



HAL
open science

Décomposition effective de Jordan-Chevalley et ses retombées en enseignement

Danielle Couty, Jean Esterle, Rachid Zarouf

► **To cite this version:**

Danielle Couty, Jean Esterle, Rachid Zarouf. Décomposition effective de Jordan-Chevalley et ses retombées en enseignement. Gazette des Mathématiciens, 2011, 129, pp.29–49. hal-00525465v3

HAL Id: hal-00525465

<https://hal.science/hal-00525465v3>

Submitted on 15 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Décomposition effective de Jordan-Chevalley

Danielle Couty^{*1}, Jean Esterle^{†2,3} and Rachid Zarouf^{‡4}

¹IMT Toulouse, UMR 5219, 118 route de Narbonne, 31062,
Toulouse Cedex 9

²Université de Bordeaux, IMB, UMR 5251, 351 Cours de la
Libération, 33405 Talence Cedex

³ESTIA, Technopole Izarbel, 64200, Bidart

⁴CMI-LATP, UMR 6632, Université de Provence, 39, rue
F.-Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13

16, juin 2011

1 Introduction

On note $\mathcal{M}_n(k)$ l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans un corps k , et on note $\mathcal{GL}_n(k)$ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(k)$. Une matrice $V \in \mathcal{M}_n(k)$ est dite unipotente si $I_n - V$ est nilpotente, I_n désignant la matrice unité. Le théorème de décomposition de Jordan, sous sa forme additive, montre que toute matrice $U \in \mathcal{M}_n(k)$ s'écrit de manière unique sous la forme $U = D + N$, où $D \in \mathcal{M}_n(\tilde{k})$ est diagonalisable sur le corps de décomposition \tilde{k} du polynôme caractéristique p_U de U , et où N est nilpotente et commute avec D . De plus il existe $p \in k[x]$ tel que $D = p(U)$, $N = U - p(U)$.

*danielle.couty@iut-tarbes.fr

†esterle@math.u-bordeaux1.fr, j.esterle@estia.fr

‡rzarouf@cmi.univ-mrs.fr

Si k est un corps parfait, c'est-à-dire si tout polynôme irréductible $p \in k[x]$ est à racines simples dans son corps de décomposition, alors D et N appartiennent à $\mathcal{M}_n(k)$. Cette propriété reste vérifiée sans hypothèse particulière sur k quand tout facteur irréductible de p_U est à racines simples dans son corps de décomposition.

En posant $V = I + D^{-1}N$, on déduit immédiatement de la forme additive de la décomposition de Jordan que si k est parfait alors toute matrice $U \in \mathcal{GL}_n(k)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$U = DV, \tag{1}$$

avec $D \in \mathcal{GL}_n(k)$ diagonalisable sur le corps de décomposition de p_U , et V unipotente commutant avec D .

Le but de cet article est d'attirer l'attention sur le fait que ces décompositions de Jordan sont *effectivement calculables* à partir du polynôme caractéristique p_U de U . La méthode, qui date du début des années 50, est due à Claude Chevalley. Elle est directement inspirée de la méthode de Newton, ou "méthode de la tangente", qui fournit un schéma d'approximation d'une racine de l'équation $f(x) = 0$. La méthode de Newton consiste à choisir convenablement x_0 et à poser, pour $m \geq 0$,

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}.$$

Des hypothèses classiques permettent de garantir que la suite $(x_m)_{m \geq 0}$ converge vers une solution x de l'équation $f(x) = 0$. L'idée qui sous-tend l'algorithme de Chevalley est de trouver de cette façon une solution non triviale D de l'équation $\tilde{p}(D) = 0$, où \tilde{p} est le produit des facteurs irréductibles distincts, à racines distinctes dans leur corps de décomposition, d'un polynôme annulateur p de la matrice U . Il n'y a aucun problème de convergence ici, car la suite obtenue est stationnaire : si $p = p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$ est la décomposition en produit de facteurs irréductibles distincts de p , et si on pose

$$D_0 = U, \quad D_{n+1} = D_n - \tilde{p}(D_n)[\tilde{p}'(D_n)]^{-1},$$

alors la suite $(D_n)_{n \geq 0}$ est bien définie, et $D_n = D$ pour $2^n \geq \max_{1 \leq j \leq m} n_j$, (voir Section 2, Théorème 1). Le fait que $\tilde{p}'(D_n)$ est inversible résulte du fait que \tilde{p}' est premier avec \tilde{p} , donc $\tilde{p}'(D_n)^{-1} = q(D_n)$, où $q \in k[x]$ est un inverse de \tilde{p}' mod p , car on vérifie que $p(D_n) = 0$ pour $n \geq 0$ (en fait on peut prendre un inverse de \tilde{p}' mod $p_1^{n_1-1} \dots p_m^{n_m-1}$). On trouvera la version

originale de cet algorithme (théorème 7 page 71) dans l'ouvrage publié en 1951 par C.Chevalley [6].

Cette méthode est bien connue dans les préparations à l'agrégation [13], [26], [14], et est par exemple proposée en exercice p.62-63 de l'ouvrage récent de A.Boyer et J.Risler [3], mais elle ne semble pas avoir eu jusqu'ici la diffusion qu'elle mérite dans les enseignements au niveau L2-L3. Beaucoup de collègues sont étonnés d'apprendre que le calcul de la décomposition de Jordan-Chevalley, souvent appelée décomposition de Dunford, ne nécessite pas la connaissance des valeurs propres de la matrice considérée.

La forme multiplicative de la décomposition de Jordan-Chevalley joue un rôle important dans la théorie des groupes algébriques, c'est à dire des sous-groupes G de $\mathcal{GL}_n(k)$ de la forme

$$G = \left\{ U = (u_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \mid \phi_\lambda[u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{n,n-1}, u_{n,n}] = 0, \lambda \in \Lambda_G \right\},$$

où $(\Lambda_G$ est une famille d'indices et) $(\phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_G}$ est une famille de polynômes en n^2 variables à coefficients dans k . En effet si k est parfait, et si $G \subset \mathcal{GL}_n(k)$ est un groupe algébrique, alors la partie diagonalisable D et la partie unipotente V de la décomposition de Jordan-Chevalley $U = DV$ d'un élément U de G , appartiennent à G . Ce fait a été largement utilisé par le premier auteur dans sa thèse [8]. Outre l'ouvrage fondateur de Chevalley [6] déjà mentionné plus haut, nous renvoyons aux monographies de Borel [1] et Humphreys [17] pour une présentation générale de la théorie des groupes algébriques.

Nous résumons maintenant brièvement la suite de l'article. Dans la partie II nous donnons une version très générale de la décomposition de Jordan-Chevalley en nous plaçant de même que dans [10] dans le cadre d'une algèbre A sur un corps k . En reprenant une terminologie introduite dans [4], Chapitre VII pour les endomorphismes, on dit que $u \in A$ est absolument semi-simple (resp. semi-simple, resp. séparable) s'il possède un polynôme annulateur premier à son polynôme dérivé (resp. dont les facteurs irréductibles sont distincts, resp. dont les facteurs irréductibles sont premiers à leur polynôme dérivé). On montre alors que tout élément séparable u de A s'écrit de manière unique sous la forme $u = d + n$, avec $d \in A$ absolument semi-simple et $n \in A$ nilpotent. La démonstration est essentiellement la démonstration originale de Chevalley, même si pour la preuve de l'unicité nous donnons une démonstration directe qui évite le recours habituel au corps de décomposition du polynôme minimal de u .

On conclut cette section en rappelant la caractérisation des corps parfaits

et en donnant des exemples d'endomorphismes semi-simples qui ne sont pas absolument semi-simples. De tels endomorphismes n'admettent pas de décomposition de Jordan, comme l'a observé Bourbaki dans [4], Chapitre VII.

A la section III nous illustrons le caractère effectif de l'algorithme de Chevalley sur un exemple : quand k est de caractéristique nulle le polynôme \tilde{p} utilisé dans l'algorithme est égal à $\frac{p}{\text{pgcd}(p,p')}$, et dans le cas d'une matrice U on peut prendre $p = p_U$ où p_U désigne le polynôme caractéristique de U . On est donc ramené via l'algorithme d'Euclide étendu à une suite de divisions euclidiennes précédée d'un calcul de déterminant. Avec l'aide de Maple nous montrons ainsi comment calculer la décomposition de Jordan-Chevalley d'une matrice $U \in \mathcal{M}_{15}(\mathbb{R})$ dont les 5 racines, de multiplicité 3, ne sont pas calculables.

