



HAL
open science

Comparaison des formes de Seifert et des fonctions zeta de Denef-Loeser des germes de courbe plane à singularité isolée

Philippe Du Bois

► **To cite this version:**

Philippe Du Bois. Comparaison des formes de Seifert et des fonctions zeta de Denef-Loeser des germes de courbe plane à singularité isolée. 2010. hal-00525112

HAL Id: hal-00525112

<https://hal.science/hal-00525112v1>

Preprint submitted on 11 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comparaison des formes de Seifert et des fonctions zêta de Denef-Loeser des germes de courbe plane à singularité isolée

PHILIPPE DU BOIS

LAREMA - UMR 6093 - Faculté des Sciences, Université d'Angers
2, Boulevard Lavoisier - 49045 Angers - France
philippe.dubois (at) univ-angers.fr

Résumé. Nous démontrons que la donnée de la forme de Seifert entière et de la fonction zêta de Denef-Loeser d'un germe de courbe plane à singularité isolée ne déterminent pas le type topologique de ce germe. De plus, la fonction zêta de Denef-Loeser d'un tel germe ne détermine pas la forme de Seifert entière associée.

Abstract. We show that the topological type of a plane curve germ with isolated singularity is not determined by its integral Seifert form and Denef-Loeser zeta function. Furthermore, the integral Seifert form of such a germ is not determined by its Denef-Loeser zeta function.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 14B05, 32S50, 32S55.

Keywords: Milnor fiber. Plane curve germs. Seifert form. Topological zeta function.

0. Introduction. Le but de cette note est la comparaison de deux invariants associés aux germes de courbe plane à singularité isolée, la forme de Seifert entière et la fonction zêta de Denef-Loeser.

Soient $f : (\mathbf{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction analytique à singularité isolée, F la fibre de Milnor de f , h une monodromie géométrique de F , h^* le morphisme induit par h sur $H_n(F, \mathbf{Z})$. La *forme de Seifert entière* de f , notée $A(f)$, est la forme bilinéaire définie sur le \mathbf{Z} -module libre $H_n(F, \mathbf{Z})$ par $A(f)(\alpha, \beta) = \mathcal{L}(i_+(\alpha), \beta)$, où $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ est le nombre d'enlacement dans la sphère S_ε^{2n+1} et $i_+(\alpha)$ est le cycle obtenu en poussant α hors de F dans une direction normale positive induite par l'orientation de F . La forme de Seifert entière est un invariant du type topologique de la singularité du germe f .

En grande dimension, c'est-à-dire pour $n \geq 3$, la forme de Seifert entière est un invariant complet du type topologique. Dans le cas des germes de courbe plane (le cas $n = 1$), l'auteur et F. Michel ont montré que la forme de Seifert entière n'est pas un invariant complet, voir [D-M2].

La fonction zêta topologique (locale) d'un germe de fonction analytique complexe est un invariant introduit par J. Denef et F. Loeser dans [D-L]. Nous appellerons cette fonction la *fonction zêta de Denef-Loeser* du germe.

Dans le cas des germes de courbe plane, cette fonction a été étudiée en particulier par W. Veys, voir par exemple [V1] et [V2]. La formule de Veys rappelée dans la proposition 1.1 montre que la fonction zêta de Denef-Loeser est un invariant du type topologique de la singularité du germe de courbe plane f .

En revanche, en grande dimension ($n \geq 3$), la fonction zêta de Denef-Loeser n'est pas un invariant topologique de la singularité. Ce résultat est dû à E. Artal, P. Cassou-

Noguès, I. Luengo et A. Melle [A-C-L-M]. Pour cela, ils considèrent deux germes de courbes planes dont les formes de Seifert entières sont isomorphes (les germes construits dans [D-M2] mentionnés plus haut). Ils montrent que les fonctions zêta associées sont distinctes et concluent en procédant à une double suspension.

Il est donc naturel de se demander si la donnée de la forme de Seifert entière et de la fonction zêta de Denef-Loeser d'un germe de courbe plane à singularité isolée détermine le type topologique de ce germe. Nous démontrons ici que la réponse à cette question est négative, en construisant des paires de germes de courbe plane f' et f'' , à singularité isolée, de types topologiques distincts, qui ont la même fonction zêta de Denef-Loeser et dont les formes de Seifert entières sont isomorphes, voir le théorème 3.1.

Nous construisons ensuite des paires de germes de courbe plane g' et g'' , à singularité isolée, de types topologiques distincts, qui ont la même fonction zêta de Denef-Loeser et dont les formes de Seifert entières ne sont pas isomorphes, voir le théorème 3.3 et la proposition 3.2 pour des énoncés précis. Ainsi, la fonction zêta de Denef-Loeser d'un germe de courbe plane à singularité isolée ne détermine pas la forme de Seifert entière associée.

On établit au passage une formule explicite qui permet le calcul des multiplicités ν_i intervenant dans le calcul de la fonction zêta, en fonction des paires de Zariski du germe étudié, voir les propositions 1.3 et 1.4.

Les germes f' et f'' (resp. g' et g'') sont construits en ajoutant des paires de Zariski à un germe f (resp. g) que nous définirons dans un premier temps.

1. Notations et rappels. Soit $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ un germe de courbe plane à singularité isolée. Soit (X, h) la résolution minimale de $f^{-1}(0)$ en 0. Nous notons E_i , $i \in T = T_e \cup T_s$ les composantes irréductibles de $h^{-1}(f^{-1}(0))$, où E_i est une courbe exceptionnelle pour $i \in T_e$ et une composante irréductible de la transformée stricte de $f^{-1}(0)$ pour $i \in T_s$. Pour $i \in T_e$, nous posons $\overset{\circ}{E}_i = E_i \setminus \bigcup_{j \neq i} (E_j \cap E_i)$. Les multiplicités de E_i dans les diviseurs de $f \circ h$ et de $h^*(dx \wedge dy)$ sur X sont notées respectivement N_i et $\nu_i - 1$. On a $N_i \geq 1$, $\nu_i \geq 1$ et $(N_i, \nu_i) = (1, 1)$ pour $i \in T_s$.

Nous noterons enfin $T(f)$ l'arbre dual de désingularisation de f . Les sommets de $T(f)$ sont les points de T ; dans les figures qui suivent, un sommet est représenté par un \bullet si $i \in T_e$ et par une extrémité de flèche si $i \in T_s$; les sommets i et j sont joints par une arête de $T(f)$ si et seulement si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$.

