



HAL
open science

Le théorème de renouvellement multi-dimensionnel, dans le "cas lattice".

Cédric Lecouvey, Emmanuel Lesigne, Marc Peigné

► **To cite this version:**

Cédric Lecouvey, Emmanuel Lesigne, Marc Peigné. Le théorème de renouvellement multi-dimensionnel, dans le "cas lattice".. 2010. hal-00522875

HAL Id: hal-00522875

<https://hal.science/hal-00522875>

Preprint submitted on 2 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE THÉORÈME DE RENOUVELLEMENT MULTI-DIMENSIONNEL, DANS LE “CAS LATTICE”.

CÉDRIC LECOUCVEY, EMMANUEL LESIGNE ET MARC PEIGNÉ

1. INTRODUCTION

Cette note donne une rédaction complète d’un théorème de renouvellement multi-dimensionnel dans le cas des grandes déviations. La démonstration suit fidèlement celle donnée par Carlsson et Wainger dans [1], mais leur argument concernait le cas des variables aléatoires avec densité, alors que nous étudions ici le cas où la loi est portée par un sous-groupe discret. A noter que les arguments sont grandement inspirés de ceux utilisés par Richter dans l’étude du Théorème Limite Local ([3]).

Nous utilisons ce théorème de renouvellement dans [2] pour obtenir une forme faible du théorème de renouvellement pour une marche aléatoire conditionnée à rester dans un cône. Cette forme faible est un théorème quotient. À son tour, ce théorème quotient est utilisé pour établir le lien entre d’une part *une marche aléatoire dans le réseau \mathbb{Z}^d et son conditionnement* et d’autre part *une chaîne de Markov sur un cristal de Kashiwara et sa transformée par une action combinatoire définie par la structure de graphe sous-jacente.*

2. ÉNONCÉS

Soit $(X^{(n)})_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans \mathbb{Z}^d .

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- (Adaptation) Le groupe engendré par le support de la loi de X est \mathbb{Z}^d .
- (Moments) Les variables aléatoires ont un moment exponentiel : il existe $\eta > 0$ tel que

$$\mathbb{E}(\exp(\eta \|X\|)) < +\infty.$$

- (Décentrage) $m := \mathbb{E}(X)$ n’est pas le vecteur nul.

Nous notons $S^{(n)} := X^{(1)} + X^{(2)} + \dots + X^{(n)}$.

Si $x \in \mathbb{R}^d$, nous notons y son projeté orthogonal sur l’hyperplan m^\perp .

Le vecteur aléatoire Y , image de X par la projection orthogonale sur m^\perp , est centré, et sa matrice de covariances (exprimée dans une base orthonormée de m^\perp) est notée B . Cette matrice est supposée inversible (sinon, on ne s’est pas placé dans la bonne dimension). Nous notons Q la forme quadratique sur m^\perp associée à B , et $\sigma^2 = \det(B)$. Nous notons enfin Q' la forme quadratique sur m^\perp associée à B^{-1} .

Le théorème de renouvellement donne un équivalent de l’espérance du nombre de passage de la marche aléatoire $(S^{(n)})$ par un point x de \mathbb{Z}^d quand ce point x “part à l’infini dans la direction de m ”.

Théorème 1. *Nous avons*

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S^{(n)} = x) \sim \frac{\|m\|^{d-2}}{\sigma(2\pi)^{(d-1)/2}} \frac{1}{(x \cdot m)^{(d-1)/2}} \exp\left((x \cdot m) \lambda\left(\frac{y}{x \cdot m}\right)\right)$$

quand le point $x \in \mathbb{Z}^d$ tend vers l'infini avec

$$x \cdot m \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\|y\|}{x \cdot m} \rightarrow 0,$$

où λ est une fonction analytique sur un voisinage de zéro dans \mathbb{R}^{d-1} telle que

$$\lambda(z) = -\frac{1}{2}\|m\|^2 Q'(z) + O(\|z\|^3).$$

Corollaire 1. *Nous avons*

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S^{(n)} = x) \sim \frac{\|m\|^{d-2}}{\sigma(2\pi)^{(d-1)/2}} \frac{1}{(x \cdot m)^{(d-1)/2}} \exp\left(-\frac{\|m\|^2}{2} \frac{1}{x \cdot m} Q'(y)\right)$$

quand le point $x \in \mathbb{Z}^d$ tend vers l'infini avec

$$x \cdot m \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\|y\|^3}{(x \cdot m)^2} \rightarrow 0.$$

