HAL
open science

Flachheit und Steuerbarkeit einer Klasse von Netzwerken ortlich verteilter Systeme (Flatness and controllability of a class of networks of distributed parameter systems)

Frank Woittennek, Hugues Mounier

To cite this version:

Frank Woittennek, Hugues Mounier. Flachheit und Steuerbarkeit einer Klasse von Netzwerken ortlich verteilter Systeme (Flatness and controllability of a class of networks of distributed parameter systems). Automatisierungstechnik, 2010, 58, pp.139-150. hal-00526144

HAL Id: hal-00526144

https://hal.science/hal-00526144v1

Submitted on 13 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Flachheit und Steuerbarkeit einer Klasse von Netzwerken örtlich verteilter Systeme

Flatness and controllability of a class of networks of distributed parameter systems

Frank Woittennek und Hugues Mounier

Es werden lineare verteiltparametrische Modelle betrachtet, die sich durch die Zusammenschaltung einzelner Randwertaufgaben ergeben, in denen die partiellen Differentialgleichungen von zweiter Ordnung sind. Im Laplace-Bildbereich können diese Modelle durch lineare Gleichungssysteme beschrieben werden, deren Koeffizienten einem speziellen Ring überall holomorpher Funktionen entstammen. Mit einem von den Autoren entwickelten Divisionsalgorithmus kann gezeigt werden, dass sich in den betrachteten Ringen stets Bézout-Identitäten finden lassen. Diese Eigenschaft wird genutzt, um algebraische und trajektorienbasierte Steuerbarkeitsergebnisse abzuleiten.

The controllability of systems that are initially given by boundary coupled p.d.e. of second order is discussed. In the Laplace domain these systems may be described by linear equations over particular rings of entire functions. By means of a division algorithm it is shown that those rings are Bézout domains. This property is utilised in order to derive algebraic and trajectory related controllability results.

Schlagwörter: Flachheit, verhaltensorientierte Steuerbarkeit, partielle Differentialgleichung, Randwertaufgabe, trigonometrischer Ring.

Keywords: flatness, behavioral controllability, partial differential equation, boundary value problem, trigonometric ring.

1 Einleitung

Die flachheitsbasierten Methoden für verteiltparametrische Systeme werden seit den 1990iger Jahren entwickelt [18–20], ihr Nutzen wurde seitdem in vielen Beiträgen gezeigt[1].

Die Vorteile dieser Techniken kommen für verteiltparametrische Systems meist bei der Lösung des Teilproblems des Steuerungsentwurfs zum Tragen. Insbesondere können mit einfachen Mitteln Steuerungen zum Arbeitspunktwechsel realisiert werden. Vor allem im linearen Fall werden dazu häufig Rechengrößen eingeführt, mit denen zwar die Steuerungsaufgabe gelöst werden kann, denen aber erst mit algebraischen Kunstgriffen, wie dem Konzept der π-Freiheit (vgl. [7, 24]), eine Bedeutung innerhalb des Systems verliehen wird[2]. Damit einher geht der Verzicht auf eine detaillierte Steuerbarkeitsanalyse – diese ist auch gar nicht Ziel des Ansatzes, sollen doch nur bestimmte, die Steuerungsaufgabe lösende, Trajektorien parametriert werden. Eine etwas detailliertere Diskussion hinsichtlich der Möglichkeit von Wechseln zwischen beliebigen Arbeitspunkten kann man beispielsweise in [31] finden.

Im Gegensatz zu den bisherigen Arbeiten diskutiert der vorliegende Beitrag die Parametrierbarkeit beliebiger Trajektorien und die Trajektoriensteuerbarkeit. Der dabei verwendete Steuerbarkeitsbegriff unterscheidet sich allerdings vom in der Regelungstheorie üblichen Konzept der Zustandssteuerbarkeit: Statt diesem wird das aus der verhaltensbasierten Theorie dynamischer Sy-

[1] Stellvertretend für viele andere Arbeiten seien hier die in dieser Zeitschrift erschienen die Beiträge [12, 17, 23, 26, 27, 30]) sowie die umfassenderen Darstellungen [16, 24, 25, 31] genannt. Weitere Referenzen findet man in den genannten Arbeiten.

[2] Derartige Möglichkeiten bieten sich allerdings vor allem im linearen Fall. Im nichtlinearen Fall wurden bisher fast ausschließlich Probleme untersucht, in denen der „flache Ausgang“ eine physikalische Bedeutung besitzt, meist handelt es sich dabei um bestimmte Randwerte der verteilten Größen.

steme stammende Steuerbarkeitskonzept zugrunde gelegt [21]. Die dabei von den Autoren erzielten Ergebnisse betreffen eine bedeutend kleinere Modellklasse[3], als die Ergebnisse zum Steuerungsentwurf zwischen Ruhelagen: Es werden nur solche Randwertaufgaben untersucht, die sich aus Netzwerken von linearen, örtlich eindimensionalen parabolischen und hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen (pDgln.) zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ergeben. Die Kanten solcher Netzwerke werden dabei durch die pDgln. beschrieben, die in den Knoten über ihre Randbedingungen verkoppelt sind. Trotz der benötigten Einschränkungen finden sich eine Reihe praktisch relavanter Systeme, die durch derartige Modelle beschrieben werden können.

Diffusionsprozesse in Rohrreaktoren oder Wärmeleitungsphänomene können durch parabolische Gleichungen modelliert werden. Hyperbolische pDgln. beschreiben Wellenausbreitungsvorgänge und können beispielsweise zur Modellierung elastischer Saiten und Stäbe oder elektrischer Übertragungsleitungen verwendet werden [3,4]. Häufig ist dabei nicht nur eine einzelne Randwertaufgabe von Interesse, sondern Strukturen, in denen viele derartige verteiltparametrische Systeme zusammengeschaltet sind. Beispiele dafür sind elektrische Übertragungsnetzwerke oder Netzwerke elastischer Saiten. Auch Anordnungen, mit innerem Stelleingriff, wie beispielsweise Mehrzonenöfen in der Stahl- oder Glas-Industrie können mit Hilfe von sequentiell verkoppelten Randwertaufgaben modelliert werden.

Zur Analyse der Steuerbarkeit der betrachteten Systeme werden die algebraischen Eigenschaften spezieller Ringe holomorpher Funktionen untersucht, die sich in natürlicher Weise ergeben, wenn man die den betrachteten pDgln. im Laplace-Bildbereich zugeordneten gewöhnlichen Dgln. löst. Unter Verwendung der Randbedingungen erhält man aus den verkoppelten Randwertaufgaben lineare Gleichungssysteme mit Koeffizienten aus diesen Ringen.

Viele der in diesem Beitrag dargestellten Zusammenhänge ergeben sich direkt aus allgemeineren Sätzen der Analysis oder der Algebra, die man in einschlägigen Lehrbüchern findet. Einerseits um dem Beitrag einen eigenständigen Charakter zu geben, andererseits um dem Leser die Einarbeitung in die häufig abstrakten Begriffswelten dieser Literatur zu ersparen, werden diese Spezialfälle dennoch diskutiert[4].

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Im folgenden Abschnitt wird die betrachtete Problemstellung und der verwendete Lösungansatz anhand zweier einfacher Beispiele zu schwingenden Saiten illustriert. In Abschnitt 3 wird die im Beitrag untersuchte Modellklasse von verkoppelten Randwertaufgaben allgemein eingeführt. Anschließend wird in Abschnitt 4 dargestellt, wie man von diesen Randwertproblemen zu linearen Faltungsgleichungen gelangt. Die algebraischen Eigenschaften sowie die Parametrierbarkeit und Steuerbarkeit sind Thema des Abschnitts 5.

2 Die schwingende Saite

2.1 Über den Rand gesteuerte Saite

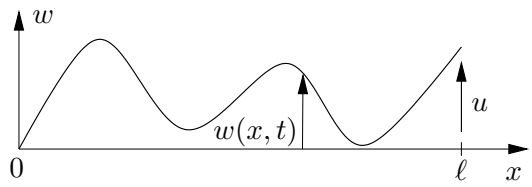

Bild 1: Schwingende Saite.

Die Bewegung einer gespannten Saite der Länge ℓ, wie sie in Bild 1 schematisch dargestellt ist, wird für $x \in [0,\ell]$, $t \in \mathbb{R}$ durch die eindimensionale Wellengleichung

$$\sigma\partial_x^2 w(x,t) - \rho\partial_t^2 w(x,t) = 0 \tag{1a}$$

modelliert, wobei $w(x,t)$ die Auslenkung der Saite an der Stelle x zum Zeitpunkt t bezeichnet und σ und ρ konstante Parameter sind. Die Saite ist bei $x = 0$ fixiert, bei $x = \ell$ kann eine Kraft $u(t)$ eingeprägt werden, die als Stellgröße dient[5]. Dies liefert die Randbedingungen

$$w(0,t) = 0, \quad \sigma\partial_x w(\ell,t) = u(t). \tag{1b}$$

Nachfolgend werden beliebige für alle $t \in \mathbb{R}$ definierte Lösungen (w,u) der Gleichungen (1) betrachtet[6], in denen w zweimal stetig differenzierbar ist[7].

Für die Randwertaufgabe (1) werden nun zunächst Größen gesucht, für die einerseits Trajektorien frei

[3] Diese Einschränkung betrifft natürlich nicht den verwendeten Rahmen, sondern lediglich die bisher in diesem Rahmen erhaltenen Ergebnisse.

[4] Insbesondere wird versucht, auf die Theorie der Distributionen weitgehend zu verzichten. Das gleiche gilt für den in der algebraischen Systemtheorie häufig verwendeten modultheoretischen Rahmen. Hinsichtlich der komplexen Analysis und der Laplacetransformation wird insbesondere auf Sätze vom Paley-Wiener-Schwartz Typ verzichtet. Für eine mathematisch abstrakte Darstellung der Ergebnisse sei auf [32] verwiesen.

[5] Es muss natürlich sichergestellt werden, dass auch das freie Ende der Saite lediglich in vertikaler Richtung bewegt werden kann, beispielsweise durch eine Führung. Wie diese realisiert wird und welche Rolle weitere Effekte spielen, wie beispielsweise Reibung, wird hier nicht diskutiert.

[6] Die Randwertaufgabe (1) ist natürlich nicht wohlgestellt im Sinne von Hadamard. Dazu bedarf es zusätzlich noch eines im voraus fixierten Stellgrößenverlaufs $t \mapsto u(t)$ und der Anfangsbedingungen für w und $\partial_t w$. In dieser Arbeit wird jedoch die Gesamtheit aller Lösungen der Gleichungen (1) betrachtet, wobei den Stellgrößen zunächst keine herausragende Bedeutung zugemessen wird. Die Forderung nach Wohlgestelltheit und insbesondere nach Eindeutigkeit der Lösung wird hier nicht benötigt.

[7] Allgemeiner können natürlich auch schwache Lösungen oder sogar Distributionenlösungen betrachtet werden.

vorgegeben werden können und die andererseits eine vollständige Parametrierung aller Lösungen ermöglichen, ähnlich wie dies im endlichdimensionalen Fall mit Hilfe des flachen Ausgangs möglich ist.

