



HAL
open science

Poincaré : philosophe et géomètre

Gerhard Heinzmann

► **To cite this version:**

Gerhard Heinzmann. Poincaré : philosophe et géomètre. Images des Mathématiques, 2010, <http://images.math.cnrs.fr/Poincare-philosophe-et-geometre.html>. hal-00527106

HAL Id: hal-00527106

<https://hal.science/hal-00527106>

Submitted on 9 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Poincaré : philosophe et géomètre

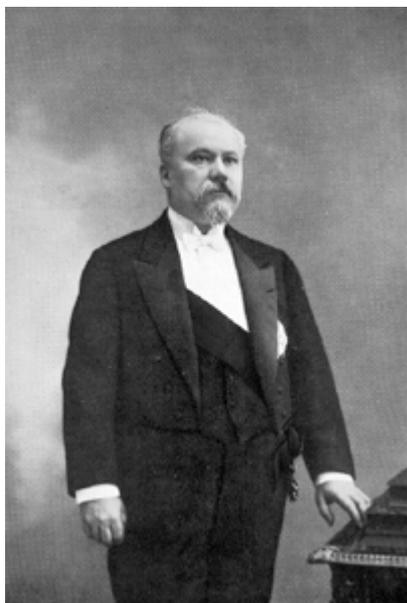
Le 16 octobre 2010, par **Gerhard Heinzmann**
Professeur de Philosophie à l'Université Nancy ([page web](#))



L'auteur se propose de justifier la thèse selon laquelle Henri Poincaré était non pas seulement un scientifique, mais également un philosophe de première importance. Il défend cette idée en s'appuyant sur une analyse de la conception de la philosophie de la géométrie d'Henri Poincaré.

Poincaré philosophe ?

CARL Friedrich Gauß mourut en 1855. Celui qui peut être considéré comme son successeur était né un an plus tôt : le titre de *Princeps Mathematicorum*, que seul Gauß avait porté, fut en effet repris pour la première fois en 1912/13 pour Poincaré. L'attribution est formulée dans le supplément de juillet 1913 que le *Circolo Matematico di Palermo*, un des grands périodiques mathématiques de l'époque, consacre à Poincaré. Le numéro reproduit entre autres les éloges de Paul Appell, de Georges Humbert, de Gabriel Lippmann et de Paul Painlevé, qui comparent Poincaré non seulement à Gauß et à Cauchy, mais également à Pascal, Kant et Leibniz [1].



Certes, le cousin germain de Henri, Raymond Poincaré, est à l'époque Président de la République Française, et les auteurs parlent en bons Français. Il n'en reste pas moins que Poincaré est considéré à l'époque au niveau international comme l'un des derniers savants universels à avoir mené une activité créatrice dans des domaines qui s'étendent des mathématiques à la physique aussi bien que de l'astronomie à la philosophie.

Poincaré ne fut-il pas d'abord et avant tout un mathématicien et un physicien qui, par sa réputation internationale, a été conduit, à l'instar de maints prix Nobel aujourd'hui, à commenter en philosophe les choses qu'il ignorait ? Si la philosophie des sciences se réduisait à l'étude des doctrines philosophiques et de leur succession dans le temps, l'œuvre de Poincaré y contribuerait effectivement peu. Mais si nous adoptons

un point de vue systémique en philosophie des sciences, nous nous rendons compte que, au moins rétrospectivement, les idées de Poincaré ont une portée plus significative que celles de beaucoup de philosophes professionnels de notre temps. Ainsi, ses réflexions sur la relation entre le langage scientifique et ses objets s'avèrent aujourd'hui plus pénétrantes qu'elles n'apparaissaient à l'époque. Il faut dire que le succès de la formalisation rendait alors beaucoup de philosophes aveugles.

Quelques philosophes des sciences ont cependant été plus perspicaces. Ainsi, dans les *Actes du Congrès International de Philosophie scientifique*, qui s'est tenu à Paris en 1935, Louis Rougier note en avant-propos « que la Sorbonne ne demandait qu'à renouer la tradition, inaugurée avec tant de maîtrise au début du XXe siècle, par le rénovateur en France de la philosophie scientifique, Henri Poincaré » [2]. Karl Popper estime quant à lui que Poincaré a été le plus grand philosophe des sciences [3]. Pourtant, il est en même temps clair que la philosophie de Poincaré reste ignorée en dehors du cercle des spécialistes. Ceci paraît justifié si, d'une part, l'on se confine à ce que dit Poincaré explicitement de la philosophie hors contexte scientifique [4] et que, d'autre part, l'on renonce à lire ses réflexions mathématiques.

La raison pour laquelle les publics philosophique et scientifique ignorent la philosophie de Poincaré est en fait double : d'un côté, la manière dont on la comprend dépend de ce que l'on entend par « philosophie » (c'est la difficulté pour le scientifique) et d'un autre côté, la réflexion philosophique se déploie chez Poincaré au sein même de la réflexion scientifique (c'est la difficulté pour le philosophe). Dans la suite, je n'esquisserai que succinctement ce qu'il convient d'entendre par « philosophie » pour me concentrer avant tout sur le second point, à savoir : comment le mathématicien Poincaré articulait réflexions « philosophique » et mathématiques. Je discuterai cette question sur l'exemple de la géométrie.

L'idée opératoire de la philosophie des sciences

J'exposerai en premier lieu une thèse en faveur laquelle on peut avancer des arguments plausibles, mais leur exposé dépasserait le cadre de notre propos.

Thèse : la philosophie n'est pas une discipline indépendante au sens où sa séparation des autres sciences ne se justifie pas [5] ; cette séparation s'est développée historiquement. A mon sens, philosopher, c'est développer l'aspect autoréflexif de chaque activité, de chaque action, soit-elle langagière ou non ; la philosophie ne découvre rien, mais elle invente quelque chose : la philosophie « invente » le cadre réflexif de notre vie. La philosophie réfléchit sur nos réflexions — au sens large — sur le monde. L'objet de cette métaréflexion peut être ou bien la pratique de tous les jours — comme chez Socrate — ou bien la pratique des arts et des sciences. Quatre dimensions prévalent dans cette réflexion dont on trouve une formulation célèbre chez Kant : qu'est ce que je peux savoir ? (théorie de la connaissance) ; qu'est ce que je dois faire ? (éthique) ; qu'est ce que je peux espérer ? (religion) ; qu'est ce que l'homme ? (anthropologie). Pour ce qui est de la théorie de la connaissance, qui intéresse Poincaré, la philosophie devrait

- *inventer les présuppositions conceptuelles qui sont à la base de nos connaissances scientifiques et*
- *clarifier cette activité dans sa forme symbolique.*

Mon but dans cet article est de montrer que l'approche « philosophique » de la géométrie correspond chez Poincaré à ces deux exigences.

