}{p-1}$  sur  $W[1/p]$ . Par suite, l'extension  $K/K'$  est de degré au moins  $p-1$ . Comme elle est, par ailleurs, de degré au plus  $p$  (puisque elle est engendré par  $\pi$  qui est manifestement annulé par un polynôme de degré  $p$  à coefficients dans  $K'$ ), on a  $[K : K'] \in \{p-1, p\}$ . Si on avait  $[K : K'] = p-1$ , le polynôme minimal de  $\pi$  sur  $K'$  serait de degré  $p-1$  et serait également un diviseur de  $X^p - \pi^p \in K'[X]$ ; ce dernier polynôme admettrait donc également un facteur de degré 1, ce qui n'est pas possible car il ne peut y avoir dans  $K'$  un élément de même valuation que  $\pi$ . Ainsi  $[K : K'] = p$  et  $[K' : W[1/p]] = \frac{e}{p}$  (et donc, en particulier,  $p$  divise  $e$ ). Le polynôme minimal  $Q$  de  $\pi^p$  sur  $W[1/p]$  est donc de degré  $\frac{e}{p}$  et  $\pi$  est annulé par  $Q(u^p)$  qui est de degré  $e$ . On en déduit que  $Q(u^p) = E(u)$  et, par suite, que  $E(u)$  est dans l'image de  $\varphi$  comme annoncé.

La divisibilité (3.13) implique alors que  $\varphi^{-1}(E(u))$  divise  $B(u)$  dans  $\mathfrak{S}$ , i.e.  $B(u) = \varphi^{-1}(E(u)) \cdot B_1(u)$  pour un certain élément  $B_1(u) \in \mathfrak{S}$ . De plus, le fait que  $\varphi(B(u))$  divise  $B(u)E(u)$  nous apprend que  $\varphi(B_1(u))$  divise  $B_1(u)\varphi^{-1}(E(u))$ . On peut ainsi appliquer à nouveau le même raisonnement que précédemment qui conduit à l'éventualité suivante : soit  $B_1(u)$  est inversible, soit  $E(u)$  est dans  $\varphi^2(\mathfrak{S})$  et  $B_1(u)$  divise  $\varphi^{-2}(E(u))$ . Dans le premier cas, le lemme est démontré tandis que, dans le second cas, on écrit  $B_1(u) = \varphi^{-2}(E(u)) \cdot B_2(u)$  et on applique à nouveau le même argument jusqu'à ce que  $E(u)$  ne soit plus élément de  $\varphi^n(\mathfrak{S})$  (ce qui arrive nécessairement).  $\square$

Rappelons que nous avons démontré précédemment que  $pN_{\nabla}(\mathfrak{M}) \subset p^{-c'} \cdot \mathcal{E}^{\text{int}, \text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Comme, par ailleurs,  $(\log_m \tau)(\mathfrak{M}) \subset p^{-c'} \cdot W(R)^{\text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  pour tout  $m$ , l'application  $pt \cdot N_{\nabla}$  prend également ses valeurs dans  $p^{-c'} \cdot W(R)^{\text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  et le lemme ci-dessus implique que :

$$N_{\nabla}(\mathfrak{M}) \subset p^{-(c'+1)} \cdot \left( \mathfrak{S}^{\text{dp}} + \frac{1}{D_N(u)} \mathfrak{S} \right) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \subset \frac{1}{D_N(u)} \cdot \mathcal{M} \quad (3.14)$$

où on rappelle que  $\mathcal{M} = \mathcal{O} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ .

Soit, comme précédemment,  $h$  un entier pour lequel  $\mathfrak{M}$  est de  $E(u)$ -hauteur  $\leq p^h$ . Soit  $x \in E(u)^{p^h} \mathfrak{M}$ . Il s'écrit sous la forme  $x = \sum_{i=0}^{p-1} u^i \varphi(x_i)$  pour des  $x_i \in \mathfrak{M}$ . La relation (3.12) implique alors que

$$N_{\nabla}(x) \in \frac{1}{\varphi(D_{N-1}(u)) \cdot E(u)^{p^h}} \cdot \mathcal{O} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} = \frac{1}{D_{N-1}(u) E(u)^{p^h+1}} \cdot \mathcal{M} \quad (3.15)$$

Or,  $D_{N-1}(u)$  n'est pas nul dans le quotient  $\mathcal{O}/E(u)\mathcal{O} \simeq K$ . On en déduit que l'intersection des idéaux principaux de  $\mathcal{O}$  engendrés respectivement par  $D_{N-1}(u)$  et par  $E(u)^{p^h+1}$  est l'idéal principal engendré par le produit  $D_{N-1}(u)E(u)^{p^h+1}$ . Ainsi, en mettant ensemble les inclusions (3.14) et (3.15), on trouve  $N_{\nabla}(\mathfrak{M}) \subset \frac{1}{D_{N-1}(u)} \cdot \mathcal{M}$ . En réappliquant le même argument  $N-1$  fois, on obtient  $N_{\nabla}(\mathfrak{M}) \subset \mathcal{M}$ . Ainsi  $\mathcal{M}$  muni des opérateurs  $\varphi$  et  $N_{\nabla}$  est un objet de  $\text{Mod}_{\mathcal{O}}^{\varphi, N_{\nabla}, 0}$  et on peut poser  $\mathcal{S}_{\varphi, N_{\nabla}}(\mathfrak{M}) = \mathcal{M}$  : le foncteur  $\mathcal{S}_{\varphi, N_{\nabla}}$  est construit !

