



HAL
open science

Première approche de la densité d'un opérateur de Perron Frobenius. I. formule de la densité invariante

Guy Cirier

► **To cite this version:**

Guy Cirier. Première approche de la densité d'un opérateur de Perron Frobenius. I. formule de la densité invariante. 2010. hal-00522882v1

HAL Id: hal-00522882

<https://hal.science/hal-00522882v1>

Preprint submitted on 2 Oct 2010 (v1), last revised 16 Mar 2011 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Première approche de la densité d'un opérateur de Perron Frobenius.
I. formule de la densité invariante**

Guy Cirier*

Abstract

First approach of invariant densities of a Perron Frobenius operator. Let $p = p_f$ an invariant density of Perron Frobenius operator defined by $p_f = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1} \Big| f_{\alpha}^{-1} \Big|$ where f is a polynomial application of a compact C of \mathbb{R}^d in itself. Under this hypothesis with Laplace transform, the solution is given by the asymptotic distribution of the zeros of $e_f^n(a, y) = \partial^n [e^{ya} - e^{yf(a)}] / \partial a^n$ when $n \rightarrow \infty$ at the fixed point $a = 0$ of f . That are the polynomials $y^n - H_n(y)$ with $H_n(y) = \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n \Big|_{a=0}$. If these zeros have an asymptotic distribution with a derivable density q , the invariant density is :

$$p(a) = (-a)^d \partial^d q(a) / \partial a^d$$

Résumé

Soit la densité invariante $p = p_f$ de l'opérateur de Perron Frobenius défini par $p_f = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1} \Big| f_{\alpha}^{-1} \Big|$ où f est une application polynomiale d'un compact C de \mathbb{R}^d dans lui-même. Sous cette hypothèse et via la transformation de Laplace, la solution est obtenue à partir la distribution asymptotique des zéros réels de $e_f^n(a, y) = \partial^n [e^{ya} - e^{yf(a)}] / \partial a^n$ au point fixe $a = 0$ quand $n \rightarrow \infty$, donc des polynômes $y^n - H_n(y)$ avec $H_n(y) = \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n \Big|_{a=0}$. Si ces zéros ont une distribution asymptotique de densité dérivable q , la densité invariante sera de la forme sous réserve de conditions de convergence:

$$p(a) = (-a)^d \partial^d q(a) / \partial a^d$$

Mots clés : Équation de Perron Frobenius, Résolvante de Laplace, Itération logistique et de Julia
Key words: Perron Frobenius equation, Résolvante of Laplace, Julia's and logistical Itérations

I- Introduction

La plupart des auteurs qui s'intéressent aux chaos présentent l'équation de Perron Frobenius sans la traiter à fond, car il s'agit de résoudre l'équation fonctionnelle $p = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1} \Big| f_{\alpha}^{-1} \Big|$ [6] peu facile à manipuler. Les mathématiciens passent rapidement, après quelques résultats théoriques, à des méthodes héritées de Poincaré : points homoclines, bifurcations [6]. Pourtant la donnée de la mesure invariante d'un système dynamique, même inconnue, permet de construire l'espace des fonctions de carré intégrable et de disposer alors de la théorie spectrale, comme l'avait remarqué Koopman en 1931 [9]. Des développements importants ont été obtenus depuis quelques dizaines d'années dans le domaine des dynamiques complexes [9] et [2]. Les physiciens, pour leur part, s'orientent davantage

* guy.cirier@gmail.com

vers des résumés d'information du type Lyapounov ou dimension fractale. Toutefois, deux directions importantes émergent : les calculs sur les chaos quantiques [3] et la thermodynamique [7].

S'agissant de la résolution proprement dite de l'équation de Perron Frobenius, peu de progrès ont été faits depuis le célèbre résultat de Ulam et Von Neuman [8] dans le cas particulier de la logistique pour le paramètre $\lambda = 4$. Sa généralisation pour un paramètre quelconque a été obtenue récemment par Kawamura [5] à l'aide des C^* algèbres de Kunzt.

Si de nombreux travaux concernent le cas unidimensionnel [7], et en dehors des dynamiques complexes [4] ou de divers exercices sur ordinateur, la théorie reste mince. L'étude faite sur des difféomorphismes ne donne guère de résultats pratiques opérationnels [1].

Cet article est le premier d'une série de quatre qui se propose de prouver, via le théorème de densité énoncé ici, que les solutions de l'équation de Perron Frobenius donnent la géométrie de ce qui se passe. La formule est ici appliquée sur deux exemples : la logistique déjà extrêmement étudiée [6], et l'itération de Julia. Mais cette présentation donne le sens profond de cette théorie qui permet de mieux comprendre les chaos. Il sera suivi de trois articles traitant :

- 1- de l'approximation et de la dégénérescence des hessiennes donnant Les distributions des zéros ;
- 2- des applications qui semblent nombreuses. Certaines EDO ou EDP comme celle de Navier-Stokes ou de Lorenz, peuvent avoir des solutions aléatoires parfaitement définies ;
- 3- de la résonance.

Le plan de l'article est le suivant :

On formule les notations, hypothèses et les principales définitions.

On transforme par Laplace l'équation de Perron Frobenius.

La démonstration de la formule principale du résumé demande plusieurs étapes. Exemples.

II – Notations, hypothèses, définitions et rappel de résultats connus

Hypothèses et notations sur l'application polynomiale f

Soit f une application polynomiale d'un compact C de \mathbb{R}^d (\mathbb{C}^d considéré comme \mathbb{R}^{2d}) dans lui-même. De classe C^∞ , elle n'a qu'un nombre α fini d'images réciproques et un point fixe 0 dans C : $f(0) = 0$. Il peut y avoir des cycles : $f^{(n)}(0) = 0$ avec $f^{(k)}(0) = \alpha_k \neq 0$ pour $k = 1, \dots, n-1$ (qui peuvent d'ailleurs être considérés comme points fixes de $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$). Mais les relations entre ces cycles et le point fixe 0 sont complexes. On ne s'y intéresse pas ici explicitement.