Si l'on ne trouve guère chez Poincaré de réflexions méthodologiques déconnectées de sa

pratique de scientifique, on peut néanmoins constater que notre thèse, contemporaine, trouve au tournant du dix-neuvième et du vingtième siècle un écho dans l'exigence de Poincaré de procurer au futur savant une éducation classique, c'est-à-dire une formation « littéraire ». Dans son article « Les Sciences et les Humanités », dans lequel la position de Poincaré oscille pour ainsi dire entre le conservatisme de la « Ligue pour la Culture Française » et le modernisme de la « réforme Georges Leygues » de l'enseignement secondaire [6], Poincaré fait de gros efforts pour montrer que le littéraire est mieux formé pour suivre les subtilités du raisonnement mathématique que le bachelier scientifique :

« C'est [...] la pratique du thème et de la version qui nous apprendra à comprendre véritablement le sens des phrases et nous rendra par là aptes à nous en servir dans les raisonnements [...] [7]. On s'accorde à dire que l'enseignement littéraire, bien compris, c'est-à-dire dépouillé de tout appareil inutile de pédantisme ou d'érudition est le plus propre à développer en nous l'esprit de finesse. Et comme l'esprit de finesse est nécessaire à tout le monde [...] on conclura que la culture littéraire est nécessaire aux savants [...]. Seulement on croit généralement qu'ils en ont besoin pour devenir des hommes et non pour devenir des savants ; et c'est là qu'on se trompe. » [8]

C'est précisément par cette dernière remarque que Poincaré dépasse le conservatisme réducteur de la « Ligue pour la Culture Française ». Le défi qu'il pose appelle à corriger le malentendu de l'opposition entre philosophie et sciences. Autant il est nécessaire que la philosophie accompagne l'homme pour restituer au sujet son autonomie et ses potentialités, autant il me semble dangereux, voire fatal, de croire que la philosophie doit se contenter du rôle de guide de la personne dans ses engagements moraux et politiques au sens large. Plus fatal encore serait le fait de réduire le rôle de la philosophie à une fonction organisatrice de loisirs ou à l'enseignement du civisme. La philosophie n'a pas à maintenir la bonne humeur des troupes dans les lycées, les Grandes Écoles ou les Universités. Non, la philosophie et plus généralement, les sciences humaines, définissent le cadre réflexif de nos activités pratiques, économiques, artistiques et scientifiques. Elles dégagent les présuppositions conceptuelles que le scientifique utilise dans ses constructions et l'artiste dans ses créations. Bref, la philosophie opère systématiquement non pas après les autres activités théoriques (ou pratiques) mais bien en même temps qu'elles. Ceci est le message de Poincaré et reste l'orientation que les sciences humaines et plus particulièrement la philosophie devraient prendre. Cette remarque permet de tracer une ligne jusqu'au philosophe américain Nelson Goodman (1906-1998). La prétendue différence entre les arts et les sciences, selon laquelle les premiers construiraient des objets tandis que les secondes traiteraient de vérités éternelles est un malentendu traditionnel. Il est peut-être plus avantageux de considérer les deux « disciplines » comme des artefacts non artificiels et de chercher leur différence plutôt dans les *manières* de construire que dans la supposition que l'un est construit (l'art), l'autre pas (les sciences). En fait, Poincaré recommande une formation « humaniste » surtout pour les créateurs en science. La force de Poincaré, et son actualité, se résument dans son idée de réunir deux activités qui d'ordinaire s'excluent : la « poésie » et la science [9] aussi bien que dans sa capacité pratique à réaliser cette union.

S'il est bien connu que les mathématiciens aiment à défendre l'aspect « poétique » de leur



science au détour d'écrits rétrospectifs, de textes de conférences publiques, d'ouvrages de vulgarisation mathématique ou encore lors de discours honorifiques, pour **Poincaré** l'appréciation des propriétés « poétiques » n'est pas une simple valeur ajoutée, un bonus qui viendrait en quelque sorte récompenser le labeur mécanique du mathématicien. Au contraire, la prise en compte de l'élément « poétique » (et esthétique [10]) est nécessaire à la pratique mathématique. En d'autres termes, ce n'est pas l'évaluation « poétique » des mathématiques qui est visée ici : la fonction « poétique » concerne le mode de représentation des objets mathématiques.

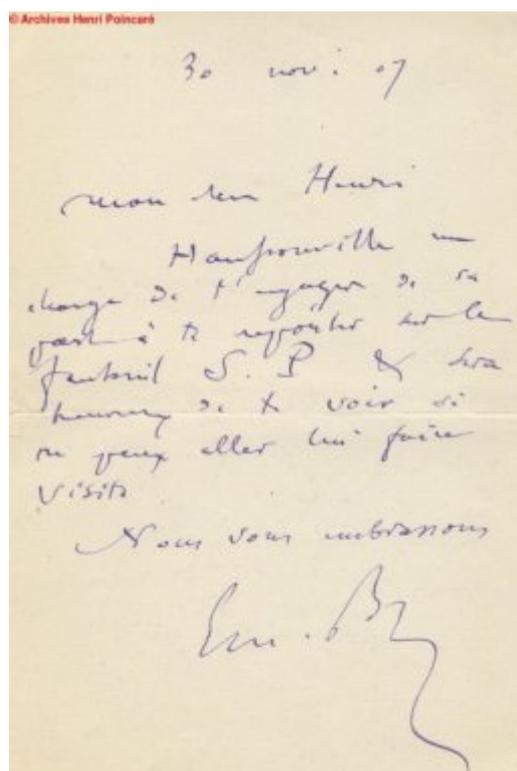
Par « fonction poétique » (ce mot vient du grec *ΠΟΙΕΙΝ* : créer), j'entends la mise en place d'un savoir opérationnel qui instaure un équilibre entre le monde et le langage, en considérant choses et outils comme produites pareillement, au lieu de vouloir les rabattre les uns sur les autres : les formalistes « rabattent » le monde sur les systèmes formels, les réalistes « rabattent » les systèmes scientifiques sur le monde. Un apprentissage de nos compétences opérationnelles nous conduira, en revanche, à considérer l'opposition entre les objets donnés dans la nature et les constructions symboliques non comme le *point de départ intuitif* de nos réflexions mais comme leur *résultat justifié*. Là où cet objectif sera atteint, l'opposition deviendra elle-même compréhensible par le rôle intermédiaire qu'on attribue traditionnellement aux choses mathématiques [11]. L'approche « poétique » a l'avantage de nous faire gagner en compréhension.