### 3.2.4 Démonstration des propriétés annoncées de $\mathcal{S}_{\varphi, N_{\nabla}}$

On considère  $\mathfrak{M}$  un objet de la catégorie  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi, \tau} \otimes \mathbb{Q}_p$  et on pose  $\mathcal{M} = \mathcal{S}_{\varphi, N_{\nabla}}(\mathfrak{M})$ . Soient encore  $s$  le plus grand entier tel que l'extension  $K_s/K$  soit galoisienne et  $t$  le plus petit entier tel que  $p^t(p-1)$  dépasse strictement le rang de  $\mathfrak{M}$  comme  $\mathfrak{S}$ -module. Notre premier objectif est de démontrer que les représentations galoisiennes  $V$  et  $V_{\text{st}}$  (« st » pour semi-stable) associées respectivement à  $\mathfrak{M}$  et  $\mathcal{M}$  coïncident en restriction au sous-groupe  $G_n$  pour  $n = s$  et  $n = t$ . Pour cela, on pose  $\mathfrak{M}_{\text{st}} = \mathcal{R}_{\varphi, \tau}(\mathcal{M})$  : c'est un  $(\varphi, \tau)$ -réseau de  $E(u)$ -hauteur finie qui vit à l'intérieur du  $(\varphi, \tau)$ -module correspondant à  $V_{\text{st}}$ . De plus, par construction, les  $\varphi$ -modules  $\mathfrak{M}[1/p]$  et  $\mathfrak{M}_{\text{st}}[1/p]$  sont isomorphes. Ainsi, plutôt que de voir  $\mathfrak{M}[1/p]$  et  $\mathfrak{M}_{\text{st}}[1/p]$  comme deux objets différents, on pourra et on préférera considérer  $\mathfrak{M}_{\text{st}}[1/p]$  comme le  $\varphi$ -module  $\mathfrak{M}[1/p]$  muni d'un nouvel opérateur  $\tau_{\text{st}}$ . De la même façon, on verra dans la suite  $V_{\text{st}}$  comme le  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel  $V$  muni d'une action différence de  $\tau \in G_K$ . Avec ces notations, on cherche à démontrer que  $\tau^{p^n} = \tau_{\text{st}}^{p^n}$  (soit sur  $\mathfrak{M}[1/p]$ , soit sur  $V$ , c'est équivalent) pour  $n = s$  et  $n = t$ . Or, on possède deux informations essentielles sur les opérateurs  $\tau$  et  $\tau_{\text{st}}$ , à savoir :

1. par construction, il existe une suite strictement croissante d'entiers  $(m_k)_{k \geq 0}$  telle que, pour tout  $x \in \mathfrak{M}[1/p]$ , la suite des  $\log_{m_k}(\tau)(x)$  converge vers  $pt \cdot N_{\nabla}(x)$  (quand  $k$  tend vers l'infini) ;

2. d'après les résultats de Liu, pour tout  $x \in \mathfrak{M}[1/p]$ , la suite des  $\log_m(\tau_{\text{st}})(x)$  converge vers  $pt \cdot N_{\nabla}(x)$  (quand  $m$  tend vers l'infini).

Pour avancer, il semble donc qu'il faille relier d'une façon ou d'une autre les opérateurs  $\log_m \tau$  et  $\log_m \tau_{\text{st}}$  agissant sur  $\mathfrak{M}[1/p]$  à l'action de l'élément  $\tau \in G_K$  sur les représentations galoisiennes  $V$  et  $V_{\text{st}}$ . C'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 3.20.** *Soit  $T$  une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation galoisienne libre de  $E(u)$ -hauteur finie et soit  $\mathfrak{N}$  l'unique  $(\varphi, \tau)$ -réseau de  $E(u)$ -hauteur finie vivant à l'intérieur de son  $(\varphi, \tau)$ -module. On note  $\tau_{\mathfrak{N}}$  (resp.  $\tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}}$ , resp.  $\tau_T$ ) l'opérateur  $\tau$  agissant sur  $\mathfrak{N}$  (resp.  $\mathfrak{S}^{\text{ur}}$ , resp.  $T$ ). Alors, il existe une constante  $C$  telle que, pour tout entier  $m$ , on ait :*

$$(\log_m \tau_{\mathfrak{N}})(f) \equiv (\log_m \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}}) \circ f - f \circ (\log_m \tau_T) \pmod{p^{m-C} \cdot W(R)^{\text{dp}}}$$

pour tout  $f \in \mathfrak{N} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_{\infty}]}(T, \mathfrak{S}^{\text{ur}})$  (où la congruence signifie que la différence des deux fonctions prend ses valeurs dans  $p^{m-C} \cdot W(R)^{\text{dp}}$ ).

*Démonstration.* On rappelle que par définition  $\tau_{\mathfrak{N}}(f) = \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}} \circ f \circ \tau_T^{-1}$ . Ainsi :

$$\frac{(\text{id} - \tau_{\mathfrak{N}})^i}{i}(f) = \frac{1}{i} \cdot \sum_{\alpha=0}^i (-1)^{\alpha} \binom{i}{\alpha} \cdot \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}}^{\alpha} \circ f \circ \tau_T^{-\alpha}.$$

En écrivant  $\tau_T^{-1} = \text{id} - g$  et en injectant cela dans l'écriture précédente, on obtient :

$$\frac{(\text{id} - \tau_{\mathfrak{N}})^i}{i}(f) = \frac{1}{i} \cdot \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha \leq i} (-1)^{\alpha+\beta} \binom{i}{\alpha} \cdot \binom{\alpha}{\beta} \cdot \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}}^{\alpha} \circ f \circ g^{\beta}.$$

En isolant les termes pour lesquels  $\beta = 0$  et en remarquant que, si  $\beta \neq 0$ , on a  $\frac{1}{i} \binom{i}{\alpha} \binom{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta} \binom{i-1}{\beta-1} \binom{i-\beta}{\alpha-\beta}$ , on aboutit à la nouvelle expression :

$$\begin{aligned} \frac{(\text{id} - \tau_{\mathfrak{N}})^i}{i}(f) &= \frac{(\text{id} - \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}})^i}{i} \circ f + \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha \leq i} (-1)^{\alpha+\beta} \binom{i-1}{\beta-1} \cdot \binom{i-\beta}{\alpha-\beta} \cdot \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}}^{\alpha} \circ f \circ \frac{g^{\beta}}{\beta} \\ &= \frac{(\text{id} - \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}})^i}{i} \circ f + \sum_{\beta=0}^i \binom{i-1}{\beta-1} \cdot \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}}^{\beta} \circ \left( \sum_{\alpha=\beta}^i \binom{i-\beta}{\alpha-\beta} (-\tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}})^{\alpha-\beta} \right) \circ f \circ \frac{g^{\beta}}{\beta} \\ &= \frac{(\text{id} - \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}})^i}{i} \circ f + \sum_{\beta=0}^i \binom{i-1}{\beta-1} \cdot \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}}^{\beta} \circ (\text{id} - \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}})^{i-\beta} \circ f \circ \frac{g^{\beta}}{\beta} \end{aligned} \quad (3.16)$$