Proposition 1.1. *Avec les mêmes notations, la fonction zêta de Denef-Loeser de f est donnée par*

$$Z_f(s) = \sum_{i \in T_e} \frac{\chi(\overset{\circ}{E}_i)}{\nu_i + sN_i} + \sum_{(i,j) \subset T} \frac{\chi(E_i \cap E_j)}{(\nu_i + sN_i)(\nu_j + sN_j)}.$$

Démonstration. Cette formule est due à W. Veys, voir [V1, 2.2]. □

Proposition 1.2. (Règles de calcul des N_i et ν_i). Les nombres N_1 et ν_1 associés au sommet #1 qui apparaît le premier lors de la désingularisation par éclatements successifs sont $N_1 = \text{mult}_0(f)$ (multiplicité de f en 0) et $\nu_1 = 2$. Soit E_i une composante du diviseur exceptionnel obtenue par éclatement d'un point P_i . Notons $\mathcal{P}(i)$ l'ensemble des indices j tels que $P_i \in E_j$ avant l'éclatement et $f^{(i)}$ le germe définissant les composantes de la transformée stricte de $f^{-1}(0)$ qui passent par P_i avant l'éclatement de P_i . On a alors, $\text{card}(\mathcal{P}(i)) \leq 2$ et

$$N_i = \text{mult}_{P_i}(f^{(i)}) + \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} N_j \quad \text{et} \quad \nu_i = 2 + \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} (\nu_j - 1)$$

ou encore, si $\mathcal{P}(i) = \{j'(i)\}$, $\nu_i = 1 + \nu_{j'(i)}$ et, si $\mathcal{P}(i) = \{j'(i), j''(i)\}$, $\nu_i = \nu_{j'(i)} + \nu_{j''(i)}$.

Démonstration. Ces égalités proviennent d'un calcul élémentaire en coordonnées locales. \square

Proposition 1.3. (Calcul de ν_i pour une première paire de Zariski). Soit $f = f_1 \cdots f_k : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ un germe de courbe plane à singularité isolée, où les germes f_1, \dots, f_k sont irréductibles. Soient $p_1/q_1, \dots, p_g/q_g$ les paires de Zariski dans le développement de Puiseux de f_1 . Soit $i(1) \in T_e$ le sommet (de rupture) de $T(f)$ associé à la paire p_1/q_1 . On a alors

$$\nu_{i(1)} = p_1 + q_1.$$

Démonstration. Il est facile de voir que le calcul de $\nu_{i(1)}$ ne dépend que de la composante irréductible f_1 du germe f .

Le début de la désingularisation du germe f_1 (jusqu'au diviseur représenté dans $T(f)$ par le sommet de rupture associé à la paire p_1/q_1) utilise la suite $(\text{apl}(i))_{i \in \mathbf{N}}$ des approximations lentes du développement en fraction continue de p_1/q_1 .

Les tableaux suivants donnent successivement les approximations lentes $\text{apl}(i)$ (rangées dans l'ordre croissant), les numéros d'apparition # i de la composante E_i du diviseur exceptionnel et les valeurs de ν_i .

Premier cas : $\frac{p_1}{q_1} = [h_0, h_1] := h_0 + \frac{1}{h_1} = \frac{h_0 h_1 + 1}{h_1}$.

$\text{apl}(i)$	1	2	...	h_0	$h_0 + \frac{1}{h_1}$...	$h_0 + \frac{1}{3}$	$h_0 + \frac{1}{2}$	$h_0 + 1$
$\#i$	1	2	...	h_0	$h_0 + h_1$...	$h_0 + 3$	$h_0 + 2$	$h_0 + 1$
ν_i	2	3	...	$h_0 + 1$	$h_0 h_1 + h_1 + 1$...	$3h_0 + 4$	$2h_0 + 3$	$h_0 + 2$

$$\text{Deuxième cas : } \frac{p_1}{q_1} = [h_0, h_1, h_2] := h_0 + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2}} = \frac{h_0 h_1 h_2 + h_0 + h_2}{h_1 h_2 + 1}.$$

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{apl}(i) & 1 & \dots & h_0 & h_0 + \frac{1}{h_1 + 1} & \dots & h_0 + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2}} & h_0 + \frac{1}{h_1} & \dots & h_0 + 1 \\ \#i & 1 & \dots & h_0 & h_0 + h_1 + 1 & \dots & h_0 + h_1 + h_2 & h_0 + h_1 & \dots & h_0 + 1 \\ \nu_i & 2 & \dots & h_0 + 1 & h_0 + 1 + \frac{h_0 h_1 + h_1 + 1}{h_1 + 1} & \dots & h_0 + 1 + \frac{h_2(h_0 h_1 + h_1 + 1)}{h_1 + 1} & h_0 h_1 + \frac{h_0 + h_2}{h_1 + 1} & \dots & h_0 + 2 \end{array}$$

Dans le premier cas, on trouve que $\nu_{i(1)} = h_0 h_1 + h_1 + 1 = p_1 + q_1$, en se rappelant que les deux écritures de la fraction p_1/q_1 sont irréductibles. Dans le deuxième cas, pour la même raison, $\nu_{i(1)} = h_0 + 1 + h_2(h_0 h_1 + h_1 + 1) = h_0 h_1 h_2 + h_0 + h_2 + h_1 h_2 + 1 = p_1 + q_1$. Dans le cas général, on a

$$\frac{p_1}{q_1} = [h_0, h_1, h_2, \dots, h_g] := h_0 + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \frac{\dots}{h_{g-1} + \frac{1}{h_g}}}}.$$

Introduisons les approximations rapides de la fraction continue p_1/q_1 :

$$\frac{p_{1,0}}{q_{1,0}} = [h_0], \quad \frac{p_{1,1}}{q_{1,1}} = [h_0, h_1], \quad \frac{p_{1,2}}{q_{1,2}} = [h_0, h_1, h_2], \quad \dots, \quad \frac{p_{1,g-1}}{q_{1,g-1}} = [h_0, h_1, h_2, \dots, h_{g-1}],$$

et notons $\nu_{h_0}, \nu_{h_0+h_1}, \nu_{h_0+h_1+h_2}, \dots, \nu_{i(1)} = \nu_{h_0+\dots+h_g}$ les valeurs de ν_i associées aux approximations rapides de p_1/q_1 (comme ci-dessus, les indices sont les numéros d'apparition des composantes du diviseur exceptionnel). Les calculs précédents montrent que les premières valeurs de ν_i sont successivement :

$$\nu_{h_0} = h_0 + 1 = p_{1,0} + q_{1,0}, \quad \nu_{h_0+h_1} = h_0 h_1 + h_1 + 1 = p_{1,1} + q_{1,1},$$

$$\nu_{h_0+h_1+h_2} = h_0 + 1 + h_2(h_0 h_1 + h_1 + 1) = p_{1,2} + q_{1,2},$$

et que, pour tout $j, 2 \leq j \leq g$, on a :

$$\nu_{h_0+\dots+h_j} = \nu_{h_0+\dots+h_{j-2}} + h_j \nu_{h_0+\dots+h_{j-1}}.$$

Mais les numérateurs et dénominateurs des approximations rapides de p_1/q_1 vérifient les relations de récurrence suivantes, pour tout $j, 2 \leq j \leq g$,

$$p_{1,j} = p_{1,j-2} + h_j p_{1,j-1} \quad \text{et} \quad q_{1,j} = q_{1,j-2} + h_j q_{1,j-1},$$

ceci montre que, pour tout $j, 2 \leq j \leq g$, $\nu_{h_0+\dots+h_j} = p_{1,j} + q_{1,j}$ et, en particulier, $\nu_{i(1)} = p_1 + q_1$. \square