Nous allons voir que le conventionnalisme géométrique de **Poincaré** est prémonitoire pour cette perspective qui s'est ouverte à la fin du XXe siècle.

Le conventionnalisme géométrique de **Poincaré**

Selon Kant, les jugements mathématiques ne sont ni analytiques [12] et nécessaires, ni synthétiques et contingents. Ils possèdent un caractère synthétique et *a priori*. Le conventionnalisme mathématique est une position philosophique qui abandonne le caractère synthétique *a priori* [13] des jugements sans pour autant adopter des thèses empiristes.

Henri **Poincaré** est souvent considéré comme le père du conventionnalisme mathématique. Dans son célèbre article « Les Hypothèses fondamentales de la géométrie » (1887), il compare, pour la première fois, le choix entre la géométrie euclidienne et celle de Lobatschevski à un choix de système de coordonnées, tout en précisant que ce choix n'est pas arbitraire. A ses yeux, ce point de vue commence « à devenir banal ». En effet, des tendances conventionnalistes se trouvent également dans les travaux plus ou moins contemporains d'Ernst Mach (1838-1916) et d'Emile Boutroux (1845-1921). En outre, on ne peut non plus dire que le conventionnalisme ne soit qu'une conséquence philosophique de la découverte des géométries non-euclidiennes : l'allemand Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) soutient dans son cours sur la mécanique analytique (1847/48) des positions fort semblables au



conventionnalisme de **Poincaré** en physique.

Face à l'existence de plusieurs géométries possibles, la solution kantienne se trouve en difficulté pour expliquer pourquoi l'axiome des parallèles est un jugement synthétique *a priori* et donc nécessaire, bien que sa négation soit possible et engendre des théories — les géométries non-euclidiennes — aussi cohérente que celle d'Euclide. Au lieu de refuser aux jugements non-euclidiens le statut de connaissances, les tenants du conventionnalisme soulignent le rôle indispensable que jouent *conventions*, *choix* ou *décisions* pour l'acceptabilité de la connaissance mathématique. Ainsi, l'axiome des parallèles, par exemple, est considéré par Henri **Poincaré** comme une convention pour laquelle il ne fait pas de sens de dire qu'elle est vraie ou fausse et dont le choix, parmi toutes les conventions possibles, est guidé par (1) le critère de simplicité et (2) par l'expérience.

Des conventions peuvent intervenir à différents niveaux du savoir mathématique. Ainsi, depuis l'Antiquité, on soutient souvent le caractère conventionnel de la signification de n'importe quel terme langagier [14]. Par ailleurs, depuis l'introduction des systèmes d'axiomes formels, à la fin du XIXe siècle, les axiomes ont perdu leur statut de propositions vraies ou fausses en faveur d'une interprétation comme schèmes de propositions qui deviennent vraies ou fausses seulement lorsqu'on interprète les lettres schématiques par des relations concrètes. Or, d'une manière générale et sans autre précision, il est difficile de dire d'un langage qu'il est plus simple qu'un autre, de sorte que le critère **poincaréen** de simplicité semble peu efficace. En outre, le mathématicien formaliste poursuit la construction des systèmes formels indépendamment de leurs interprétations. Par voie de conséquence, le second critère **poincaréen** ne serait, dans ce cadre, pas non plus pertinent. Il est donc probable que **Poincaré** ne visait pas une interprétation purement linguistique de la convention.

Au contraire, les conventions possèdent souvent, pour **Poincaré**, une fonction épistémique, c'est-à-dire elles ne se limitent pas à exprimer commodément un fait, mais favorisent une meilleure compréhension de ce fait. Comment parvient-on à ceci ? En observant, répond **Poincaré**, le rôle indispensable des conventions dans la genèse de l'espace géométrique. Car, selon lui, on ne comprend guère une théorie sans connaître sa genèse.

Genèse logique versus genèses psychologique et historique de l'espace géométrique

On peut comprendre ce qu'entend **Poincaré** par l'expression de *genèse* de l'espace géométrique de trois manières différentes : une *genèse logique* envisage une reconstruction systématique de l'espace géométrique, indépendamment de la *genèse historique*, qui s'est déroulée de l'Antiquité jusqu'à nos jours. On pourrait également penser à une *genèse psychologique* : on devrait alors donner une description du développement de l'orientation spatiale chez les animaux.

Poincaré n'est pas historien, et l'on peut exclure qu'il envisage une genèse historique de la géométrie. En revanche, il n'est pas évident qu'il distingue assez soigneusement le point de vue psychologique et le point de vue logique [15]. Ceci est vrai, au « détail » près qu'il n'utilise pas toujours le terme « psychologie » dans son sens moderne. Il l'emploie aussi dans toutes les situations où il veut insister sur la dimension de la compréhension, qu'il oppose à l'exposition logiquement correcte du *résultat*. **Poincaré** traite de surcroît la genèse psychologique au sens moderne dans l'esprit d'un empirisme évolutionniste, empreint de la théorie de l'adaptation biologique de Darwin. Pareille genèse concerne le passage du « je » au « nous », perspective qui trouve son écho chez **Poincaré** dans le transfert de l'Individu vers la

« race » [16]. Dans son essai géométrique le plus important *On the Foundations of Geometry* (*Monist*, Octobre 1898), cette dimension d'évolution psychologique est présupposée : l'essai commence par l'affirmation selon laquelle « nos sensations ne peuvent pas nous donner la notion d'espace ». Le fait que Poincaré utilise néanmoins, dans son exposition du développement logique de la géométrie, le terme « psychologique » révèle qu'il conçoit la genèse logique de l'espace géométrique en termes psycho-physiologiques et qu'un certain stade de cette genèse, à savoir le stade de « l'espace grossier », « nous est commun avec les animaux supérieurs » [17].