En sommant maintenant sur  $i$  variant entre 1 et  $p^m - 1$ , on obtient :

$$(\log_m \tau_{\mathfrak{N}})(f) = (\log_m \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}}) \circ f + \sum_{\beta=1}^{p^m-1} \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}}^{\beta} \circ \left( \sum_{i=\beta}^{p^m-1} \binom{i-1}{\beta-1} (\text{id} - \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}})^{i-\beta} \right) \circ f \circ \frac{g^{\beta}}{\beta}. \quad (3.17)$$

D'autre part, d'après la proposition 3.10, on sait que  $\frac{(\text{id} - \tau_{\mathfrak{N}})^i}{i}(f) \in \Lambda \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  avec  $\Lambda = p^{-c} \cdot W(R)^{\text{dp}}$  pour une certaine constante  $c$ . Étant donné que tous les éléments de  $\mathfrak{M}$  sont des fonctions à valeurs dans  $\mathfrak{S}^{\text{ur}} \subset W(R)$ , on déduit de la formule (3.16) ci-dessus, que la composée  $\frac{(\text{id} - \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}})^i}{i} \circ f$  prend ses valeurs dans  $\Lambda$  pour tout entier  $i$ . De même que l'on a obtenu la formule (3.3), il s'ensuit que  $\frac{(\text{id} - \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}})^i}{i} \circ f$  prend ses valeurs dans  $p^{\ell(i)} \Lambda$  pour tout  $i$ . On déduit de ce fait que :

$$\sum_{i=\beta}^{p^m-1} \binom{i-1}{\beta-1} (\text{id} - \tau_{\mathfrak{S}^{\text{ur}}})^{i-\beta} \circ f \equiv \tau^{-\beta} \circ f \pmod{p^{\ell(p^m-j)} \Lambda} \quad (3.18)$$

De plus, il existe une constante  $c'$  telle que  $g^{\beta}$  prenne ses valeurs dans  $p^{[c'\beta]} T$  pour tout  $\beta$ . Par ailleurs, pour  $j \in \{1, \dots, p^m - 1\}$ , la différence  $\ell(p^m - j) - [c'j] - v_p(j)$  est minorée par  $\ell(p^m - j) - [c'j] - \log_p(j)$ , quantité elle-même minorée par  $m - C$  pour une certaine constante  $C$  (qui dépend de  $c'$ ). À partir de là, on déduit la congruence désirée en injectant (3.18) dans (3.17).  $\square$

Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par les deux actions de  $G_K$ , à savoir celle provenant de  $V$  et celle provenant de  $V_{\text{st}}$ . Si l'on note respectivement  $\tau$  et  $\tau_{\text{st}}$  les endomorphismes de  $T$  donnés par l'action de  $\tau \in G_K$  sur  $V$  et  $V_{\text{st}}$ , la proposition 3.20 appliquée avec  $T$  (vu successivement comme un réseau de  $V$  et de  $V_{\text{st}}$ ) permet de déduire des informations 1 et 2 dégagées plus haut que

$$f \circ (\log_{m_k} \tau - \log_{m_k} \tau_{\text{st}}) \text{ tend vers } 0. \quad (3.19)$$

Or, comme on a choisi  $\tau$  dans le sous groupe d'inertie sauvage, les suites  $\tau^{p^n}$  et  $\tau_{\text{st}}^{p^n}$  tendent vers 1, et les opérateurs  $\log \tau$  et  $\log \tau_{\text{st}}$  sont bien définis. En passant à la limite dans (3.19), on obtient  $f \circ \log \tau = f \circ \log \tau_{\text{st}}$ . Comme ceci est vrai pour tout  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_\infty]}(T, \mathfrak{S}^{\text{ur}})$ , on obtient finalement  $\log \tau = \log \tau_{\text{st}}$  comme endomorphismes  $\mathbb{Z}_p$ -linéaires de  $T$ . Montrons à présent que cela implique que  $\tau^{p^t} = \tau_{\text{st}}^{p^t}$  pour tout entier  $t$  tel que  $p^t(p-1) > \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ . Le lemme clé est le suivant.

**Lemme 3.21.** *Soit  $M$  un  $\mathbb{Z}_p$ -module libre de rang  $d$  et  $f : M \rightarrow M$  un endomorphisme  $\mathbb{Z}_p$ -linéaire. On suppose qu'il existe un entier  $n$  tel que  $f^{p^n} \equiv \text{id} \pmod{p}$ . Alors pour tout entier  $t \geq 0$  tel que  $d \geq p^{t-1}(p-1)$ , on a :*

$$v_p((\text{id} - f^{p^t})^i) \geq \frac{p^t}{d} \cdot i - 1$$

où on convient que  $v_p(g) \geq v$  signifie que  $g$  est divisible par  $p^v$ .

*Démonstration.* De  $f^{p^n} \equiv \text{id} \pmod{p}$ , on déduit que  $f - \text{id}$  induit un endomorphisme nilpotent sur  $M/pM$  et donc que  $(f - \text{id})^d \equiv 0 \pmod{p}$ . On pose  $g = f - \text{id}$ . On a alors  $v_p(g^d) \geq 1$  et, plus généralement pour tout entier  $j \geq 0$ ,  $v_p(g^j) \geq \frac{d}{j} - 1$ . D'autre part, un calcul immédiat montre que  $(\text{id} - f^{p^t})^i$  s'exprime en fonction de  $g$  comme suit :

$$(\text{id} - f^{p^t})^i = - \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_i \leq p^t} \binom{p^t}{j_1} \cdot \binom{p^t}{j_2} \cdots \binom{p^t}{j_i} \cdot g^{j_1 + \dots + j_i}$$

où la notation signifie que la somme est prise sur tous les  $i$ -uplets  $(j_1, \dots, j_i)$  d'éléments de  $\{1, \dots, p^t\}$ . On en déduit que :

$$v_p((\text{id} - f^{p^t})^i) \geq \min_{1 \leq j_1, \dots, j_i \leq p^t} \frac{j_1 + \dots + j_i}{d} + (t - v_p(j_1)) + \dots + (t - v_p(j_i)) - 1.$$

On observe facilement que le minimum est atteint lorsque chaque  $j_i$  est une puissance de  $p$  :  $j_i = p^{a_i}$  pour un certain  $a_i \in \{0, \dots, t\}$ . Pour  $j_i$  de cette forme, la quantité à minimiser vaut  $-1 + \sum_{\alpha=1}^i \frac{p^{a_\alpha}}{d} + (t - a_\alpha)$  et l'hypothèse  $d \geq p^{t-1}(p-1)$  assure que chaque terme de la somme précédente est minimal lorsque  $a_i = t$ . Le lemme en découle.  $\square$