A la section IV nous discutons une autre méthode, utilisée par A. Borel dans [1] et basée sur un système \mathcal{S} d'équations de congruence, qui permet de montrer l'existence de la décomposition de Jordan (en utilisant un peu de théorie de Galois pour montrer que le polynôme permettant de calculer le terme absolument semi-simple d de la décomposition est à coefficients dans k) et de la calculer explicitement quand on connaît les racines d'un polynôme annulateur. La partie absolument semi-simple d d'un élément séparable u d'une k -algèbre A s'écrit alors sous la forme $d = q(u)$, où q est une solution quelconque de \mathcal{S} . De même que dans [26] nous montrons que l'algorithme de Newton permet de calculer une solution q du système \mathcal{S} sans faire intervenir les racines. Il n'y a pas de nouveau calcul à faire puisque q s'obtient en appliquant directement l'algorithme de la section II à $\pi(x)$, où p désigne un polynôme annulateur de u dont les facteurs irréductibles sont à dérivée non nulle et où $\pi : k[x] \rightarrow k[x]/pk[x]$ désigne la surjection canonique. En utilisant Maple nous donnons la valeur du polynôme p de degré 14 tel que la partie diagonalisable D de la matrice U étudiée à la section III soit égale à $p(U)$.

Nous indiquons dès maintenant pourquoi nous avons préféré appeler la décomposition discutée dans cet article "décomposition de Jordan-Chevalley" plutôt que "décomposition de Dunford". On trouve bien dans un article écrit en 1954 par N. Dunford [11] une décomposition de type Jordan en théorie spectrale¹, mais cet article est postérieur à l'ouvrage de Chevalley cité plus

1. Les résultats de 1954 sont largement diffusés à partir de 1971, date de la parution de l'ouvrage de Dunford et Schwartz *Linear operators* [12]. Les auteurs présentent les résultats de 1954 de Dunford au tome III, paragraphe "The Canonical Reduction of a Spectral Operator", pages 1937-1941, (voir aussi la note page 2096) et les généralisent

haut. Ceci justifie pour nous la terminologie de "décomposition de Jordan-Chevalley", ce que nous développerons davantage dans la partie V en étudiant quelques étapes historiques du "théorème de Jordan". Cette terminologie est d'ailleurs la terminologie utilisée par James E. Humphreys dans les deux ouvrages où il présente cette décomposition, voir [16], page 17 et [17], page 18. Nous complétons cette présentation historique à la section VI en mentionnant deux aspects de la décomposition multiplicative de Jordan dans les groupes de Lie semi-simples : la décomposition d'un élément d'un groupe de Lie réel semi-simple et connexe en produit d'un élément "elliptique" e , d'un élément "hyperbolique" h et d'un élément unipotent u qui commutent entre eux, et un résultat très récent de Venkataramana [29] qui montre que si G est un groupe de Lie linéaire semi-simple réel et si $g = su$ est la décomposition de Jordan d'un élément g d'un réseau Γ de G alors il existe $m \geq 1$ tels que $s^m \in \Gamma$ et $u^m \in \Gamma$.

Enfin dans la section VII nous discutons l'intérêt d'utiliser la décomposition de Jordan-Chevalley pour des enseignements à un niveau relativement élémentaire, en nous appuyant sur l'expérience acquise à l'Ecole d'Ingénieurs ESTIA de Bidart, dont les promotions (150 élèves de 1e année en 2010-2011) sont composées pour 2/3 d'élèves issus de diverses classes préparatoires, l'autre tiers étant majoritairement formé de titulaires d'un DUT.

2 L'algorithme de Newton pour la décomposition de Jordan-Chevalley

Soit k un corps, soit $k[x]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans k . On dit qu'un polynôme non constant $p \in k[x]$ est *séparable* s'il est premier à son polynôme dérivé p' (c'est évidemment le cas si p est irréductible et si $p' \neq 0$). Il résulte immédiatement de l'identité de Bezout que si q est un diviseur non constant d'un polynôme séparable p alors q est séparable. Si p et q sont séparables et premiers entre eux, alors p est premier à $p'q$, donc à $p'q + q'p = (pq)'$. De même q est premier à $(pq)'$, et par conséquent pq est premier avec $(pq)'$ donc pq est séparable. On en déduit immédiatement que le produit d'une famille finie de polynômes séparables premiers entre eux deux à deux est séparable.

Soit A une k -algèbre générale unitaire d'unité notée 1_A . On pose $[u, v] =$

([12], Théorème 8 p.2252).

$uv - vu$ pour $u, v \in A$, $p(u) = p_0 1_A + p_1 u + \dots + p_n u^n$ pour $p = p_0 + p_1 x + \dots + p_n x^n \in k[x]$ et $u \in A$, et on dit que p est un polynôme annulateur de u si $p(u) = 0$. Par convention, les facteurs irréductibles d'un polynôme $p \in k[x]$ sont supposés unitaires. Les notions suivantes sont une extension aux éléments d'une k -algèbre générales de notions introduites dans [4], Chapitre VII pour les endomorphismes d'un k -espace vectoriel.

Definition 1. *On dit que $u \in A$ est*

(i) *absolument semi-simple si u possède un polynôme annulateur séparable,*

(ii) *semi-simple si u possède un polynôme annulateur dont tous les facteurs irréductibles sont distincts,*

(iii) *séparable si u possède un polynôme annulateur $p \in k[x]$ dont tous les facteurs irréductibles sont séparables.*

On dit qu'un couple (d, s) d'éléments de A , avec d absolument semi-simple, s nilpotent est une décomposition de Jordan-Chevalley de $u \in A$ quand $u = d + s$ et $[d, s] = 0$.

Soit u un élément de A possédant un polynôme annulateur. Comme tout diviseur non constant d'un polynôme séparable est séparable, on voit que u est absolument semi-simple si et seulement si son polynôme minimal est séparable, et que u est séparable si et seulement si tous les facteurs irréductibles de son polynôme minimal sont séparables.

Notons que si $u \in A$ admet une décomposition de Jordan-Chevalley (d, s) alors u est séparable. En effet dans ce cas soit p le polynôme minimal de d . On a $p(u) = p(d) + sv = sv$, avec $v \in A$, $[s, v] = 0$, et sv est nilpotent. Donc il existe un entier $m \geq 1$ tel que $p(u)^m = 0$. Comme tout diviseur irréductible de p^m divise p , u est séparable.

Il est bien connu que si u et v sont absolument semi-simples, et si $[u, v] = 0$, alors $u + v$ est absolument semi-simple. Nous donnons ici un résultat qui est suffisant pour montrer l'unicité de la décomposition de Jordan, et dont la démonstration ne fait pas appel à la notion de clôture algébrique.

Proposition 1. *Soient u et v deux éléments absolument semi-simples d'une algèbre unitaire A sur un corps k , et soit $k[u, v]$ la sous-algèbre unitaire de A engendrée par u et v . Si $[u, v] = 0$, alors $k[u, v]$ ne contient aucun élément nilpotent non nul.*

Preuve. Soit $p \in k[x]$ le polynôme minimal de u . Comme u est absolument semi-simple, il existe une famille p_1, \dots, p_s de polynômes unitaires irréductibles distincts sur k tels que $p = p_1 \dots p_s$. Posons $P_i = \prod_{j \neq i} p_j$. D'après

le théorème de Bezout il existe $\phi_1, \dots, \phi_s \in k[x]$ tels que $\sum_{j=1}^s \phi_j P_j = 1_k$. Posons $e_i = \phi_i(u)P_i(u)$, $u_i = e_i u$ et $A_i = e_i k[u, v]$. Alors $\sum_{i=1}^s e_i = 1_A$, $e_i \neq 0$, $e_i e_j = 0$ pour $i \neq j$, ce qui implique $e_i^2 = e_i \neq 0$ pour tout i ; A_i est unitaire d'unité e_i et $k[u, v] = \bigoplus_{1 \leq i \leq s} A_i$. Comme $e_i p_i(e_i u) = e_i p_i(u) = 0$, le polynôme minimal de u_i considéré comme élément de la k -algèbre unitaire A_i divise p_i , donc est égal à p_i . Donc $k[u_i] \subset A_i$ est un corps isomorphe à l'algèbre quotient $k[x]/p_i k[x]$.