Proposition 1.4. (Calcul de ν_i pour un sommet de rupture de $T(f)$). Soit f_1 une branche du germe f , soient $p_1/q_1, \dots, p_{r-1}/q_{r-1}, p_r/q_r, \dots, p_g/q_g$ les paires de Zariski de f_1 . Soient $i(r)$ le sommet de rupture de $T(f)$ associé à la paire de Zariski p_r/q_r , $r > 1$, de la branche f_1 de f et $\nu_{i(r-1)}$ le nombre ν associé à la paire de Zariski p_{r-1}/q_{r-1} de la branche f_1 . On a alors

$$\nu_{i(r)} = p_r + q_r \nu_{i(r-1)}.$$

Démonstration. Posons $\nu' = \nu_{i(r-1)}$, $p_r/q_r = [h_0, h_1, \dots, h_s] = h_0 + \frac{1}{h_1 + \frac{\dots}{h_{s-1} + \frac{1}{h_s}}}$ et

$$\bar{p}_r/q_r = [h_0 + (\nu' - 1), h_1, \dots, h_s] = h_0 + (\nu' - 1) + \frac{1}{h_1 + \frac{\dots}{h_{s-1} + \frac{1}{h_s}}}. \text{ Le calcul des nombres}$$

ν associés aux sommets de l'arbre de désingularisation de f_1 , au-delà du sommet de rupture $i(r-1)$ coïncide avec le calcul des nombres ν associés aux sommets de l'arbre de désingularisation d'un germe irréductible \bar{f} dont les paires de Zariski sont $\bar{p}_r/q_r, \dots, p_g/q_g$, au-delà du sommet dont le nombre ν est ν' . Nous trouvons donc la formule indiquée :

$$\nu_{i(r)} = \bar{p}_r + q_r = p_r + (\nu' - 1)q_r + q_r = p_r + q_r \nu' = p_r + q_r \nu_{i(r-1)}.$$

□

2. Construction des germes f, f', f'', g, g', g'' .

2.1. Les germes f . Nous considérons les germes de courbe plane à singularité isolée f à deux branches transverses dont la première branche a pour paires de Zariski $3/2$ et p/q et la seconde $5/2$ et r/s , où p, q, r, s sont des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $\text{pgcd}(p, q) = \text{pgcd}(r, s) = 1$. Par exemple, on peut prendre pour f le germe dont les branches ont pour développements de Zariski

$$\varphi_1(x) = x^{3/2}(1 + x^{p/2q}) \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = x + x^{5/2}(1 + x^{r/2s}),$$

L'arbre de désingularisation $T(f)$ du germe f a la forme indiquée Figure 1 (les sommets de valence un ou trois sont notés respectivement B_i ou A_i , les sommets de valence deux sont omis, sauf le sommet #1 associé à la composante du diviseur exceptionnel qui apparaît en premier lors de la désingularisation).

Proposition 2.1. Notons m_i les multiplicités des composantes du diviseur exceptionnel et ν_i les nombres associés aux sommets A_i de l'arbre $T(f)$. On a alors $m_3 = m_4$ et $\nu_3 = \nu_4$ si et seulement si p, q, r, s vérifient les égalités

$$\begin{cases} q(6q + 4s + p) & = & s(4q + 10s + r) \\ 5q + p & = & 7s + r \end{cases}$$

Ces égalités et les conditions $\text{pgcd}(p, q) = \text{pgcd}(r, s) = 1$ sont vérifiées par $(p, q, r, s) = (24, 7, 17, 6)$. On a alors $m_3 = m_4 = 630$ et $\nu_3 = \nu_4 = 59$. Plus généralement, ces

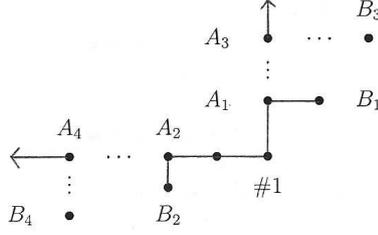


Figure 1: $T(f)$

égalités et les conditions $\text{pgcd}(p, q) = \text{pgcd}(r, s) = 1$ sont vérifiées pour tout s , $s > 5$ et $s \not\equiv 2 \pmod{3}$, par

$$(p, q, r, s) = (2s^2 - 7s - 6, s + 1, 2s^2 - 9s - 1, s).$$

Démonstration. D'après les propositions **1.2**, **1.3** et **1.4**, les multiplicités m_i des composantes du diviseur exceptionnel et les nombres ν_i associés aux sommets A_i de l'arbre $T(f)$ sont donnés par le tableau suivant :

A_i	A_1	A_2	A_3	A_4
m_i	$6q + 4s$	$4q + 10s$	$q(6q + 4s + p)$	$s(4q + 10s + r)$
ν_i	5	7	$5q + p$	$7s + r$

Ceci donne le résultat indiqué. □

2.2 Les germes f' et f'' et leurs arbres de désingularisation. Nous considérons les germes f' et f'' dont les branches ont les développements de Puiseux φ'_1, φ'_2 et φ''_1, φ''_2 suivants :

$$\begin{aligned} \varphi'_1(x) &= x^{3/2}(1 + x^{p/2q}(1 + x^{1/4q})), & \varphi'_2(x) &= x + x^{5/2}(1 + x^{r/2s}(1 + x^{3/4s})), \\ \varphi''_1(x) &= x^{3/2}(1 + x^{p/2q}(1 + x^{3/4q})), & \varphi''_2(x) &= x + x^{5/2}(1 + x^{r/2s}(1 + x^{1/4s})). \end{aligned}$$

Les arbres de désingularisation $T(f')$ et $T(f'')$ des germes f' et f'' ont la forme indiquée Figure 2.

Proposition 2.2 Avec les notations de la proposition **2.1**, les multiplicités N_i des composantes du diviseur exceptionnel et les nombres ν_i sont donnés par les tableaux suivants, successivement pour f' et pour f'' :

i	A_3	B_5	A_5	A_4	C'	B_6	A_6
$N_i(f')$	$2m_3$	$2m_3 + 1$	$4m_3 + 2$	$2m_4$	$2m_4 + 2$	$2m_4 + 3$	$4m_4 + 6$
$\nu_i(f')$	ν_3	$\nu_3 + 1$	$2\nu_3 + 1$	ν_4	$\nu_4 + 1$	$\nu_4 + 2$	$2\nu_4 + 3$
i	A_3	C''	B_5	A_5	A_4	B_6	A_6
$N_i(f'')$	$2m_3$	$2m_3 + 2$	$2m_3 + 3$	$4m_3 + 6$	$2m_4$	$2m_4 + 1$	$4m_4 + 2$
$\nu_i(f'')$	ν_3	$\nu_3 + 1$	$\nu_3 + 2$	$2\nu_3 + 3$	ν_4	$\nu_4 + 1$	$2\nu_4 + 1$