Mach distinguait, dans son *Analyse des sensations* (1886), les propriétés physiologiques et les propriétés géométriques de l'espace [18], en soulignant que les premières sont le point de départ de toute géométrie en ce sens qu'elles donnent « probablement la première motivation pour entreprendre des recherches géométriques » [19]. Neuf ans plus tard, en 1895, dans son article *L'espace et la géométrie* [20] qui sera à la base de son essai dans le *Monist*, Poincaré introduit la même distinction. Il y énumère les propriétés essentielles de l'espace géométrique :

« 1° Il est continu ; 2° Il est infini ; 3° Il a trois dimensions ; 4° Il est homogène, c'est-à-dire que tous ses points sont identiques entre eux ; 5° Il est isotrope, c'est-à-dire que toutes les droites qui passent par un même point sont identiques entre elles » [21]. En comparant l'espace géométrique avec l'espace représentatif ou sensible, sous sa triple forme, visuelle, tactile et motrice, Poincaré constate ensuite que les deux sont essentiellement différents. En effet, l'espace représentatif « n'est ni homogène, ni isotrope ; on ne peut même pas dire qu'il ait trois dimensions » [22]. Pour Poincaré, l'espace représentatif est une catégorie essentiellement vague [23] : il n'y a pas de mesure, on ne peut parler d'axes constants par rapport à notre corps, et, cependant, grâce à lui, on peut comparer des sensations de même genre et constater la contiguïté de deux objets. Per se, toutes les sensations sont différentes, puisqu'elles sont accompagnées, par exemple, de « sensations olfactives ou auditives diverses » [24]. Leur indiscernabilité est une conséquence de notre classification abstraite.

Contrairement à Mach, Poincaré ne se contente pas de situer les liens entre les deux espaces dans la genèse psychologique de l'espace géométrique. Il est conscient, comme Mach, que les représentations ne peuvent se ranger que dans l'espace représentatif et qu'en principe, nous nous ne représentons pas les figures en géométrie mais nous raisonnons sur elles. Poincaré essaie de relier les deux espaces par une construction assez astucieuse : l'espace géométrique est reconstruit à partir d'un raisonnement sur des représentations de sensations musculaires, elles-mêmes non-spatiales, bien qu'elles soient des éléments de l'espace représentatif ou sensible [25]. Comment, donc, fonctionne cette genèse logique qui nous fait comprendre la géométrie ?



Construction (représentation) d'un objet à l'aide de la catégorie de l'espace sensible

Une fois admis que **Poincaré** défend une conception opératoire de notre activité scientifique, il devient évident qu'il ne peut appréhender la détermination des objets indépendamment de nos actions en relation avec eux. Puisqu'il considère que notre propre corps constitue le système de coordonnées de nos manières d'agir, il n'y a aucune place pour un espace absolu existant en dehors de nos actions [26]. Une action peut être conçue de deux manières : relativement à son résultat aussi bien que relativement au processus de l'action. En conséquence, la localisation d'un objet dans un espace pourrait être interprétée soit comme le résultat d'une action tactile, motrice et/ou visuelle, soit comme un reflet du processus de l'action ayant pour intention d'atteindre l'objet en question. Dans les deux cas, les objets sont représentés par rapport à nos activités et à notre corps, mais seul le dernier cas ne présuppose pas de forme donnée de sensibilité. C'est en réfléchissant sur l'intention réalisée par différentes séquences d'actions que nous pouvons choisir, pour ainsi dire, entre différentes géodésiques [27]. Du fait qu'il rejette toute forme *a priori* de sensibilité, **Poincaré** adopte « naturellement » cette approche. Au départ, notre corps joue ce rôle de système de coordonnées par rapport auquel nous localisons un objet dans l'espace [28]. **Poincaré** refuse d'interpréter la localisation d'un objet dans l'espace représentatif comme la projection d'un objet extérieur dans notre représentation. Par contraste, localiser un objet dans l'espace signifie pour **Poincaré** réfléchir sur le déroulement d'une action pour atteindre cet objet, c'est-à-dire réfléchir sur des séquences de sensations musculaires et non spatiales. Ainsi la représentation d'un objet dans l'espace sensible ne signifie rien d'autre que la *reproduction* consciente des sensations musculaires nécessaires pour atteindre cet objet :

"Nos représentations ne sont que la reproduction de nos sensations, elles ne

peuvent donc se ranger que dans le même cadre qu'elles, c'est-à-dire dans l'espace représentatif. [...] Quand on dit d'autre part que nous « localisons » tel objet en tel point de l'espace, qu'est-ce que cela veut dire ? *Cela signifie simplement que nous nous représentons les mouvements qu'il faut faire pour atteindre cet objet* ; et qu'on ne dise pas que pour se représenter ces mouvements, il faut les projeter eux-mêmes dans l'espace et que la notion d'espace doit, par conséquent, préexister." [29].

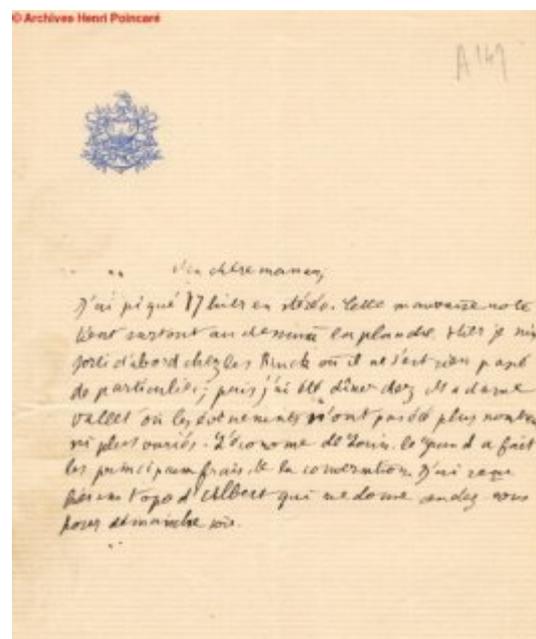
C'est pour classifier ces sensations que **Poincaré** introduit la catégorie de l'espace représentatif. Celle-ci n'est pas formée par une classification à partir de sensations motrices, mais elle est, au contraire, la condition nécessaire d'une classification de sensations motrices. L'espace représentatif ou sensible est une forme de notre entendement et non de notre sensibilité puisqu'une sensation individuelle peut parfaitement exister sans lui [30] ; le sens que **Poincaré** donne à cette expression est donc essentiellement distincte de ce que le sens commun entend par « l'espace représentatif ».