Considérons maintenant A_i comme une $k[u_i]$ -algèbre unitaire. Alors $v_i := e_i v$ est un élément absolument semi-simple de A_i et en raisonnant de même que ci-dessus on construit une famille $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq \alpha_i}$ d'éléments non nuls de A_i , avec $\alpha_i \geq 1$, vérifiant $e_{i,j} e_{i,j'} = 0$ pour $j' \neq j$ et $\sum_{j=1}^{\alpha_i} e_{i,j} = e_i$ et tels que $A_{i,j} := e_{i,j} A_i = e_{i,j} k[u, v] = e_{i,j} k[u_i][v] = e_{i,j} k[u_i][e_{i,j} v]$ soit un corps d'unité $e_{i,j}$.

Soit maintenant w un élément nilpotent de $k[u, v]$. Alors $e_{i,j} w$ est nilpotent, donc $e_{i,j} w = 0$ pour $1 \leq j \leq \alpha_i$, $1 \leq i \leq s$ et $w = 1_k w = \sum_{i=1}^s \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} e_{i,j} w \right) = 0$. \square

On va maintenant démontrer une version très générale du théorème de décomposition de Jordan-Chevalley, en utilisant un algorithme, directement inspiré par la méthode de Newton, introduit par C. Chevalley.

Théorème 1. *Soient k un corps, A une k -algèbre, u un élément séparable de A , et $p = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r} \in k[x]$ un polynôme annulateur unitaire de u dont les facteurs irréductibles unitaires p_1, \dots, p_r sont séparables. On pose $m = \max_{1 \leq j \leq r} m_j$, $\tilde{p} = p_1 \dots p_r$, $\bar{p} = p/\tilde{p}$, de sorte que \tilde{p} est séparable. Il existe $q \in k[x]$ tel que $q\tilde{p}' \equiv 1 \pmod{\bar{p}}$. On définit par récurrence une suite $(d_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A en posant*

$$\begin{cases} d_0 = u \\ d_{n+1} = d_n - \tilde{p}(d_n)q(d_n) \text{ pour } n \geq 0. \end{cases}$$

Soit N le plus petit entier tel que $2^N \geq m$. Alors $\tilde{p}(d_N) = 0$, d_N est absolument semi-simple, $u - d_N$ est nilpotent, $[d_N, u - d_N] = 0$ et $(d_N, u - d_N)$ est l'unique décomposition de Jordan-Chevalley de u .

Preuve. Comme \tilde{p}' est premier avec \tilde{p} , il est premier avec p_j pour $1 \leq j \leq r$, donc il est premier avec p et \bar{p} , ce qui permet de construire q .

Soit $B := \{h(u)\}_{h \in k[x]}$. Il est clair que B est commutative, et que $d_n \in B$ pour $n \geq 0$.

Observons tout d'abord que si $f \in k[x]$, on a, pour $v, w \in B$,

$$f(v+w) - f(v) \in wB, \quad f(v+w) - f(v) - wf'(v) \in w^2B. \quad (2)$$

Si $v \in B$ vérifie $p(v) = 0$, et si $w \in \tilde{p}(v)B$, alors $p_j(v+w) - p_j(v) \in wB \subset p_j(v)B$, donc $p_j(v+w) \in p_j(v)B$ pour $1 \leq j \leq r$, ce qui montre que $p(v+w) = 0$.

Comme $d_0 = u$, et comme p est un polynôme annulateur de u , une récurrence immédiate montre que $p(d_n) = 0$ pour $n \geq 1$.

On a alors,

$$\tilde{p}'(d_n)q(d_n) - 1_A \in \bar{p}(d_n)B, \quad q(d_n) - \tilde{p}'(d_n)^{-1} \in \bar{p}(d_n)B, \quad \tilde{p}(d_n)q(d_n) = \tilde{p}(d_n)\tilde{p}'(d_n)^{-1}.$$

On obtient, pour $n \geq 0$,

$$d_{n+1} = d_n - \tilde{p}(d_n)\tilde{p}'(d_n)^{-1}, \quad (3)$$

ce qui montre que la suite $(d_n)_{n \geq 0}$ est définie par l'algorithme de Newton associé à \tilde{p} .

On a $d_0 = u$ et, pour $n \geq 1$,

$$u - d_n = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{p}(d_j)q(d_j),$$

ce qui prouve que $(u - d_n)^m = 0$ pour $n \geq 0$. De plus, il résulte de la formule (2) que $\tilde{p}(d_{n+1}) \in \tilde{p}(d_n)^2B$. Par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{p}(d_n) \in \tilde{p}(u)^{2^n} B.$$

En particulier, $\tilde{p}(d_N) = 0$. Donc d_N est absolument semi-simple, et comme $u - d_N$ est nilpotent on voit que $(d_N, u - d_N)$ est une décomposition de Jordan-Chevalley de u . Soit (d, s) une autre décomposition de Jordan-Chevalley de u . Comme $d_N \in B$, $[d, d_N] = [s, u - d_N] = 0$ et $d - d_N \in k[d, d_N]$ est nilpotent. Il résulte alors de la proposition 1 que $d = d_N$, et la décomposition de Jordan de u est unique. \square

Rappelons qu'on dit qu'un corps k est parfait si tout polynôme irréductible $p \in k[x]$ est séparable. On a alors le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Soit k un corps parfait, soit A une k -algèbre et soit $u \in A$. Si u admet un polynôme annulateur, alors u admet une unique décomposition de Jordan-Chevalley (d, s) sur A , et il existe $p \in k[x]$ tel que $d = p(u)$, $s = u - p(u)$.*

Il est clair que tout corps de caractéristique nulle est parfait, et un corps k de caractéristique $m \geq 2$ est parfait si l'équation $y^m = a$ admet une solution dans k pour tout $a \in k$. En effet dans ce cas soit $p \in k[x]$ un polynôme non constant tel que $p' = 0$. Alors il existe $s \geq 1$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_s \in k$ tels que $p = \sum_{j=0}^s \lambda_j x^{mj} = \left(\sum_{j=0}^s \mu_j x^j \right)^m$, où μ_j est une solution dans k de l'équation $z^m = \lambda_j$ pour $0 \leq j \leq s$, donc p n'est pas irréductible, ce qui montre que k est parfait. Réciproquement soit k un corps de caractéristique $m \geq 1$ tel qu'il existe $a \in k$ vérifiant $y^m \neq a$ pour tout $y \in k$. Posons $p = x^m - a$, soit \tilde{k} un corps de rupture de p et soit b une racine de p dans \tilde{k} . Alors $p = x^m - a = x^m - b^m = (x - b)^m$, donc les seuls diviseurs unitaires non constants de p dans $k[x]$ distincts de p sont de la forme $(x - b)^n = x^n - nbx^{n-1} + \sum_{j=2}^n C_n^j (-n)^j x^{n-j}$, avec $1 \leq n < m$. Comme dans ce cas n est inversible modulo m , aucun de ces polynômes n'appartient à $k[x]$ et p est un polynôme irréductible de dérivée nulle, ce qui montre que k n'est pas parfait.

Le corollaire 1 n'est plus valable si k n'est pas parfait. En effet soit k un corps non parfait, de caractéristique $m \neq 0$, soit $a \in k$ tel que l'équation $x^m = a$ n'admette aucune solution dans k , et soit E un k -espace vectoriel de dimension m . Soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ une base de E , et soit $\theta \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme défini par les formules $\theta(e_j) = e_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq m - 1$ et $\theta(e_m) = ae_1$. Alors $\theta^m = a1_{\mathcal{L}(E)}$ et $x^m - a$ divise tout polynôme annulateur de θ , ce qui prouve que θ est un élément non séparable de la k -algèbre $\mathcal{L}(E)$. Donc θ n'admet pas de décomposition de Jordan. En fait cet endomorphisme

θ est un exemple d'endomorphisme semi-simple qui n'est pas absolument semi-simple, et un élément semi-simple et non absolument semi-simple d'une algèbre A sur un corps (non parfait) k ne peut admettre de décomposition de Jordan sur A .