Hypothèses et notations sur les valeurs propres de la partie linéaire de f au point fixe 0

Les valeurs propres λ de la partie linéaire de f au point fixe 0 jouent un rôle essentiel pour établir la convergence vers des sous-ensembles invariants : point fixe, cycles ou supports de distributions invariants. Les cas de valeurs propres complexes ou ceux de leur multiplicité ne présentent pas de grandes difficultés théoriques, mais nous écartent du sujet principal, et ne seront donc pas étudiés ici. Chaque composante de f s'écrit $f_\ell(a) = \lambda_\ell a_\ell + r_\ell(a)$, $\ell = 1, 2, \dots, d$, où $r_\ell(a)$ est de degré supérieur à 1. Soit un ensemble d'indices d'itération $n \in N^d$ avec n_ℓ relatif au nombre d'itérations de $f_\ell(a)$. Soit $\zeta_\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n_\ell / \sum_\ell n_\ell$ la fréquence des itérations de la composante f_ℓ . Le cas traditionnel est celui où toutes les composantes de f sont itérées un même nombre de fois $\zeta_\ell = 1/d$.

Définition 1

On appelle ζ direction de l'itération. On appelle direction de résonance, notée ζ_R , l'ensemble des indices $\in N^d$ tels que $n \log |\lambda| = 0$ ou encore $\lambda^n = 1$. (Il peut y en avoir plusieurs.)

Si ζ et $\sum_{\ell} n_{\ell}$ sont fixés, on notera $n \in \zeta$ le n le plus voisin de ζ ; Le cas résonant ζ_R où $\zeta_R \log|\lambda| = 0$ fera l'objet d'un article à part et ne sera pas étudié ici. La notion de direction de l'itération ζ sera justifiée plus loin en V.

Hypothèses et notations sur pour l'opérateur de Perron Frobenius

Soient f une application et p une densité arbitraires, la transformée de Perron Frobenius de p par f s'écrit $p_f = \sum_{\alpha} p \circ f_{\alpha}^{-1} |f_{\alpha}^{-1}|$.

Définition 2 (rappel)

Une densité est dite invariante pour l'opérateur de Perron Frobenius si $p = p_f = \sum_{\alpha} p \circ f_{\alpha}^{-1} |f_{\alpha}^{-1}|$

Si f applique un compact dans lui-même, la densité invariante de l'opérateur de Perron Frobenius existe [6]. Cette équation fonctionnelle se traite mal directement, et, pour l'étudier, on va passer par la transformation de Laplace en précisant quelques hypothèses supplémentaires. On pourrait utiliser la transformation de Fourier, mais les notations sont infiniment plus lourdes.

À toute densité arbitraire p à support contenu dans un compact C , sa transformée de Laplace peut s'écrire $\phi(y) = \int_C e^{ys} p(s) ds$. (On convient ici de noter à gauche le transposé d'un vecteur dans tout produit scalaire ys sauf dans le cas de l'exemple de l'application de Julia).

Si $\phi_f(y)$ la transformée de Laplace de p_f (définie par f polynomiale et p arbitraires), l'équation de Perron Frobenius : $p = p_f$ se traduit naturellement (par Laplace) :

Définition 3

L'équation $\theta(\phi(y)) = \phi(y) - \phi_f(y) = 0$ est dite résolvante de l'équation de Perron Frobenius.

On appellera écarts résolvents les quantités $e_f^n(y, a) = \partial^n (e^{ya} - e^{yf(a)}) / \partial a^n$ au point fixe $a = 0$, c'est-à-dire $e_f^n(y) = e_f^n(y, 0) = y^n - H_n(y)$ qui sont des polynômes en y de degré n .

L'équation résolvante conduit à étudier les écarts $e_f^n(y, a) = \partial^n (e^{ya} - e^{yf(a)}) / \partial a^n$ en $a = 0$, c'est-à-dire les écarts résolvents. $e_f^n(y, a) = y^n e^{ya} - H_n(a, y) e^{yf(a)}$. Si $a = 0$, $H_n(y) = H_n(0, y)$. La solution non triviale ($a \neq 0$) de la résolvante nécessite des hypothèses sur l'ensemble limite des zéros réels de $e_f^n(y)$ et de $H_n(y)$ qui s'inspirent des propriétés des zéros des polynômes d'Hermite : si l'on pondère convenablement ces zéros par une fonction de n , ces pondérés tendent en général vers un ensemble compact avec une bonne densité par rapport à la mesure de Lebesgue quand $n \rightarrow \infty$.

Hypothèses H concernant l'ensemble limite des zéros réels de $H_n(y) = \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n e^{-yf(a)} |_{a=0}$

Ces hypothèses, qui seront démontrées sous certaines conditions dans le second article, sont :

- la suite des zéros réels y_n de $H_n(y)$ est infinie quand $n \rightarrow \infty$ et $n \in \zeta$;
- On suppose qu'il existe des fonctions croissantes positives v de n ($v_{\ell} = v_{\ell}(n_{\ell})$ $\ell = 1, 2, \dots, d$) pondérant y ($s = y / v$) telles que les ensembles $S_{\zeta_n} = \{s_n = y_n / v \in \mathbb{R}^{+d} | H_n(y_n) = 0, n \in \zeta\}$ aient une limite $S_{\zeta} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\zeta_n}$ compacte et mesurable. (Dans le second article, on aura en général $v = n$).

On verra ici comment négliger y^n dans l'écart $e_f^n(y)$ devant $H_n(y)$ avec $s = y / v$.