Es wird sich als günstig erweisen, zunächst jene zur pDgl. (1a) gehörende Randwertaufgabe zu betrachten, bei der sämtliche Randbedingungen bei $x = 0$ gestellt werden[8], also eine „Anfangswertaufgabe“ bezüglich des Ortes mit zunächst noch freien Funktionen c_1, c_2:

$$w(0,t) = c_1(t), \quad \partial_x w(0,t) = c_2(t). \tag{2}$$

Diese Cauchysche Randwertaufgabe ist besonders einfach und anschaulich mit Hilfe der (partiellen) Laplacetransformation bezüglich der Zeit zu lösen. Dabei werden zunächst nur solche Lösungen betrachtet, die nicht stärker als exponentiell wachsen und die für $t \leq 0$ identisch verschwinden[9].

Bezeichnet man mit[10] $\widehat{w}(x)$, $\widehat{c}_1$ und $\widehat{c}_2$ die Laplacetransformierten von $w(x)$, c_1 und c_2, so gilt

$$\begin{aligned} \widehat{w}(x) &= \widehat{C}(x)\widehat{c}_1 + \widehat{S}(x)\widehat{c}_2 \\ \partial_x \widehat{w}(x) &= \lambda^2 s^2 \widehat{S}(x)\widehat{c}_1 + \widehat{C}(x)\widehat{c}_2, \end{aligned}$$

wobei $\lambda = \sqrt{\rho/\sigma}$, $\widehat{C}$ und $\widehat{S}$ durch

$$\begin{aligned} \widehat{C}(x,s) &= \frac{\mathrm{e}^{x\lambda s} + \mathrm{e}^{-x\lambda s}}{2} = \cosh(x\lambda s), \\ \widehat{S}(x,s) &= \frac{\mathrm{e}^{x\lambda s} - \mathrm{e}^{-x\lambda s}}{2\lambda s} = \frac{\sinh(x\lambda s)}{\lambda s} \end{aligned} \tag{4}$$

definiert sind und, in leicht unsauberer Notation, die komplexe Veränderliche s mit der Laplacetransformierten $s \mapsto s$ des Ableitungoperators ∂_t identifiziert wird.

Die erste Randbedingung in (1b) liefert $\widehat{c}_1 = 0$. Mit der zweiten Randbedingung ergibt sich anschließend

$$\widehat{u} = \sigma \widehat{C}(\ell)\widehat{c}_2, \quad \widehat{w}(x) = \widehat{S}(x)\widehat{c}_2. \tag{5}$$

Um eine Interpretation im Zeitbereich zu erhalten, verwendet man die in (4) angegebenen Zerlegung in Exponentialfunktionen sowie die wohlbekannte Tatsache, dass $1/s$ dem Integrations- und $\mathrm{e}^{\pm\lambda s}$ einem Verschiebeoperator entspricht. Auf diese Weise ergibt sich im Zeitbereich der Zusammenhang[11]

$$u(t) = \frac{\sigma}{2}\left(c_2(t-\lambda\ell) + c_2(t+\lambda\ell)\right) \tag{6a}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda x}^{\lambda x} c_2(t-\tau)d\tau. \tag{6b}$$

Man überprüft ohne Schwierigkeiten, dass die Lösung auch für Funktionen gilt, die weder exponentiell beschränkt sind, noch für $t < 0$ identisch verschwinden. Dass man nun in der Tat alle Lösungen $(w,u) \in C^2([0,\ell]\times\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$ von (1) parametrieren kann, folgt aus der Tatsache, dass die Restriktion einer Lösung $(x,t) \mapsto w(x,t)$ auf den Randwert $c_2 = \partial_x w(0)$ für beliebige Lösungen existiert und die Restriktionsabbildung außerdem bijektiv ist. In Anlehnung an die Theorie der endlichdimensionalen linearen und nichtlinearen Systeme wird die Variable c_2 deshalb als flacher Ausgang bezeichnet.

Die hergeleitete Parametrierung kann genutzt werden, um die Steuerbarkeit des betrachteten Systems im verhaltensorientierten Sinne gemäß [21] zu zeigen[12]. Dazu betrachtet man zwei beliebige Lösungen (w', u') und $v = (w'', u'')$ der gegebenen Randwertaufgabe. In der verhaltensbasierten Theorie wird das betrachtete Modell steuerbar genannt, wenn es möglich ist, in endlicher Zeit zwischen diesen Lösungen zu wechseln, wenn also eine dritte Lösung (w,u) derart existiert, dass für geeignetes $t^* > 0$ gilt

$$(w(x,t), u(t)) = \begin{cases} (w'(x,t), u'(t)), & t < 0 \\ (w''(x,t), u''(t)), & t > t^*. \end{cases}$$

Zum Nachweis der Steuerbarkeit in diesem Sinne kann die Flachheit direkt herangezogen werden: Man wähle für den flachen Ausgang die Funktion

$$t \mapsto c_2(t) = (1-\varphi(t))c_2'(t) + \varphi(t)c_2''(t)$$

worin die differenzierbare Funktion

$$t \mapsto \varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < \lambda\ell \\ 3\left(\frac{t-\lambda\ell}{\Delta t}\right)^2 - 2\left(\frac{t-\lambda\ell}{\Delta t}\right)^3, & t \in [\lambda\ell, \lambda\ell + \Delta t] \\ 1, & t > \lambda\ell + \Delta t \end{cases}$$

einen Übergang von 0 nach 1 realisiert. Anhand der Gleichung (6a) wird deutlich, dass in die Berechnung der Funktionswerte der Stellgröße u auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ gerade alle Funktionswerte $c_2(t)$, $t \in$

[8] Diese Randbedingungen haben natürlich wenig mit der sich tatsächlich stellenden physikalischen Problemstellung (1) zu tun. Die Lösung der Randwertaufgabe (1a) mit Randbedingungen (2) ist vielmehr als Lösungsansatz für das ursprüngliche Problem (1) aufzufassen.

[9] Die Möglichkeit, mit der Laplacetransformation auch Anfangsbedingungen zu berücksichtigen, bringt hier offensichtlich keinerlei Vorteil. Stattdessen kann die Annahme homogener Anfangsbedingungen fallengelassen werden, wenn statt der Laplace-Transformation die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, eng mit der Fourier-Transformation verwandte zweiseitige Laplace-Transformation verwendet wird.

[10] In dieser Arbeit wird für Funktionen $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ zweier Argumente die Notation $f(\cdot, x_2)$ verwendet, wenn f, für festes x_2, als Funktion des ersten Arguments aufgefasst werden soll, d.h. $f(\cdot, x_2) = g$ mit $g(x_1) = f(x_1, x_2)$. Statt $f(x_1, \cdot)$ wird auch kurz $f(x_1)$ geschrieben. Arithmetische Ausdrücke, in denen Funktionen auftreten, sind stets bezüglich der punktweisen Operationen aufzufassen.

[11] Der Zusammenhang für w ergibt sich dabei aus

$$w(x,t) = \frac{1}{2\lambda}\left(\int_0^\infty c_2(t-\tau+\lambda x)d\tau - \int_0^\infty c_2(t-\tau-\lambda x)d\tau\right)$$

durch die Substitutionen $\bar{\tau} = \tau - \lambda x$ im ersten und $\bar{\tau} = \tau + \lambda x$ im zweiten Integral und anschließendes Zusammenfassen der Summanden.

[12] Für das hier betrachtete sehr einfache Beispiel kann die berechnete Parametrierung relativ problemlos auch zum Nachweis der Zustandssteuerbarkeit genutzt werden.

$(-\infty, \lambda\ell)$ eingehen. Entsprechend werden zur Berechnung von $w(x)$ gemäß (6b) auf $t \in (-\infty, 0)$ die Werte von c_2 auf $(-\infty, \lambda x)$ benötigt. Da c_2 auf $(-\infty, \lambda\ell)$ aber mit c_2' übereinstimmt, folgen $w(x,t) = w'(x,t)$ sowie $u(t) = u'(t)$ für $t < 0$. Ganz analog kann $(w(x,t), u(t)) = (w''(x,t), u''(t))$ für $t > 2\lambda\ell + \Delta t$ gefolgert werden.

2.2 Zwei Saiten mit gemeinsamen Stelleingriff

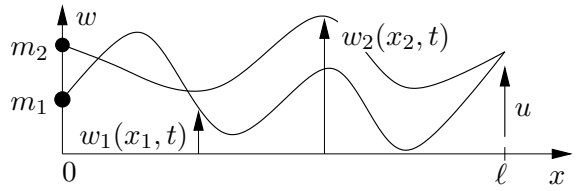

Bild 2: Zwei simultan angesteuerte Saiten

Das im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Vorgehen wird nun auf ein einfaches Netzwerk aus zwei verkoppelten elastischen Saiten übertragen, wie sie in Bild 2 schematisch dargestellt sind. Die Auslenkungen der Saiten an der Stelle x zum Zeitpunkt t werden mit $w_1(x,t)$ bzw. $w_2(x,t)$ bezeichnet. Diese Größen genügen für $x \in [0, \ell]$, $t \in \mathbb{R}$ jeweils der Wellengleichung:

$$\sigma\partial_x^2 w_i(x,t) - \rho\partial_t^2 w_i(x,t) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Die Randbedingungen bei $x = 0$ ergeben sich aus den Impulsbilanzen für die dort an den Saiten befestigten Punktmassen m_1 und m_2:

$$m_i\partial_t^2 w_i(0,t) = \sigma\partial_x w_i(0,t), \quad i = 1, 2. \tag{8a}$$

Bei $x = \ell$ wirkt eine Stellkraft $u(t)$ auf die an diesem Rand fest miteinander verbundenen Saiten:

$$\begin{aligned} w_1(\ell,t) - w_2(\ell,t) &= 0 \\ \sigma(\partial_x w_1(\ell,t) + \partial_x w_2(\ell,t)) &= u(t). \end{aligned} \tag{8b}$$

Wie in Abschnitt 2.1 werden zunächst die bezüglich des Ortes gestellten Anfangswertaufgaben zu den pDgln. (7) mit Hilfe der Laplacetransformation untersucht. Berücksichtigt man anschließend die Randbedingungen bei $x = 0$, so folgt für $i = 1, 2$ mit den in (4) eingeführten hyperbolischen Funktionen

$$\begin{aligned} \sigma\widehat{w}_i(x) &= (\sigma\widehat{C}(x) + m_i s^2\widehat{S}(x))\widehat{w}_i(0) \\ \sigma\partial_x\widehat{w}_i(x) &= (\rho s^2\widehat{S}(x) + m_i s^2\widehat{C}(x))\widehat{w}_i(0). \end{aligned}$$