Corollaire 2. *Nous avons*

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S^{(n)} = x) \sim \frac{\|m\|^{d-2}}{\sigma(2\pi)^{(d-1)/2}} \frac{1}{(x \cdot m)^{(d-1)/2}}$$

quand le point $x \in \mathbb{Z}^d$ tend vers l'infini avec

$$x \cdot m \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\|y\|^2}{x \cdot m} \rightarrow 0.$$

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Nous notons φ la fonction caractéristique de la loi de X ,

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{-it \cdot X}) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{-it \cdot x} \mathbb{P}(X = x).$$

C'est une fonction définie et continue sur \mathbb{R}^d , \mathbb{Z}^d -périodique et analytique sur un voisinage de zéro (grâce à l'hypothèse de moments). De plus (grâce à l'hypothèse d'adaptation) $\varphi(t) = 1$ si et seulement si $t \in \mathbb{Z}^d$. Notons u la projection sur m^\perp de la variable $t \in \mathbb{R}^d$. Au voisinage de $t = 0$, nous avons

$$\varphi(t) = 1 - it \cdot m - \frac{1}{2}Q(u) + o(|t \cdot m| + \|u\|^2)$$

Sur un voisinage de zéro, nous avons donc $|1 - \varphi(t)| \geq c(|t \cdot m| + \|u\|^2)$, et nous en déduisons que la fonction

$$\frac{1}{1 - \varphi(t)}$$

est intégrable sur les parties bornées de \mathbb{R}^d .

(En effet, la fonction $(t_1, t_2, \dots, t_d) \mapsto 1/(t_1 + t_2^2 + \dots + t_d^2)$ est localement intégrable sur \mathbb{R}^d .)

Nous avons

$$\varphi(t)^n = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{-it \cdot x} \mathbb{P}(S^{(n)} = x)$$

et la formule d'inversion de Fourier nous donne

$$(1) \quad \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S^{(n)} = x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, +\pi]^d} \frac{e^{it \cdot x}}{1 - \varphi(t)} dt.$$

Nous noterons $I = I(x)$ cette dernière intégrale.

Nous considérons une base orthonormée (b_1, b_2, \dots, b_d) de \mathbb{R}^d dont le dernier vecteur est $b_d = \frac{1}{\|m\|} m$ et telle que la forme quadratique Q exprimée dans la base $(b_1, b_2, \dots, b_{d-1})$ est diagonale :

$$Q \left(\sum_{j=1}^{d-1} y_j b_j \right) = \sum_{j=1}^{d-1} q_j y_j^2, \quad \text{avec (par hypothèse) } q_j > 0, 1 \leq j \leq d-1.$$

Nous notons dorénavant (t_1, t_2, \dots, t_d) les coordonnées de t dans la nouvelle base. Nous avons $dt = dt_1 dt_2 \dots dt_d$ et

$$\varphi(t) = 1 - it_d \|m\| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d-1} q_j t_j^2 + \text{termes quadratiques en } t_d t_j + \text{termes d'ordre supérieur.}$$

Nous écrivons $t = (u, t_d)$, d'où

$$(2) \quad I = \int_{[-\pi, +\pi]^{d-1}} e^{iu \cdot x} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it_d x_d}}{1 - \varphi(t)} dt_d \right) du.$$

Nous allons considérer t comme une variable complexe.

Puisque $\frac{\partial \varphi}{\partial t_d} \neq 0$, la résolution de l'équation implicite $\varphi(u, h(u)) = 1$ au voisinage de $u = 0$ définit une fonction analytique h telle que $h(0) = 0$. Cette fonction vérifie, pour $1 \leq j, k \leq d-1$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(u, h(u)) + \frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(u, h(u)) \frac{\partial h}{\partial u_j}(u) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_j \partial t_k}(u, h(u)) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_j \partial t_d}(u, h(u)) \frac{\partial h}{\partial u_k}(u) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_k \partial t_d}(u, h(u)) \frac{\partial h}{\partial u_j}(u) \\ + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_d^2}(u, h(u)) \frac{\partial h}{\partial u_j}(u) \frac{\partial h}{\partial u_k}(u) + \frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(u, h(u)) \frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_k}(u) = 0. \end{aligned}$$

En particulier

$$(3) \quad \frac{\partial h}{\partial u_j}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_k}(0) = \delta_{jk} i q_j / \|m\|.$$

Nous avons donc, au voisinage de $u = 0$,

$$(4) \quad h(u) = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{q_j}{\|m\|} u_j^2 + O(\|u\|^3),$$

et, au voisinage de zéro dans \mathbb{R}^{d-1} , la partie imaginaire de $h(u)$ est positive.