On est maintenant en mesure de conclure. On note  $d$  la dimension de  $V$ . On rappelle en outre que  $t$  désigne le plus petit entier tel que  $p^t(p-1) > d$ . On a donc  $p^{t-1}(p-1) \leq d$ ; autrement dit,  $t$  satisfait l'inégalité du lemme 3.21. Appliqué avec  $M = T$  et  $f = \tau$  puis avec  $f = \tau_{\text{st}}$ , il donne :

$$v_p((\text{id} - \tau^{p^t})^i) \geq \frac{p^t}{d} \cdot i - 1 \quad \text{et} \quad v_p((\text{id} - \tau_{\text{st}}^{p^t})^i) \geq \frac{p^t}{d} \cdot i - 1.$$

Étant donné que  $\frac{p^t}{d} > \frac{1}{p-1}$  et que le rayon de convergence de l'exponentielle est  $|p|^{1/(p-1)}$ , on déduit des estimations ci-dessus que les séries  $\exp(\log \tau^{p^t})$  et  $\exp(\log \tau_{\text{st}}^{p^t})$  convergent respectivement vers  $\tau^{p^t}$  et  $\tau_{\text{st}}^{p^t}$ . Comme les logarithmes sont égaux (puisque  $\log \tau^{p^t} = p^t \log \tau = p^t \log \tau_{\text{st}} = \log \tau_{\text{st}}^{p^t}$ ), il s'ensuit  $\tau^{p^t} = \tau_{\text{st}}^{p^t}$  comme voulu.

Soit maintenant  $s$  le plus grand entier pour lequel l'extension  $K_s/K$  est galoisienne. Le sous-groupe  $G_s$  est alors distingué dans  $G_K$  et c'est le plus petit contenant  $G_\infty$  ayant cette propriété. En d'autres termes, les conjugués de  $G_\infty$  par les éléments de  $G_K$  engendrent  $G_s$ . On souhaite montrer que  $V$  et  $V_{\text{st}}$  sont isomorphes en tant que représentations de  $G_s$ . Soit  $g \in G_K$ . On peut appliquer ce que l'on vient de démontrer en remplaçant le système comptable de racines  $p^{s'}$ -ièmes de l'uniformisante  $(\pi_{s'})$  par  $(g\pi_{s'})$ . Ce faisant, on obtient l'existence d'une représentation semi-stable  $V_{\text{st},g}$  qui coïncide avec  $V$  en restriction

au sous-groupe  $gG_t g^{-1}$ . Si maintenant  $g_1$  et  $g_2$  sont deux éléments de  $G_K$ , les représentations  $V_{st, g_1}$  et  $V_{st, g_2}$  coïncident sur l'intersection  $(g_1 G_t g_1^{-1}) \cap (g_2 G_t g_2^{-1})$  qui est un sous-groupe d'indice fini de  $G_K$  qui découpe une extension totalement ramifiée. D'après la proposition 3.4, les représentations  $V_{st, g_1}$  et  $V_{st, g_2}$  coïncident en fait sur tout  $G_K$ . Il en résulte que  $V$  coïncide avec  $V_{st}$  sur tous les conjugués de  $G_t$  et donc, par suite, sur le sous-groupe engendré par ces conjugués. Or celui-ci n'est autre que  $G_s$ ; on a donc bien démontré ce que l'on voulait.

Pour établir complètement le théorème 3.5, il ne reste plus qu'à démontrer que si  $\mathcal{M}$  est un objet de  $\text{Mod}_{\mathcal{O}}^{\varphi, N_{\nabla}, 0}$  alors  $\mathcal{S}_{\varphi, N_{\nabla}} \circ \mathcal{R}_{\varphi, \tau}(\mathcal{M})$  est isomorphe à  $\mathcal{M}$ . Mais, si l'on note  $V$  (resp.  $W$ ) la représentation galoisienne associée à  $\mathcal{M}$  (resp. à  $\mathcal{S}_{\varphi, N_{\nabla}} \circ \mathcal{R}_{\varphi, \tau}(\mathcal{M})$ ), on sait, par ce qui vient d'être fait, que  $V$  et  $W$  coïncident sur  $G_s$ . Or,  $V$  et  $W$  sont deux représentations semi-stables. Une nouvelle application de la proposition 3.4 permet donc de conclure.

### 3.3 Réseaux à l'intérieur des représentations semi-stables

Un problème classique et important consiste à décrire les réseaux à l'intérieur des représentations semi-stables. Dans ce dernier paragraphe, nous aimerions expliquer sommairement comment cela peut être réalisé à l'aide de structures entières à l'intérieur des objets de  $\text{Mod}_{\mathcal{O}}^{\varphi, N_{\nabla}, 0}$ .

#### 3.3.1 Une borne plus précise pour l'action de $N_{\nabla}$

Le point de départ de notre analyse consiste à remarquer que la construction que nous avons faite du foncteur  $\mathcal{S}_{\varphi, N_{\nabla}}$  (voir §3.2.3) donne en réalité un peu plus que ce qui a été énoncé jusqu'à présent. Précisément, elle assure que, si  $\mathfrak{M}$  est un  $(\varphi, \tau)$ -réseau de  $E(u)$ -hauteur finie, on n'a pas seulement  $N_{\nabla}(\mathfrak{M}) \subset \mathcal{O} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ , mais aussi

$$N_{\nabla}(\mathfrak{M}) \subset \mathcal{R}_1^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \quad (3.20)$$

où  $\mathcal{R}_1^{\text{int}}$  désigne le sous- $\mathfrak{S}$ -module de  $\mathcal{O}$  formé des séries  $f = \sum_{n \geq 0} a_n u^n$  pour lesquelles la quantité  $v_p(a_n) + \log_p(n)$  est minorée pour  $n \geq 1$ . Ce n'est pas la première fois qu'un tel espace est introduit; il a été, par exemple, déjà considéré dans [9], §II.1, référence dans laquelle l'auteur montre en particulier qu'il s'agit d'un espace de Banach pour la valuation  $v_{\mathcal{R}_1^{\text{int}}}$  définie, en reprenant les notations précédentes, par  $v_{\mathcal{R}_1^{\text{int}}}(f) = \inf_{n \geq 1} v_p(a_n) + \ell(n)$  où  $\ell(0) = 0$  et  $\ell(n) = \log_p(n)$  si  $n \geq 1$ . La proposition II.3.1 de *loc. cit.* montre en outre que  $\mathcal{R}_1^{\text{int}}$  s'identifie à l'espace des distributions continues sur  $\mathbb{Z}_p$  d'ordre 1, c'est-à-dire définissant une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . Dans ce numéro, nous allons démontrer que l'on peut améliorer encore l'inclusion (3.20) en remplaçant  $\mathcal{R}_1^{\text{int}}$  par une partie bornée complètement explicite de cet espace.