L'hypothèse suivante est alors utile pour découvrir des propriétés asymptotiques:

Définition 4

La distribution sur S_{ζ} est appelée distribution intrinsèque de f . (En fait, elle dépend de ζ !).

Pour ζ fixé, S_{ζ_n} sera dit adhérent à S_ζ si, étant donné $\varepsilon > 0$, pour tout $s \in S_\zeta$ et tout $n > n_\varepsilon$ pour tout $n \in \zeta$, on peut toujours trouver un $s_n = y_n / v$ tel que $|y_n / v - s| < \varepsilon$.

La suite y_n est alors infinie.

- Enfin, l'hypothèse fondamentale : il existe une densité $q(s)$ par rapport à la mesure de Lebesgue d -dimensionnelle de la répartition limite des $s \in S_\zeta$ quand $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que dans un élément de volume $dy = v^d ds$ de R^d on a asymptotiquement $v^d q(s) ds$ zéros y_n . Cette densité doit être dérivable, nulle sur le bord ∂S_ζ de S_ζ . L'article suivant précisera les conditions d'existence sur S_ζ .

On note $(-a)^d = \prod_{\ell=1}^{\ell=d} (-a_\ell)$ et $\partial^d q(a) / \partial a^d = \partial^d q(a) / \partial a_1 \dots \partial a_\ell \dots \partial a_d$. Sous ces hypothèses, on a :

II – Résultat principal : théorème de la densité

1- La densité invariante de Perron Frobenius p par rapport à la mesure de Lebesgue d -dimensionnelle devra être recherchée parmi les points réels y_n qui annulent l'écart $e_f^n(y) = y^n - H_n(y)$ au point fixe 0 quand $n \rightarrow \infty$.

2- Si tous les $|\lambda_\ell| > 1$, la densité invariante sera presque partout :

$$p(a) = (-a)^d \partial^d q(a) / \partial a^d$$

Si tous les $|\lambda_\ell| < 1$, la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est nulle. (le point fixe est attractif) .

3- Si S_{ζ_n} est adhérent à S_ζ , une itération de la composante f_ℓ agit asymptotiquement comme une dérivation $\partial / \partial a_\ell$ sur l'écart $e_f^n(a, y)$. Les indices de dérivation n_ℓ de n doivent tendre vers une répartition asymptotique $\zeta_\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n_\ell / \sum n_\ell$ correspondant à la fréquence des itérations des composantes f_ℓ . Et l'on a :

$$p(a) = (-a)^d \partial^d q(a) / \partial a^d \text{ si } \prod_\ell |\lambda_\ell|^{\zeta_\ell} > 1$$

$$p(a) = 0 \text{ si } \prod_\ell |\lambda_\ell|^{\zeta_\ell} < 1.$$

Le cas général est celui de l'itération traditionnelle où $\zeta_\ell = 1/d$, la condition devient $\prod_\ell |\lambda_\ell| > 1$.

Notons que cette distribution invariante peut être « masquée » par n'importe quel cycle attractif.

La démonstration de ce résultat s'effectue en plusieurs étapes. Mais avant tout, il convient de transformer l'équation de Perron Frobenius par Laplace, donc, de trouver l'expression analytique de la transformée de Laplace de $\phi_f(y)$ et simplifier ainsi l'équation fonctionnelle $p = \sum_\alpha p \circ f_\alpha^{-1} |f_\alpha^{-1}|$.

III - Transformation de Laplace de l'équation de P-F et expression analytique de $\phi_f(y)$

La compacité de C rend l'ensemble $\Omega = (y | \int p(s) e^{yf(s)} ds < \infty \cap \int e^{ys} p(s) ds < \infty)$ non vide.

Lemme 1

La transformée de Laplace $\phi_f(y)$ de p_f associée à l'itération f et à la densité p arbitraires est :

$$\phi_f(y) = \int p(s) e^{yf(s)} ds$$

Par définition de p_f , $\phi_f(y)$ s'écrit : $\phi_f(y) = \int_\Gamma e^{yf} p_f(t) dt = \sum_\alpha \int_{\Gamma_\alpha = f_\alpha^{-1}(R^d)} e^{yf} p \circ f_\alpha^{-1} |f_\alpha^{-1}|(t) dt$

avec $\Gamma_\alpha = f_\alpha^{-1}(R^d)$ et $\Gamma = \cup_\alpha \Gamma_\alpha$. Le changement de variables $t = f(s)$ et le recollement des images réciproques donnent la formule.

Exemple de calcul pour la logistique dans $\mathbf{R} : \lambda(a - a^2)$

Prenons la logistique $f(a) = \lambda(a - a^2)$ au voisinage du point fixe 0 . L'image réciproque de $f(a)$ a 2 branches $f_{\pm}^{-1}(t) = 1/2 \pm \sqrt{(1/2)^2 - t/\lambda}$. L'intégration sur chaque branche donne pour une distribution arbitraire ayant une transformée de Laplace arbitraire $\phi(y)$:

$$\phi_f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \phi(\alpha y + it\sqrt{2\alpha y}) dt .$$

Expression analytique de $\phi_f(y)$

$\phi(y)$ peut être représentée par une série analytique dans un poly-disque de convergence puisque le support de la distribution est contenu dans un compact. Donc $\phi(y) = \sum_n b_n y^n$ a un sens pour une distribution arbitraire p dans \mathbf{C} . Encore faut-il traduire l'incidence de l'itération f sur cette série pour obtenir $\phi_f(y)$. On rappelle la notation : $H_n(a, y) = \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n e^{-yf(a)}$ et au point fixe $a = 0$, $H_n(y) = H_n(0, y) = \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n e^{-yf(a)} \Big|_{a=0}$.

Proposition 1

L'itération f transforme alors chaque terme $y^n e^{ya}$ de $\phi(y)e^{ya}$ en $H_n(a, y)e^{yf(a)} = \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n$.