Notons qu'un endomorphisme u sur un k -espace vectoriel E est semi-simple si et seulement si tout sous-espace vectoriel F de E invariant pour u admet un supplémentaire invariant pour u , et que u est absolument semi-simple si et seulement si il existe une extension algébrique \tilde{k} de k telle que l'extension de u au \tilde{k} -espace vectoriel \tilde{E} associé à E soit diagonalisable, voir [4], Chapitre VII.

Si A est de dimension finie, le théorème de Cayley-Hamilton montre que le polynôme caractéristique de u annule ce dernier et on peut le calculer explicitement. On notera que si k est de caractéristique nulle alors, les notations étant celles du théorème 1, on a $\tilde{p} = \frac{p}{\text{pgcd}(p, p')}$, et on peut calculer $\text{pgcd}(p, p')$ par l'algorithme d'Euclide étendu.

Dans le cas des algèbres de matrices, on utilisera les termes "partie diagonalisable" (sur \tilde{k}) et "partie nilpotente" pour désigner le terme absolument semi-simple et le terme nilpotent de la décomposition de Jordan-Chevalley d'une matrice $U \in \mathcal{M}_n(k)$.

3 Un exemple avec Maple

On applique avec l'aide de Maple la méthode du paragraphe précédent à la matrice $U \in \mathcal{M}_{15}(\mathbb{C})$ définie ci-dessous², dont les valeurs propres ne sont pas calculables.

$$U =$$

2. Sans livrer totalement le secret de fabrication de la matrice donnée ici, nous donnons un moyen simple de fabriquer une famille de matrices 15x15 non diagonalisables dont les valeurs propres ne sont pas calculables. On part d'une matrice 5×5 , notée A , à valeurs propres distinctes et dont les valeurs propres ne sont pas calculables.

Cela doit marcher si on prend A au hasard. On note respectivement 0_5 et I_5 la matrice nulle et la matrice unité à 5 lignes et 5 colonnes, et on considère une matrice inversible

15×15 notée P . La matrice $U = P^{-1} \begin{bmatrix} A & I_5 & 0_5 \\ 0_5 & A & I_5 \\ 0_5 & 0_5 & A \end{bmatrix} P$ est bien une matrice 15×15

non diagonalisable dont les valeurs propres ne sont pas calculables. Nous laissons au lecteur le soin de trouver comment obtenir la matrice présentée ci-dessus par ce procédé.

$$\begin{pmatrix} -239 & -219 & -201 & -182 & -164 & -149 & -135 & -120 & -105 & -90 & -75 & -60 & -45 & -30 & -15 \\ 22 & 21 & 21 & 17 & 11 & 10 & 10 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 612 & 560 & 518 & 478 & 440 & 400 & 360 & 321 & 280 & 240 & 200 & 160 & 120 & 80 & 40 \\ -416 & -392 & -379 & -356 & -330 & -300 & -270 & -240 & -209 & -180 & -150 & -120 & -90 & -60 & -30 \\ 183 & 194 & 201 & 190 & 176 & 150 & 125 & 102 & 82 & 67 & 55 & 44 & 33 & 22 & 11 \\ -326 & -328 & -324 & -311 & -297 & -275 & -234 & -197 & -162 & -132 & -109 & -88 & -66 & -44 & -22 \\ 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 16 & 16 & 12 & 6 & 5 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 412 & 412 & 412 & 412 & 412 & 412 & 360 & 318 & 278 & 240 & 200 & 160 & 121 & 80 & 40 \\ -266 & -266 & -266 & -266 & -266 & -266 & -242 & -229 & -206 & -180 & -150 & -120 & -90 & -59 & -30 \\ 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 139 & 146 & 135 & 121 & 95 & 70 & 47 & 27 & 12 \\ -217 & -217 & -217 & -217 & -217 & -217 & -219 & -215 & -202 & -188 & -166 & -125 & -88 & -53 & -23 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 11 & 11 & 7 & 1 \\ 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 160 & 118 & 78 & 40 \\ -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -92 & -79 & -56 & -30 \\ 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 44 & 51 & 40 & 26 \end{pmatrix}.$$

Son polynome caractéristique p_U , calculé sous Maple, est :

$$p = p_U = (x^5 - 9x^4 - 245x^3 - 1873x^2 - 5634x + 43486)^3.$$

Il est possible de calculer, avec la commande “fsolve”, des valeurs approchées de chacune des valeurs propres complexes de U , c’est-à-dire des racines de p . On trouve 5 valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1}^5$, chacune ayant un ordre de multiplicité 3 dans p :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \approx -9.105387869 \\ \lambda_2 \approx -4.140449458 - 6.991743391.i \\ \lambda_3 \approx -4.140449458 + 6.991743391.i \\ \lambda_4 \approx 3.107109622 \\ \lambda_5 \approx 23.27917716 \end{array} \right. .$$

Toujours avec Maple, on calcule d’abord le pgcd h de p et de son polynome dérivé, puis on divise p par h pour trouver \tilde{p} . On trouve successivement :

$$h = \text{pgcd}(p, p') = x^{10} - 18x^9 - 409x^8 + 664x^7 + 82471x^6 + 1106154x^5 + 5486041x^4 + \\ -203176x^3 - 131156600x^2 - 490000248x + 1891032196,$$

et

$$\tilde{p} = \frac{p}{h} = x^5 - 9x^4 - 245x^3 - 1873x^2 - 5634x + 43486.$$

En particulier, on se rend compte que $p = \tilde{p}^3$, ce qui signifie que deux itérations dans l’algorithme de Newton seront suffisantes pour trouver la partie diagonalisable. Pour pouvoir faire tourner l’algorithme, on a besoin du polynôme dérivé de \tilde{p} qui se calcule sous Maple à l’aide de la commande “diff”. On trouve

$$\tilde{p}' = 5x^4 - 36x^3 - 735x^2 - 3746x - 5634.$$

Puis, on en déduit q tel que $q\tilde{p} \equiv 1 \pmod{\tilde{p}}$, à l'aide de la commande "gcdex".
Enfin on calcule $q(U)$, $\tilde{p}(U)$ et

$$D_1 = U - \tilde{p}(U)q(U).$$

De même, on calcule D_2 à l'aide de la formule

$$D_2 = D_1 - \tilde{p}(D_1)q(D_1).$$

On trouve ainsi la partie diagonalisable D de la matrice U .

$$D_2 = D = \begin{pmatrix} -240 & -220 & -202 & -183 & -165 & -150 & -135 & -120 & -105 & -90 & -75 & -60 & -45 & -30 & -15 \\ 22 & 21 & 21 & 17 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 612 & 560 & 518 & 478 & 440 & 400 & 360 & 320 & 280 & 240 & 200 & 160 & 120 & 80 & 40 \\ -416 & -392 & -379 & -356 & -330 & -300 & -270 & -240 & -210 & -180 & -150 & -120 & -90 & -60 & -30 \\ 183 & 194 & 201 & 190 & 176 & 150 & 125 & 102 & 82 & 66 & 55 & 44 & 33 & 22 & 11 \\ -326 & -328 & -324 & -311 & -297 & -275 & -234 & -197 & -162 & -132 & -110 & -88 & -66 & -44 & -22 \\ 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 16 & 16 & 12 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 412 & 412 & 412 & 412 & 412 & 412 & 360 & 318 & 278 & 240 & 200 & 160 & 120 & 80 & 40 \\ -266 & -266 & -266 & -266 & -266 & -266 & -242 & -229 & -206 & -180 & -150 & -120 & -90 & -60 & -30 \\ 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 139 & 146 & 135 & 121 & 95 & 70 & 47 & 27 & 11 \\ -216 & -216 & -216 & -216 & -216 & -216 & -218 & -214 & -201 & -187 & -165 & -124 & -87 & -52 & -22 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 11 & 11 & 7 & 1 \\ 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 160 & 118 & 78 & 40 \\ -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -92 & -79 & -56 & -30 \\ 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 44 & 51 & 40 & 26 \end{pmatrix},$$

puis, par différence, sa partie nilpotente N :

$$N = A - D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 Décomposition de Jordan via un système de congruences