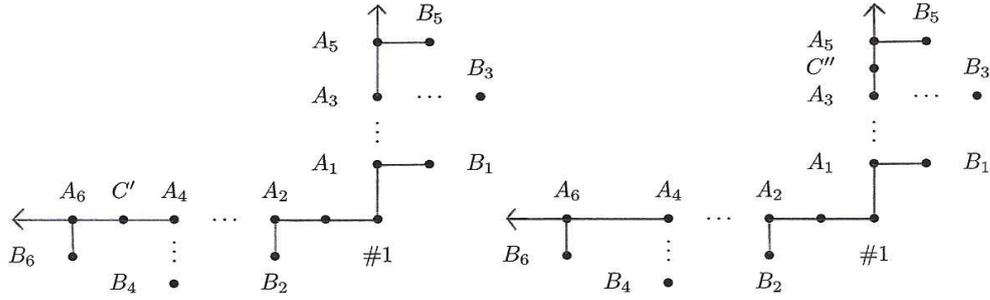


Figure 2: $T(f')$ $T(f'')$

On passe de $T(f)$ à $T(f')$ et $T(f'')$ en remplaçant les flèches portées par A_3 et A_4 par ce qui est indiqué par les figures. Les multiplicités des composantes du diviseur exceptionnel dans la partie de $T(f')$ ou $T(f'')$ reprise de $T(f)$ sont obtenues en multipliant par 2 celles des sommets correspondants de $T(f)$. Les nombres ν_i associés aux composantes du diviseur exceptionnel dans la partie de $T(f')$ ou $T(f'')$ reprise de $T(f)$ sont égaux à ceux des sommets correspondants de $T(f)$.

2.3. Les germes g . Nous considérons les germes de courbe plane à singularité isolée g définis par

$$g(x, y) = (x^a - y^b)(x^c - y^d)((y - x)^e - x^f),$$

où a, b, c, d, e, f sont des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que

$$\frac{e}{f} < 1 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(c, d) = \text{pgcd}(e, f) = 1.$$

L'arbre de désingularisation $T(g)$ du germe de courbe plane g a la forme indiquée Figure 3 (les sommets de valence trois ou un sont notés respectivement A_i ou B_i , les sommets de valence deux ne sont pas représentés en général).

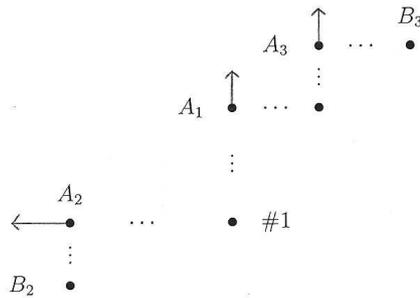


Figure 3: $T(g)$

Proposition 2.3. Notons n_0 la multiplicité du germe g , n_1 , n_2 et n_3 les multiplicités des composantes de valence 3 du diviseur exceptionnel de la désingularisation du

germe g rencontrant respectivement les transformées strictes des composantes $x^a - y^b$, $(y - x)^e - x^f$ et $x^c - y^d$. On a

$$n_0 = b + d + e, \quad n_1 = ab + ad + be, \quad n_2 = e(b + d + f), \quad n_3 = d(a + c + e).$$

De plus, les nombres ν_i associés aux sommets de rupture A_1, A_2, A_3 sont respectivement

$$\nu_1 = a + b, \quad \nu_2 = e + f, \quad \nu_3 = c + d.$$

Démonstration. Voir les propositions **1.2** et **1.3**. □

2.4 Les germes g' et g'' et leurs arbres de désingularisation. Nous supposons à partir d'ici que (a, b, c, d, e, f) vérifient les conditions données en **2.3** et les égalités $n_2 = n_3$ et $\nu_2 = \nu_3$. Pour simplifier les calculs des formes de Seifert, nous imposerons de plus que les pgcd des multiplicités le long des arêtes de l'arbre $T(g)$ soient égaux à 1. Toutes ces conditions sont vérifiées par $(a, b, c, d, e, f) = (11, 3, 14, 3, 5, 12)$.

Nous considérons les germes g' et g'' dont les branches ont les développements de Puiseux $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$ et $\gamma''_1, \gamma''_2, \gamma''_3$ suivants :

$$\gamma'_1(x) = x^{a/b}(1 + x^{1/2b}), \quad \gamma'_2(x) = x + x^{f/e}(1 + x^{3/2e}), \quad \gamma'_3(x) = x^{c/d}(1 + x^{1/2d}),$$

$$\gamma''_1(x) = x^{a/b}(1 + x^{1/2b}), \quad \gamma''_2(x) = x + x^{f/e}(1 + x^{1/2e}), \quad \gamma''_3(x) = x^{c/d}(1 + x^{3/2d}).$$

Nous avons donc ajouté à chaque branche de g une paire de Zariski de la façon suivante : dans le cas de g' , les paires de Zariski ajoutées sont $1/2, 1/2$ et $3/2$ pour les branches associées respectivement à $a/b, c/d$ et f/e ; dans le cas de g'' , les paires de Zariski ajoutées sont $1/2, 3/2$ et $1/2$ pour les branches associées respectivement à $a/b, c/d$ et f/e . Les arbres de désingularisation $T(g^\circ)$, où $^\circ = ' \text{ ou } ''$, des germes g'

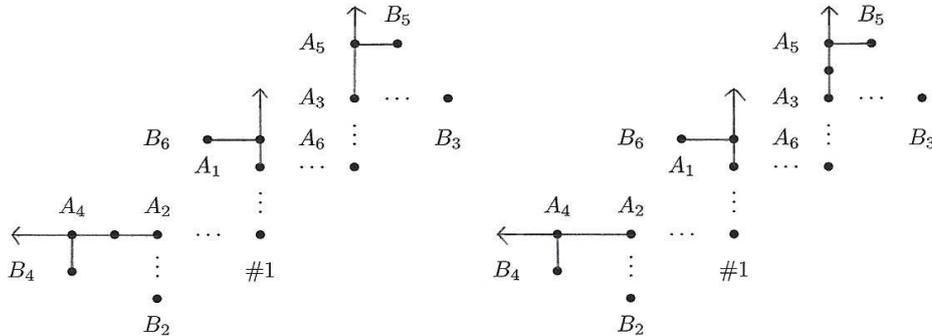


Figure 4: $T(g')$

$T(g'')$

et g'' ont la forme indiquée Figure 4 (les sommets de valence un ou trois sont notés respectivement B_i ou A_i , les sommets de valence deux sont omis en général). On passe de $T(g)$ à $T(g')$ et $T(g'')$ en remplaçant les flèches portées par A_1, A_2 et A_3 par ce qui

est indiqué par la figure. Les multiplicités des composantes du diviseur exceptionnel dans la partie de $T(g')$ ou $T(g'')$ reprise de $T(g)$ sont obtenues en multipliant par 2 celles des sommets correspondants de $T(g)$. Les nombres ν_i associés aux composantes du diviseur exceptionnel dans la partie de $T(g')$ ou $T(g'')$ reprise de $T(g)$ sont égaux à ceux des sommets correspondants de $T(g)$.

Notons que les pgcd des multiplicités le long des arêtes de $T(g^\circ)$ sont tous égaux à 2.