Soit $\phi(y) = \sum_n b_n y^n$ la transformée de Laplace de la distribution arbitraire p . La transformée de Laplace de l'opérateur de Perron Frobenius associée à f polynomiale et p est :

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_f(y) &= \sum_n b_n H_n(y) \\ \theta(\phi) &= \phi(y) - \phi_f(y) = 0 \end{aligned}}$$

l'équation résolvante

se traduit par: $\theta(\phi) = \lim_{a \rightarrow 0} \{ \phi(a, x) - \phi(f(a), x) \} = \sum_n b_n \partial^n (e^{xa} - e^{xf(a)}) / \partial a^n \Big|_{a=0} = 0$

On associe à $\phi(x) = \sum_n b_n x^n$ l'application $\phi(a, x)$ de $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ dans \mathbf{R} : $\phi(a, x) = \phi(x)e^{xa}$ qui s'écrit formellement $\phi(a, x) = \sum_n b_n \partial^n e^{xa} / \partial a^n$ avec $\phi(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \phi(a, x) = \lim_{a \rightarrow 0} (\sum_n b_n \partial^n e^{xa} / \partial a^n)$.

Si l'on considère la densité p comme l'inverse de $\phi(x)$, on a $p(s) = \frac{1}{(2\pi i)^d} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \phi(x) e^{-xs} dx$. Mais, le lemme 1 permet de mettre $\phi_f(y)$ sous la forme $\phi_f(y) = \int p(s) e^{yf(s)} ds$ qui devient alors :

$$\phi_f(y) = \int \frac{1}{(2\pi i)^d} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \phi(x) e^{yf(s)-xs} dx ds = \int \frac{1}{(2\pi i)^d} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \lim_{a \rightarrow 0} \phi(a, x) e^{yf(s)-xs} dx ds$$

$$\phi_f(y) = \lim_{a \rightarrow 0} (\sum_n b_n \partial^n \left(\int \left\{ \frac{1}{(2\pi i)^d} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{x(a-s)} dx \right\} e^{yf(s)} ds \right) / \partial a^n)$$

On reconnaît entre les crochets du milieu la distribution de Dirac $\delta(a-s)$. Donc $\phi_f(y) = \lim_{a \rightarrow 0} \phi(f(a), y) = \sum_n b_n \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n \Big|_{a=0}$. D'où le résultat. Il suffit donc de remplacer y^n par $H_n(y)$ dans le développement de $\phi(y)$ pour obtenir celui de $\phi_f(y)$. La deuxième partie de la proposition 1 ne fait que réécrire ce résultat pour a au voisinage de 0. Notons que l'équation $\theta(\phi) = 0$ a une solution triviale $y = 0$ qui donne le point fixe. Examinons les polynômes $H_n(a, y)$.

Corollaire 1

Les polynômes $H_n(a, y)$ vérifient les équations de récurrence matricielles :

- $H_{n+1}(a, y) = \partial H_n(a, y) / \partial a + H_n(a, y) y \partial f(a) / \partial a$
- $\partial H_n(a, y) / \partial y = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k H_{n-k}(a, y) \partial^k f(a) / \partial a^k$ (en nombre fini de termes car f est de degré fini).

- En $a=0$, le terme de plus haut degré de $H_n(y)$ est $(\lambda y)^n$ et le polynôme $H_n(y, \lambda) = \lambda^{-n} H_n(y)$ peut donc être considéré comme « unitaire » en y .

Les premières conditions résultent de la proposition 1.

La première relation de récurrence découle de la définition des polynômes $H_n(a, y)$.

La dérivée $\partial H_n(a, y) / \partial y$ par rapport à y s'obtient en appliquant la formule de Leibniz d - dimensionnelle à $f(a)e^{yf(a)}$ dans : $\partial \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n \partial y = \partial^n \partial e^{yf(a)} / \partial y \partial a^n = \partial^n f(a) e^{yf(a)} / \partial a^n$.

Exemples : la logistique dans R

Au voisinage du point fixe, l'itération f s'écrit : $f = \lambda(a - a^2)$. On a : $H_n(y) = \lim_{a \rightarrow 0} H_n(a, y) e^{yf(a)} = H_n(\sqrt{\lambda y / 2})(\sqrt{2\lambda y})^n$ où H_n (lu « H droit » pour le distinguer) est le polynôme d'Hermite d'ordre n défini par les probabilistes : $H_n(x) e^{-x^2/2} = d^n e^{-x^2/2} / dx^n$.

IV – Étude de la résolvante analytique de la densité invariante

Soient $\varphi(y)$ la solution de l'équation $\theta(\varphi) = 0$ ($\varphi(y)$ étant celle de l'équation de Perron-frobenius) $p_1(s)$ la densité correspondante (resp. $p(s)$).

Lemme 3

Sous nos hypothèses, alors $\phi(y) = \partial^d \varphi / \partial y^d$ et $p(s) = s^d p_1(s)$

Soit $\varphi(y)$ une solution de $\theta(\varphi) = 0$. Mais cette équation devra être une identité quelque soit y pour la densité invariante $\varphi(y)$, donc toutes les dérivées devront être nulles, et in fine : $\partial^d \theta(\varphi) / \partial y^d = \theta(\partial^d \varphi / \partial y^d) = 0$.

La suite de la démonstration revient à étudier la solution $p_1(s)$ de $\theta(\varphi) = 0$.

Lemme 4

S'il n'y a pas de résonance ($1 \neq \lambda^n$), la condition $\theta(\varphi) = 0$ ne peut être réalisée que pour les y_n annulant l'écart résolvant $e_f^n(a, y)|_{a=0} = e_f^n(y) = y^n - H_n(y)$ quand $n \rightarrow \infty$. Et inversement.