Comment passer de la catégorie de l'espace sensible à l'espace géométrique ?

Ce passage exige une description plus technique. **Poincaré** propose la construction suivante dans laquelle on voit que l'expérience des sensations est à ses yeux une occasion, pour notre esprit, de concevoir l'espace géométrique : La construction de l'espace géométrique procède du fait, observable, qu'un ensemble d'impressions peut être modifié de deux façons distinctes : d'une part, sans que nous éprouvions de sensations musculaires, et d'autre part, sous l'effet d'une action motrice accompagnée de sensations musculaires. Dans le premier cas, **Poincaré** parle d'un changement externe, dans le deuxième cas, d'un changement interne. Cette observation suggère une classification conventionnelle des changements externes : les changements externes qui peuvent être corrigés par un changement interne sont appelés changements de position, tandis que les autres sont des changements d'état. Par la relation « *le changement externe x est compensable par le même changement interne que le changement externe y* » [31], on peut regrouper les changements externes équivalents dans une classe qu'on appelle *déplacement*.

Nous avons plus exactement la situation suivante : 1) Deux changements internes sont considérés comme indiscernables s'ils provoquent les mêmes sensations musculaires, c.-à-d. s'ils sont « trop voisins l'un de l'autre » [32]. 2) Deux changements externes sont équivalents si et seulement s'ils possèdent une certaine propriété en commun, c.-à-d. s'ils sont susceptibles d'être corrigés d'une manière approximative par le même changement interne [33].

Les classes d'équivalences de changements de position s'appellent *déplacements* (externes et internes) [34]. Les déplacements sont donc identiques ou disjoints. La définition des



déplacements en tant que classes d'équivalences permet de définir l'identité « et il en résulte qu'un déplacement peut être *répété* deux ou plusieurs fois » [35]. Soulignons que **Poincaré** utilise souvent le même mot de « déplacement » pour les classes d'équivalence et pour leurs éléments, les changements de position.

Roberto Torretti argumente que cette explication de **Poincaré** serait erronée [36]. Il donne un contre-exemple basé sur le fait que l'addition de deux petites erreurs de compensation peuvent s'additionner à une erreur trop importante telle qu'une compensation n'est plus possible. Cette remarque est correcte, mais ne constitue pas une réfutation de **Poincaré**. La raison en est que **Poincaré** n'est pas empiriste : l'expérience nous apprend seulement « que la compensation s'est approximativement produite. » Elle ne fait que donner à l'esprit que « l'occasion d'accomplir cette opération », mais « la classification n'est pas une donnée brute de l'expérience » [37]. Et **Poincaré** est très précis pour ce qui est de l'imprécision à ce niveau de la reconstruction :

« Quand l'expérience nous apprend qu'un certain phénomène ne correspond pas *du tout* aux lois indiqués, nous l'effaçons de la liste des déplacements. Quand elle nous apprend qu'un certain changement ne leur obéit qu'*approximativement*, nous considérons ce changement, *par une convention artificielle*, comme la résultante de deux autres changements composants. Le premier composant est regardé comme un déplacement satisfaisant *rigoureusement* aux lois dont je viens de parler, tandis que le second composant, qui est petit, est regardé comme une altération qualitative. Ainsi nous disons que les solides naturels ne subissent pas seulement de grands changements de position, mais aussi de petites flexions et de petites dilatations thermiques. » [38]

Le groupe de déplacements

Supposons maintenant que la théorie de la compensation permette la formation de classes d'équivalences « vagues » qui soient appelées *déplacements externes et déplacements internes*. Le point important de la construction **poincaréienne** consiste alors dans le fait que l'ensemble des déplacements forme un groupe au sens mathématique [39]. Si on en replace le concept dans le cadre de son époque, le groupe se réduit à poser la condition que la loi de composition est interne : « Si deux changements A et B sont des déplacements, le changement A+B est aussi un déplacement. Les mathématiciens expriment cela en disant que l'ensemble des déplacements forme un groupe. S'il n'en était pas ainsi il n'y aurait pas de géométrie » [40]. « Mais comment savons-nous, se demande **Poincaré**, que l'ensemble des déplacements est un groupe ? » [41]. Plusieurs difficultés se font jour, par exemple :

- Il faut qu'il existe, pour deux déplacements quelconques, des éléments qui, relativement à l'opération du groupe, débutent et se terminent en provoquant les mêmes sensations [42].
- Si deux déplacements externes différents compensent respectivement deux déplacements internes, est-il encore de même quand on intervertit l'ordre de sorte que les deux déplacements externes soient suivis par les deux déplacements internes ? **Poincaré** est bien conscient que la validité des propriétés de groupe en question ne résulte pas d'une réflexion *a priori* mais qu'elle encourt au contraire le péril d'être

réfutée empiriquement. Et pourtant, affirme-t-il, « la géométrie est à l'abri de toute révision » [43]. Pour résoudre ce paradoxe, Poincaré introduit — nous venons de le voir — des conventions à différents niveaux de sa construction : en effet, dans l'espace représentatif déjà, les changements de position ne peuvent jamais être exactement réalisés puisque, en général, la compensation du changement externe par un changement interne n'est qu'approximative et ne coïncide donc pas exactement avec la situation initiale. Lorsque la succession des sensations que provoque un changement interne — et donc l'observation de ces sensations — ne correspond pas du tout à la compensation attendue (si l'écart est trop important), elle est soit rayée, soit remplacée par une nouvelle « convention artificielle » qui considère le changement comme la résultante de deux composantes : l'une satisfait rigoureusement la compensation, la seconde en est une altération qualitative qui est dorénavant négligée [44]. Pour obtenir une coïncidence exacte, il faut donc lire les corrections conduisant à des changements de position comme des ordres d'action animés par une intention. On agit comme si on pouvait réaliser cette intention que l'on prend pour norme relativement à « des corps idéaux [...] tiré[s] de toutes pièces de notre esprit » [45]. Et pourtant, ce qui est réalisé n'est pas la norme, mais seulement l'ordre de réaliser cette norme. L'expérience y joue un double rôle : elle est l'occasion pour « introduire » la norme (sa *ratio cognoscendi*) [46] et elle fournit l'occasion pour utiliser la norme en vue de conceptualiser la réalité. Tout comme la catégorie de l'espace représentatif, le concept général de groupe est une forme de notre entendement et le groupe de déplacements relève d'une suite de décisions conventionnelles qui adaptent, dans un équilibre réfléchi, notre expérience à la catégorie :

« En résumé, les lois en question ne nous sont pas imposées par la nature, mais sont imposées par nous à la nature. Mais si nous les imposons à la nature, c'est parce qu'elle nous permet de le faire. Si elle offrait trop de résistance, nous chercherions dans notre arsenal une autre forme qui serait pour elle plus acceptable » [47].