Die Randbedingungen bei $x = \ell$ liefern dann

$$\widehat{u} = (\rho s^2\widehat{S}(\ell) + m_1 s^2\widehat{C}(\ell))\widehat{w}_1(0) + (\rho s^2\widehat{S}(\ell) + m_2 s^2\widehat{C}(\ell))\widehat{w}_2(0) \tag{9a}$$

und

$$(\sigma\widehat{C}(\ell) + m_1 s^2\widehat{S}(\ell))\widehat{w}_1(0) = (\sigma\widehat{C}(\ell) + m_2 s^2\widehat{S}(\ell))\widehat{w}_2(0). \tag{9b}$$

Der flache Ausgang $\widehat{y}$ wird nun derart eingeführt, dass (9b) erfüllt wird:

$$\widehat{w}_1(0) = (\sigma\widehat{C}(\ell) + m_2 s^2\widehat{S}(\ell))\widehat{y}, \tag{10a}$$

$$\widehat{w}_2(0) = (\sigma\widehat{C}(\ell) + m_1 s^2\widehat{S}(\ell))\widehat{y}. \tag{10b}$$

Im weiteren wird dargestellt, dass $\widehat{y}$ als $\mathbb{C}[s, \widehat{C}(\ell), \widehat{S}(\ell)]$-Linearkombination von $\widehat{w}_1(\ell)$ und $\widehat{w}_2(\ell)$ dargestellt werden kann, sich im Zeitbereich also aus zeitlich verschobenen Werten und Ableitungen der letzgenannten Größen berechnen lässt. Dazu wird das wohlbekannte Additionstheorem $\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1$ für die Funktionen $\widehat{C}$ und $\widehat{S}$ ausgewertet: $\widehat{C}(\ell)^2 - s^2\lambda^2\widehat{S}(\ell)^2 = 1$. Mit Hilfe dieser Beziehung kann gezeigt werden, dass für die Koeffizienten von (9b) die Bézout-Gleichung

$$(\sigma\widehat{C}(\ell) + m_2 s^2\widehat{S}(\ell))\frac{m_1\widehat{C}(\ell) + \rho\widehat{S}(\ell)}{\sigma(m_1 - m_2)} - (\sigma\widehat{C}(\ell) + m_1 s^2\widehat{S}(\ell))\frac{m_2\widehat{C}(\ell) + \rho\widehat{S}(\ell)}{\sigma(m_1 - m_2)} = 1 \tag{11}$$

gilt. Multipliziert man diese Gleichung mit $\widehat{y}$ und nutzt anschließend die Beziehungen (10) so folgt

$$\widehat{y}(s) = \frac{(m_1\widehat{C}(\ell,s) + \rho\widehat{S}(\ell,s))\widehat{w}_1(0,s)}{\sigma(m_1 - m_2)} - \frac{(m_2\widehat{C}(\ell,s) + \rho\widehat{S}(\ell,s))\widehat{w}_2(0,s)}{\sigma(m_1 - m_2)}. \tag{12}$$

Die zugehörigen Zusammenhänge im Zeitbereich ergeben sich analog zum Abschnitt 2.1 aus der Darstellung (4) und werden hier aus Platzgründen nicht angegeben. Offensichtlich ergibt sich dabei für y eine Darstellung, in der auch zeitverschobene Werte der Randgrößen auftreten. Die Argumentation zu Parametrierbarkeit und verhaltensorientierter Steuerbarkeit entspricht dabei im wesentlichen jener aus Abschnitt 2.1.

Wie im vorangegangenen Abschnitt auch hier eine alternative Darstellung von y ohne Zeitverschiebungen gefunden werden:

$$y(t) = \frac{M_1\bar{w}_1(t) - M_2\bar{w}_2(t)}{M_1 - M_2},$$

wobei $M_i = \rho\ell + m_i$, $i = 1, 2$ die Gesamtmasse der jeweiligen Saite mit Last bezeichnet und durch

$$\bar{w}_i(t) = \frac{\rho\int_0^\ell w_i(x,t)dx + m_i w_i(0,t)}{M_i}, \quad i = 1, 2$$

die zugehörigen Massenmittelpunkte gegeben sind.

3 Betrachtete Modellklasse

Die nachfolgend untersuchten Modelle beschreiben das Verhalten der verteilten (d.h. orts- und zeitabhängigen)

Variablen, die zu den zweielementigen Vektoren[13] $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ zusammengefasst werden, und der lediglich von der Zeit abhängenden konzentrierten Variablen in $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)^T$. Dabei können einige (oder alle) der konzentrierten Variablen Stellgrößen sein. Eine explizite Unterscheidung zwischen Stellgrößen und sonstigen Größen ist allerdings, wie auch in der flachheitsbasierten Theorie endlichdimensionaler nichtlinearer Systeme, nicht nötig.

Das Verhalten eines jeden der verteilten Systemgrößenvektoren wird auf dem Intervall $\Omega_i = [x_{i,0}, x_{i,1}]$ $(i = 1, \ldots, l)$ durch eine inhomogene pDgl. der Form

$$\partial_x \boldsymbol{w}_i(x,t) = A_i \boldsymbol{w}_i(x,t) + B_i \boldsymbol{u}(t) \tag{13a}$$

mit $B_i \in (\mathbb{R}[\partial_t])^{2\times m}$, $A_i \in (\mathbb{R}[\partial_t])^{2\times 2}$ beschrieben. Dabei wird angenommen, dass die charakteristischen Polynome der Matrizen $A_1, \ldots, A_l$ identisch sind:

$$\det(\lambda I - A_i) = \lambda^2 - \sigma, \tag{13b}$$

wobei $\sigma = a\partial_t^2 + b\partial_t s + c \neq 0$, die Parameter a, b, c reell sind und außerdem $a \geqslant 0$ vorausgesetzt wird[14]. Schließlich wird gefordert, dass die Längen der Intervalle $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$ rational abhängig sind[15]:

$$\ell_i := x_{i,1} - x_{i,0} = \mu_i \ell, \quad \mu_i \in \mathbb{N}. \tag{13c}$$

Der Netzwerkcharakter der untersuchten Modelle ergibt sich aus der Verkopplung der Systemgrößen über die Randbedingungen

$$\sum_{i=0}^{l} L_i \boldsymbol{w}_i(x_{i,0},t) + R_i \boldsymbol{w}_i(x_{i,1},t) + D\boldsymbol{u}(t) = 0, \tag{13d}$$

mit den Polynommatrizen $D \in (\mathbb{R}[\partial_t])^{q\times m}$ und $L_i, R_i \in (\mathbb{R}[\partial_t])^{q\times 2}$. Nachfolgend wird, ohne weitere Beschränkung der Allgemeinheit $x_{i,0} = 0$ angenommen[16].

[13] Sind die Modelle, wie in den Einführungsbeispielen, durch partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die skalaren Größen $w_1, \ldots, w_l$ beschrieben, so setze man $\boldsymbol{w}_i = (w_i, \partial_x w_i)^T$, $i = 1, \ldots, \ell$.

[14] Dies entspricht der Forderung, dass die betrachteten Differentialgleichungen entweder hyperbolisch oder parabolisch sind und symmetrische Charakteristiken besitzen.

[15] Der Grund für die an dieser Stelle recht willkürlich erscheinenden Einschränkungen (13b) und (13c) der Modellklasse wird erst in Abschnitt 5 ersichtlich, in dem gezeigt wird, dass die Flachheits- und Steuerbarkeitsanalyse für die betrachtete Systemklasse vollkommen systematisiert werden kann. Allgemeiner ist dies auch dann noch möglich, wenn die Matrizen $B_1, \ldots, B_l$ stückweise polynomial sind. Dabei muss lediglich gefordert werden, dass sich die Unstetigkeitsstellen als rationale Vielfache von ℓ darstellen lassen. Auch die Bedingung an die charakteristische Gleichung kann weniger streng formuliert werden. Für Ausdrücke der Form $\lambda^2 + d\lambda + \sigma = 0$ mit $d \in \mathbb{R}$ ergeben sich keinerlei Einschränkungen. Da diese Erweiterungen trivial sind, werden sie aus Platzgründen nicht weiter ausgeführt.

[16] Das in Abschnitt 2.2 betrachtete Beispiel (7), (8) kann mit den Matrizen

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho\partial_t^2/\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$L_1 = \begin{pmatrix} m_1\partial_t^2 & -\sigma \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_2\partial_t^2 & -\sigma \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

in der Form (13) notiert werden.

[17] Alternativ können diese Nebenbedingungen natürlich auch bei $x = \ell_i$ oder an einer beliebigen Stelle $x = \xi_i \in \Omega_i$ „gestellt“ werden (vgl. dazu [27,28,31]). Dies beeinflusst die Ergebnisse der nachfolgenden Diskussion nicht.

4 Von Randwertaufgaben zu Faltungsgln.

In den in Abschnitt 2 behandelten Beispielen hat es sich als vorteilhaft erwiesen, zunächst den Zusammenhang zwischen der Lösung der gegebenen pDgln. und deren Einschränkungen auf einen Rand zu betrachten. Dieser Zusammenhang wurde im Bildbereich der Laplace-Transformation allgemein in Gleichung (3) angegeben. Während für das Beispiel aus Abschnitt 2.1 auf diese Weise direkt eine Parametrierung der Lösung durch eine Randgröße gefunden werden konnte, war dies in Abschnitt 2.2 nicht möglich. Stattdessen wurde die weitere Analyse auf der Basis des linearen Gleichungssystems (9) durchgeführt, das sich aus den gestellten Randbedingungen ergab. In diesem Abschnitt wird der Weg, der von der gegebenen Randwertaufgabe (13) zu einem solchen Gleichungssystem führt, allgemein beschrieben.

4.1 Cauchy-Problem bezüglich des Ortes

In diesem Unterabschnitt wird gezeigt, wie aus dem Zeitverlauf $t \mapsto \boldsymbol{w}_i(0,t)$ von $\boldsymbol{w}_i$ bei $x = 0$ auf den zeitlichen Verlauf von $\boldsymbol{w}_i$ auf ganz Ω_i geschlossen werden kann. Zu diesem Zweck wird die Lösung einer Randwertaufgabe der Form

$$\partial_x \boldsymbol{w}_i(x) = A_i \boldsymbol{w}_i(x) + B_i \boldsymbol{u}, \ \boldsymbol{w}_i(0) = \boldsymbol{w}_{i,0} \tag{14}$$

bestimmt, bei der sämtliche „Randbedingungen“ bei $x = 0$ gestellt werden[17]. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die dabei verwendeten Randwerte $\boldsymbol{w}_{i,0}$ im allgemeinen nicht frei gewählt werden können, sondern sich aufgrund der Netzwerkstruktur (13d) zusätzliche Einschränkungen ergeben. Diese werden im Unterabschnitt 4.2 formuliert.