Pour toute fonction analytique arbitraire $\psi(y)$, on peut toujours former la fonction $\theta(\psi) = \psi - \psi_f$ où $\psi_f(y)$ est la transformée par f obtenue en remplaçant y^n par $H_n(y)$ dans le développement analytique de ψ . Mais la solution de la résolvante φ doit vérifier $\theta(\varphi) = 0$. Prenons au voisinage de la solution φ , une fonction analytique arbitraire de la forme $\psi_n(y) = \varphi(y) + \delta b_n y^n$ perturbée par le monôme $\delta b_n y^n$. La transformée ψ_{fn} par f s'écrira avec la modification $\delta b_n y^n$ par rapport à la solution φ : $\psi_{fn} = \varphi_f + \delta b_n H_n(y)$ et $\theta(\psi) = \delta b_n (y^n - H_n(y))$. S'il n'y a pas de résonance, le coefficient du terme de plus haut degré de $y^n - H_n(y)$ est $\delta b_n (1 - \lambda^n) \neq 0$.

On ne pourra pas annuler ce coefficient avec des polynômes de la forme $u_n(y) = \sum_{k=0}^{k=n'} d_k y^k$ avec

$n' < n$ car leurs transformés par f seront $u_{fn}(y) = \sum_{k=0}^{k=n'} d_k H_k(y)$ de degré $n' < n$. On ne peut l'annuler qu'en prenant un polynôme de degré supérieur à n . Mais là encore, le terme de plus degré de ce polynôme ne peut être annulé que par un polynôme de degré supérieur, et ainsi de suite. Par induction, seuls conviendront les y annulant $y^n - H_n(y)$ quand $n \rightarrow \infty$.

Inversement, supposons que la condition $y^n - H_n(y) = 0$ soit réalisée pour $n \rightarrow \infty$. Posons

$H_n(y) = \sum_{k=0}^{k=n} c_{n,k} y^k$. On peut alors construire une suite de polynômes de degré décroissant en

éliminant le terme de degré $n-1$ avec $d_{n-1}y^{n-1}$ pour que le terme de plus haut degré y^{n-1} de $d_{n-1}(y^{n-1} - H_{n-1}(y))$ vérifie : $d_{n-1}(1 - \lambda^{n-1}) + c_{n,n-1} = 0$. On recommence en $n-2$ et ainsi de suite.

En théorie, $\varphi_n(y) = \sum_{k=0}^{k=n-1} d_k y^k$ répond à la question quand $n \rightarrow \infty$ pour les y annulant $y^n - H_n(y)$.

Remarque

Dans le cas résonant $n \in \zeta_R$, le terme de plus haut degré de $H_n(y)$ est y^n et l'on peut appliquer la méthode d'identification pour tous les $n \in \zeta_R$ et construire des b_n annulant l'écart résolvant. Mais on verra des méthodes plus performantes.

Suite de la démonstration du point 2 du théorème de la densité

On posera S au lieu de S_ζ sans préjuger de la direction ζ arbitraire. Sous l'hypothèse H, $\varphi(y)$ est donc la limite quand $n \rightarrow \infty$ d'un polynôme $\varphi_n(y)$ qui doit vérifier deux conditions :

- $y \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$ et se met sous la forme $y = vs$ avec $v \rightarrow \infty$ et $s \in S$ borné,
- mais, comme $\varphi_n(y)$ est non nul uniquement pour les y vérifiant $H_n(y) - y^n = 0$, on suppose de plus qu'il existe une densité de la répartition limite de $s \in S$, quand $n \rightarrow \infty$ a une densité $q(s)$ dérivable, c'est à dire que dans un élément de volume $dy = v^d ds$ on a $v^d q(s) ds$ points y . Autrement dit, $\varphi_n(y)$ n'est défini que pour des y devenant de plus en plus grands sur des ensembles de plus en plus rares. Est-ce qu'une telle limite existe ? Si oui, sous quelles conditions ?

$\varphi_n(y)$ étant analytique, on peut écrire $\varphi_n(y) = \int_{u \leq y} \partial^d \varphi_n(u) / \partial u^d du$

Modifions légèrement nos notations et posons désormais $y = vz$ et $u = zx$ de sorte que :

$$\varphi_n(y) = \varphi_n(vz) = \int_{x \leq v} \partial^d \varphi_n(zx) / \partial x^d dx$$

Ce qui est l'intégrale de $\partial^d \varphi_n(zx) / \partial x^d$ qui doit être prise sur tous les zéros de $H_n(x) - x^n$ dans R^d .

Quand $n \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$ et $\varphi_n(vz)$ tend vers $\varphi(vz) = \int_{R^d} \partial^d \varphi(zx) / \partial x^d I(x) dx$, où $I(x)$ est l'indicatrice des zéros de $H_n(x) - x^n$ dans R^d . Donc, si $x = vs$, l'élément de volume dx contiendra $v^d q(s) ds$ zéros et $\varphi(vz) = \int_S \partial^d \varphi(zvs) / \partial s^d q(s) ds$.

Par intégration par parties, si la densité $q(s)$ est nulle sur le bord ∂S de S :

$$\varphi(vz) = (-1)^d \int_S \phi_1(zvs) \partial^d q(s) / \partial s^d ds$$

Or, $\varphi(vzs)$ est la transformée de Laplace de la densité $p_1(a)$: $\varphi(vzs) = \int p_1(a) e^{zvs a} da$

$$\text{donc } \varphi(vz) = (-1)^d \int_S \int p_1(a) e^{zvs a} da \partial^d q(s) / \partial s^d ds$$

Le domaine de définition de a étant compact, on peut appliquer la formule de la moyenne :

$$\int p_1(a) e^{zvs a} da = e^{zvs a_0} \int p_1(a) da = e^{zvs a_0} \text{ où } a_0 \text{ est un point du compact } C.$$

$$\text{et } \varphi(vz) = (-1)^d \int_S e^{zvs a_0} \partial^d q(s) / \partial s^d ds$$

Si l'on prend $a_0 v = 1$, alors $\varphi(vz)$ tend vers une limite finie qui ne dépend pas de v quand $v \rightarrow \infty$, on a trouvé la transformée de Laplace asymptotique dont on s'aperçoit après coup qu'elle ne dépend pas du choix de $p_1(a)$.