Nous fixons un nombre $\rho_1 > 0$ suffisamment petit pour que les variables considérées restent dans le domaine d'analyticité de la fonction φ , et dans le domaine sur lequel $\frac{\partial \varphi}{\partial t_d}$ ne s'annule pas.

L'équation implicite nous donne :

il existe $\rho > 0$ tel que si $u \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus \{0\}$ et si $|u_j| \leq \rho$, $1 \leq j \leq d-1$, alors l'équation $\varphi(u, t_d) = 1$ a une unique solution (d'ordre 1) $t_d = h(u)$, avec $\text{Im}(h(u)) \geq 0$ et $|h(u)| < \rho_1$, et donc dans le rectangle $\{a + ib \mid -\pi \leq a \leq \pi, 0 \leq b \leq \rho_1\}$, la fonction méromorphe $(1 - \varphi(u, \cdot))^{-1}$ possède un unique pôle simple. Si $|u_j| \leq \rho$, $1 \leq j \leq d-1$, une intégration sur le bord de ce rectangle donne par le théorème des résidus :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it_d x_d}}{1 - \varphi(t)} dt_d + i \int_0^{\rho_1} \frac{e^{i(\pi+is)x_d}}{1 - \varphi(u, \pi + is)} ds - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(t_d+i\rho_1)x_d}}{1 - \varphi(u, t_d + i\rho_1)} dt_d - i \int_0^{\rho_1} \frac{e^{i(-\pi+is)x_d}}{1 - \varphi(u, -\pi + is)} ds = -2i\pi e^{ih(u)x_d} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(u, h(u)) \right)^{-1}.$$

Dans le membre de gauche la deuxième et la quatrième intégrale disparaissent par périodicité de φ . La quantité $|1 - \varphi(u, t_d + i\rho_1)|$ ne s'annule pas quand u varie dans le domaine considéré et t_d varie dans \mathbb{R} . Elle est donc minorée par une constante > 0 . Nous en déduisons que la troisième intégrale est dominée par $e^{-\rho_1 x_d}$ quand x_d tend vers l'infini, uniformément en u .

Nous avons donc, si $|u_j| \leq \rho$, $1 \leq j \leq d-1$,

$$(5) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it_d x_d}}{1 - \varphi(t)} dt_d = -2i\pi e^{ih(u)x_d} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(u, h(u)) \right)^{-1} + O(e^{-\rho_1 x_d}).$$

Sur tout complémentaire d'un voisinage de zéro dans $[-\pi, \pi]^d$ la fonction $|1 - \varphi|$ est minorée par un nombre > 0 . Donc, par continuité uniforme de φ , il existe $\rho_2 > 0$ et $c > 0$ tels que : si $u \in [-\pi, \pi]^{d-1}$ avec $\max_{1 \leq j \leq d-1} |u_j| \geq \rho$ et si $t_d \in \mathbb{C}$ avec $|t_d| \leq \rho_2$, alors $|1 - \varphi(u, t_d)| \geq c$. Nous procédons de nouveau à une intégration autour d'un rectangle du plan complexe, identique au précédent, mais de hauteur ρ_2 . Cette fois-ci il n'y a pas de pôle et nous obtenons : si $u \in [-\pi, \pi]^{d-1}$ avec $\max_{1 \leq j \leq d-1} |u_j| \geq \rho$, alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it_d x_d}}{1 - \varphi(t)} dt_d = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(t_d+i\rho_2)x_d}}{1 - \varphi(u, t_d + i\rho_2)} dt_d,$$

et donc

$$(6) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it_d x_d}}{1 - \varphi(t)} dt_d = O(e^{-\rho_2 x_d}),$$

uniformément en u dans le domaine considéré.