On reprend ici les notations du théorème 1, et on désigne par $p = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ un polynôme annulateur d'un élément séparable u d'une k -algèbre A dont les facteurs irréductibles p_1, \dots, p_r sont à racines simples dans \tilde{k} . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les racines distinctes de $\tilde{p} := p_1 \dots p_r$, et n_1, \dots, n_s leurs ordres de multiplicité (notons que pour tout $1 \leq i \leq r$, toutes les racines de p_i sont en fait d'ordre m_i). On considère le système d'équations de congruence

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} h \equiv \lambda_1 \pmod{(x - \lambda_1)^{n_1}} \\ h \equiv \lambda_2 \pmod{(x - \lambda_2)^{n_2}} \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \vdots \\ h \equiv \lambda_s \pmod{(x - \lambda_s)^{n_s}} \end{cases} .$$

Il résulte du théorème chinois que ce système possède une solution (unique modulo p) dans $\tilde{k}[x]$. Le fait que ce système possède une solution dans $k[x]$ est un peu moins évident. On pose

$$m := \max_{1 \leq j \leq s} n_j = \max_{1 \leq j \leq r} m_j,$$

et on considère le système un peu plus compliqué

$$(\mathcal{S}') : \begin{cases} h \equiv \lambda_1 \pmod{(x - \lambda_1)^m} \\ h \equiv \lambda_2 \pmod{(x - \lambda_2)^m} \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \vdots \\ h \equiv \lambda_s \pmod{(x - \lambda_s)^m} \end{cases} .$$

Le système \mathcal{S}' admet une unique solution modulo \tilde{p}^m . De plus, comme $\tilde{p} \in k[x]$ est à racines simples, il existe une extension galoisienne $k_1 \subset \tilde{k}$ de k contenant $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Ceci signifie que l'ensemble des éléments de k_1 invariants pour tous les automorphismes $\sigma \in G$ est réduit à k , où $G := \text{Gal}(k_1/k)$ désigne le groupe de Galois formé des automorphismes de k_1 laissant fixes tous les éléments de k . Soit $h_0 \in \tilde{k}(x)$ l'unique solution de degré strictement inférieur à sm de \mathcal{S}' , soit $\sigma \in G$, et soit $\sigma(h_0)$ le polynôme obtenu en appliquant σ à tous les coefficients de h_0 . Comme $\sigma(\lambda_j) \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, et comme

$\sigma(h_0) \equiv \sigma(\lambda_j) \pmod{(x - \sigma(\lambda_j))^{n_j}}$ pour $1 \leq j \leq s$, on voit que $\sigma(h_0)$ est aussi une solution de \mathcal{S}' de degré strictement inférieur à sm . Donc $\sigma(h_0) = h_0$ pour tout $\sigma \in G$, et $h_0 \in k[x]$. Notons qu'en remplaçant h_0 par le reste de sa division par p , on obtient la solution $h \in k[x]$ du système \mathcal{S} de degré strictement inférieur à celui de p .

On a $\tilde{p}(h(u)) = (h(u) - \lambda_1) \dots (h(u) - \lambda_s) \in p(u)B = \{0\}$, donc $\tilde{p}(d) = 0$ et $h(u)$ est absolument semi-simple. De plus, $x - h$ est divisible par $x - \lambda_j$ pour $1 \leq j \leq n$, donc $x - h$ est divisible par $\tilde{p} = \text{ppcm}(x - \lambda_1, \dots, x - \lambda_s)$, et $(x - h)^m$ est divisible par $\tilde{p}^m = p$. Donc $u - h(u)$ est nilpotent, et $(h(u), u - h(u))$ est la décomposition de Jordan-Chevalley de u .

Algorithme de Newton. En fait on peut calculer h en utilisant l'algorithme de Newton. Il s'agit d'une simple application du théorème 1. En effet posons $\mathcal{A} = k[x]/pk[x]$, soit $\pi = k[x] \rightarrow \mathcal{A}$ la surjection canonique et soit $v = \pi(x)$. On a $p(v) = 0$, et v est un élément séparable de \mathcal{A} . Posons $\alpha = d^\circ(p)$. En identifiant \mathcal{A} à l'ensemble $k_{\alpha-1}[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $\alpha - 1$, l'algorithme de Newton donne la suite $(h_n)_{n \geq 0}$ de polynômes telle que $h_0 = x$ et telle que h_{n+1} est le reste de la division euclidienne de $h_n - \tilde{p}(h_n)q(h_n)$ par p . On a $h_n(\lambda_j) = \lambda_j$ pour $1 \leq j \leq s$, $n \geq 0$, et $\tilde{p}(h_N) = 0$, ce qui signifie que $\prod_{1 \leq j \leq s} (h_N - \lambda_j)$ est divisible par p .

On a $h_N(\lambda_j) = \lambda_j$ pour $1 \leq j \leq s$, $n \geq 0$, et $x - \lambda_j$ est premier avec $\prod_{l \neq j} (h_N - \lambda_l)$. Donc $(x - \lambda_j)^{n_j}$ divise $h_N - \lambda_j$ pour $1 \leq j \leq s$, et h_N est solution du système \mathcal{S} .

Considérons de nouveau l'exemple de la matrice $U \in \mathcal{M}_{15}(\mathbb{C})$ étudiée au cours de la partie III. Elle donne $\alpha = 15$, $n_1 = n_2 = n_3 = 3$, et $m = 2$. Voici le polynôme h_2 de degré 14 trouvé en utilisant Maple :

$$\begin{aligned} & -\frac{164777455994373388396328621588559}{6153698372078022255427531347585869793027770912}x^{14} + \frac{4696495785239673852290048403064815}{6153698372078022255427531347585869793027770912}x^{13} \\ & + \frac{1904832784435747945567751656823474}{192303074127438195482110354612058431032117841}x^{12} - \frac{93156612626828282836743908787001857}{769212296509752781928441418448233724128471364}x^{11} \\ & - \frac{947888046084076156531978456271155215}{192303074127438195482110354612058431032117841}x^{10} - \frac{134225331044956775638702555509762875765}{3076849186039011127713765673792934896513885456}x^9 + \\ & + \frac{1437307520588625416353772759457723214755}{3076849186039011127713765673792934896513885456}x^8 + \frac{5160755602829187090655465367051014084185}{384606148254876390964220709224116862064235682}x^7 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{883915408036735072058939076768746842566791}{6153698372078022255427531347585869793027770912} x^6 + \frac{3913459854154300022640900141580672168912059}{6153698372078022255427531347585869793027770912} x^5 + \\
& - \frac{4125757581287724475079189681241424637007729}{3076849186039011127713765673792934896513885456} x^4 - \frac{1202955633870054250571522565744213358793813}{41579043054581231455591428024228849952890344} x^3 + \\
& - \frac{201785886295705753509895176779863737263724099}{1538424593019505563856882836896467448256942728} x^2 + \frac{1811980652583749695251762135187625041505888535}{1538424593019505563856882836896467448256942728} x + \\
& + \frac{1040926769591787693101439601278755401419987857}{769212296509752781928441418448233724128471364}.
\end{aligned}$$

Une valeur approchée de h_2 se calcule à l'aide de la commande "evalf" et vaut :

$$\begin{aligned}
& -0.2677697964.10^{-13} x^{14} + 0.7631988930.10^{-12} x^{13} + 0.9905368352.10^{-11} x^{12} - 0.1211065047.10^{-9} x^{11} \\
& -0.4929136211.10^{-8} x^{10} - 0.4362428021.10^{-7} x^9 + 0.4671361623.10^{-6} x^8 + 0.00001341828680.x^7 + 0.0001436397032.x^6 \\
& + 0.0006359524984.x^5 - 0.001340903415.x^4 - 0.02893177778.x^3 - 0.1311639759.x^2 + 1.177815709.x + 1.353237298.
\end{aligned}$$

5 La terminologie "décomposition de Jordan-Chevalley"

La définition 1 de notre deuxième partie donne le nom de "décomposition de Jordan-Chevalley" au couple (d, s) d'éléments de A tels que $u = d + s$.

Le nom de Jordan, très classique dans le contexte de décomposition d'un endomorphisme, ne peut étonner ici.