4.1.1 Lösung im Laplace-Bildbereich

Um die Lösung der Aufgabe (14) darzustellen, werden zunächst auch hier homogene Anfangsbedingungen und exponentielle Beschränktheit für die Lösung vorausgesetzt. Mit diesen Annahmen lautet Gleichung (14) im

Laplace-Bildbereich[18]:

$$\partial_x \widehat{\boldsymbol{w}}(x) = \widehat{A}\widehat{\boldsymbol{w}}(x) + \widehat{B}\widehat{\boldsymbol{u}},\ \widehat{\boldsymbol{w}}(0) = \widehat{\boldsymbol{w}}_0, \tag{15}$$

wobei $\widehat{\boldsymbol{w}}$, $\widehat{\boldsymbol{u}}$ den Laplacetransformierten (bezüglich der Zeit) von $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{u}$ entsprechen.

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, dass die Lösung von (15) in der Form

$$\widehat{\boldsymbol{w}}(x) = \widehat{\Phi}(x)\widehat{\boldsymbol{w}}_0 + \widehat{\Psi}(x)\widehat{\boldsymbol{u}} \tag{16}$$

angeschrieben werden kann. Im hier untersuchten Fall erhält man für die Fundamentalmatrix $\widehat{\Phi}(x) = \mathrm{e}^{\widehat{A}x}$ den Ausdruck

$$\widehat{\Phi}(x) = \widehat{A}\widehat{S}(x) + I\widehat{C}(x), \tag{17}$$

wobei $\widehat{S}$ und $\widehat{C}$ analog zu (4) durch

$$\widehat{S}(x) = \frac{\sinh\left(\sqrt{\widehat{\sigma}}\,x\right)}{\sqrt{\widehat{\sigma}}}, \quad \widehat{C}(x) = \cosh\left(\sqrt{\widehat{\sigma}}\,x\right) \tag{18}$$

gegeben sind. Die Matrix $\widehat{\Psi}(x)$ kann mit Hilfe der Variation der Konstanten berechnet werden, woraus sich zunächst

$$\widehat{\Psi}(x) = \int_0^x \widehat{\Phi}(x-\xi)d\xi\widehat{B}$$

ergibt. Daraus folgt mit (17) unter Nutzung der Beziehungen $\partial_x\widehat{S} = \widehat{C}$, $\partial_x\widehat{C} = \widehat{\sigma}\widehat{S}$ schließlich

$$\widehat{\Psi}(x) = \left(\widehat{A}\widehat{S}^{\mathrm{I}}(x) + I\widehat{S}(x)\right)\widehat{B}, \tag{19}$$

wobei $\widehat{S}^{\mathrm{I}}(x) = \displaystyle\int_0^x \widehat{S}(\xi)d\xi = \left(\widehat{C}(x) - 1\right)/\widehat{\sigma}$.

4.1.2 Interpretation im Zeitbereich

Die im vergangenen Unterabschnitt eingeführten komplexen Funktionen $\widehat{C}(x)$ und $\widehat{S}(x)$ können im Zeitbereich als Faltungsoperatoren interpretiert werden, d.h. als spezielle lineare Abbildungen zwischen Funktionenräumen.

Im parabolischen Fall, d.h. falls in der charakteristischen Gleichung (13b) nur Zeitableitungen erster Ordnung auftreten ($a = 0$), ergibt sich mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung der hyperbolischen Funktionen

$$\begin{aligned} \widehat{S}(x,s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}(bs+c)^k, \\ \widehat{C}(x,s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(bs+c)^k. \end{aligned} \tag{20}$$

Übersetzt man diese Reihe gliedweise[19] in den Zeitbereich, so ergeben sich, wenn die Bildfunktionen zuvor mit der Laplacetransformierten $\widehat{\varphi}$ einer beliebig oft differenzierbaren Zeitfunktion φ aus der (kleinen) Gevrey-Klasse[20] $\mathcal{E}_{(2)}$ der Ordnung 2 multipliziert werden, für

$$\widehat{\psi}_1(x,s) = \widehat{C}(x,s)\widehat{\varphi}(s), \quad \widehat{\psi}_2(x,s) = \widehat{S}(x,s)\widehat{\varphi}(s)$$

die Ausdrücke

$$\psi_1(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}a_k(t),\ \psi_2(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}a_k(t). \tag{21a}$$

Die in diesen Reihen auftretenden Koeffizienten sind durch die Rekursionsbeziehung

$$a_{k+1}(t) = b\partial_t a_k(t) + ca_k(t), \quad a_0(t) = \varphi(t)$$

bestimmt. Für $\widehat{\psi}_3(x) = \widehat{S}^{\mathrm{I}}(x)\widehat{\varphi}$ erhält man durch örtliche Integration von (21a)

$$\psi_3(x,t) = \int_0^x \psi_2(\xi,t)d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}a_k(t). \tag{21b}$$

Die Restriktion auf glatte Funktionen einer gewissen Gevrey-Ordnung entspricht einer Beschränkung des Wachstums der Ableitungen von φ (bezüglich der Ableitungsordnung) und wird benötigt, um die Konvergenz der Reihen (21) sicherzustellen[21].

Im hyperbolischen Fall erhält man statt Reihendarstellungen die Ausdrücke (vgl. [8])

$$\begin{aligned} \psi_1(x,t) = \int_{-x\sqrt{a}}^{x\sqrt{a}} &\partial_x f(x,\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \\ &+ \sqrt{\alpha}f(x,x\sqrt{a})\varphi(t-x\sqrt{a}) \\ &- \sqrt{\alpha}f(x,-x\sqrt{a})\varphi(t+x\sqrt{a}) \end{aligned} \tag{22a}$$

$$\psi_2(x,t) = \int_{-x\sqrt{a}}^{x\sqrt{a}} f(x,\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \tag{22b}$$

$$\psi_3(x,t) = \int_{-x\sqrt{a}}^{x\sqrt{a}} f^{\mathrm{I}}(x,\tau)\varphi(t-\tau)d\tau. \tag{22c}$$

mit den für $t \in [-\sqrt{\alpha}x, \sqrt{\alpha}x]$ definierten Funktionen

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-bt/2a}}{2\sqrt{a}}J_0(\beta\sqrt{ax^2-t^2}), \quad \beta = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

und

$$f^{\mathrm{I}}(x,t) = \int_{|t|/\sqrt{\alpha}}^{x} f(\xi,t)d\xi.$$

Bekanntlich wird unter dem Träger einer auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion jene Teilmenge von $\mathbb{R}$ verstanden auf der die Funktion von 0 verschiedene Werte annimmt, bzw., etwas genauer formuliert, das Komplement der größten offenen Teilmenge von $\mathbb{R}$, auf der die Funktion identisch verschwindet. Man prüft sowohl im hyperbolischen

[18] Da sich diese Aufgabe für die einzelnen Kanten des Netzwerkes nicht unterscheidet, wird im weiteren Verlauf dieses Unterabschnitts zur Vereinfachung der Notation auf den Index $i \in \{1,\ldots,l\}$ verzichtet.

[19] Die Zulässigkeit einer solchen gliedweisen Auswertung der Laplace-Umkehrintegrale muss eigentlich geprüft werden. Da sich die nachfolgend angegebene Lösung aber alternativ auch direkt durch einen Potenzreihenansatz ohne Verwendung der Laplacetransformation herleiten lässt (vgl. z.B. [10, 11, 15]), sei an dieser Stelle auf diesen Schritt verzichtet.

[20] Siehe [11, Def. 12.7.3] für die Definition dieser Funktionenklasse.

[21] Für eine detaillierte Diskussion sei u.a. auf [15,27,31] verwiesen, wobei diese Arbeiten auch Erweiterungen hinsichtlich partieller Differentialgleichungen mit ortsabhängigen Koeffizienten sowie nichtlinearer Gleichungen enthalten.

als auch im parabolischen Fall ohne Probleme nach, dass für die Träger $\operatorname{supp}\psi_i(x)$ der zu $\widehat{\psi}_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ gehörenden Zeitfunktionen der Zusammenhang

$$\operatorname{supp}\psi_i(x) \subseteq \operatorname{supp}\varphi + [-|x|\sqrt{a}, |x|\sqrt{a}],\ i = 1, 2, 3 \quad (23)$$

gilt. Dabei ist die Summe zweier Mengen $\Theta_1, \Theta_2 \subset \mathbb{R}$ durch $\Theta_1 + \Theta_2 = \{\theta_1 + \theta_2 | \theta_1 \in \Theta_1,\ \theta_2 \in \Theta_2\}$ definiert.

Die Lösung von (14) im Zeitbereich kann nun unter Verwendung von (21) bzw. (22) sowie (16), (17) und (19) angegeben werden. Aufgrund der Herleitung mittels der Laplace-Transformation (mit der zusätzlichen Annahme homogener Anfangsbedingungen) betreffen diese Zusammenhänge bisher nur exponentiell beschränkte Funktionen, die für $t < 0$ verschwinden. Allerdings lassen sich die Gleichungen (21) und (22) problemlos auch für Funktionen auswerten, die diesen Bedingungen nicht genügen. Man überzeugt sich ohne Schwierigkeiten, dass auch in diesen Fällen Lösungen von (14) berechnet werden können[22]. Allgemein lassen sich deshalb die Funktionen $\widehat{C}$, $\widehat{S}$ und $\widehat{S}^{\mathrm{I}}$ im Zeitbereich als Abbildungen $C, S, S^{\mathrm{I}} : \mathscr{F}(\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^2)$ auffassen, wobei $\mathscr{F}$ im parabolischen Fall die Funktionen $\mathcal{E}_{(2)}$ der kleinen Gevrey-Klasse der Ordnung 2 bezeichnet und im hyperbolischen Fall für die Menge C^0 der stetigen Funktionen steht[23]. Die Anwendung dieser Abbildungen auf Funktionen aus $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ werden nachfolgend als Faltungsprodukte notiert: Für die oben im Laplace-Bildbereich angegebenen Produkte $\widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}_2, \widehat{\psi}_3$ ergibt sich so $\psi_1(x) = C(x) \star \varphi$, $\psi_2(x) = S(x) \star \varphi$ und $\psi_3(x) = S^{\mathrm{I}}(x) \star \varphi$.