Proposition 2.4. *Les tableaux suivants donnent les multiplicités N_i des composantes du diviseur exceptionnel, les quotients polaires N_i/a_i et les nombres ν_i successivement pour le germe g' et pour le germe g'' . Comme ci-dessus, $n_0 = b+d+e$, $n_1 = ab+ad+be$, $n_2 = e(b+d+f) = d(a+c+e) = n_3$, $\nu_1 = a+b$, $\nu_2 = e+f = c+d = \nu_3$.*

i	A_4	A_2	#1	A_1	A_3	A_5	A_6
$N_i(g')$	$4n_2 + 6$	$2n_2$	$2n_0$	$2n_1$	$2n_3$	$4n_3 + 2$	$4n_1 + 2$
$N_i(g')/a_i$	$(2n_2 + 3)/e$	$2n_2/e$	$2n_0$	$2n_1/b$	$2n_3/d$	$(2n_3 + 1)/d$	$(2n_1 + 1)/b$
ν_i	$2\nu_2 + 3$	ν_2	2	ν_1	ν_3	$2\nu_3 + 1$	$2\nu_1 + 1$

i	A_4	A_2	#1	A_1	A_3	A_5	A_6
$N_i(g'')$	$4n_2 + 2$	$2n_2$	$2n_0$	$2n_1$	$2n_3$	$4n_3 + 6$	$4n_1 + 2$
$N_i(g'')/a_i$	$(2n_2 + 1)/e$	$2n_2/e$	$2n_0$	$2n_1/b$	$2n_3/d$	$(2n_3 + 3)/d$	$(2n_1 + 1)/b$
$\nu_i(g'')$	$2\nu_2 + 1$	ν_2	2	ν_1	ν_3	$2\nu_3 + 3$	$2\nu_1 + 1$

3. Les résultats.

Théorème 3.1. *Soient p, q, r, s des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $\text{pgcd}(p, q) = \text{pgcd}(r, s) = 1$, $q(6q+4s+p) = s(4q+10s+r)$ et $5q+p = 7s+r$. Rappelons que ces conditions sont vérifiées par $(p, q, r, s) = (24, 7, 17, 6)$ ou, plus généralement, pour tout s , $s > 5$ et $s \not\equiv 2 \pmod{3}$, par*

$$(p, q, r, s) = (2s^2 - 7s - 6, s + 1, 2s^2 - 9s - 1, s).$$

Alors,

1. les formes de Seifert entières des germes f' et f'' sont isomorphes et
2. les fonctions zêta de Denef-Loeser de ces germes sont égales.

Démonstration. Les germes f' et f'' sont des germes à deux branches. La condition $q(6q+4s+p) = s(4q+10s+r)$ implique que ces germes sont isomères, c'est-à-dire que l'on passe de $T_N(f')$ à $T_N(f'')$ en échangeant les extrémités de ces arbres pondérés, voir [D-M2] ou [D] pour une définition précise. Les formes de Seifert entières associées sont alors isomorphes, d'après [D, th.2].

D'après la proposition 1.1, la fonction zêta de Denef-Loeser du germe f° , où $\circ = ' ou ''$, est donnée par

$$Z_{f^\circ}(s) = \sum_{\{i|\nu(i)=1\}} \frac{1}{\nu_i(f^\circ) + sN_i(f^\circ)} + \sum_{\{i|\nu(i)=3\}} \frac{-1}{\nu_i(f^\circ) + sN_i(f^\circ)}$$

$$+ \sum \frac{1}{(1+s)(\nu_i(f^\circ) + sN_i(f^\circ))} + \sum_{(i,j)} \frac{1}{(\nu_i(f^\circ) + sN_i(f^\circ))(\nu_j(f^\circ) + sN_j(f^\circ))} ,$$

où la première somme est étendue aux sommets B_1, \dots, B_6 , de valence 1, la deuxième aux sommets A_1, \dots, A_6 , de valence 3, la troisième aux sommets portant des flèches, A_5, A_6 et la quatrième aux arêtes (i, j) de l'arbre $T(f^\circ)$. La comparaison des arbres $T_N(f')$ et $T_N(f'')$ d'une part, et $T_\nu(f')$ et $T_\nu(f'')$ d'autre part, montre immédiatement que $Z_{f'}(s) = Z_{f''}(s)$. \square

Proposition 3.2. *Soient a, b, c, d, e, f des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que*

$$\frac{e}{f} < 1 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \quad \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(c, d) = \text{pgcd}(e, f) = 1,$$

$$e(b + d + f) = d(a + c + e) \quad \text{et} \quad c + d = e + f.$$

Alors les fonctions zêta de Denef-Loeser des germes g' et g'' sont égales.

Démonstration. D'après la proposition 1.1, la fonction zêta de Denef-Loeser du germe g° , où $^\circ = ' \text{ ou } ''$, est donnée par

$$\begin{aligned} Z_{g^\circ}(s) &= \sum_{\{i|v(i)=1\}} \frac{1}{\nu_i(g^\circ) + sN_i(g^\circ)} + \sum_{\{i|v(i)=3\}} \frac{-1}{\nu_i(g^\circ) + sN_i(g^\circ)} \\ &+ \sum \frac{1}{(1+s)(\nu_i(g^\circ) + sN_i(g^\circ))} + \sum_{(i,j)} \frac{1}{(\nu_i(g^\circ) + sN_i(g^\circ))(\nu_j(g^\circ) + sN_j(g^\circ))} , \end{aligned}$$

où la première somme est étendue aux sommets B_2, \dots, B_6 , de valence 1, la deuxième aux sommets A_1, \dots, A_6 , de valence 3, la troisième aux sommets portant des flèches, A_4, A_5, A_6 et la quatrième aux arêtes (i, j) de l'arbre $T(g^\circ)$. La comparaison des arbres $T_N(g')$ et $T_N(g'')$ d'une part, et $T_\nu(g')$ et $T_\nu(g'')$ d'autre part, montre immédiatement que $Z_{g'}(s) = Z_{g''}(s)$. \square

Théorème 3.3. *Soient a, b, c, d, e, f des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(c, d) = \text{pgcd}(e, f) = 1$, $e(b + d + g) = d(a + c + e)$ et $c + d = e + f$, supposons de plus que les pgcd des multiplicités le long des arêtes de l'arbre $T(g)$ valent 1 (ceci équivaut à supposer que la monodromie du germe g est d'ordre fini) et que l'on a l'inégalité*

$$d(ab + ad + be) \neq e(b^2 + 2bd).$$

Toutes ces conditions sont vérifiées par $(a, b, c, d, e, f) = (11, 3, 14, 3, 5, 12)$. Alors, d'une part, les formes de Seifert entières des germes g' et g'' ne sont pas isomorphes et, d'autre part, les formes de Seifert rationnelles de g' et g'' sont Witt-équivalentes.

Démonstration. On considère la filtration par le poids M sur l'homologie $H_1(F(g^\circ), \mathbf{Z})$ de la fibre de Milnor $F(g^\circ)$ du germe g° , définie dans [D-M1] et utilisée dans [D-M2] et [D-H], par les formules suivantes, où la monodromie homologique est notée comme la multiplication par t , et ε désigne un exposant de la monodromie.

$$M_0(H_1(F(g^\circ), \mathbf{Z})) = H_1(F(g^\circ), \mathbf{Z}), \quad M_{-1}(H_1(F(g^\circ), \mathbf{Z})) = \text{Ker}(t^\varepsilon - 1),$$

$$M_{-2}(H_1(F(g^\circ), \mathbf{Z})) = \left((\text{Ker}(t-1) + \text{Im}(t^\varepsilon - 1)) \otimes \mathbf{Q} \right) \cap H_1(F(g^\circ), \mathbf{Z}).$$

L'article [D-M1] définit de plus une décomposition de $F(g^\circ)$, associée à l'arbre de désingularisation $T(g^\circ)$, $F(g^\circ) = \cup_{i \in T_\varepsilon} F_i(g^\circ)$, voir aussi [D-M2] pour ces définitions. Un calcul élémentaire utilisant [D-M1] donne l'isomorphisme de $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules suivant

$$\text{Gr}_0^M H_1(F, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t+1) \oplus \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t+1).$$

Nous utilisons ensuite [D-M2, th. 2.21] et enfin [D-H, th. 1.7] et [D-H, th. 1.12].