Autrement dit, si l'on transforme le domaine C par une homothétie de centre le point fixe et de rapport $1/c = (1/c_\zeta)$ qui transforme a en a/c de sorte que $a_0 = 1/v$, on obtient le résultat voulu. En effet, on rappelle que si p est la densité de Perron Frobenius associée f et si T une transformation inversible de R^d , alors à f correspond TfT^{-1} et à p correspond $|T|^{-1} pT^{-1}$.

Démonstration du point 2 : Convergence vers S_ζ

Considérons l'écart $v^{-n} e_f^n(s) = s^n - v^{-n} H_n(vs) = s^n - \lambda^n H_{v,n}(s, \lambda)$ qui doit tendre vers 0 quelque soit l'indice n du développement analytique. Le polynôme $H_{v,n}(s, \lambda)$ est obtenu en posant $y = vs$ dans $H_n(y)$ et en mettant λ^n en facteur : $H_{v,n}(s, \lambda) = (\lambda v)^{-n} H_n(vs)$.

- Si tous les $|\lambda_\ell| > 1$, $(s/\lambda)^n$ est négligeable devant le polynôme $H_{v,n}(s, \lambda)$ « unitaire » (corollaire 1) et $(s/\lambda)^n - H_{v,n}(s, \lambda)$ a par continuité des racines mêmes zéros à l'infini que $H_{v,n}(s, \lambda) : S_\zeta$.

- Si tous les $|\lambda_\ell| < 1$, comme $H_{v,n}(s, \lambda)$ reste borné, $\lambda^n H_{v,n}(s, \lambda) \rightarrow 0$ et $s^n \rightarrow 0$.

Reste le cas le plus courant où les valeurs propres sont quelconques et, en ce cas, le résultat dépend de ce que $|\lambda|$ est plus grand ou plus petit que 1. Il faut alors affiner les raisonnements.

V – Démonstration du point 3 : Ergodisme multidimensionnel et itération traditionnelle

L'itération f d - dimensionnelle, de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d . $f = (f_1, f_2, \dots, f_\ell, \dots, f_d)$ se traduit concrètement par d applications f_ℓ de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} : $a_{1\ell} = f_\ell(a)$, $\ell = 1, 2, \dots, d$. L'itération traditionnelle veut que $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$. À ma connaissance, personne ne se pose la question de savoir laquelle des fonctions f_ℓ de f choisir numériquement en premier, puis, celle en second, etc., et si tout cela commute.

Si la question ne se pose pas en dimension 1, le problème apparaît dès la dimension 2. Par exemple, soit $f = (g, h)$: si l'on itère g sans itérer h , on aura une distribution asymptotique relative à g . Faut-il itérer g avant h , ou l'inverse ? Que se passe-t-il si par exemple on itère deux fois g pour chaque itération de h ou sept fois g pour trois itérations de h ? Ce paragraphe se propose d'apporter quelques éclaircissements. La notion de direction de l'itération ζ prend un sens précis lié à la fréquence des itérations individuelles.

On distingue ici les mots : itération et application. Soit l'application f_ℓ de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} : $a \mapsto a_{1\ell} = f_\ell(a)$. Posons $a = (a_\ell, a'_\ell)$ où a'_ℓ désigne les coordonnées fixées autres que a_ℓ .

Définition

On appelle itération individuelle $f_\ell(a)$, $\ell = 1, 2, \dots, d$, notée encore f_ℓ , l'injection canonique f_ℓ de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d associée à l'application f_ℓ de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , où les a'_ℓ restent fixées. Une itération traditionnelle f sera donc la composée des d itérations individuelles composant f .

Proposition 2

- Si le domaine S_ζ est adhérent, l'itération individuelle $a_{1\ell} = f_\ell(a)$ agit asymptotiquement, en général, comme une dérivation $\partial / \partial a_\ell$ sur l'écart résolvant $e_f^n(a, vs)$: quand $n_\ell \rightarrow \infty$:

$$\lim_{a \rightarrow 0} e_f^n(f^p(a), vs) / a^p = \lambda^p e_f^{n+p}(0, vs) \text{ pour tout multi indice } p = (p_1, \dots, p_\ell, \dots, p_d).$$

- Si la composition asymptotique des dérivations $z_\ell = n_\ell / \sum_\ell n_\ell$ respecte des fréquences asymptotiques $\zeta_\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n_\ell / \sum_\ell n_\ell$, la distribution finale va dépendre de ces fréquences ζ_ℓ . L'itération traditionnelle se traduit en fin de compte par une fréquence $\zeta_\ell = 1/d$.

Dans $\partial^n e^{vf(a)} / \partial a^n$, la transformation $y = vs$ donne une fonction $h_n(a, s) = \partial^n e^{vf(a)} / \partial a^n$ dont la partie polynomiale détermine les zéros $s_n = y_n / v$ adhérents à $s \in S_\zeta$.

L'itération individuelle $a_{1\ell} = f_\ell(a)$ va transformer p en p_{f_ℓ} , p_{f_ℓ} en $p_{f_\ell \circ f_\ell}$ et $h_n(a, s)$ en $h_n(f_\ell(a), s)$. Si $a = (a_\ell, a'_\ell)$, les a'_ℓ étant fixées, appliquons la formule de la moyenne à :

$$h_n(f_\ell(a), s) - h_n(a, s) = \int_{a_\ell}^{f_\ell(a)} \partial h_n(x, s) / \partial a_\ell dx = (f_\ell(a) - a_\ell) \partial h_n(x_\ell, a'_\ell, s) / \partial a_\ell$$
avec $x_\ell \in (a_\ell, f_\ell(a))$.