Certes, la décomposition décrite dans la définition ci-dessus est fort éloignée du théorème énoncé par Camille Jordan dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques* [18] de 1870. A cette époque, le théorème dû à C. Jordan prend le nom de «forme canonique d'une substitution linéaire» et est écrit en termes de substitutions linéaires de la forme $|x, x' \dots ax + bx' + \dots, a'x + b'x' + \dots, \dots|$, l'écriture matricielle n'apparaissant jamais. La démonstration donnée par C. Jordan est, elle aussi, bien loin de nos méthodes actuelles. On peut la trouver étudiée et commentée à l'aide d'exemples par F. Brechenmacher ([5], p.182, encart 5).

C'est seulement à partir des années 1930-1940 que les versions successives de ce théorème sont définitivement rattachées au nom du mathématicien Camille Jordan. On peut citer par exemple en 1932 H.W. Turnbull et A.C. Aitken page 114 :

«The Classical Form C is first found in C. Jordan, *Traité des substitutions*» [27]

ou en 1943 C.C. Mac Duffee théorème 65 :

«This is the familiar Jordan normal form of a matrix with complex elements.» [24].

Dans ce cadre, il est toujours question d'un théorème de réduction (et non de décomposition), tel qu'on le trouve encore dans les années 1970, par exemple dans l'ouvrage de Serge Lang (page 398, *Algebra* [22]).

Pourtant, en parallèle, une autre histoire du théorème de Jordan se dessine vers 1950. C'est là que se trouve la source de la dénomination "décomposition de Jordan-Chevalley".

Claude Chevalley, qui fait partie du groupe Bourbaki depuis sa création en 1935, oriente ses recherches en direction des groupes de Lie et des groupes algébriques et publie depuis les États-Unis [9] deux livres sur ces sujets :

Theory of Lie groups I en 1946 et *Théorie des groupes de Lie Tome II* (sous titre : groupes algébriques) en 1951.

Claude Chevalley n'est évidemment pas seul à travailler sur ces questions. On peut trouver une étude approfondie de ce domaine mathématique dans le livre *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups* qu'Armand Borel a consacré au «first century of the history of Lie groups and algebraic groups» ([2] page IX). Complètement contemporains des travaux de Claude Chevalley, citons ceux d' E.R. Kolchin, qui publie en 1946 sur les groupes algébriques, et fait appel dans ses travaux à la «forme normale de Jordan» ([19] p. 9, [20] p. 776).

Revenons au deuxième tome de l'ouvrage de Claude Chevalley [6] ; au paragraphe *Espaces vectoriels à opérateurs*, on trouve, page 71 le théorème 7 :

«Soit X un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps parfait k . Il est alors possible, d'une manière et d'une seule, de représenter X comme somme d'un endomorphisme semi-simple S et d'un endomorphisme nilpotent N qui commutent entre eux ; S et N peuvent être représentés comme polynômes en X à coefficients dans k .»

Clairement, ici, Claude Chevalley ouvre la porte de la "décomposition" de Jordan.

Dans ce livre, le but de Claude Chevalley n'est pas d'écrire la matrice sous une «forme aussi simple que possible» comme le recherchait Camille Jordan ([18], p.114). Il utilise ce théorème de décomposition afin de pouvoir démontrer le théorème final de l'ouvrage, théorème 18 page 184, sur les groupes algébriques linéaires :

«Tout groupe algébrique d'automorphismes de V qui contient s contient aussi u et v ».

(avec $s = uv$, u et v étant les composantes semi-simple et unipotente de l'automorphisme s , V étant un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K de caractéristique 0).

Donnons maintenant quelques repères pour situer le devenir de ces deux théorèmes.

Dès 1956, Armand Borel écrit un important article sur les groupes algébriques [1]. A la première page de l'introduction, on lit :

«On sait que tout automorphisme g d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps parfait k s'écrit d'une façon et d'une seule comme produit $g_s.g_u$ d'un automorphisme g_s semi-simple (i.e. à diviseurs élémentaires) et d'un automorphisme g_u unipotent (i.e. à valeurs propres égales à 1) commutant entre eux.»

Comme chez Claude Chevalley, dans ce contexte des groupes algébriques, la "décomposition de Jordan" (écrite ici sous forme multiplicative et pour les automorphismes) prime. Un des théorèmes centraux de l'article d'Armand Borel (théorème 8-4 page 47) n'est autre que le théorème 18 de Claude Chevalley sur les groupes algébriques donné plus haut. Et Armand Borel cite en référence Claude Chevalley [6].

Un peu plus tard, le théorème de "décomposition de Jordan" apparaît à nouveau dans le texte du Séminaire dirigé par Claude Chevalley à l'École Normale Supérieure (années universitaires 56/57 et 57/58 dans une partie rédigée par Alexandre Grothendieck). On peut y lire pages 47-48 de [7] :

«Rappelons le fait bien connu : x peut se mettre de façon unique sous la forme x_s+x_n , somme d'un endomorphisme semi-simple x_s et d'un endomorphisme nilpotent x_n qui commutent (appelés partie semi-simple et partie nilpotente de x).»

C'est bien le même énoncé que celui de Claude Chevalley dans [6], x étant un endomorphisme de V , espace vectoriel de dimension finie. La forme multiplicative pour un automorphisme apparaît quelques lignes plus loin. Le texte du Séminaire Chevalley, suscitant un grand intérêt dans la communauté mathématique (*Avertissement au lecteur* [7]), a été réédité en 2005.

Ainsi, peu à peu, c'est sous cette forme que le "théorème de Jordan" va devenir référence et prendre le nom de Jordan-Chevalley quand il en est question dans la théorie des groupes algébriques. C'est ce que l'on peut voir par exemple dans les ouvrages de James E. Humphreys ([16], [17]). En particulier, dans le deuxième, *Linear algebraic groups*, c'est tout le paragraphe reprenant les théorèmes 7 et 18 de Claude Chevalley qui prend le nom de « Jordan-Chevalley Decomposition ».

Une autre raison de notre dénomination de "théorème de Jordan-Chevalley" se trouve dans le livre *Théorie des groupes de Lie Tome II* de Claude Chevalley. Revenons sur quelques éléments de la démonstration du théorème 7 telle qu'elle y est présentée. Pour la lire, nous avons besoin de connaître la construction du polynôme f , donnée par Claude Chevalley dans la proposition 5 qui précède le théorème 7 :

« Soit X un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps parfait k . Pour que X soit semi-simple, il faut et il suffit qu'il existe un polynôme f à coefficients dans k , relativement premier à son polynôme dérivé, tel que $f(X) = 0$. »

Un endomorphisme semi-simple est donc caractérisé comme dans notre définition 1, Claude Chevalley se plaçant, comme nous l'avons vu, dans le cas où X est un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps parfait k , cadre moins général que celui de notre deuxième partie.

En suivant la démonstration proposée par Claude Chevalley dans [6], on y retrouve le fil conducteur des démonstrations ultérieures, comme celle de notre théorème 1.

Dans le texte de C. Chevalley, on suppose connu un polynôme F à coefficients dans k , tel que $F(X) = 0$ (par exemple le polynôme caractéristique de X). Et on lit :

« Écrivons $F = cF_1^{e_1} \dots F_h^{e_h}$ où $c \in K$, F_1, \dots, F_h sont des polynômes irréductibles relativement premiers entre eux deux à deux, et e_1, \dots, e_h des exposants > 0 . Soit $f = F_1 \dots F_h$ et soit e le plus grand des exposants e_i ($1 \leq i \leq h$). Le polynôme f^e est alors divisible par F d'où $(f(X))^e = 0$. »

Le polynôme f est tout simplement notre polynôme \tilde{p} .

Puis, dans cette démonstration, Claude Chevalley construit explicitement le polynôme à une variable U , noté $s^m(U)$ dans son texte, tel que $s^m(U)(X)$ soit la partie diagonalisable (ou semi-simple) de l'endomorphisme X . C'est ce schéma de démonstration que l'on retrouve dans les constructions de polynômes amenant à la décomposition de Jordan, comme celle exposée dans le théorème 1 de l'article. Ces constructions s'appuient sur la "méthode de Newton" et aboutissent pour nous à la construction de d_N , partie semi-simple de la décomposition de u , u étant un élément séparable de l'algèbre A .

Ce rapide détour par la démonstration de 1951 met en lumière le rôle de Claude Chevalley et permet de confirmer la dénomination "théorème de Jordan-Chevalley".