Pour $^\circ = ' \text{ ou } ''$, soient y° et z° des longs cycles tracés sur $F(g^\circ)$ joignant respectivement d'une part les zones $F_4(g^\circ)$ et $F_6(g^\circ)$ (associées aux sommets A_4 et A_6 de $T(g^\circ)$) et d'autre part les zones $F_5(g^\circ)$ et $F_6(g^\circ)$ (associées aux sommets A_5 et A_6 de $T(g^\circ)$) de la fibre de Milnor de g° , de telle sorte que

$$\text{Gr}_0^M H_1(F(g^\circ), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t+1) \cdot \bar{y}^\circ \oplus \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t+1) \cdot \bar{z}^\circ.$$

Soit ε° le plus petit exposant de la monodromie du germe g° . On rappelle que ε° est le ppcm des multiplicités N_i° des sommets de rupture dans l'arbre $T_N(g^\circ)$, c'est-à-dire que, par construction,

$$\varepsilon' = \text{ppcm}(N'_1, N'_2, N'_3, N'_4, N'_5, N'_6) = \text{ppcm}(N''_1, N''_2, N''_3, N''_4, N''_5, N''_6) = \varepsilon''.$$

Nous noterons donc $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''$. Notons ar_1° la longue arête de $T(g^\circ)$ joignant #1 et A_1 , ar_2° la longue arête de $T(g^\circ)$ joignant #1 et A_2 , ar_3° la longue arête de $T(g^\circ)$ joignant A_1 et A_3 , ar_4° la longue arête de $T(g^\circ)$ joignant A_2 et A_4 , ar_5° la longue arête de $T(g^\circ)$ joignant A_3 et A_5 , ar_6° la longue arête de $T(g^\circ)$ joignant A_1 et A_6 . Les arêtes portent donc le numéro du sommet de rupture qui en est l'extrémité la plus éloignée du sommet #1.

La formule du twist [D-M2, th. 2.21] permet de calculer $(t^\varepsilon - 1)y^\circ$ et $(t^\varepsilon - 1)z^\circ$ en calculant les contributions de chacune des longues arêtes. Vu que y° parcourt les arêtes ar_1° , ar_2° , ar_4° , ar_6° et z° les arêtes ar_3° , ar_5° et ar_6° , on trouve

$$(t^\varepsilon - 1)y^\circ = \sum_{i \in \{1, 2, 4, 6\}} \sum_{k=1}^2 S(t^k x_i, y^\circ) \frac{2\varepsilon}{\delta_i} \left(\frac{a_{j(i)}}{N_{j(i)}^\circ} - \frac{a_i}{N_i^\circ} \right) t^k x_i,$$

$$(t^\varepsilon - 1)z^\circ = \sum_{i \in \{3, 5, 6\}} \sum_{k=1}^2 S(t^k x_i, z^\circ) \frac{2\varepsilon}{\delta_i} \left(\frac{a_{j(i)}}{N_{j(i)}^\circ} - \frac{a_i}{N_i^\circ} \right) t^k x_i,$$

où S est la forme d'intersection sur $H_1(F(g^\circ), \mathbf{Z})$, x_i est un cycle de recollement associé à la longue arête ar_i , δ_i est la somme des multiplicités des composantes de g° dont la géodésique passe par ar_i (voir [D-M2, 2.18], où cet entier est noté ν_i) et $j(i)$ est l'indice du sommet de rupture ou du sommet #1 qui précède i dans $T(g^\circ)$.

Les arbres $T_N(g')$ et $T_N(g'')$ permettent de choisir les x_i de telle sorte que $x_1 = x_2 = x_4$, $x_3 = x_5$ et $x_1 = x_3 + x_6$. Les valeurs des δ_i sont ici, dans $T_N(g')$ ou dans $T_N(g'')$, $\delta_1 = 2(b+d)$, $\delta_2 = \delta_4 = 2e$, $\delta_3 = \delta_5 = 2d$ et $\delta_6 = 2b$.

Notons $\text{Tw}_i^\circ = \frac{2\varepsilon}{\delta_i} \left(\frac{a_{j(i)}}{N_{j(i)}^\circ} - \frac{a_i}{N_i^\circ} \right)$ le coefficient de twist le long de ar_i° , où $^\circ = ' \text{ ou } ''$ ou absence d'exposant, on trouve donc :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Tw}_1}{\varepsilon} &= \frac{1}{b+d} \left(\frac{1}{2n_0} - \frac{b}{2n_1} \right), & \frac{\text{Tw}_2}{\varepsilon} &= \frac{1}{e} \left(\frac{1}{2n_0} - \frac{e}{2n_2} \right), & \frac{\text{Tw}_3}{\varepsilon} &= \frac{1}{d} \left(\frac{b}{2n_1} - \frac{d}{2n_3} \right), \\ \frac{\text{Tw}'_4}{\varepsilon} &= \left(\frac{1}{2n_2} - \frac{1}{2n_2+3} \right), & \frac{\text{Tw}'_5}{\varepsilon} &= \left(\frac{1}{2n_3} - \frac{1}{2n_3+1} \right), & \frac{\text{Tw}'_6}{\varepsilon} &= \left(\frac{1}{2n_1} - \frac{1}{2n_1+1} \right), \\ \frac{\text{Tw}''_4}{\varepsilon} &= \left(\frac{1}{2n_2} - \frac{1}{2n_2+1} \right), & \frac{\text{Tw}''_5}{\varepsilon} &= \left(\frac{1}{2n_3} - \frac{1}{2n_3+3} \right), & \frac{\text{Tw}''_6}{\varepsilon} &= \left(\frac{1}{2n_1} - \frac{1}{2n_1+1} \right). \end{aligned}$$

Afin de comparer les valeurs ainsi trouvées, rappelons que, par construction, $n_2 = n_3$.