Choisissons $s \in S_\zeta$. Si S_ζ est l'adhérence, étant donné $\varepsilon > 0$, fixons $n > n_\varepsilon$: il existe $s_n = y_n / \nu$ tel que $|s_n - s| < \varepsilon$ et $e_f^n(s_n) = 0$. Prenons $a'_\ell = 0'_\ell$ et $a_\ell \rightarrow 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ arbitraire :

$h_n(f_\ell(a), s) / a_\ell \rightarrow (\lambda_\ell - 1) \partial h_n(a, s_n) / \partial a_\ell |_{a=0}$. Le résultat reste vrai à la limite. Ainsi f_ℓ agit, en général, comme une dérivation $\partial / \partial a_\ell$ sur $\partial^n e^{vsf(a)} / \partial a^n$ en $a = 0$.

Itérons les f_ℓ avec des fréquences $p = (p_\ell)$ indépendamment de $n > n_\varepsilon$ fixé. Si S_ζ est l'adhérence, on peut à chaque étape trouver un s_{n+k} $k = (1), \dots, (p)$ dans le voisinage de s annulant $e_f^{n+k}(s)$ et répéter ainsi l'opération. Tout se passe alors comme si l'on dérivait p fois par rapport à a :
 $h_n(f^p(a), s) / a^p \rightarrow \lambda^p h_{n+p}(a, s) |_{a=0}$.

Itérons f de sorte que les dérivations $z_\ell = p_\ell / \sum p_\ell$ respectent des fréquences $\zeta_\ell = \lim_{p \rightarrow \infty} p_\ell / \sum p_\ell$ et faisons tendre p vers l'infini. $\zeta_\ell = \lim_{p \rightarrow \infty} (p_\ell + n_\ell) / \sum (p_\ell + n_\ell)$. Ainsi, l'itération traditionnelle se traduit par avec une fréquence égale par rapport à chaque composante de a : $\zeta_\ell = 1 / d$.

Remarques

- On étudiera dans l'article suivant la question des cycles associés aux itérations de f : $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(n)} = f^{(n-1)} \circ f$ et les ensembles $S_\zeta^{(2)}$, $S_\zeta^{(n)}$ qui peuvent leur être associés. On verra que, même si tous ces cycles sont répulsifs jusqu'à l'ordre n , le cycle d'ordre $n+1$ peut être attractif et « masquer » ces distributions intrinsèques. En première analyse, ces distributions intrinsèques ne deviendront apparentes que lorsque tous les cycles d'ordre quelconque seront répulsifs. C'est ce que l'on constate pour la logistique $f = \lambda(a - a^2)$ lorsque l'on fait varier le paramètre λ . Mais l'on verra que des situations plus compliquées peuvent apparaître.

- La transformation de Fourier, c'est-à-dire la fonction caractéristique, est préférée par les probabilistes : elle gagne parfois en généralité pour certaines fonctions f .

VI- Exemples d'application

- **La logistique $f = \lambda(a - a^2)$ en dimension 1.** Si $4 \geq \lambda \geq 1$, f applique le compact $[f(\lambda/4), \lambda/4]$ dans lui-même. Formons l'écart relatif à $f : e_f^n(y) |_{a=0} = y^n - H_n(y)$ où $H_n(y) = H_n(\sqrt{\lambda y/2})(\sqrt{2\lambda y})^n$ avec H_n polynôme d'Hermite d'ordre n . Or, la distribution des zéros de H_n , notée t , est asymptotiquement la loi semi-circulaire de Wigner: $q(t)dt = k\sqrt{1-t^2} dt$. $q(1) = q(-1) = 0$. Donc $t = c\sqrt{y}/\nu$ avec $c = \sqrt{\lambda/2}$ et $\nu = \sqrt{2n+1}$ suit la loi semi-circulaire. La distribution $p_1(s)$ de la variable $s = y/2n+1$ devra vérifier : $t = r\sqrt{s}$ et :
 $p_1(s)ds = -(dq(t)/dt)dt = kr / \left(2s\sqrt{s(1-r^2s)}\right) ds$ et $p(s) = sp_1(s)$. La densité de la mesure

invariante est donc une bêta $\beta(1/2, 1/2)$: $p(s) = \frac{k'}{\sqrt{s(1-r^2s)}}$, formule obtenue par Kawamura [5] à

l'aide des algèbres de Cuntz-Krieger et qui généralise le célèbre résultat de Ulam et Von Neuman. Mais cette distribution sera masquée tant qu'il existera des cycles attractifs pour les valeurs de λ .

- Approche sommaire de l'itération de Julia

Prévenons d'abord le lecteur que cet exemple n'a pas la prétention de caractériser les ensembles de Julia pour lesquels des travaux considérables ont déjà été faits. On ne se préoccupe ici ni des cycles ni des résonances.

Soit l'itération de Julia $f(z) = z^2 + \alpha$ dans \mathbb{C} , avec comme points fixes $a_0^2 + \alpha = a_0$. On note ici en « gras » les vecteurs de R^2 associés aux nombres complexes : $\mathbf{a} = (a, b)$, $\mathbf{a}_0 = (a_0, b_0)$, $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{a}_0$ et la fonction $f(z)$ s'écrit $\mathbf{f} = (a^2 - b^2 + 2a_0a - 2b_0b, 2ab + 2a_0b + 2b_0a)$ centrée aux points fixes $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{a}_0$. On suppose qu'elle applique un compact C dans lui-même.

Soient $\mu_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$, $\mu_y = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha = \sqrt{(\mu_y + x) / 2\mu_y}$ et $\beta = \sqrt{(\mu_y - x) / 2\mu_y}$.