Certes, en 1951, dans son livre, Claude Chevalley ne s'arrête pas sur le fait que f , que nous avons noté \tilde{p} , peut se calculer sans connaître les valeurs propres de l'endomorphisme X . La méthode, que nous avons détaillée précédemment, s'appuie sur le calcul de f (ou \tilde{p}) avec $\tilde{p} = \frac{p}{\text{pgcd}(p,p')}$ où p est le polynôme caractéristique de X . Si la forme du polynôme f se trouve bien chez Claude Chevalley, il ne l'utilise pas dans ce but.

On peut noter par ailleurs que la démonstration qui nous intéresse aujourd'hui n'est reprise, ni par Armand Borel, ni par Alexandre Grothendieck, ni par J.E. Humphreys quand ils travaillent sur les groupes algébriques. L'ouvrage *Théorie des groupes de Lie Tome II* n'était pas destiné à l'enseignement en premier cycle.

6 Quelques aspects de la décomposition multiplicative de Jordan-Chevalley dans les groupes de Lie semi-simples

La décomposition de Jordan joue bien sûr un rôle important dans la théorie des groupes et algèbres de Lie, pour laquelle nous renvoyons à [15], [28]. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple réelle ou complexe, soit $Der(\mathfrak{g})$ l'ensemble des dérivations de \mathfrak{g} , c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes D de \mathfrak{g} vérifiant l'identité $D([Y, Z]) = [D(Y), Z] + [Y, D(Z)]$, et pour $X \in \mathfrak{g}$ soit $ad(X) : Y \rightarrow [X, Y]$ la dérivation associée à X . Comme \mathfrak{g} est semi-simple, la représentation adjointe $X \rightarrow ad(X)$ est un isomorphisme de \mathfrak{g} sur $Der(\mathfrak{g})$. De plus, Claude Chevalley a montré dans [6], corollaire du théorème 16 que

la partie semi-simple et la partie nilpotente de la décomposition de Jordan d'une dérivation sur une algèbre réelle ou complexe A , non nécessairement associative, sont des dérivations sur A . On déduit alors du théorème de décomposition de Jordan que pour tout $X \in \mathfrak{g}$ il existe un unique couple (S, N) d'éléments de \mathfrak{g} tels que $ad(S)$ soit semi-simple, $ad(N)$ nilpotent et $[S, N] = 0$, voir [28], théorème 3.10.6.

Soit G un groupe de Lie semi-simple réel ou complexe d'unité 1_G , soit G_0 la composante connexe de 1_G dans G , soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G , identifiée à l'espace tangent à G en 1_G , et soit $\mathfrak{Aut}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des isomorphismes linéaires θ de \mathfrak{g} vérifiant $\theta([X, Y]) = [\theta(X), \theta(Y)]$ pour $X, Y \in \mathfrak{g}$. Pour $g \in G$ soit $Ad(g) \in \mathfrak{Aut}(\mathfrak{g})$ la différentielle en 1_G de l'automorphisme de conjugaison $\phi_g : a \rightarrow gag^{-1}$. La représentation adjointe $g \rightarrow Ad(g)$ de G n'est en général pas injective, puisque son noyau est le centralisateur $\{g \in G \mid ag = ga \forall a \in G_0\}$ de G_0 dans G . On dira que $g \in G$ est *semi-simple* si $Ad(g)$ est un endomorphisme semi-simple de G , et on dira que $g \in G$ est *unipotent* si $g = \exp(X)$, ce qui donne $Ad(g) = \exp(ad(X))$, où $X \in \mathfrak{g}$ est tel que $ad(X)$ soit nilpotent.

Soit maintenant G un groupe de Lie semi-simple complexe. Comme $\mathfrak{Aut}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe algébrique du groupe des automorphismes linéaires de \mathfrak{g} , il résulte du théorème 18 de [6] cité plus haut qu'il existe un couple unique (S, U) d'éléments de $\mathfrak{Aut}(\mathfrak{g})$ vérifiant $Ad(g) = US = SU$ tels que S (resp. U) soit un endomorphisme semi-simple (resp. unipotent) de \mathfrak{g} . Posons $N = U - I$, et $N_0 = \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^{n+1} \frac{N^n}{n}$, de sorte que N et N_0 sont nilpotents. Comme $\exp(tN_0)$ est un polynôme en t , et comme $\exp(N_0) = U$, on a $\exp(tN_0) \in \mathfrak{Aut}(\mathfrak{g})$ pour $t > 0$, ce qui implique que $N_0 \in Der(\mathfrak{g})$, voir [28], Chap. 2, exercice 21, et il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que $N_0 = ad(X)$, d'où $U = Ad(\exp(X))$, $S = Ad(g \exp(-X))$. On voit donc que *tout élément d'un groupe de Lie semi-simple complexe s'écrit comme produit d'un élément semi-simple et d'un élément unipotent du groupe qui commutent entre eux* et on vérifie que cette décomposition est unique.

On obtient un résultat analogue pour un groupe de Lie semi-simple réel en introduisant la complexifiée de son algèbre de Lie. Nous énonçons un résultat plus précis pour un groupe de Lie réel semi-simple et connexe G . On dit que $g \in G$ est elliptique si les valeurs propres de $Ad(g)$, considéré comme endomorphisme de la complexifiée de l'algèbre de Lie de \mathfrak{g} de G , sont de module 1, et on dira que $g \in G$ est hyperbolique s'il existe $X \in \mathfrak{g}$, dont l'adjoint $ad(X)$ est diagonalisable sur l'espace vectoriel réel \mathfrak{g} , tel que $g = \exp(X)$.

On a alors le résultat suivant, voir l'article de Bertram Kostant [21]

Théorème 2. *Soit G un groupe de Lie réel semisimple et connexe. Alors tout élément g de G se décompose de manière unique sous la forme*

$$g = ehv$$

où e, h, v sont des éléments respectivement elliptiques, hyperboliques et unipotents de G qui commutent entre eux.

Autrement dit la partie semi-simple de d de g , dont l'adjoint est diagonalisable sur la complexifiée de \mathfrak{g} , se décompose en produit d'un élément elliptique et d'un élément hyperbolique de G qui commutent entre eux, et on obtient pour les groupes de Lie semi-simples connexes une "décomposition de Jordan multiplicative complète" analogue à la décomposition de Jordan multiplicative complète usuelle dans $GL(n, \mathbb{R})$, donnée par exemple dans [15], lemme 7.1. On trouve dans le théorème 7.2 de [15], le lien classique entre ellipticité, hyperbolicité et nilpotence et décompositions d'Iwasawa³

Pour conclure cette brève discussion historique nous mentionnons un résultat très récent qui concerne les groupes de Lie réels semi-simples linéaires, c'est-à-dire les groupes de Lie réels semi-simples qui sont des sous-groupes fermés de $GL(n, \mathbb{R})$. Soit G un groupe localement compact, soit Γ un sous-groupe discret de G , soit $\Gamma \backslash G$ l'ensemble des classes à droite modulo Γ , muni de la topologie quotient, soit $\mathcal{C}_c(G)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur G , et soit μ une mesure de Haar à gauche sur G . On peut définir une mesure positive G -invariante ν sur $\Gamma \backslash G$ par la formule

$$\int_{\Gamma \backslash G} \tilde{f}(\eta) d\nu(\eta) = \int_{g \in G} f(g) d\mu(g) \quad (f \in \mathcal{C}_c(G)),$$

où $\tilde{f}(\Gamma x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma x)$ pour $x \in G$ (l'ouvrage de Lynn Loomis [23], accessible en ligne, reste une bonne référence pour les mesures invariantes sur les groupes quotient).

On dit que le groupe discret Γ est un *réseau* de G si Γ est de covolume fini, c'est-à-dire si $\int_{\Gamma \backslash G} d\nu(\eta) < +\infty$,

3. La "décomposition d'Iwasawa", notée $G = KAN$, décompose un groupe de Lie semi-simple en produit d'un sous-groupe compact maximal K , d'un sous-groupe de Cartan A , sous-groupe de Lie correspondant à une sous-algèbre de Lie commutative maximale \mathfrak{h} , et d'un groupe nilpotent N ; ainsi par exemple pour $GL(n, \mathbb{R})$, K est le groupe orthogonal, A le sous-groupe formé des matrices diagonales et N le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1.