On rappelle, pour commencer, que l'on dispose d'un morphisme surjectif  $\theta : W(R) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  dont le noyau est l'idéal principal engendré par  $E(u)$ . On rappelle également que l'anneau de Fontaine  $A_{\text{cris}}$  est alors défini comme le complété  $p$ -adique de l'enveloppe à puissances divisées de  $W(R)$  relativement à  $\ker \theta$  et que l'on a posé  $B_{\text{cris}}^+ = A_{\text{cris}}[1/p]$ . La série  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^i}{i}$  définit un élément  $t \in A_{\text{cris}}$ .

**Lemme 3.22.** *Pour tout entier  $i$ , on a  $(t^i B_{\text{cris}}^+) \cap W(R) = \varphi(t)^i \cdot W(R)$ .*

*Démonstration.* Étant donné que  $\varphi(\lambda t) = -t$  et que  $\varphi(\lambda)$  est inversible dans  $B_{\text{cris}}^+$ , l'inclusion  $\varphi(t)^i \cdot W(R) \subset (t^i B_{\text{cris}}^+) \cap W(R)$  est immédiate. Pour l'inclusion réciproque, on raisonne par récurrence sur  $i$ . Pour  $i = 0$ , il n'y a rien à dire. Supposons que l'on ait  $(t^i B_{\text{cris}}^+) \cap W(R) = \varphi(t)^i \cdot W(R)$  et considérons un  $x \in (t^{i+1} B_{\text{cris}}^+) \cap W(R)$ . Bien sûr,  $x$  est alors aussi élément de  $(t^i B_{\text{cris}}^+) \cap W(R)$  et donc, d'après l'hypothèse de récurrence, de  $\varphi(t)^i \cdot W(R)$ . On peut donc écrire  $x = \varphi(t)^i y$  avec  $y \in W(R)$ . D'autre part,  $x$  s'écrit également par hypothèse  $x = t^{i+1} z$  avec  $z \in B_{\text{cris}}^+$ . On obtient  $t^{i+1} z = \varphi(t)^i y$ , ce qui donne  $y = (-1)^{i+1} \varphi(\lambda^{i+1} t) z$ . En particulier,  $y$  est multiple de  $E(u)$  (puisque  $\varphi(t)$  l'est) et même, plus généralement,  $E(u)$  divise  $\varphi^j(y)$  pour tout entier  $j$ . Autrement dit  $\theta(\varphi^j(y)) = 0$  pour tout  $j$  et donc, par le lemme 3.15,  $y \in \varphi(t) \cdot W(R)$ . Finalement, on obtient  $x \in \varphi(t)^{i+1} \cdot W(R)$ .  $\square$

On considère, à présent,  $V$  une représentation semi-stable de  $G_K$  et  $T \subset V$  un  $\mathbb{Z}_p$ -réseau stable par l'action de Galois. Soit  $\mathfrak{M}$  l'unique  $(\varphi, \tau)$ -réseau de  $E(u)$ -hauteur finie à l'intérieur du  $(\varphi, \tau)$ -module

associé à  $T$ . D'après le résultat principal de [19], l'opérateur  $\tau$  induit un endomorphisme de  $\hat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  avec

$$\hat{\mathcal{R}} = W(R) \cap \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \frac{t^n}{p^{q(n)} q(n)!} \text{ avec } f_n \in S[1/p], f_i \rightarrow 0 \right\} \subset A_{\text{cris}}$$

où  $q(n)$  désigne le quotient de la division euclidienne de  $n$  par  $p-1$ . On en déduit que pour tout entier  $i$ , l'opérateur  $(\text{id} - \tau)^i$  envoie  $\mathfrak{S} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  sur  $(t^i B_{\text{cris}}^+) \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Comme, en outre,  $(\text{id} - \tau)^i$  stabilise  $W(R) \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ , on déduit du lemme 3.22 que  $(\text{id} - \tau)^i$  envoie  $\mathfrak{S} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  sur  $\varphi(t)^i \cdot W(R) \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  et finalement que :

$$(\text{id} - \tau)^i(\mathfrak{M}) \subset t^i \cdot W(R) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}.$$

On en déduit la proposition suivante :

**Proposition 3.23.** *Soient  $V$  une représentation semi-stable de  $G_K$ , et  $T$  un  $\mathbb{Z}_p$ -réseau de  $V$  stable par  $G_K$ . On note  $\mathfrak{M}$  un  $^{12}(\varphi, \tau)$ -réseau de  $E(u)$ -hauteur finie à l'intérieur du  $(\varphi, \tau)$ -module associé à  $T$ . Soit  $\mathcal{M}$  l'objet de  $\text{Mod}_{\mathcal{O}}^{\varphi, N_{\nabla}, 0}$  associé à  $V$ . Alors*

$$N_{\nabla}(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{S}_{\nabla} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$$

où  $\mathfrak{S}_{\nabla}$  est l'ensemble des séries de la forme  $\sum_{n \geq 0} \frac{P_n(u)}{p^{n+1}} u^{e(p^n-1)/(p-1)}$  où les  $P_n(u)$  sont des polynômes à coefficients dans  $W$ .

*Remarque 3.24.* Comme le module  $\mathfrak{S}_{\nabla}$  est inclus dans  $\mathcal{R}_1^{\text{int}}$ , la proposition apparaît comme un raffinement de l'inclusion (3.20). Mieux encore,  $\mathfrak{S}_{\nabla}$  apparaît comme un sous-ensemble borné dans  $\mathcal{R}_1^{\text{int}}$ ; de façon explicite, il est inclus dans la boule de centre 0 et de rayon  $\frac{p^2}{e}$ .