L'étude des propriétés du groupe des déplacements, qui forme un espace intermédiaire ou « grossier » entre l'espace sensible et l'espace géométrique [48], nous suggère encore d'autres idéalizations, comme celle de passer au concept mathématique de groupes continus de transformations (G). Les groupes isomorphes à G seront ensuite à leur tour classés par rapport à leurs propriétés formelles dont la plus importante est l'existence de sous-groupes. L'ensemble des déplacements qui conservent un système donné de sensations forme un sous-groupe rotatif. Or toute rotation peut être décomposée en trois autres et Poincaré obtient ainsi une caractérisation des groupes qui correspond aux géométries à courbure constante. Parmi ces groupes, nous choisirons finalement celui qui permet « l'affirmation de l'existence d'un sous-groupe invariant dont tous les déplacements sont échangeables et qui est formé de toutes les translations » [49]. En d'autres termes, nous choisirons le groupe qui correspond à la géométrie euclidienne, parce que ses sous-groupes sont mieux suggérés par l'expérience. En principe, nous aurions pu fixer une autre convention. Poincaré poursuit ensuite sa construction et obtient la tridimensionalité de l'espace euclidien comme résultat d'un choix conventionnel [50].

Conclusion

Mon propos a été de montrer comment philosophie et science s'articulent dans l'œuvre de **Poincaré**. J'ai choisi comme exemple la géométrie, mais j'aurais pu tout aussi bien choisir l'arithmétique ou la physique.

Mon but principal a été d'illustrer comment **Poincaré** situe la frontière peu explorée entre convention et expérience en géométrie, en respectant autant que possible l'équilibre entre l'exactitude et l'objectivité. **Poincaré** se concentre sur l'aspect épistémique de la convention qui, elle, est guidée par l'expérience ; la convention, au sens commun d'un choix arbitraire entre alternatives, ne joue qu'un rôle secondaire.

Il me semble que l'on peut tirer au moins deux conclusions philosophiques de ce résultat. L'une concerne une question historique et kantienne, à savoir le fait de savoir s'il est justifié de tracer une démarcation entre géométries euclidiennes et non-euclidiennes, en arguant que la première aurait un caractère intuitif qui feraient défaut aux secondes. L'autre question porte sur le tournant « pratique » de la philosophie des sciences aujourd'hui et son apparent renoncement aux aspects normatifs.

La question de l'intuitivité (*Anschaulichkeit*) des géométries non-euclidiennes a fait l'objet de multiples discussions au sein du néokantisme dans la mesure où il s'agissait de sauver l'édifice kantien et de continuer à affirmer le caractère intuitif (non conceptuel) de la connaissance mathématique par contraste avec le caractère discursif de la connaissance philosophique. Une des manières dont on a résolu le problème a été de se débarrasser de la question, en niant tout caractère mathématique aux géométries non-euclidiennes et en leur attribuant un caractère purement conceptuel et philosophique. Pareille théorie d'immunisation est un échec philosophique, car une métaphysique qui serait découplée des sciences n'est pas très kantienne. C'est ce qui a motivé la célèbre boutade de Hans Reichenbach (1891-1953) : "Kant, qui te sauvera-t-il des kantians ? [51] L'autre solution à ce premier problème a été une tentative de récupérer une forme d'intuitivité pour les géométries non-euclidiennes, en substituant au concept d'intuition celui d'imagination (Helmholtz) ou en utilisant des modèles euclidiens pour les géométries non-euclidiennes. Dans aucun de ces deux cas, l'intuitivité kantienne des géométries non-euclidiennes n'est assurée. Il subsiste alors une dissymétrie philosophique entre la géométrie euclidienne et les géométries non-euclidiennes qui s'oppose à la symétrie logico-mathématique concernant la non-contradiction des différentes géométries. C'est peut-être **Poincaré** qui a réussi à rétablir au mieux la symétrie philosophique : dans son approche opératoire, l'intuitivité des géométries euclidiennes et non-euclidiennes n'est pas recherchée dans l'intuitivité des corps euclidiens/non-euclidiens ou dans la description des modèles euclidiens du domaine non-euclidien, mais dans l'intuitivité des combinaisons du mouvement de succession :

« s'il est absurde de supposer que nous puissions imaginer des sensations différentes de nos sensations normales, nous pouvons au contraire avec quelque effort imaginer une succession de sensations, pareilles individuellement à nos sensations normales, mais se succédant dans un ordre anormal. Nous pouvons imaginer que ces sensations suivent d'autres lois et par exemple qu'elles s'ordonnent, non conformément à la structure du groupe euclidien, mais conformément à la structure d'un autre groupe » [52].

Pour ce qui est de la question de la philosophie actuelle des mathématiques, beaucoup de

chercheurs semblent tomber d'accord sur le fait que les trois positions classiques (formalisme, intuitionnisme, platonisme) ont échoué à fonder d'une manière convaincante la vérité mathématique à partir des critères métaphysiques ou empiriques, de fait largement insensibles à la pratique de la science et à son contexte. Il paraît donc raisonnable d'adopter avec Quine une certaine suspicion vis-à-vis du bien fondé de l'alternative « normatif » versus « descriptif ». Mais quelle conséquence doit-on tirer de cette position dubitative ? En excluant une position normative qui reviendrait à considérer que « philosophy-first », on a le choix entre, d'un côté, identifier épistémologie et psychologie cognitive (enrichie d'éléments sociétaux) et, d'un autre côté, adopter un point de vue « Philosophy-in-between » où, selon l'expression du philosophe Stewart Shapiro, les mathématiques ne dominent pas la philosophie ni la philosophie les mathématiques [53].

En adoptant cette dernière position d'un « naturalisme modéré », on souscrit à l'idée que le philosophe ne dispose pas d'un accès à la réalité indépendamment des schèmes conceptuels utilisés dans les sciences. En d'autres termes, il n'existe pas de fondements des sciences qui soient basés sur une intuition philosophique dénuée de tout doute. En ce sens la justification épistémique de croyances et de propositions a son origine dans la pratique scientifique.