Rassemblant (2), (5) et (6), nous obtenons

$$(7) \quad I = -2i\pi \int_{[-\rho, \rho]^{d-1}} e^{i(u \cdot x + h(u) \cdot x_d)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(u, h(u)) \right)^{-1} du + O(e^{-\rho_1 x_d}) + O(e^{-\rho_2 x_d}).$$

Dans le but d'appliquer la méthode de la phase stationnaire, nous voulons résoudre l'équation $\text{grad}(u \cdot x + h(u) \cdot x_d) = 0$, c'est-à-dire $\text{grad}h(u) = -y/x_d$. D'après (3), la matrice jacobienne de $\text{grad}h$ en zéro est diagonale de coefficients diagonaux $iq_j/\|m\|$, $1 \leq j \leq d-1$. Par le théorème d'inversion locale, il existe donc une fonction $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{d-1})$ analytique sur un voisinage de zéro dans \mathbb{C}^{d-1} , à valeurs dans \mathbb{C}^{d-1} telle que

$$\psi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \text{grad}h(\psi(w)) = -w,$$

et le jacobien de la fonction ψ en zéro est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $i\|m\|/q_j$.

Nous supposons que le vecteur y/x_d est suffisamment petit pour rester dans le domaine de définition de la fonction ψ . Notre but dans les lignes suivantes est de remplacer les intervalles d'intégration $[-\rho, \rho]$ par des intervalles $[\psi_j(y/x_d) - \rho', \psi_j(y/x_d) + \rho']$, pour un petit $\rho' > 0$.

Pour alléger les notations, nous posons $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{d-1}) := \psi(y/x_d)$.

Effectuons de nouveau des intégrations de fonctions analytiques sur les bords de rectangles du plan complexe : dans l'intégrale multiple apparaissant dans (7), nous pouvons remplacer chaque intégrale du type

$$\int_{-\rho}^{\rho} f(u_j) du_j$$

par

$$(8) \quad \int_{[-\rho, -\rho + i\text{Im } \psi_j]} f(z) dz - \int_{[\rho, \rho + i\text{Im } \psi_j]} f(z) dz + \int_{-\rho}^{\rho} f(u_j + i\text{Im } \psi_j) du_j.$$

Dans la suite nous utilisons la notation c pour désigner une constante > 0 dépendant des paramètres fixés avant son apparition, et qui peut varier d'une ligne à l'autre.

Un développement limité de la fonction h en zéro est donné par (4). Nous pouvons choisir ρ suffisamment petit pour assurer que :

pour tout $u \in \mathbb{C}^{d-1}$ tel que $\max_{1 \leq j \leq d-1} |u_j| \leq \rho$,

$$\text{Re}(ih(u)) \leq -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{q_j}{\|m\|} \text{Re}(u_j^2) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{q_j}{\|m\|} ((\text{Re } u_j)^2 - (\text{Im } u_j)^2).$$

Nous supposons qu'un tel choix de ρ avait été fait, et nous pouvons affirmer que : si $\max_j |u_j| \leq \rho$, si $\max_j |\text{Im } u_j|$ est assez petit devant ρ et si $|\text{Re } u_{j_0}| \geq \rho/4$ pour un j_0 particulier, alors

$$\text{Re}(ih(u)) \leq -c\rho^2,$$

et donc

$$(9) \quad |\exp(i(u \cdot x + h(u)x_d))| \leq \exp\left(\sum_{j=1}^{d-1} |x_j \text{Im } u_j| - cx_d \rho^2\right).$$

Nous déduisons de (9) que si une des coordonnées u_j est dans un segment du type $[-\rho, -\rho + i\text{Im } \psi_j]$ ou $[\rho, \rho + i\text{Im } \psi_j]$, si $\max_j |\text{Im } u_j|$ est assez petit devant ρ et si $\|y\| = \|(x_1, \dots, x_{d-1})\|$ est assez petit devant x_d alors

$$|\exp(i(u \cdot x + h(u)x_d))| \leq \exp(-cx_d).$$

Rappelons que $\|\psi\|$ tend vers zéro quand $\|y\|/x_d$ tend vers zéro. Dans les expressions intégrales de (8) les parties imaginaires des variables u_j varient donc dans un voisinage de zéro arbitrairement petit pourvu que $\|y\|$ soit assez petit devant x_d . Dans l'estimation (7), et après la transformation (8), nous pouvons donc regrouper dans un reste les contributions de toutes les intégrales sur des segments $[-\rho, -\rho + i\text{Im } \psi_j]$ ou $[\rho, \rho + i\text{Im } \psi_j]$. Et nous arrivons à la formule suivante :

$$(10) \quad I = -2i\pi \int_{-\rho}^{\rho} \dots \int_{-\rho}^{\rho} e^{i(\tilde{u} \cdot x + h(\tilde{u})x_d)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(\tilde{u}, h(\tilde{u}))\right)^{-1} du + O(e^{-cx_d}),$$

où $\tilde{u} := u + i\text{Im } \psi$.