### 3.3.2 Reconstruction de $\tau$ à partir de $N_{\nabla}$

Les bornes que l'on vient d'obtenir permettent de donner un sens à l'expression  $\exp(ptN_{\nabla})$  et ainsi de reconstruire  $\tau$  à partir de la connaissance de  $N_{\nabla}$ . Il faut toutefois être prudent car les itérés successifs de  $ptN_{\nabla}$  ne sont pas clairement définis puisque  $N_{\nabla}$  n'est défini *a priori* que sur  $\mathcal{M} = \mathcal{O} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  qui n'est manifestement pas stable par multiplication par  $t$ .

Pour contourner ce problème, on procède comme suit. Pour tout entier positif ou nul  $i$ , on définit  $\mathcal{R}_i^{\text{int}}$  l'ensemble des séries  $f = \sum_{n \geq 0} a_n u^n$  pour lesquelles la quantité  $v_p(a_n) + i \log_p(n)$  est minorée pour  $n \geq 1$ . Si  $i$  et  $j$  sont deux entiers, le produit d'une fonction de  $\mathcal{R}_i^{\text{int}}$  par une fonction de  $\mathcal{R}_j^{\text{int}}$  appartient à  $\mathcal{R}_{i+j}^{\text{int}}$ . La relation de Leibniz permet de prolonger l'opérateur  $N_{\nabla}$  à  $\mathcal{O} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ , tandis que la remarque que l'on vient de faire montre que ce prolongement, que l'on appelle encore  $N_{\nabla}$ , envoie  $\mathcal{R}_i^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  sur  $\mathcal{R}_{i+1}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Les formules  $N_{\nabla}^{(0)} = \text{id}$  et

$$N_{\nabla}^{(i+1)} = iu \cdot \frac{d\lambda}{du} \cdot N_{\nabla}^{(i)} + N_{\nabla} \circ N_{\nabla}^{(i)}$$

définissent alors des applications  $\mathfrak{S}$ -linéaires  $N_{\nabla}^{(i)} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{R}_i^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  qui, d'un point de vue intuitif, doivent être pensées comme les quotients  $\frac{(ptN_{\nabla})^i}{(pt)^i}$ . Sachant que  $N_{\nabla}(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{S}_{\nabla} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ , il n'est pas difficile de démontrer que la somme infinie  $\sum_{i \geq 0} \frac{(pt)^i}{i!} \cdot N_{\nabla}^{(i)}$  converge vers un opérateur  $W$ -linéaire  $\tau : \mathfrak{M} \rightarrow B_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Une récurrence sur  $i$  montre que, pour tout  $x \in \mathfrak{M}$  et tout entier  $i$ , on a la formule :

$$N_{\nabla}^{(i)}(ux) = u \cdot \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-\lambda)^{i-j} N_{\nabla}^{(j)}(x).$$

Il en résulte par un nouveau calcul que  $\tau(ux) = [\underline{\varepsilon}] \cdot \tau(x)$  pour tout  $x \in \mathfrak{M}$ , relation qui permet de prolonger  $\tau$  par semi-linéarité à tout  $B_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Par ailleurs, on montre, à nouveau par récurrence sur  $i$ , que  $N_{\nabla}^{(i)}$  et  $\varphi$  satisfont à la relation de commutation  $N_{\nabla}^{(i)} \circ \varphi = U^i \cdot \varphi \circ N_{\nabla}^{(i)}$ , à partir de quoi il suit que  $\tau$  et  $\varphi$  commutent. Finalement, on laisse en exercice au lecteur le soin de vérifier que la série définissant le logarithme de  $\tau$  définit un endomorphisme  $\mathfrak{M} \rightarrow B_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  qui coïncide avec  $pt \cdot N_{\nabla}$ .

<sup>12</sup>. Il est en fait unique d'après la proposition 3.1.

*Remarque 3.25.* La reconstruction de  $\tau$  que l'on vient de présenter implique de nouvelles contraintes sur l'espace d'arrivée de l'opérateur  $\tau$ . Soit, en effet, pour tout entier  $i$ ,  $\mathfrak{S}_{\nabla}^{(i)}$  le sous- $\mathfrak{S}$ -module de  $\mathcal{O}$  engendré par les produits de  $i$  éléments de  $\mathfrak{S}_{\nabla}$ . Par convention, on pose également  $\mathfrak{S}_{\nabla}^{(0)} = \mathfrak{S}$ . Pour tout  $i$ ,  $\mathfrak{S}_{\nabla}^{(i)}$  est alors un sous-ensemble borné de  $\mathcal{R}_i^{\text{int}}$  et les  $p^i \mathfrak{S}_{\nabla}^{(i)}$  se plongent également dans  $W(R)[t/p]^{\wedge}$  en envoyant, comme d'habitude,  $u$  sur  $[\pi]$ . Il est alors immédiat de vérifier que les morphismes  $N_{\nabla}^{(i)}$  définis précédemment prennent leurs valeurs dans  $\mathfrak{S}_{\nabla}^{(i)} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ , et donc que :

$$\tau(\mathfrak{M}) \subset \left( \sum_{i \geq 0} p^i \mathfrak{S}_{\nabla}^{(i)} \cdot t^i \right)^{\wedge} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \quad (3.21)$$

où le produit  $p^i \mathfrak{S}_{\nabla}^{(i)}$  est vu dans  $W(R)[t/p]^{\wedge}$  et l'exposant  $\wedge$  signifie que l'on prend l'adhérence dans  $W(R)[t/p]^{\wedge}$ .

### 3.3.3 Structures entières à l'intérieur des objets de $\text{Mod}_{\mathcal{O}}^{\varphi, N_{\nabla}, 0}$

Le résultat de la proposition 3.23 conduit naturellement à la définition (sans doute provisoire) suivante.

**Définition 3.26.** Un  $(\varphi, N_{\nabla})$ -réseau est la donnée d'un objet  $\mathfrak{M}$  de  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi}$  muni d'un morphisme  $N_{\nabla} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{S}_{\nabla} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  vérifiant la relation de Leibniz (3.11) et la relation de commutation (3.12).