On trouve donc

$$\begin{aligned} (t^\varepsilon - 1)y^\circ &= (\text{Tw}_1 + \text{Tw}_2 + \text{Tw}_4^\circ)S(x_1, y^\circ)(x_1 - tx_1) + \text{Tw}_6S(x_6, y^\circ)(x_6 - tx_6), \\ (t^\varepsilon - 1)z^\circ &= (\text{Tw}_3 + \text{Tw}_5^\circ)S(x_3, z^\circ)(x_3 - tx_3) + \text{Tw}_6S(x_6, z^\circ)(x_6 - tx_6). \end{aligned}$$

Suivant [D-H], nous noterons S_2 la forme bilinéaire symétrique sur $\text{Gr}_0^M H_1(F, \mathbf{Z})$ définie par $S_2(u, v) = S((t^\varepsilon - 1)u, v)$. Quitte à remplacer y° ou z° par leurs opposés et vu que, par construction, $x_1 = x_3 + x_6$, on peut supposer que

$$\begin{aligned} S(x_1, y^\circ) &= -S(tx_1, y^\circ) = S(x_6, y^\circ) = -S(tx_6, y^\circ) = 1, & S(x_3, y^\circ) &= -S(tx_3, y^\circ) = 0, \\ S(x_3, z^\circ) &= -S(tx_3, z^\circ) = -S(x_6, z^\circ) = S(tx_6, z^\circ) = 1, & S(x_1, z^\circ) &= -S(tx_1, z^\circ) = 0. \end{aligned}$$

La forme S_2 vérifie donc les égalités suivantes

$$\begin{aligned} S_2(y^\circ, y^\circ) &= 2(\text{Tw}_1 + \text{Tw}_2 + \text{Tw}_4^\circ + \text{Tw}_6), \\ S_2(z^\circ, z^\circ) &= 2(\text{Tw}_3 + \text{Tw}_5^\circ + \text{Tw}_6), \\ S_2(y^\circ, z^\circ) &= -2\text{Tw}_6. \end{aligned}$$

Pour démontrer que les conditions sur (a, b, c, d, e, f) entraînent que les formes de Seifert entières associées aux germes f' et f'' ne sont pas isomorphes, il suffit de vérifier que

$$\det \begin{pmatrix} S_2(y', y') & S_2(y', z') \\ S_2(z', y') & S_2(z', z') \end{pmatrix} \neq \det \begin{pmatrix} S_2(y'', y'') & S_2(y'', z'') \\ S_2(z'', y'') & S_2(z'', z'') \end{pmatrix}$$

ou encore, vu que $\text{Tw}'_4 = \text{Tw}''_5$ et $\text{Tw}''_4 = \text{Tw}'_5$, il suffit de vérifier l'inégalité suivante entre déterminants

$$\begin{vmatrix} \text{Tw}_1 + \text{Tw}_2 + \text{Tw}'_4 + \text{Tw}_6 & -\text{Tw}_6 \\ -\text{Tw}_6 & \text{Tw}_3 + \text{Tw}'_5 + \text{Tw}_6 \end{vmatrix} \neq$$

$$\begin{vmatrix} \text{Tw}_1 + \text{Tw}_2 + \text{Tw}'_5 + \text{Tw}_6 & -\text{Tw}_6 \\ -\text{Tw}_6 & \text{Tw}_3 + \text{Tw}'_4 + \text{Tw}_6 \end{vmatrix}.$$

On a, par construction, $\text{Tw}'_4 \neq \text{Tw}'_5$, l'inégalité entre déterminants équivaut donc à l'inégalité

$$(\text{Tw}_1 + \text{Tw}_2 - \text{Tw}_3)(\text{Tw}'_4 - \text{Tw}'_5) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \text{Tw}_1 + \text{Tw}_2 \neq \text{Tw}_3,$$

qui donne après simplification

$$d(ab + ad + be) \neq e(b^2 + 2bd),$$

et cette condition est vérifiée par hypothèse.

Il reste à démontrer que les formes de Seifert rationnelles de g' et g'' sont Witt-équivalentes. Ce point est une application immédiate de [D-H, th. 1.12], vu que, d'une part, les arbres $T_N(g')$ et $T_N(g'')$ présentent les mêmes halos et que, d'autre part, les multiplicités d'intersection des branches de g' sont, par construction, égales aux multiplicités d'intersection des branches correspondantes de g'' . \square

3.4. Exemples numériques. D'après la proposition **2.1**, les conditions sur (p, q, r, s) , $m_3 = m_4$, $\nu_3 = \nu_4$ et $\text{pgcd}(p, q) = \text{pgcd}(r, s) = 1$ sont vérifiées par $(p, q, r, s) = (24, 7, 17, 6)$. Nous noterons f_0, f'_0, f''_0 les germes f, f', f'' associés à cette valeur de (p, q, r, s) . Les arbres de désingularisation avec multiplicités de f_0, f'_0, f''_0 , notés respectivement $T_N(f_0), T_N(f'_0), T_N(f''_0)$ et les arbres de ces germes pondérés par les nombres ν_i , notés respectivement $T_\nu(f_0), T_\nu(f'_0), T_\nu(f''_0)$ sont donnés Figures 5 à 9.

Les conditions $n_2 = n_3$ et $\nu_2 = \nu_3$ vues en **2.3** sont satisfaites par $(a, b, c, d, e, f) = (11, 3, 14, 3, 5, 12)$. Nous noterons g_0, g'_0, g''_0 les germes g, g', g'' associés à cette valeur de (a, b, c, d, e, f) . Les arbres de désingularisation avec multiplicités de g_0, g'_0, g''_0 , notés respectivement $T_N(g_0), T_N(g'_0), T_N(g''_0)$ et les arbres de ces germes pondérés par les nombres ν_i , notés respectivement $T_\nu(g_0), T_\nu(g'_0), T_\nu(g''_0)$ sont donnés Figures 10 à 13.