4.2 Auswertung der Randbedingungen

Wie bereits im Abschnitt 4.1 dargestellt, können die dort eingeführten Größen $\boldsymbol{w}_{i,0}$ (bzw. deren Laplace-Transformierte $\widehat{\boldsymbol{w}}_{i,0}$) nicht frei gewählt werden. Stattdessen müssen sie, gemeinsam mit $\boldsymbol{u}$ (bzw. $\widehat{\boldsymbol{u}}$), einem linearen Gleichungssystem genügen, dass sich im Bildbereich aus (16) und der durch die Randbedingungen (13d) definierten Netzwerkstruktur ergibt[24]. Mit $\widehat{P} = \left(\widehat{P}_1, \ldots, \widehat{P}_{l+1}\right)$ und

$$\widehat{P}_i = \widehat{L}_i \widehat{\Phi}_i(0) + \widehat{R}_i \widehat{\Phi}_i(\ell_i), \quad i = 1, \ldots, l$$

$$\widehat{P}_{l+1} = \widehat{D} + \sum_{i=1}^{l} \left(\widehat{L}_i \widehat{\Psi}_i(0) + \widehat{R}_i \widehat{\Psi}_i(\ell_i)\right)$$

lautet dieses Gleichungssystem

$$\widehat{P}\widehat{\boldsymbol{c}} = 0, \quad \widehat{\boldsymbol{c}} = (\widehat{\boldsymbol{w}}_{1,0}^T, \ldots, \widehat{\boldsymbol{w}}_{l,0}^T, \widehat{\boldsymbol{u}}^T)^T. \quad (24a)$$

Aus seiner Lösung ergeben sich die verteilten Größen in $\widehat{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \widehat{\boldsymbol{w}}_l$ unmittelbar unter Verwendung von (16):

$$\widehat{\boldsymbol{w}}_i(x) = \widehat{\Phi}_i(x)\widehat{\boldsymbol{w}}_{i,0} + \widehat{\Psi}_i(x)\widehat{\boldsymbol{u}}. \quad (24b)$$

Die Analyse soll nun auf Basis des Gleichungssystems (24a) fortgesetzt werden. Zu diesem Zweck werden einerseits das Gleichungssystem (24a) algebraisch umgeformt und andererseits lineare Transformationen der Systemgrößen verwendet. Dazu muss natürlich zunächst geklärt werden, welche solcher Manipulationen überhaupt zugelassen sind, d.h., über welchem Koeffizientenring die Gleichungen (24a) gelesen werden sollen.

Bei der Wahl dieses Koeffizientenringes sind neben der offensichtlichen Forderung, dass zumindest die Einträge von $\widehat{P}$ enthalten sein sollten, zwei weitere Bedingungen maßgeblich: Er sollte einerseits ausreichend groß gewählt werden, um möglichst allgemeine Umformungen zuzulassen, andererseits sollte er nur solche Elemente enthalten, für die im Zeitbereich Interpretationen ähnlich jenen aus Abschnitt 4.1.2 existieren: Die Einträge der Koeffizientenmatrizen in den Gleichungen (24) sind aufgrund der Bedingung (13c) Linearkombinationen von $\widehat{S}(\mu\ell)$, $\widehat{C}(\mu\ell)$ und $\widehat{S}^{\mathrm{I}}(\mu\ell)$, $\mu \in \mathbb{Q}$ über dem Polynomring $\mathbb{C}[s]$. Als ein erster Kandidat für einen den nachfolgenden Berechnungen zugrundeliegenden Koeffizientenring ergibt sich deshalb der Ring $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}^*$, der aus Polynomen in diesen Funktionen über $\mathbb{C}[s]$ besteht. Im Hinblick auf die möglichen algebraischen Umformungen wird es sich in Abschnitt 5 als günstig erweisen, einen etwas größeren Ring zu verwenden, in dem auch rationale Ausdrücke in s enthalten sein dürfen, also Ausdrücke der Form

$$\widehat{p} = \frac{\widehat{p}^*}{\widehat{n}}, \quad \widehat{p}^* \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}}^*, \quad \widehat{n} \in \mathbb{C}[s].$$

Aufgrund der zweiten der oben genannten Bedingungen an den Koeffizientenring, werden dabei nur solche Quotienten zugelassen für die $\widehat{p}$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe (also eine ganze) Funktion ist. Jede Nullstelle des Nennerpolynoms $\widehat{n}$ muss also, zumindest mit gleicher Vielfachheit, auch Nullstelle der transzendenten Zählerfunktion $\widehat{p}^*$ sein. Der sich so ergebende Ring wird mit $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ bezeichnet. Die Eigenschaften der zugehörigen Faltungsoperatoren im Zeitbereich werden im nächsten Unterabschnitt diskutiert.

4.3 Interpretation der Elemente von $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$

In diesem Unterabschnitt wird gezeigt, dass die Elemente aus $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ im Zeitbereich in sehr ähnlicher Weise interpretiert werden können, wie dies für die Funktionen $\widehat{C}$, $\widehat{S}$ und $\widehat{S}^{\mathrm{I}}$ in Abschnitt 4.1.2 dargestellt wurde.

[22] Dies kann beispielsweise durch Einsetzen in die (14) geschehen. Alternativ kann aufgrund der Zeitinvarianz die Forderung nach homogenen Anfangsbedingungen durch die schwächere Annahme ersetzt werden, dass sämtliche involvierten Zeitfunktionen einen linksseitig beschränkten Träger besitzen, d.h., nur für $t < t_0$ verschwinden, wobei durchaus $t_0 < 0$ gelten darf. Anschließend entledigt man sich der Restriktionen durch eine einfache Zerlegung der Eins.

[23] Diese Abbildungen können auf verschiedene Art und Weise als verallgemeinerte Funktionen aufgefasst werden. Beispielsweise bietet sich die Distributionentheorie nach L. Schwartz [29] (bzw. die z.B. in [13, 22] beschriebenen Erweiterungen) an.

[24] Die in Abschnitt 4.1.1 eingeführten Matrizen $\widehat{\Psi}$, $\widehat{\Phi}$ sind dabei durch $\widehat{\Psi}_i$, $\widehat{\Phi}_i$ zu ersetzen.

Zur Auswertung polynomialer Ausdrücke in $\widehat{C}(x)$ und $\widehat{S}(x)$ können die Identitäten

$$\widehat{C}(x_1 \pm x_2) = \widehat{C}(x_1)\widehat{C}(x_2) \pm \widehat{\sigma}\widehat{S}(x_1)\widehat{S}(x_2) \tag{25a}$$
$$\widehat{S}(x_1 \pm x_2) = \widehat{S}(x_1)\widehat{C}(x_2) \pm \widehat{C}(x_1)\widehat{S}(x_2) \tag{25b}$$

herangezogen werden, die sich unmittelbar aus den wohlbekannten Additionstheoremen der hyperbolischen Funktionen ergeben. Die konsequente Anwendung dieser Beziehungen kann genutzt werden, um ein gegebenes Polynom $\widehat{p}^*$ in s und $\widehat{S}(x_i)$, $\widehat{C}(x_i)$, $i = 1, \ldots, \gamma$ in der Form

$$\widehat{p}^* = \sum_{k=0}^{\tilde{\gamma}} \widehat{\alpha}_k \widehat{C}(\tilde{x}_k) + \widehat{\beta}_k \widehat{S}(\tilde{x}_k), \quad \widehat{\alpha}_k, \widehat{\beta}_k \in \mathbb{C}[s] \tag{26}$$

zu schreiben, wobei o.B.d.A. $\tilde{x}_k > \tilde{x}_{k-1}$ $(k = 1, \ldots, \tilde{\gamma})$ angenommen wird. Zur Berechnung der der Bildfunktion $\widehat{\psi}^* = \widehat{p}^* \widehat{\varphi}$ zugeordneten Zeitfunktion ψ^* können dann die Beziehungen (21) bzw. (22) verwendet werden. Insbesondere gilt für den Träger von ψ^*

$$\operatorname{supp} \psi^* \subseteq \operatorname{supp} \varphi + [-\tilde{x}_{\tilde{\gamma}}\sqrt{a}, \tilde{x}_{\tilde{\gamma}}\sqrt{a}]. \tag{27}$$

In Satz A.1 im Anhang A wird gezeigt, dass Gleichung (27) auch für beliebige $\widehat{\psi} = \widehat{p}\widehat{\varphi}$ mit der ganzen Funktion

$$\widehat{p} = \widehat{p}^* / \widehat{n}, \tag{28}$$

gilt, wobei $\widehat{p}^*$ von der Form (26) ist und $\widehat{n}$ ein Polynom aus $\mathbb{C}[s]$ bezeichnet, also $\widehat{p} \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ gilt. Man beachte, dass für die Zähler tatsächlich nur Ausdrücke der Form (26) berücksichtigt werden müssen, da $\widehat{S}^{\mathrm{I}}(x)$ in $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ als Quotient $\big(\widehat{C}(x) - 1\big)/\widehat{\sigma}$ geschrieben werden kann.

Offensichtlich können beliebige Elemente $\widehat{p} \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ im Zeitbereich als lineare Abbildungen $p : \mathscr{F}(\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R})$ aufgefasst werden. Für sie wird die in Abschnitt 4.1.2 eingeführte Notation verwendet: Der im Bildbereich gegebene Ausdruck $\widehat{p}\widehat{\varphi}$ wird im Zeitbereich in der Form $p \star \varphi$ notiert. Dabei muss nun im hyperbolischen Fall $\mathscr{F} = C^\infty$ gewählt werden, da $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ auch Polynome beliebigen Grades in s enthält, d.h., Zeitableitungen beliebig hoher Ordnung auftreten können.

5 Flacher Ausgang und Steuerbarkeit

Bekanntlich können Systeme, die durch gewöhnliche lineare Differentialgleichungen gegeben sind, alternativ mittels polynomialer Gleichungen beschrieben werden. Dabei wird der Differentialoperator d/dt oder, vermittels der Laplace-Transformation, die komplexe veränderliche s, als polynomiale Unbestimmte aufgefasst. Die Struktur derartiger Systeme kann sehr elegant und effizient mit Hilfe von Normalformen rechteckiger Matrizen analysiert werden (vgl. [14, 21]). Von Bedeutung sind dabei insbesondere die Smith- und die Hermite-Normalform. Die wesentliche Voraussetzung für die Existenz und die Berechnung derartiger Normalformen liegt in den Eigenschaften des zugrundeliegenden Polynomrings: Der größte gemeinsame Teiler zweier Polynome kann unter Verwendung des Euklidischen-Algorithmus' bestimmt werden. Dieser Algorithmus ist für die Existenz der erwähnten Normalformen zwar hinreichend im allgemeinen allerdings nicht notwendig. Insbesondere können viele der für endlichdimensionale Systeme bekannten Verfahren auf Systeme übertragen werden, die durch Gleichungen beschrieben werden, deren Koeffizienten sogenannten Bézout-Ringen entstammen, zu denen auch $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ gehört. Im folgenden Unterabschnitt werden diese Ringe formal eingeführt und einige Konsequenzen für die Transformationen rechteckiger Matrizen über diesen Ringen abgeleitet. Anschließend werden diese Ergebnisse genutzt, um die Flachheit, Parametrierbarkeit und die Trajektoriensteuerbarkeit der betrachteten Modelle zu diskutieren.

5.1 Bézout-Ringe

Wie schon die Bezeichnung suggeriert, kann ein Bézout-Ring durch die Existenz der sogenannten Bézout-Identität charakterisiert werden:

Definition 5.1. *Ein Ring*[25] *R heißt Bézout-Ring, wenn der größte gemeinsame Teiler*[26] $\gcd(m_1, m_2)$ *zweier beliebiger Elemente $m_1, m_2 \in R$ existiert und in der Form $\gcd(m_1, m_2) = p_1 m_1 + p_2 m_2$ mit $p_1, p_2 \in R$ geschrieben werden kann.*

Der folgende Satz, der von den Autoren des vorliegenden Beitrags in [32] bewiesen wurde, macht die Eigenschaften derartiger Ringe für die hier betrachtete Systemklasse nutzbar:

Satz 5.2. *Der Ring $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ ist ein Bézout-Ring.*

Auf einen Beweis des Satzes muss an dieser Stelle aus Platzgründen leider verzichtet werden. Es sei aber darauf hingewiesen, dass der in [32] angegebene Beweis konstruktiv ist und damit die algorithmische Bestimmung der Koeffizienten p_1 und p_2 aus Definition 5.1 ermöglicht.