Un morphisme entre deux  $(\varphi, N_{\nabla})$ -réseaux  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{M}'$  est un morphisme  $f$  entre les objets de  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi}$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M} & \xrightarrow{N_{\nabla}} & \mathfrak{S}_{\nabla} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \\ f \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes f \\ \mathfrak{M}' & \xrightarrow{N_{\nabla}} & \mathfrak{S}_{\nabla} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}' \end{array}$$

On note  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi, N_{\nabla}}$  la catégorie des  $(\varphi, N_{\nabla})$ -réseaux. Si, par ailleurs,  $\text{Rep}_{[0, +\infty[}^{\text{int, st}}(G_K)$  désigne la catégorie des réseaux stables par  $G_K$  à l'intérieur des représentations semi-stables à poids de Hodge-Tate positifs ou nuls, on a construit précédemment un foncteur  $\mathcal{K}^{\text{int}} : \text{Rep}_{[0, +\infty[}^{\text{int, st}}(G_K) \rightarrow \text{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi, N_{\nabla}}$  qui s'insère dans le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Rep}_{[0, +\infty[}^{\text{int, st}}(G_K) & \longrightarrow & \text{Rep}_{[0, +\infty[}^{\text{st}}(G_K) \\ \mathcal{K}^{\text{int}} \downarrow & & \sim \downarrow \mathcal{K} \\ \text{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi, N_{\nabla}} & \longrightarrow & \text{Mod}_{\mathcal{O}}^{\varphi, N_{\nabla}, 0} \end{array}$$

**Proposition 3.27.** *Le foncteur  $\mathcal{K}^{\text{int}}$  est pleinement fidèle. De plus, un  $(\varphi, N_{\nabla})$ -réseau  $\mathfrak{M}$  est dans son image essentielle si, et seulement si l'endomorphisme  $\tau$  de  $B_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  défini au §3.3.2 stabilise  $W(R) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ .*

*Démonstration.* C'est immédiat. □

## 3.4 Bornes pour la ramification sauvage des représentations semi-stables

Nous concluons cette section en expliquant sommairement comment la combinaison de plusieurs idées qui ont été développées dans les pages précédentes permettent de compléter les méthodes de [7] et de démontrer la conjecture 1.2.(1) dont voici l'énoncé.

**Théorème 3.28.** *Soit  $r$  un entier positif. Soit  $T$  le quotient de deux réseaux stables par  $G_K$  dans une représentation semi-stable à poids de Hodge-Tate dans  $\{0, \dots, r\}$ . On se donne un entier  $n$  tel que  $p^n T = 0$ . Si  $\frac{r}{p-1} s$  s'écrit sous la forme  $p^{\alpha} \beta$  avec  $\alpha' \in \mathbb{N}$  et  $\frac{1}{p} < \beta' \leq 1$ , alors pour tout*

$$\mu > 1 + e(n + \alpha) + \max\left(e\beta - \frac{1}{p^{n+\alpha}}, \frac{e}{p-1}\right)$$

le sous-groupe de ramification  $G_K^{(\mu)}$  agit trivialement sur  $T$ .

*Démonstration.* Elle est analogue à celle présentée dans [7] sauf que, comme dans le §2.2 de cet article, on remplace les quotients  $W_n(R)/[\mathfrak{a}_R^{\geq a}]$  et  $W_n(R)/[\mathfrak{a}_R^{\geq b}]$  (avec les notations de *loc. cit.*) par  $W_n(R)/(E(u)^r \mathfrak{t}^r)W_n(\mathfrak{m}_R)$  et  $W_n(R)/\mathfrak{t}^r W_n(\mathfrak{m}_R)$  respectivement. La clé réside en fait dans une généralisation appropriée du lemme 3.2.1 de [7] qui stipule que, si  $\mathfrak{M}$  est l'unique  $(\varphi, \tau)$ -réseau de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$  dans le  $(\varphi, \tau)$ -module associé à un réseau dans une représentation semi-stable à poids de Hodge-Tate dans  $\{0, \dots, r\}$ , alors pour tout  $s > n - 1 + \log_p r$  et pour tout  $\sigma \in G_s$ , on a :

$$(\sigma - \text{id})(\mathfrak{M}) \subset (\mathfrak{t}^r \mathfrak{S}_\tau^+ + p^n \mathfrak{S}_\tau) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}.$$

Il suffit bien sûr d'établir cette inclusion lorsque  $g = \tau^{p^s}$ . Dans ce cas, elle découle d'une expression de  $\tau^{p^s}$  en fonction de l'opération  $N_\nabla$  analogue à celle qui a été établie pour  $\tau$  dans la démonstration de la proposition 3.23. Si l'on préfère, elle peut également s'obtenir, de même que dans [7], comme une conséquence de la théorie des  $(\varphi, \hat{G})$ -modules de Liu. Le reste de la démonstration est absolument similaire à [7]; on ne le répète donc pas ici.  $\square$

## 4 Quelques perspectives

### Le cas $p = 2$

Tout au long de cet article, nous avons supposé que le nombre premier  $p$  était impair. Bien que cette hypothèse ait été utilisée à plusieurs reprises au fil des démonstrations, l'auteur est d'avis que l'ensemble des résultats obtenus devrait s'étendre (sans doute avec quelques modifications mineures) au cas  $p = 2$ . L'exercice reste cependant à faire.

### Lien avec les $(\varphi, \Gamma)$ -modules

Comme cela a été démontré dans cet article, la catégorie des  $(\varphi, \tau)$ -modules est équivalente à celle des représentations galoisiennes de  $G_K$ . Ainsi elle est aussi équivalente à la catégorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de Fontaine. Expliciter cette équivalence sans passer par les représentations de  $G_K$  nous semble une question naturelle et intéressante. L'obtention d'un tel résultat pourrait permettre de déduire du théorème 3.5 un nouveau critère pour reconnaître les représentations semi-stables en termes de leurs  $(\varphi, \Gamma)$ -modules. Se poserait alors la question de comparer celui-ci avec celui qui découle de la théorie de Berger (voir [2]). Le rapprochement des deux points de vue pourrait peut-être conduire à une meilleure compréhension des représentations semi-stables.

Dans la même veine, on peut chercher à rendre explicite les liens entre les différentes catégories de  $(\varphi, \tau)$ -modules que l'on obtient en faisant varier l'uniformisante  $\pi$ , la famille des  $\pi_n$ , ou encore l'élément  $\tau$ . Ceci devrait permettre une meilleure compréhension des  $(\varphi, \tau)$ -modules. Un moyen, qui semble raisonnable, pour aborder cette question consiste à adapter les constructions du §3.1 de [5] en gardant à l'esprit que  $\tau$  joue le rôle de l'opérateur  $\exp(tN)$  où  $t = \log[\underline{\varepsilon}] \in A_{\text{cris}}$ .