N.T. Venkataramana a montré en 2008 dans [29] que si Γ est un réseau d'un groupe de Lie linéaire semi-simple réel G , et si $\gamma \in \Gamma$, alors la partie semi-simple s et la partie unipotente u de la décomposition de Jordan multiplicative de γ vérifient $s^m \in \Gamma$ et $u^m \in \Gamma$ pour un certain entier $m \geq 1$, résultat qui était classique pour les sous-groupes "arithmétiques" de G . Si de plus le "rang réel" de G est égal à 1, et si $u \neq 1$, alors il existe $n \geq 1$ tel que $s^n = 1_G$. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Gregori Margulis [25] pour une présentation générale de la théorie des réseaux dans les groupes de Lie.

7 Intérêt pédagogique de la décomposition effective

Si on réfléchit bien, en dehors de ce qui a trait aux opérateurs normaux, il y a deux applications principales d'un cours d'algèbre linéaire générale au niveau L2/L3.

1. Le calcul des puissances d'une matrice carrée A
2. Le calcul des exponentielles e^{tA} pour la résolution des systèmes linéaires $Y'(t) = AY(t) + B(t)$, en utilisant la formule

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}Y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s)ds.$$

La décomposition de Jordan permet de se ramener pour ces deux calculs au cas des matrices diagonalisables, puisque la partie diagonalisable D et la partie nilpotente N de A commutent. On a alors

$$A^m = \sum_{j=0}^{\inf(k,m)} C_m^j D^{m-j} N^j,$$

$$e^{tA} = e^{tD} e^{tN} = e^{tD} \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} N^j,$$

où $k \geq 0$ désigne le plus petit entier tel que $N^{k+1} = 0$.

Comme l'unicité de la décomposition implique que les parties diagonalisables et nilpotentes d'une matrice à coefficients réels sont à coefficients réels,

on voit aussi que le fait que les matrices réelles symétriques sont diagonalisables sur \mathbb{R} découle directement du théorème de décomposition de Jordan : il suffit de vérifier que toute matrice réelle symétrique et nilpotente est nulle.

Ces considérations, issues de discussions sur le rôle de la décomposition de Jordan dans la théorie des groupes algébriques pendant la préparation de la thèse du premier auteur [8], avaient conduit le second auteur à donner à la décomposition de Jordan-Chevalley un rôle central dans son cours d'algèbre linéaire à l'Université Bordeaux 1 à la fin des années 80. Les mêmes raisons ont conduit à reprendre depuis 1997 ce point de vue dans le cours destiné aux élèves de première année de l'école d'ingénieurs ESTIA (Ecole Supérieure des Technologies Industrielles Avancées), située au Pays Basque sur la technopole Izarbel à Bidart, devant des promotions d'étudiants d'origines diverses (dont les effectifs en 1^e année ont progressé de 19 étudiants en 1997 à plus de 150 à la rentrée 2010) et avec un horaire limité. La méthode basée sur l'algorithme de Newton est enseignée depuis 2006, suite à des discussions du troisième auteur avec des responsables de la préparation à l'Agrégation à Bordeaux qui avaient inclus cet algorithme dans [14].

La méthode de Newton, sous sa version numérique, est connue des élèves issus de la filière MP, mais elle est nouvelle pour la grande majorité des étudiants de 1^e année de l'ESTIA. Cette méthode permet bien sûr de faire un lien intéressant entre analyse et algèbre, et de citer dans un cours d'algèbre linéaire Héron d'Alexandrie, qui connaissait l'algorithme

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

qui permet avec $x_0 = 2$ de construire une suite convergeant rapidement vers $\sqrt{2}$, et n'est autre que l'algorithme obtenu par la méthode de Newton appliqué à la fonction $f : x \rightarrow x^2 - 2$. L'algorithme de Newton donne aussi une bonne occasion de faire faire aux étudiants l'exercice de programmation simple permettant de faire le calcul effectif de la décomposition de Jordan-Chevalley sur d'assez grosses matrices.

La méthode basée sur le théorème chinois présente un intérêt propre, car le théorème chinois est un résultat qui passe assez bien auprès des étudiants, et les deux méthodes fonctionnent évidemment très bien en dimension 2 ou 3. Pour le cas $n = 2$ le théorème chinois donne directement $D = \lambda I$ dans le cas d'une matrice U possédant une valeur propre double, et on a de même $D = \lambda I$ si $U \in \mathcal{M}_n(k)$ possède une valeur propre λ de multiplicité n . Dans le cas d'une matrice 3×3 possédant une valeur propre simple λ_1 et

En conclusion les auteurs sont convaincus que la décomposition de Jordan-Chevalley et son calcul effectif, loin d'être de simples exercices, doivent recevoir toute l'attention qu'ils méritent et en particulier jouer un rôle central dans le programme d'algèbre linéaire d'une licence de Mathématiques Fondamentales ou Appliquées.

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient Pierre de la Harpe, qui a attiré leur attention sur les travaux de Venkataramana, et dont les conseils ont permis d'améliorer sensiblement la présentation de cet article.

Références

- [1] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, 1991.
- [2] A. Borel, *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups*, History of Mathematics, vol. 21, American Math. Soc. and London Math. Soc., Providence R.I. and London, 2001.
- [3] A. Boyer et J. Risler, *Mathématiques pour la licence : Groupes, anneaux, corps*, Dunod, 2006.
- [4] N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques*, Hermann, 1970. ŐŐment
- [5] F. Brechenmacher, *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930)*, Thèse, Ecole des Hautes Etudes en Sciences sociales, Paris, 2006.
- [6] C. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie. Tome II. Groupes Algébriques*, Paris. Hermann 1951.
- [7] C. Chevalley, *Classification des Groupes Algébriques Semi-simples*, Collected works. Vol.3, Springer, 2005.
- [8] D. Couty, *Formes réduites des automorphismes analytiques de \mathbb{C}^n à variété linéaire fixe et répulsive*, Lecture Notes in Math, 1404, Springer, Berlin, 1989, 346-410.
- [9] J. Dieudonné, *Claude Chevalley*, Transformations Groups, 4 (1999), 105-118.
- [10] J. L. Ducourtioux, *La décomposition de Dunford*, Notes de cours (communication privée).

- [11] N. Dunford, *Spectral operators*, Pacific J. Math. **4** (1954), 321-354.
- [12] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators. Part III : Spectral Operators*, Interscience Publishers, New York, NY, USA, 1971.
- [13] D. Ferrand, *Une méthode effective pour la décomposition de Dunford*, Préparation à l'agrégation, Université de Rennes, 2003.
- [14] J. Fresnel, M. Matignon, *Algèbre et géométrie : Un recueil d'exercices*, Université Bordeaux I, 2006.
- [15] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric spaces*, Academic Press, New-York, San Francisco, London, 1978.
- [16] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, GTM 9, Springer, New-York, 1972.
- [17] J.E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate texts in Mathematics, vol. 21, Springer- Verlag, 1975.
- [18] C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris, 1870.
- [19] E.R. Kolchin, *Algebraic matrix groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear differential equations*, Ann. of Math. (2) **49** (1948),1-42.
- [20] E.R. Kolchin, *On certain concepts in the theory of algebraic matrix groups*, Ann. of Math.(2) **49** (1948), 774-789.
- [21] B. Kostant, *On convexity, the Weyl group and the Iwasawa decomposition*, Ann. sci. ENS 6 (1973), 413-455.
- [22] S. Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1965.
- [23] L. Loomis, em *Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, 1953.
- [24] C.C. Mac Duffee, *Vectors and Matrices*, The Mathematical Association of America, The collegiate Press : Menasha, Wisconsin, 1943.
- [25] G. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Erg. der Math. 17. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [26] C. Picaronny, *Effectivité de la décomposition de Dunford*, Préparation à l'agrégation 2006/2007, ENS Cachan, Cours d'algèbre.
- [27] H.W. Turnbull and A.C. Aitken, *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*, Blackie and Son, London and Glasgow, 1932.
- [28] V.S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras and their representations*, Graduate Texts in Mathematics 102, Springer-Verlag, 1984.

- [29] T.N. Venkataramana, *Jordan decomposition in lattices and quasi unipotence of monodromy*, Pure and Applied Mathematics Quarterly, 4 (2008), 167-179.