On note les matrices orthogonales :

$$\mu_0 \mathbf{O}_0 = \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix} \quad \mu_y \mathbf{O}_y = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \quad \mathbf{O}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Pour éviter toute confusion, le signe ' désigne ici la transposition. On remarque que : $\mathbf{O}_\alpha' \mathbf{O}_0 \mathbf{O}_\alpha = \mathbf{O}_0$

le théorème principal conduit à considérer la fonction : $\mathbf{y}'\mathbf{f}(\mathbf{a}) = 2\mathbf{y}'\mathbf{L}(\mathbf{a}) + \mathbf{y}'\mathbf{Q}(\mathbf{a})$:

- la partie linéaire $\mathbf{y}'\mathbf{L}(\mathbf{a}) = x(a_0a - b_0b) + y(a_0b + b_0a) = \mu_0 \mathbf{y}'\mathbf{O}_0 \mathbf{a}$ où \mathbf{O}_0 est orthogonale.

- la hessienne $\mathbf{y}'\mathbf{Q}(\mathbf{a}) = xa^2 - xb^2 + 2yab = \mu_y \mathbf{a}'\mathbf{O}_y \mathbf{a}$ où \mathbf{O}_y est symétrique et orthogonale.

Les valeurs propres de la partie linéaire sont a_0 et $\overline{a_0}$, ce qui redonne l'itération complexe initiale et sa conjuguée. Ces deux valeurs propres sont supposées ici supérieures à 1 en module, donc sans résonance.

La hessienne $\mathbf{y}'\mathbf{Q}(\mathbf{a})$ a pour équation caractéristique $x^2 + y^2 - \mu_y^2 = 0$ avec deux valeurs propres, l'une positive μ_y , l'autre négative $-\mu_y$. En posant $\mathbf{y} = \mathbf{O}_\alpha' \mathbf{t}$ et $\mathbf{a} = \mathbf{O}_\alpha \mathbf{u}$ avec $\mathbf{u} = (u, v)$ et $\mathbf{t} = (r, t)$:

$$\mathbf{y}'\mathbf{f}(\mathbf{a}) = 2\mu_0 \mathbf{t}' \mathbf{O}_\alpha' \mathbf{O}_0 \mathbf{O}_\alpha \mathbf{u} + \mu_y u^2 - \mu_y v^2 = 2r(a_0u - b_0v) + 2t(a_0v + b_0u) + \mu_y u^2 - \mu_y v^2$$

donc : $\mathbf{y}'\mathbf{f}(\mathbf{a}) = (2ra_0 + 2tb_0)u + \mu_y u^2 + (2ta_0 - 2rb_0)v - \mu_y v^2$. De même : $\mathbf{y}'\mathbf{a} = \mathbf{t}'\mathbf{u}$. Dans les sous espaces propres orthogonaux, l'application se décompose alors en deux itérations indépendantes : $(2ra_0 + 2tb_0)u + \mu_y u^2$ et $(2ta_0 - 2rb_0)v - \mu_y v^2$. Plusieurs situations sont possibles.

Par exemple, si l'on part d'une situation initiale bien choisie où l'on peut remplacer u par $-u$ dans la première itération, alors cette itération devient $(2ra_0 + 2tb_0)u - \mu_y u^2$ à terme quadratique négatif.

L'écart résolvant donne deux polynômes d'Hermite : $H_n((2ra_0 + 2tb_0) / \sqrt{2\mu_y})$

et $H_n((2ta_0 - 2rb_0) / \sqrt{2\mu_y})$ permettant de déterminer deux distributions invariantes indépendantes

pour $(2r_1a_0 + 2t_1b_0) / \sqrt{2\mu_y}$ et pour $(2t_1a_0 - 2r_1b_0) / \sqrt{2\mu_y}$ où $r_1 = r / \sqrt{2n+1}$ et $t_1 = t / \sqrt{2n+1}$

qui suivent asymptotiquement des lois semi-circulaires indépendantes. La transformation $\mathbf{t}_1 \sqrt{2n+1} = \mathbf{O}_\alpha' \mathbf{y}$ permet, via le théorème de la densité, de déterminer les distributions pour l'application initiale de Julia.

On peut donc trouver une distribution intrinsèque sans supposer que l'itération applique un compact dans lui-même. Mais cette hypothèse est remplacée ici par le fait que l'ensemble de Julia est défini comme l'ensemble de départ ayant pour itérés à l'infini des points à distance finie.

Bibliographie

[1] G. Cirier, Solution stationnaire de l'équation associée à un opérateur de Perron-Frobenius dans le cas de difféomorphismes à points fixes, Pub. Inst. Stat. Univ. Paris XLIX, fasc.1, 2004, 35 à 64.

[2] A. Douady et J. H. Hubbard, Etude dynamique des polynômes complexes I, II, Publ. Math.

Orsay 84-02 et 85-05, (1984/85).

- [3] M. C. Gutzwiller, Chaos in classical & quantum mechanics, IAM 1, Springer-Verlag (1990).
- [4] J. H. Hubbard, Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems of J.-C. Yoccoz, Topological Methods in Modern Mathematics, ed. Goldberg (1993). 53:1120, (1947).
- [5] K. Kawamura, The Perron-Frobenius operators, invariant measures and representations of the Cuntz-Krieger algebras, J. Math. Phys. **46**, 083514 (2005).
- [6] A. Lasota and M.C. Mackey, Chaos, Fractals and Noise, Second Edition, Springer-Verlag (1991).
- [7] D. Ruelle, formalisme thermodynamique, Lect. notes in mathematics, Vol. 567, Springer(1977)
- [8] S.M. Ulam and J. von Neumann, On combination of stochastic and deterministic processes, Bull. AMS,
- [9] J.-C. Yoccoz, Equations différentielles et systèmes dynamiques, Cours 2003-2004 au Collège de France.