### Surconvergence des $(\varphi, \tau)$ -modules

Un résultat important de la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules est le théorème de Cherbonnier-Colmez (voir [8]) qui affirme que tout  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale sur  $\mathcal{E}$  admet un «  $(\varphi, \Gamma)$ -réseau » défini sur un anneau des séries surconvergentes, c'est-à-dire convergentes sur une couronne infinitésimale sur le bord du disque unité. Dans cet article, nous nous sommes contentés de considérer des réseaux définis sur l'anneau  $\mathfrak{S}$  dont les éléments convergent dans tout le disque unité. Comme nous l'avons vu, cela suffit pour l'application aux représentations semi-stables à poids de Hodge-Tate positifs ou nuls car, d'après les résultats de Kisin, les  $(\varphi, \tau)$ -modules qui leur sont associés admettent toujours de tels réseaux. Par contre, comme nous l'avons montré dans le §2.1.2, ce n'est pas le cas de tous les  $(\varphi, \tau)$ -modules et, notamment de celui correspondant à la représentation  $\mathbb{Z}_p(-1)$  que l'on a *a priori* pas envie d'écartier. Pour pouvoir continuer à travailler avec cet exemple basique (et bien d'autres), il paraît donc important de comprendre si — et, le cas échéant, comment — le théorème de Cherbonnier-Colmez s'étend aux  $(\varphi, \tau)$ -modules.

## Utilisation du logarithme dans le cas de torsion

Dans le §3, nous avons vu que, dans le cas des  $(\varphi, \tau)$ -modules libres sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ , la considération du logarithme de  $\tau$  s'est relévé être un outil puissant pour décrire cet opérateur. C'est par exemple elle qui nous a permis d'obtenir l'inclusion (3.21). On peut donc se demander dans quelle mesure des arguments similaires s'appliquent dans le cas des  $(\varphi, \tau)$ -modules de  $p$ -torsion. Bien entendu, la considération du logarithme devient alors bien plus délicate à cause des divisions par  $p$  qu'il faudra désormais contrôler avec plus d'attention.

## Le problème du relèvement des représentations

Dans [7], les auteurs ont posé dans le §5 un certain nombre de questions sur la possibilité de relever en caractéristique nulle des représentations galoisiennes de torsion. Typiquement, on se donne une  $\mathbb{F}_p$ -représentation  $\bar{T}$  de  $G_K$ , et on se demande s'il existe un réseau  $T$  dans une représentation cristalline (resp. semi-stable) à poids de Hodge-Tate contraints, et un morphisme surjectif  $T \rightarrow \bar{T}$ . La théorie des  $(\varphi, \tau)$ -modules nous semble être une approche intéressante pour aborder ce type de problèmes (au moins dans le cas des représentations semi-stables) puisqu'elle permet à la fois de décrire les représentations libres et de torsion, et de reconnaître de façon particulièrement simple les réseaux dans les représentations semi-stables.

## Références

- [1] J. Ax, *Zeros of polynomials over local fields. The Galois action*, J. Algebra **15** (1970), 417–428
- [2] L. Berger, *Représentations  $p$ -adiques et équations différentielles*, Invent. Math. **148** (2002), no. 2, 219–284
- [3] C. Breuil, *Représentations  $p$ -adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Annalen **307** (1997), 191–224.
- [4] C. Breuil, *Une application de corps des normes*, Compositio Math. **117** (1999), no. 2, 189–203
- [5] X. Caruso, *Représentations semi-stables de torsion dans le cas  $e < p - 1$* , J. reine angew. Math. **594** (2006), 35–92
- [6] X. Caruso, T. Liu, *Quasi-semi-stable representations*, Bull. Soc. Math. France **137** (2009), 185–223
- [7] X. Caruso, T. Liu, *Some bounds for ramification of  $p^n$ -torsion semi-stable representations*, J. Algebra **325** (2011), 70–96
- [8] F. Cherbonnier, P. Colmez, *Représentations  $p$ -adiques surconvergentes*, Invent. Math. **133** (1998), no. 3, 581–611
- [9] P. Colmez, *Fonctions d'une variable  $p$ -adique*, Astérisque **330** (2010), 13–59
- [10] J.-M. Fontaine, *Il n'y a pas de variété abélienne sur  $\mathbb{Z}$* , Invent. Math. **81** (1985), 515–538
- [11] J. M. Fontaine, *Représentations  $p$ -adiques des corps locaux*, Grothendieck Festschrift II, (1991), 249–309
- [12] J.-M. Fontaine, *Le corps des périodes  $p$ -adiques*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 59–111
- [13] M. Kisin, *Crystalline representations and  $F$ -crystals*, Algebraic Geometry and Number Theory, Drinfeld 50th Birthday volume, 459–496
- [14] F. Laubie, *Extensions de Lie et groupes d'automorphismes de corps locaux*, Comp. Math. **67** (1988), 165–189
- [15] S. Lang, *Cyclotomic fields*, Springer, Berlin, 1978
- [16] J. Le Borgne, *Un algorithme pour la réduction des  $\phi$ -modules sur  $k((u))$* , en préparation
- [17] T. Liu, *On lattices in semi-stable representations : a proof of a conjecture of Breuil*, Comp. Math. **144** (2008), No. 1, 61–88
- [18] T. Liu, *Torsion  $p$ -adic Galois representation and a conjecture of Fontaine*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **40** (2007), No. 4, 633–674
- [19] T. Liu, *A note on lattices in semi-stable representations*, Math. Ann. **346** (2010), No. 1, 117–138

- [20] F. Tavares Ribeiro,  *$(\varphi, \Gamma)$ -modules et loi explicite de réciprocité*, thèse de doctorat, disponible à [http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/37/97/71/PDF/these\\_Tavares.pdf](http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/37/97/71/PDF/these_Tavares.pdf)
- [21] J.P. Serre, *Corps locaux*, third edition, Hermann (1968)
- [22] S. Sen, *Ramification in  $p$ -adic Lie extensions*, *Invent. Math.* **17** (1972), 44–50
- [23] J.P. Wintenberger, *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications*, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **16** (1983), no. 1, 59–89
- [24] M. Yoshida, *Ramification of local fields and Fontaine's property  $(P_m)$* , disponible à <http://arxiv.org/abs/0905.1171>