Sowohl für die hier benötigte Anwendung, als auch für die nachfolgende Diskussion ist die folgende alternative Charakterisierung von Bézout-Ringen günstig[27]:

[25] Entsprechend der hier benötigten Anwendung wird für alle Ringe Kommutativität und Nullteilerfreiheit vorausgesetzt.

[26] Es sei daran erinnert, dass in allgemeinen Ringen der größte gemeinsame Teiler zweier Elemente m_1, m_2 eindeutig als derjenige Teiler von m_1 und m_2 definiert ist, der selbst von allen anderen gemeinsamen Teilern von m_1, m_2 geteilt wird [2].

[27] Diese alternative Definition entspricht (bis auf einen einfachen Induktionsschluss) der abstrakten algebraischen Definition eines Bézout-Ringes: Jedes endlich erzeugte Ideal von R ist ein Hauptideal.

Proposition 5.3. *Ein Ring R ist genau dann ein Bézout-Ring, wenn jede beliebige Matrix $M \in R^{1\times 2}$ in der Form $M = (b, 0)U$, $b \in R$ geschrieben werden kann, wobei $U \in R^{2\times 2}$ eine über R invertierbare Matrix ist.*

Beweis. Sei R ein Bézout-Ring, $M = (m_1, m_2)$, $m_1, m_2 \in R$, $b = \gcd(m_1, m_2)$, dann gilt $m_1p_1 + m_2p_2 = b$ für geeignete $p_1, p_2 \in R$. Aufgrund der Nullteilerfreiheit von R folgt nach Division durch b die Identität $\bar{m}_1p_1 + \bar{m}_2p_2 = 1$ mit $\bar{m}_1 = m_1/b$, $\bar{m}_2 = m_2/b$. Somit ist

$$U = \begin{pmatrix} \bar{m}_1 & \bar{m}_2 \\ -p_2 & p_1 \end{pmatrix}$$

invertierbar und $(b, 0)U = (b\bar{m}_1, b\bar{m}_2) = M$.

Sei nun umgekehrt $(b, 0)U = M$ und U unimodular, ihre Determinante also eine Einheit in R. Dann gelten mit $(u_{ij}) = U$ die Beziehungen $m_1 = u_{11}b$ und $m_2 = u_{12}b$. Somit ist b gemeinsamer Teiler von m_1, m_2. Mit $(\tilde{u}_{ij}) = U^{-1}$ gilt außerdem $b = m_1\tilde{u}_{11} + m_2\tilde{u}_{21}$ und man erkennt, dass jeder andere gemeinsame Teiler von m_1 und m_2 auch b teilen muss. Somit ist b der größte gemeinsame Teiler von m_1 und m_2. □

Aus der in Proposition 5.3 eingeführten Charakterisierung von Bézout-Ringen erhält man die folgende Aussage zur Reduktion von Matrizen über Bézout-Ringen:

Satz 5.4. *Jede über einem Bézout-Ring R definierte Matrix $P \in R^{q\times p}$ vom Rang r kann in der Form $P = V_LQV_R$ dargestellt werden, wobei $V_L \in R^{q\times q}$ und $V_R \in R^{p\times p}$ unimodulare Matrizen sind und $\tilde{P}$ aus einer nichtsingulären $r \times r$ unteren linken Dreiecksmatrix T besteht, die durch insgesamt $q - r$ Nullzeilen und $p - r$ Nullspalten ergänzt ist.*

Beweisskizze. Aus Lemma 5.3 folgt ohne Schwierigkeiten durch Induktion über die Spalten, dass jede $1 \times m$ Matrix durch Multiplikation mit einer unimodularen Matrix von rechts in die Form $(\alpha, 0^{1\times p-1})$, $\alpha \in R$ überführt werden kann. Dieser Schritt wird nacheinander für die letzten $p-k+1$ Spalten jeder Zeile ausgeführt, wobei mit jeder Erhöhung von k um 1 zur ersten der nachfolgenden Zeilen übergegangen wird, deren letzte $p-k+1$ Einträge nicht sämtlich verschwinden. Man beachte, dass auf diese Weise die „Nullspalten“ der vorangehenden Zeilen erhalten bleiben. Der Algorithmus wird abgebrochen, wenn entweder die letzte Zeile oder die letzte Spalte erreicht wird. Die auf die beschriebene Weise entstehende Matrix, in der nur die ersten r Spalten von Null verschiedene Einträge besitzen, kann durch einfaches Vertauschen der Zeilen (also Multiplikation mit einer unimodularen Matrix von links) in eine Form überführt werden, in der die ersten r Zeilen der ersten r Spalten eine linke untere Dreiecksmatrix bilden. Die Elimination der letzten $q - r$ Zeilen erfolgt nun nach ähnlichem Muster, wie zuvor die Spaltenreduktion, wobei der Algorithmus in der r-ten Spalte startet. □

Bemerkung 5.5. *Für die Existenz der in der algebraischen Theorie endlichdimensionaler Systeme häufig verwendeten Smith-Normalform reicht die in Def. 5.1 angegebene Eigenschaft nicht aus. Ob der hier betrachtete Ring die Transformation in die Smith-Normalform ermöglicht, wurde von den Autoren bislang nicht untersucht.*

5.2 Flacher Ausgang

Auf der Basis der Ergebnisse des vorangegangenen Unterabschnitts wird nachfolgend dargestellt, wie das gemäß Gleichung (24a) gegebene System in einen flachen und einen autonomen Teil zerlegt werden kann, so wie dies aus der Theorie der endlichdimensionalen linearen Systeme bekannt ist[28].

Satz 5.6. *Für jedes durch Gleichungen der Form* (24a) *beschriebene System können neue Größen $\widehat{\boldsymbol{y}} = (\widehat{y}_1, \ldots, \widehat{y}_{p-r})^T$ (mit $p = 2l + m$) und $\widehat{\boldsymbol{z}} = (\widehat{z}_1, \ldots, \widehat{z}_r)^T$ als $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$-Linearkombinationen*

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{l} \widehat{Y}_i^{\mathrm{w}}\widehat{\boldsymbol{w}}_{i,0} + \widehat{Y}^{\mathrm{u}}\widehat{\boldsymbol{u}}, \quad \widehat{\boldsymbol{z}} = \sum_{i=1}^{l} \widehat{Z}_i^{\mathrm{w}}\widehat{\boldsymbol{w}}_{i,0} + Z^{\mathrm{u}}\widehat{\boldsymbol{u}} \quad (29)$$

der Komponenten von $\widehat{\boldsymbol{c}}$ derart eingeführt werden, dass folgende Bedingungen gelten:

(I). Jede Komponente von $\widehat{\boldsymbol{c}}$ kann als $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$-Linearkombination der Komponenten von $\widehat{\boldsymbol{y}}$ und $\widehat{\boldsymbol{z}}$ dargestellt werden:

$$\widehat{\boldsymbol{w}}_{i,0} = \widehat{W}_i^{\mathrm{y}}\widehat{\boldsymbol{y}} + \widehat{W}_i^{\mathrm{z}}\widehat{\boldsymbol{z}}, \quad \widehat{\boldsymbol{u}} = \widehat{U}^{\mathrm{y}}\widehat{\boldsymbol{y}} + \widehat{U}^{\mathrm{z}}\widehat{\boldsymbol{z}}. \quad (30)$$

(II). Für jede Gleichung der Form

$$\textstyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\widehat{z}_i + \sum_{i=1}^{p-r} \beta_i\widehat{y}_i = 0.$$

mit Koeffizienten α_i, β_i aus einer beliebigen Ringerweiterung von $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ folgt $\beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, p - r$.

(III). Die Größen in $\widehat{\boldsymbol{z}}$ genügen der autonomen Gleichung $\widehat{T}\widehat{\boldsymbol{z}} = 0$ mit der regulären $r \times r$-Dreiecksmatrix $\widehat{T}$.

Beweis. Da $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ ein Bézout-Ring ist, gilt wegen Satz 5.4 $\widehat{P} = \widehat{V}_L\widehat{Q}\widehat{V}_R$, wobei $\widehat{V}_L$ und $\widehat{V}_R$ über $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ invertiert werden können und $\widehat{Q}$ in der in Satz 5.4 beschriebenen

[28] Bekanntlich ist für endlichdimensionale lineare Systeme in Zustanddarstellung, Flachheit äquivalent zur Zustandssteuerbarkeit und die genannte Aufspaltung kann im Sinne der Kalmanschen Zerlegung interpretiert werden. Dem hier vorgestellten Rahmen ähnlicher sind allerdings Zugänge über Normalformen von Matrizen über univariaten Polynomringen (siehe z.B. [14,21]). Eine noch etwas elegantere Behandlung erlaubt der in [6,24] vorgeschlagene Zugang, in dem ein System als Modul definiert wird. Das flache Teilsystem eines solchen Moduls entspricht dann einem freien Untermodul, dessen Basis der flache Ausgang ist. Dies motiviert auch die mitunter für den flachen Ausgang verwendete Bezeichnung *Basisgröße*. Dem autonomen Teilsystem entspricht in diesem Rahmen der Torsionsuntermodul des betrachteten Systems. Eine Interpretation der hier vorgestellten Ergebnisse im modultheoretischen Rahmen findet der interessierte Leser beispielsweise in [32].

Form vorliegt, also aus einer um $p-r$ Nullspalten und $q-r$ Nullzeilen ergänzten nichtsingulären unteren linken Dreiecksmatrix $\widehat{T} \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}}^{r\times r}$ besteht. Mit der Transformation

$$\begin{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{z}}\\ \widehat{\boldsymbol{y}}\end{pmatrix} = \widehat{V}_R\widehat{\boldsymbol{c}}, \quad \widehat{\boldsymbol{c}} = \widehat{V}_R^{-1}\begin{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{z}}\\ \widehat{\boldsymbol{y}}\end{pmatrix}$$

folgt die Äquivalenz der Systemgleichung (24a) zu $\widehat{Q}(\widehat{\boldsymbol{z}}^T, \widehat{\boldsymbol{y}}^T)^T = 0$. Die Behauptungen bis Punkt (I) ergeben sich damit durch geeignete Partitionierung von $\widehat{V}_R$ und $\widehat{V}_R^{-1}$. Die Behauptungen (II) und (III) folgen unmittelbar aus der Struktur von $\widehat{Q}$. □

In Anlehnung an die Theorie der endlichdimensionalen Systeme wird $\widehat{\boldsymbol{y}}$ als ($\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$-)flacher Ausgang bezeichnet. Wenn die Dreiecksmatrix $\widehat{T}$ über $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ invertierbar ist, so heißt das System (24a) ($\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$-)flach. In diesem Fall gilt $\widehat{\boldsymbol{z}} = 0$ und alle Größen in $\widehat{\boldsymbol{c}}$ ergeben sich über $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ als Linearkombinationen der Komponenten von $\widehat{\boldsymbol{y}}$.