Je crois que Poincaré a donné au début du XXe siècle une première contribution pour traiter la question moderne de la compréhension des sciences en direction d'un naturalisme modéré. D'une manière schématique, elle consiste à inventer un processus qui lie la question ontologique (ce qui est) à la question épistémologique (comment je peux connaître) de la façon suivante :

- la construction de la réalité mathématique est à effectuer à partir de l'imagination de sensations ; cette construction doit être guidée par l'expérience ;
- l'expérience n'est pas suffisante, mais n'est que l'occasion de prendre conscience de certaines catégories de l'esprit avec lesquelles il faut faire concorder par décision (convention) notre expérience.

Par référence au philosophe américain Charles Sanders Peirce (1839-1924), nous appelons un tel processus *pragmatiste* parce que la construction de l'objet scientifique à partir de sensations (imaginées) se fait en même temps que se constitue le langage descriptif qui lui est adapté (catégorie), en d'autres termes parce que la base empirique est l'occasion de choisir dans un processus d'apprentissage langagier la catégorie conceptuelle qui est idoine par rapport à un engagement ontologique. Appeler la philosophie de Poincaré simplement « conventionnalisme » prête à malentendu ; je propose de l'appeler « conventionnalisme pragmatiste ».

Bibliographie

Heinzmann Gerhard [1986] : (éd.), Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. *Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité*. Paris : Blanchard.

Heinzmann Gerhard, Rollet Laurent 1999 : Sciences et Humanités chez Henri Poincaré, in M. Samuel-Scheyder/Ph. Alexandre (éds), *Pensée Pédagogique, Enjeux, continuités et ruptures en Europe du XVIe au XXe siècle*, Frankfurt : Lang, p. 343-355.

Heinzmann Gerhard, Jullien Caroline [2009] : *L'esthétique dans la démonstration mathématique*, Mémoires de l'Académie de Stanislas, Année 2007 (à paraître).

Jacobi Carl Gustav Jacob [1996] : *Vorlesungen über analytische Mechanik*, Berlin 1847/48 ; ed. H Pulte, Brunschweig/Wiesbaden : F. Vieweg & Sohn.

Johnson Dale M. [1981] : *The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology*, Part II, *Archive for History of Exact Sciences* 25, 85-267. **Jullien Caroline** [2008] : *Esthétique et mathématiques. Une exploration goodmanienne*, Presses universitaires de Rennes.

Ly Igor [2008] : *Mathématique et physique dans l'œuvre philosophique de Poincaré*, Thèse, Université Nancy 2.

Mach Ernst [1901] : *On Physiological, as Distinguished from Geometrical, Space*, *The Monist* XI, p. 321-338.

Mach Ernst [1886] : *Analyse der Empfindungen*, cité selon l'édition Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1991 ; trad. fr. : *L'analyse des sensations*, Nîmes : Chambon, 1996.

Nabonnand Philippe [2009] : *La théorie de l'espace de Poincaré*, in : *Recherche sur la philosophie et le langage* (éd. Pierre-Edouard Bour et Sophie Roux) (Lambertiana), à paraître.

Poincaré Henri [1887] : *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie*. *Bulletin de la Société mathématique de France* 15 : 203-216 ; cité selon la réimpression dans : **Poincaré**, Œuvres, t. 11, 1956 : 79-91.

Poincaré Henri [1895] : *L'espace et la géométrie*, *Revue de métaphysique et de morale* 3 : 631-646.

Poincaré Henri, [1898] : *On the Foundations of Geometry*, *The Monist*, 9, p. 1-43 ; trad. fr. *Des fondements de la géométrie*. Ed. L. Rougier, Paris : Chiron, s. d. (1921) ; cité d'après [**Poincaré** 2002, 5-31].

Poincaré Henri [1899] : *Des fondements de la géométrie. A propos d'un livre de M. Russell*, *Revue de métaphysique et de morale* 7 : 251-279.

Poincaré Henri [1902] : *La science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion, ; édition citée : 1968.

Poincaré Henri [1905] : *La valeur de la science*, Paris : Flammarion ; édition citée : 1970.

Poincaré Henri [1908] : *Science et méthode*, Paris : Flammarion ; édition citée : Paris : Kimé 1999.

Poincaré Henri [1909] : *La logique de l'infini*. *Revue de métaphysique et de morale* 17 : 461-482 ; cité selon la réimpression dans : Heinzmann 1986 : 235-256. **Poincaré Henri** [1910] : *Savants et écrivains*, Paris : Flammarion, 279 p.

Poincaré Henri [1911] : *Les Sciences et les Humanités*, Paris : A. Fayard.

Poincaré Henri [1913] : *Dernières pensées*, Paris : Flammarion. 1913 ; édition citée : 1963.

Poincaré Henri [1921] : *Analyse des travaux scientifiques de H. P. faite par lui-même*, *Acta mathematica* 38, pp. 3-135, chapitre 'Résumé analytique', cité d'après F. E. Browder (éd.),

The Mathematical Heritage of H. P., II, Proc. Symp. in Pure Math. 39, 1983, p. 257-357.

Poincaré Henri [2002] : *L'opportunisme scientifique* (éd. Laurent Rollet), Basel : Birkhäuser.

Pulte Helmut : [2000] *Beyond the Edge of certainty : Reflections on the Rise of Physical Conventionalisme*. Philosophia Scientiae 4, cahier 1, p. 47-68.

Reichenbach Hans [1921] : *Lettre à A. Berliner du 22-4-1921* ; citée d'après la publication in : Hentschel Klaus [1990] : *Interpretationen und Fehlinterpretationen der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie durch Zeitgenossen Albert Einsteins*, Basel/Boston/Berlin : Birkhäuser.

Rougier Louis [1936] : *Avant-propos*. In : *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, Sorbonne, Paris 1935, vol. I. Paris : Hermann. **Russell Bertrand** [1897] : *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge : Univ. Press.

Schlick Moritz [1918] : *Allgemeine Erkenntnislehre*, [Springer], cité d'après l'édition Frankfurt : Suhrkamp, 1979.

Shapiro Stewart [2000] : *Thinking about Mathematics. The Philosophy of Mathematics*, Oxford : University Press.

Torretti Roberto [1978] : *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht : Reidel.