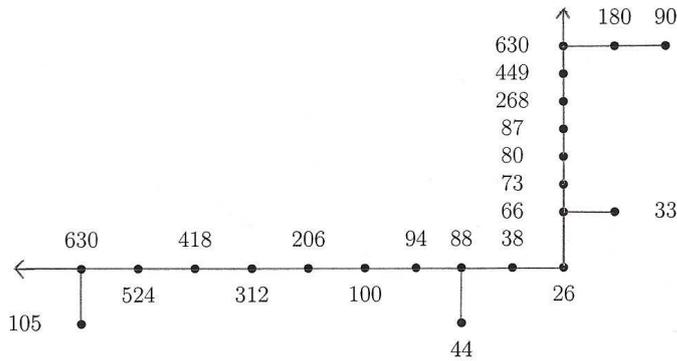


Figure 5: $T_N(f_0)$

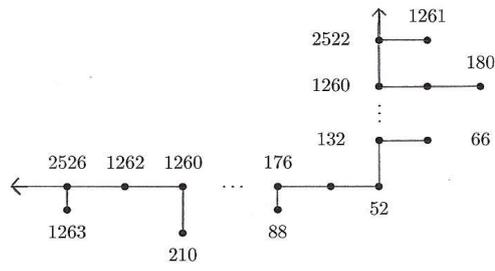


Figure 6: $T_N(f'_0)$

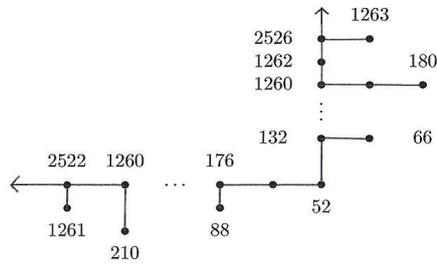


Figure 7: $T_N(f''_0)$

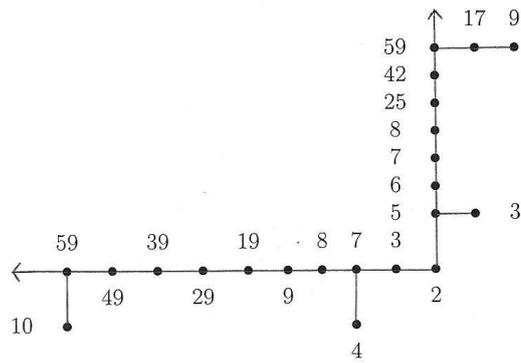


Figure 8: $T_\nu(f_0)$

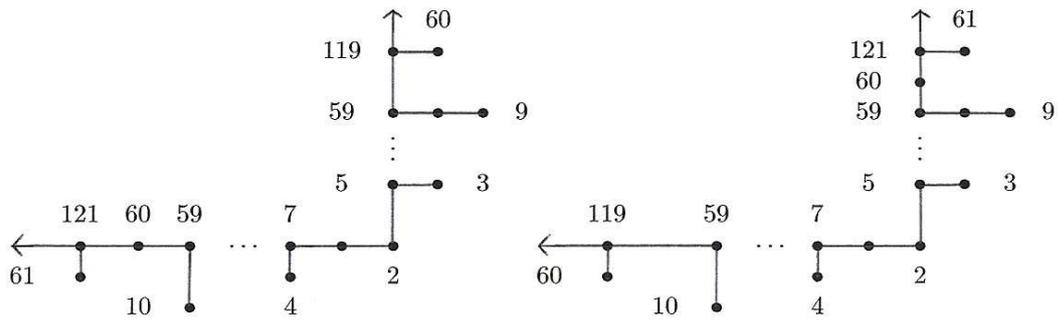


Figure 9: $T_\nu(f'_0)$ $T_\nu(f''_0)$

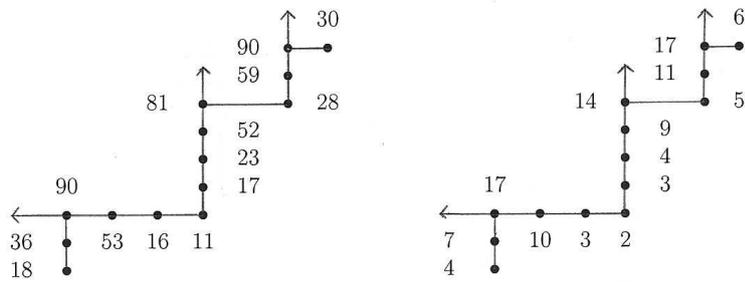


Figure 10: $T_N(g_0)$ $T_\nu(g_0)$

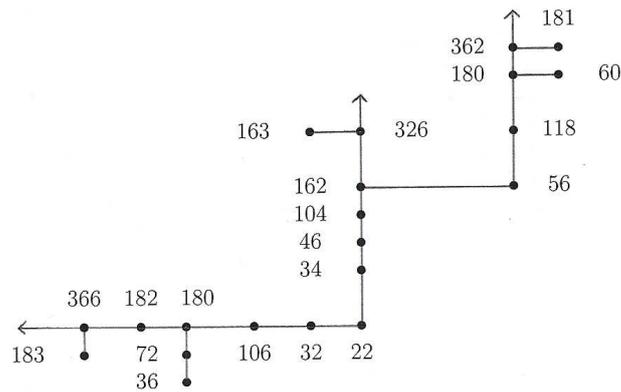


Figure 11: $T_N(g'_0)$

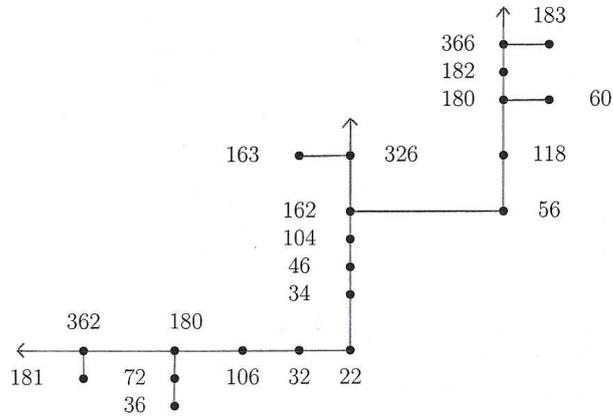


Figure 12: $T_N(g_0'')$

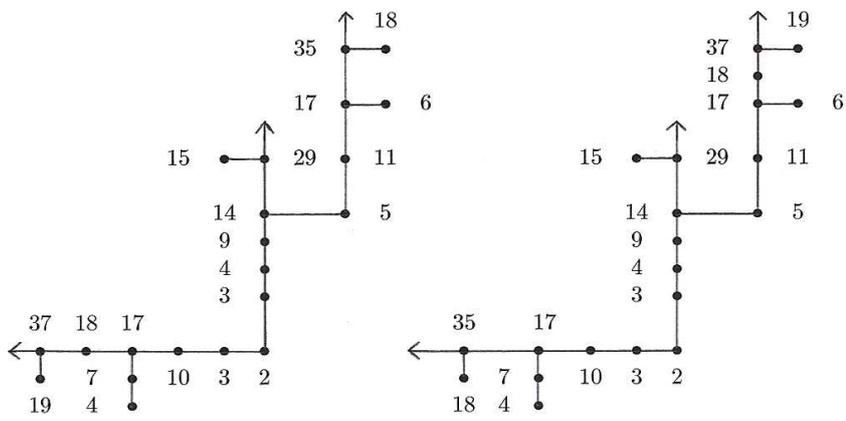


Figure 13: $T_\nu(g_0')$

$T_\nu(g_0'')$

Références

- [A-C-L-M] Artal Bartolo E., Cassou-Noguès P., Luengo I., Melle Hernandez A., *The Denef-Loeser zeta function is not a topological invariant*. J. London Math. Soc. (2) **65** (2002) 45–54
- [D-L] Denef J., Loeser F., *Caractéristiques d’Euler-Poincaré, fonctions zêta locales et modifications analytiques*. J. Amer. Math. Soc. **5**, 4 (1992), 705–720
- [D] Du Bois Ph., *Sur la forme de Seifert entière des germes de courbe plane à deux branches*. C. R. Acad. Sc. Paris, **336**, 2003, Série I, 757–762
- [D-H] Du Bois Ph., Hunault O., *Classification des formes de Seifert rationnelles des germes de courbe plane*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **46**, 2 (1996), 101–140
- [D-M1] Du Bois Ph., Michel F., *Filtration par le poids et monodromie entière*, Bull. Soc. Math. France, **120**, (1992), 129–167
- [D-M2] Du Bois Ph., Michel F., *The integral Seifert form does not determine the topology of plane curve germs*, J. Algebraic Geometry, **3**, (1994), 1–38
- [V1] Veys W., *Determination of the poles of the topological zeta function for curves*, Manuscripta math. **87**, (1995), 435–448
- [V2] Veys W., *Zeta functions for curves and log canonical models*, Proc. London Math. Soc. (3) **74** (1997), 360–378

PHILIPPE DU BOIS

philippe.dubois (at) univ-angers.fr

LAREMA - UMR 6093 - FACULTÉ DES SCIENCES

2, BOULEVARD LAVOISIER - 49045 ANGERS

10/10/2010