5.3 Parametrierbarkeit

Erste Konsequenzen von Satz 5.6 im Zeitbereich ergeben sich zusammen mit den Überlegungen aus Abschnitt 4.3. Betrachtet man die Lösungen[29] $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l, \boldsymbol{u})$ von (13) bzw. (24) aus

$$\mathscr{W} := \mathscr{F}(\Omega_1 \times \mathbb{R})^2 \times \cdots \times \mathscr{F}(\Omega_l \times \mathbb{R})^2 \times \mathscr{F}(\mathbb{R})^m,$$

mit $\mathscr{F} = \mathcal{E}_{(2)}$ im parabolischen und $\mathscr{F} = C^\infty$ im hyperbolischen Fall[30], so ergeben sich im Zeitbereich aus (31) die folgenden Zusammenhänge:

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{l} Y_i^{\mathrm{w}} \star \boldsymbol{w}_{i,0} + Y^{\mathrm{u}} \star \boldsymbol{u}, \;\; \boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{l} Z_i^{\mathrm{w}} \star \boldsymbol{w}_{i,0} + Z^{\mathrm{u}} \star \boldsymbol{u}. \quad (31)$$

Analog folgt aus (32)

$$\boldsymbol{w}_{i,0} = W_i^{\mathrm{y}} \star \boldsymbol{y} + W_i^{\mathrm{z}} \star \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{u} = U^{\mathrm{y}} \star \boldsymbol{y} + U^{\mathrm{z}} \star \boldsymbol{z}, \quad (32a)$$

wobei $\boldsymbol{z}$ außerdem der autonomen Gleichung $T \star \boldsymbol{z} = 0$ genügt. Schließlich ergibt sich zusammen mit (24b)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}_i(x) = {} & (\Phi_i(x) \star W_i^{\mathrm{y}} + \Psi_i(x) \star U^{\mathrm{y}}) \star \boldsymbol{y} \\ & + (\Phi_i(x) \star W_i^{\mathrm{z}} + \Psi_i(x) \star U^{\mathrm{z}}) \star \boldsymbol{z}. \quad (32b)\end{aligned}$$

[29] Hier wird implizit ausgenutzt, dass sich die Randwerte $\boldsymbol{w}_{i,0}$, $i = 1, \ldots, l$ vermittels der Restriktionsabbildungen $\boldsymbol{w}_i \mapsto \boldsymbol{w}_i(0)$ direkt aus den $\boldsymbol{w}_i$ ergeben.

[30] Die Wahl von glatten Funktionen erscheint zumindest im hyperbolischen Fall auf den ersten Blick als sehr einschränkend. Sie resultiert hier weniger aus der Darstellung der Lösungen der pDgln. (13a) selbst, als vielmehr aus der Tatsache, dass weder Einschränkungen hinsichtlich der in den Randbedingungen (13d) maximal vorkommenden Ableitungsordnung bezüglich der Zeit getroffen wurden, noch untersucht wurde, welche Polynomgrade bezüglich s die Einträge der Matrizen $\widehat{V}_R$ und $\widehat{V}_L$ bzw. deren Inverser besitzen. Die Einschränkungen bezüglich der Lösungsräume sind allerdings nicht wirklich problematisch, da sowohl C^∞ als auch $\mathcal{E}_{(2)}$ dicht in C^0 liegen und außerdem bei Bedarf zu den entsprechenden Distributionenräumen übergegangen werden kann.

Offenbar sind wegen (31) für jede Lösung $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l, \boldsymbol{u}) \in \mathscr{W}$ auch die zeitlichen Verläufe von $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{z}$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt ergibt sich wegen (32) aus den zeitlichen Verläufen der letzgenannten Variablen eine eindeutige Lösung der gestellten Randwertaufgabe (13). Allerdings kann dabei nur $t \mapsto \boldsymbol{y}(t)$ frei gewählt werden und es ergibt sich folgender

Satz 5.7. *Ist das der Randwertaufgabe* (13) *zugeordnete System von Faltungsgleichungen* (24a) *flach, so kann jede Lösung* $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l, \boldsymbol{u}) \in \mathscr{W}$ *von* (13) *durch Wahl der Trajektorie des flachen Ausgangs parametriert werden.*

5.4 Trajektoriensteuerbarkeit

In diesem Abschnitt wird die Nützlichkeit der vorangegangenen Ergebnisse gezeigt, indem diese hinsichtlich der Steuerbarkeitseigenschaften des betrachteten Systems interpretiert werden. Natürlich ist auch im verteiltparametrischen Fall die Zustandssteuerbarkeit das am weitesten verbreitete Steuerbarkeitskonzept (siehe z.B. [5]). Dieses erfordert allerdings zunächst, dass entweder für das betrachtete Netzwerk pDgln. (13) oder für das zugehörige System von Faltungsgleichungen (24) ein Zustand eingeführt wird. Eine Interpretation der algebraischen Ergebnisse im Hinblick auf die Zustandssteuerbarkeit erfordert deshalb weitere Vorarbeiten.

Aus diesem Grund wird, wie auch im Einführungsbeispiel, auf den aus dem verhaltensorientierten Zugang stammenden Steuerbarkeitsbegriff zurückgegriffen, welcher ohne das Zustandskonzept auskommt und deshalb den vorausgegangenen algebraischen Untersuchungen eher entspricht (vgl. [21]). Das Kriterium der Überführbarkeit der Lösung zwischen Punkten im Zustandsraum wird dabei durch das Kriterium der Verknüpfbarkeit von Trajektorien ersetzt, also die Möglichkeit, eine in der Vergangenheit gültige Lösung der Systemgleichungen in eine gewünschte zukünftige Lösung zu überführen:

Definition 5.8 (vgl. [21])**.** *Das durch die Gleichungen* (13) *(bzw.* (24)*) gegebene System heißt (bezüglich des Lösungsraums* $\mathscr{W}$*)* steuerbar im verhaltensorientierten Sinne*, wenn für beliebige Lösungen* $\boldsymbol{v}' := (\boldsymbol{w}', \boldsymbol{u}') \in \mathscr{W}$ *und* $\boldsymbol{v}'' := (\boldsymbol{w}'', \boldsymbol{u}'') \in \mathscr{W}$ *von* (24) *eine dritte Lösung* $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{c}) \in \mathscr{W}$ *von* (24) *und ein Zeitpunkt* $t^* > 0$ *derart existieren, dass gilt*

$$\boldsymbol{v}(t) = (\boldsymbol{w}(\cdot, t), \boldsymbol{u}(t)) = \begin{cases}(\boldsymbol{w}'(\cdot, t)), \boldsymbol{u}'(t), & t < 0\\ (\boldsymbol{w}''(\cdot, t)), \boldsymbol{u}''(t)), & t > t^*.\end{cases}$$

Satz 5.9. *Das System* (13) *(bzw.* (24)*) ist genau dann verhaltensorientiert steuerbar, wenn* (24a) *es flach ist.*

Beweis. (Hinreichender Teil:) Ist das System (24a) flach, so gilt $\boldsymbol{z} = 0$. Somit ist nach (32) jede Lösung von (13) durch den Zeitverlauf des flachen Ausgangs eindeutig

bestimmt, der darüberhinaus (in $\mathscr{F}$) frei gewählt werden kann. Entsprechend (27) und der dieser Gleichung vorangehenden Diskussion existiert für Gleichungen der Form (32) ein ξ derart, dass für jedes $i = 1, \ldots, l$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \boldsymbol{u} &\subseteq \operatorname{supp} \boldsymbol{y} + [-\xi, \xi], \\ \operatorname{supp} \boldsymbol{w}_i(x) &\subseteq \operatorname{supp} \boldsymbol{y} + [-\xi, \xi],\ x \in \Omega_i. \end{aligned} \tag{33}$$

Man bezeichne mit $t \mapsto \boldsymbol{y}(t)$, $t \mapsto \boldsymbol{y}'(t)$ und $t \mapsto \boldsymbol{y}''(t)$ die zu den Lösungen $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ und $\boldsymbol{v}''$ gehörenden Zeitverläufe des flachen Ausgangs und wähle:

$$\boldsymbol{y}(t) = (1 - \varphi(t))\boldsymbol{y}'(t) + \varphi(t)\boldsymbol{y}''(t), \tag{34}$$

wobei die Funktion $\varphi \in \mathscr{F}$ auf $(-\infty, \xi)$ identisch verschwindet und auf $(\xi + t_0, \infty)$ den konstanten Wert 1 annimmt[31]. Wegen (33) folgt somit

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') &\subseteq \operatorname{supp}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}') + [-\xi, \xi] \\ &\subseteq [\xi, \infty) + [-\xi, \xi] = (0, \infty). \end{aligned}$$

Folglich gilt $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}'(t)$ für $t < 0$. Analog zeigt man $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}''(t)$ für $t > t^*$ mit $t^* = 2\xi + t_0$.

(Notwendiger Teil:) Man nehme an, das System (24a) sei nicht flach. Nach Satz (30) gilt $\widehat{T}\widehat{\boldsymbol{z}} = 0$, $i = 1, \ldots, r$, wobei nicht sämtliche Diagonalelemente $\widehat{\tau}_1, \ldots, \widehat{\tau}_r$ von $\widehat{T}$ in $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ invertierbar sind. Sei dies zum Beispiel für das Element $\widehat{\tau}_{i_0}$, $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$ der Fall, das folglich mindestens eine komplexe Nullstelle $s_0 \in \mathbb{C}$ besitzt. Somit existieren Lösungen $\boldsymbol{v} \in \mathscr{W}$ für die alle Komponenten von $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{z}$ bis auf $z_{i,0}$, beispielsweise mit $z_{i_0}(t) = \mathrm{e}^{ts_0}$, auf ganz $\mathbb{R}$ identisch verschwinden. Sei nun $\boldsymbol{v}''$ eine solche Lösung und $\boldsymbol{v}'$ die Nulllösung, dann können diese nicht im Sinne von Def. 5.8 verbunden werden: Nach dem Satz von Titchmarsh besitzt die Faltungsgleichung $\tau_{i_0} \star z_{i_0} = 0$ keine von 0 verschiedenen Lösungen, die auf $(-\infty, 0]$ identisch verschwindet. □

6 Schlussfolgerung

In diesem Beitrag wird ein flachheitsbasierter Zugang zur Analyse von Systemen vorgestellt, die sich durch die Zusammenschaltung von Randwertaufgaben ergeben, in denen die pDgln. von zweiter Ordnung sind. Dazu wurde den ursprünglich gestellten Randwertaufgaben ein System linearer Faltungsgleichungen zugeordnet. Die Koeffizienten dieser Gleichungen entstammen einem sogenannten Bézout-Ring. Dies vereinfacht die Analyse der Systemgleichungen stark, insbesondere kann gezeigt werden, dass sich die Gleichungen stets in ein flaches Teilsystem und ein autonomes Teilsystem zerlegen lassen. Die erzielten algebraischen Ergebnisse lassen eine direkte Interpretation hinsichtlich der sogenannten verhaltensorientierten Steuerbarkeit zu.