Zahar Elie [2001] : *Poincaré's Philosophy*, Chicago/la Salle : Open Court.

P.S. :

La rédaction d'Images des maths, ainsi que l'auteur, remercient pour leur relecture attentive, les relecteurs dont le pseudonyme est le suivant : Nicolas Bedaride, Loren Coquille, Guillaume Jouve et Nicolas Bergeron.

Notes

[▲1] Voir Circolo Matematico di Palermo 1913, supplément du 17 juillet 1913, « Henri Poincaré. A l'occasion du premier anniversaire de sa mort », p. 5

[▲2] [Rougier 1936, p. 5].

[▲3] [Zahar 2001, p. 2].

[▲4] Dans une lettre à Camille Flammarion, Poincaré écrit par exemple : « Maintenant, ceux qui regardent la métaphysique comme démodée depuis Auguste Comte, me diront qu'il ne peut y avoir de métaphysique moderne. Mais la négation de toute métaphysique, c'est encore une métaphysique, et c'est précisément là ce que j'appelle la métaphysique moderne » [Archives Poincaré, lettre 465 (circa 1904)].

[▲5] Voir aussi [Schlick 1918, p. 7] : « La philosophie n'est pas une science indépendante [...] le philosophique est inclus dans toute science comme sa véritable âme ».

[▲6] [Heinzmann/Rollet 1999, p. 343].

[▲7] [Poincaré 1911, p. 16].

[▲8] [Poincaré 1911, p. 25-26].

[▲9] [Poincaré 1910, p. 2, 26].

[▲10] Voir [Heinzmann/Jullien 2009] et [Jullien 2008].

[▲11] Voir [Aristote, Métaphysique, A 6, 987b 14sqq.].

[▲12] Kant appelle un jugement analytique si le *concept* de son prédicat est contenu dans le *concept* du sujet ; exemple : « l'or est doré » en sachant que l'or est défini comme « métal doré ». Par contre, « $5+7$ est égal à 12 » n'est pas analytique parce que le concept « 12 » n'est pas contenu dans le concept de « $5+7$ » : « $20-8$ » fait partie du concept « 12 » mais pas du concept « $5+7$ ».

[▲13] La connaissance mathématique est la connaissance rationnelle par la construction des concepts. Or, construire un concept, c'est présenter *a priori* l'intuition qui lui correspond, ce qui constitue un processus synthétique

[▲14] voir Aristote, *De l'Interprétation*, chapitre 2 (16a 19) : « Un nom est un son qui signifie quelque chose par convention ».

[▲15] Voir [Poincaré 1909, p. 482].

[▲16] Voir [Poincaré 1908, p. 100 sq.].

[▲17] [Poincaré 1908, p. 100] Je reviendrai plus tard à « l'espace grossier ».

[▲18] Voir [Torretti 1978, p. 406sq.].

[▲19] [Mach 1886, p. 87, 99].

[▲20] [Poincaré 1895]. Cet article est reproduit en 1902 dans son recueil *Science et hypothèse* [Poincaré 1902].

[▲21] [Poincaré 1902, p. 78].

[▲22] [Poincaré 1902, p. 81].

[▲23] Voir [Poincaré 1898, p. 6].

[▲24] [Poincaré 1913, p. 142].

[▲25] « Les sensations par elles-mêmes n'ont aucun caractère spatial ». [Poincaré 1898, p. 5] Selon Mach et James, au contraire, toute sensation est partiellement spatiale [Mach 1901, 324].

[▲26] [Poincaré 1908, p. 83 sqq.].

[▲27] [Poincaré 1902, p. 68].

[▲28] [Poincaré 1908, p. 89].

[▲29] [Poincaré 1902, p. 82].

[▲ 30] [Poincaré 1898, p. 6].

[▲ 31] [Poincaré 1898, p. 9].

[▲ 32] [Poincaré 1905, p. 79].

[▲ 33] Observons que la transitivité de la relation est obtenue par une condition supplémentaire que Poincaré considère comme un fait empirique : « Si elle ne se vérifiait pas, au moins approximativement, il n’y aurait pas de géométrie, il n’y aurait pas d’espace » [Poincaré 1905, p. 72/73].

[▲ 34] Dans la suite, j’utilise ce terme exclusivement dans ce sens technique.

[▲ 35] [Poincaré 1898, p. 10].

[▲ 36] [Torretti 1978, p. 343].

[▲ 37] [Poincaré 1898, p. 10].

[▲ 38] [Poincaré 1898, p. 11].

[▲ 39] Les perspectives ouvertes par la position de Poincaré ont peut-être été négligées en partie parce que Bertrand Russell (1872-1970) situe dès le départ (dans son *An Essay on the Foundations of Geometry* 1897, §33) Poincaré dans la tradition de Cayley et Klein qui définissent les relations métriques d’une manière conventionnelle, mais dans un espace projectif. Or, ceci n’est pas le cadre présupposé de Poincaré, qui envisage la genèse de l’espace géométrique sans présupposer (contrairement aussi à Helmholtz ou à Lie) une quelconque notion d’espace (au niveau même de la théorie).

[▲ 40] [Poincaré 1898, p. 10].

[▲ 41] [Poincaré 1898, p. 10].

[▲ 42] [Poincaré 1898, p. 11].

[▲ 43] [Poincaré 1898, p. 11].

[▲ 44] [Poincaré 1898, p. 11].

[▲ 45] [Poincaré 1902, p. 93].

[▲ 46] Voir [Poincaré 1899, p. 276].

[▲ 47] [Poincaré 1898, p. 12].

[▲ 48] Voir [Ly 2008, §6.2].

[▲ 49] Voir [Ly 2008, §6.2].

[▲ 50] Voir Nabonnand 2009 pour une description détaillée du développement mathématique des propriétés du groupe des déplacements. Nabonnand y remarque surtout que dans sa construction, Poincaré fait implicitement référence à la classification de Lie des groupes de transformation à 6 paramètres de R^3 de sorte que la genèse de l’espace tridimensionnel devient techniquement circulaire. Poincaré s’en avise plus tard et essaie de corriger ce défaut.

[▲51] [Reichenbach 1921].

[▲52] [Poincaré 1921, p. 349].

[▲53] Voir [Shapiro 2000, 15].

► **Crédits images**

Pour citer cet article : **Gerhard Heinzmann**, **Poincaré : philosophe et géomètre**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2010. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Poincare-philosophe-et-geometre.html>