Ein Problem des vorgestellten Ansatzes besteht in der Tatsache, dass sich eine Interpretation des flachen Ausgangs, d.h. im Laplace-Bildbereich eine Darstellung ohne transzendente Funktionen, nicht automatisch ergibt. Die Bedingungen, unter denen eine solche Interpretation möglich ist, soll deshalb Gegenstand zukünftiger Forschungen sein.

Der vorgestellte Beitrag ist zum Teil durch vorangehende Arbeiten [1,9] motiviert, in denen ähnliche Methoden für Totzeitsysteme untersucht wurden. Die dort vorgestellten Ergebnisse haben sich außer zur Steuerbarkeitsanalyse auch für den Reglerentwurf als nützlich erwiesen. Inwieweit solche Anwendungen auch hier möglich sind, sollte in der Zukunft untersucht werden.

A Ein Hilfsatz zur Teilbarkeit

Nachfolgend bezeichne $\mathscr{F}$ einen beliebigen Teilraum der der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

Satz A.1. *Sei $\widehat{p} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derart, dass für beliebige Zeitfunktionen φ aus $\mathscr{F}$ die Funktion $\widehat{\psi} = \widehat{z}\widehat{\varphi}$ die Laplacetransformierte einer Funktion $\psi \in \mathscr{F}$ ist. Dann ist die Funktion $\widehat{p}^\star = \widehat{p}/(s - s_0)$ genau dann eine ganze Funktion, wenn $\widehat{\psi}^\star = \widehat{p}^\star\widehat{\varphi}$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}^*$ die Laplacetransformierte einer Funktion $\psi \in \mathcal{D}^*$ ist.*

Beweis. Zunächst ist festzustellen, dass die Laplacetransformierte einer Funktion mit kompaktem Träger eine ganze Funktion ist. Dies ergibt sich sich direkt aus der Definition der Laplacetransformation.

Es wird nun gezeigt, dass für eine beliebige stetige Funktion f mit kompaktem Träger in $\operatorname{supp} f \subseteq [a, b]$, die Funktion $\widehat{f}^* = \widehat{f}/(s - s_0)$ genau dann die Laplacetransformierte einer Funktion mit kompaktem Träger ist, wenn $\widehat{f}(s_0) = 0$ ist. Dazu wird ausgenutzt, dass der im Bildbereich durchgeführten Division durch $(s - s_0)$ im Zeitbereich die Faltung mit der Exponentialfunktion $t \mapsto h(t)\mathrm{e}^{s_0 t}$ entspricht (mit der Heaviside-Funktion h). Es gilt also

$$f^\star(t) = \int_a^t \mathrm{e}^{s_0(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Für $t > b$ kann die obere Grenze durch b ersetzt werden:

$$f^\star(t) = c\mathrm{e}^{s_0 t}, \quad c = \int_a^b \mathrm{e}^{-s_0\tau} f(\tau) d\tau = \widehat{f}(s_0).$$

Der Träger von $f^\star$ ist demnach gerade dann in $[a, b]$ enthalten, wenn $c = 0$, die Laplacetransformierte $\widehat{f}$ von f bei s_0 eine Nullstelle besitzt.

Folglich besitzt ψ^* genau dann einen kompakten Träger, wenn zumindest eine der Gleichungen $\widehat{p}(s_0) = 0$ oder

[31] Auf dem Intervall $[\xi, \xi + t_0]$ kann beispielsweise

$$\varphi(t) = \bar{\varphi}\left(\frac{t-\xi}{t_0}\right), \quad \bar{\varphi}(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left[\frac{2t-1}{(4t\,(1-t))^\sigma}\right]\right)$$

mit geeignetem σ gewählt werden. Die so definierte Funktion gehört für alle $\rho > \sigma$ zur kleinen Gevrey-Klasse der Ordnung $1 + 1/\rho$. Es sei angemerkt, dass derartige Funktionen im Rahmen des flachheitsbasierten Zugangs häufig auch zur Parametrierung von Übergängen zwischen Ruhelagen verwendet werden [24, 27, 31].

$\widehat{\varphi}(s_0) = 0$ gilt. Da φ aber nach Voraussetzung beliebig war, kann es so gewählt werden, dass $\widehat{\varphi}(s_0) \neq 0$. $\square$

Danksagung

Die vorgestellten Ergebnisse entstanden im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projektes. Die Autoren danken Joachim Rudolph für nützliche Hinweise.

Literatur

[1] Brethé, D. und J.-J. Loiseau: *A result that could bear fruit for the control of delay-differential systems.* In: *Proc. 4th IEEE Mediterranean Symp. Control Automation*, Seiten 168–172, Chania, Greece, 1996.

[2] Cohn, P. M.: *An Introduction to Ring Theory.* Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag, 1 Auflage, 2000.

[3] Courant, R. und D. Hilbert: *Methoden der mathematischen Physik*, Band 1. Springer-Verlag, Berlin, 1924.

[4] Courant, R. und D. Hilbert: *Methoden der mathematischen Physik*, Band 2. Springer-Verlag, Berlin, 1937.

[5] Curtain, R. F. und H. Zwart: *An Introduction to Infinite-dimensional Linear Systems Theory.* Springer-Verlag, New York, NY, 1995.

[6] Fliess, M.: *Some basic structural properties of generalized linear systems.* Systems Control Lett., 15:391–396, 1990.

[7] Fliess, M. und H. Mounier: *Tracking control and π-freeness of infinite dimensional linear systems.* In: Picci, G. und D. S. Gilliam (Herausgeber): *Dynamical Systems, Control, Coding, Computer Vision*, Seiten 45–68. Birkhäuser, Basel, 1999.

[8] Fodor, G.: *Laplace Transforms in Engineering.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965.

[9] Glüsing-Lüerssen, H: *A Behavioral Approach to Delay-Differential Systems.* SIAM J. Control Optim., 35(2):480–499, 1997.

[10] Hill, C. D.: *Parabolic Equations in One Space Variable and the Non-Characteristic Cauchy Problem.* Communications on Pure and Applied Mathematics, XX:619–633, 1967.

[11] Hörmander, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators II: Differential Operators with Constant Coefficients*, Band 257 der Reihe *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1990.

[12] Kharitonov, A. und O. Sawodny: *Flachheitsbasierte Steuerung und Regelung für parabolische Systeme mit verteilten Parametern und gleichverteiltem Eingriff.* at – Automatisierungstechnik, 55(12):615–623, 2007.

[13] Komatsu, H.: *Ultradistributions. I. Structure theorems and a characterization.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., 20:25–105, 1973.

[14] Lévine, J. und D. V. Nguyen: *Flat output characterization for linear systems using polynomial matrices.* Systems & Control Letters, 48:69–75, 2003.

[15] Lynch, A. F. und J. Rudolph: *Flachheitsbasierte Randsteuerung parabolischer Systeme mit verteilten Parametern.* at – Automatisierungstechnik, 48:478–486, 2000.

[16] Meurer, T.: *Feedforward and Feedback Tracking Control of Diffusion-Convection-Reaction Systems using Summability Methods.* Fortschritt-Berichte, Reihe 8, Nr. 664. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2005.

[17] Meurer, T. und M Zeitz: *Flachheitsbasierte Steuerung und Regelung eines Wärmeleitsystems.* at – Automatisierungstechnik, 52(9):411–420, 2004.

[18] Mounier, H.: *Propriétés structurelles des systèmes linéaires à retards : aspects théoriques et pratiques.* Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, Orsay, 1995.

[19] Mounier, H.: *Algebraic interpretations of the spectral controllability of a linear delay system.* Forum Math., 10:39–58, 1998.

[20] Mounier, H., J. Rudolph, M. Petitot und M. Fliess: *A flexible rod as a linear delay system.* In: *Proc. 3rd European Control Conference*, Seiten 3676–3681, Rome, Italy, 1995.

[21] Polderman, J. W. und J. C. Willems: *Introduction to Mathematical System Theory: A Behavioral Approach.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[22] Rodino, L.: *Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces.* World Scientific, Singapore, 1993.

[23] Rudolph, J.: *Randsteuerung von Wärmetauschern mit örtlich verteilten Parametern: Ein flachheitsbasierter Zugang.* at – Automatisierungstechnik, 48:399–406, 2000.

[24] Rudolph, J.: *Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension.* Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik. Shaker Verlag, Aachen, 2003.

[25] Rudolph, J., J. Winkler und F. Woittennek: *Flatness based control of distributed parameter systems: Examples and computer exercises from various technological domains.* Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik. Shaker Verlag, Aachen, 2003.

[26] Rudolph, J. und F. Woittennek: *Flachheitsbasierte Randsteuerung von elastischen Balken mit Piezoaktuatoren.* at – Automatisierungstechnik, 50:412–421, 2002.

[27] Rudolph, J. und F. Woittennek: *Trajektorienplanung für gewisse lineare Systeme mit verteilten Parametern.* at – Automatisierungstechnik, 54(5), 2006.

[28] Rudolph, J. und F. Woittennek: *Motion planning and open loop control design for linear distributed parameter systems with lumped controls.* Internat. J. Control, 81(3):457–474, 2008.

[29] Schwartz, L.: *Théorie des distributions.* Hermann, 2 Auflage, 1966.

[30] Thull, D., D. Wild und A. Kugi: *Infinit-dimensionale Regelung eines Brückenkranes mit schweren Ketten.* at – Automatisierungstechnik, 53(8):400–410, 2005.

[31] Woittennek, F.: *Beiträge zum Steuerungsentwurf für lineare, örtlich verteilte Systeme mit konzentrierten Stelleingriffen.* Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik. Shaker Verlag, Aachen, 2007.

[32] Woittennek, F. und H. Mounier: *Controllability of networks of one-dimensional second order p.d.e. – an algebraic approach.* 2008. arXiv:0804.1012v2 [math.OC].

Manuskripteingang: 28. März 2009.

Dr.-Ing. Frank Woittennek ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie (Prof. K. Röbenack) der TU Dresden.
Hauptarbeitsgebiete: lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme, nichtlineare Steuerung und Regelung mechanischer Systeme.

Adresse: Technische Universität Dresden, Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, 01062 Dresden, E-Mail: Frank.Woittennek@tu-dresden.de

Prof. Hugues Mounier ist Leiter des Bereichs Echtzeitsysteme und eingebettete Systeme am Institut d'Électronique Fondamentale an der Universität Paris Sud 11 in Orsay. Hauptarbeitsgebiete: lineare verteiltparametrische Systeme, lineare und nichtlineare Totzeitsysteme, Echtzeit-Regelung, eingebettete Systeme.

Adresse: Institut d'Électronique Fondamentale, Bât. 220, Université Paris Sud 11, 91405 Orsay, Frankreich, E-Mail: Hugues.Mounier@u-psud.fr