Nous supposons que le vecteur y/x_d est suffisamment petit pour que, pour chaque j , $|\operatorname{Re}(\psi_j)| \leq \rho/4$; nous avons alors

$$[\psi_j - \rho/2, \psi_j + \rho/2] \subset [i\operatorname{Im} \psi_j - \rho, i\operatorname{Im} \psi_j + \rho],$$

et si \tilde{u}_j appartient au second segment sans appartenir au premier, alors $|\operatorname{Re} \tilde{u}_j| \geq \rho/4$.

Or, comme nous l'avons déjà vu après (9), la contribution de l'intégrale

$$\int_I e^{i(\tilde{u} \cdot x + h(\tilde{u})x_d)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(\tilde{u}, h(\tilde{u})) \right)^{-1} d\tilde{u}_j$$

pour un segment I sur lequel $|\operatorname{Re} \tilde{u}_j| \geq \rho/4$ donne un terme en $O(e^{-cx_d})$ dans le calcul de l'intégrale multiple. Nous en déduisons que

$$(11) \quad I = -2i\pi \int_{-\rho/2}^{\rho/2} \dots \int_{-\rho/2}^{\rho/2} e^{i(\hat{u} \cdot x + h(\hat{u})x_d)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(\hat{u}, h(\hat{u})) \right)^{-1} du + O(e^{-cx_d}),$$

où $\hat{u} := u + \psi$.

Nous allons encore séparer le domaine d'intégration en deux parties : nous fixons un nombre réel $0 < \gamma < 1/2$ (et proche de $1/2$, avec des conditions qui seront précisées dans la suite) et nous coupons l'hypercube $[-\rho/2, \rho/2]^{d-1}$ en l'hypercube $[-x_d^{-\gamma}, x_d^{-\gamma}]^{d-1}$ et son complémentaire C .

Nous avons

$$\begin{aligned} \hat{u} \cdot x + h(\hat{u})x_d &= \hat{u} \cdot y + h(\hat{u})x_d \\ &= u \cdot y + h(\psi)x_d + \psi \cdot y + \frac{1}{2}x_d \sum_{j,k} \frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_k}(\psi) u_j u_k + x_d O(\|u\|^3), \end{aligned}$$

et donc

$$\operatorname{Im}(\hat{u} \cdot x + h(\hat{u})x_d) = \operatorname{Im} \left(h(\psi)x_d + \psi \cdot y + \frac{1}{2}x_d \sum_{j,k} \frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_k}(\psi) u_j u_k + x_d O(\|u\|^3) \right).$$

Nous savons que

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_k}(0) u_j u_k = \frac{i}{\|m\|} \sum_j q_j u_j^2.$$

Donc, si le vecteur y/x_d est suffisamment petit, nous avons

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{2}x_d \sum_{j,k} \frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_k}(\psi) u_j u_k \right) \geq cx_d \|u\|^2.$$

Si le vecteur u est dans C , nous obtenons ainsi

$$\operatorname{Im}(\hat{u} \cdot x + h(\hat{u})x_d) = \operatorname{Im}(h(\psi)x_d + \psi \cdot y) + \text{un reste minoré par } cx_d^{1-2\gamma},$$

et

$$(12) \quad \int_C e^{i(\hat{u} \cdot x + h(\hat{u})x_d)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(\hat{u}, h(\hat{u})) \right)^{-1} du = e^{i(h(\psi)x_d + \psi \cdot y)} O(e^{-cx_d^{1-2\gamma}}).$$

Pour évaluer l'intégrale sur le domaine $u \in [-x_d^{-\gamma}, x_d^{-\gamma}]^{d-1}$, nous écrivons

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(\hat{u}, h(\hat{u})) \right)^{-1} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(\psi, h(\psi)) \right)^{-1} + O(x_d^{-\gamma}) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(\psi, h(\psi)) \right)^{-1} (1 + O(x_d^{-\gamma})),$$

et nous devons estimer

$$\int_{[-x_d^{-\gamma}, x_d^{-\gamma}]^{d-1}} \exp(i(\hat{u} \cdot x + h(\hat{u})x_d)) du.$$

Rappelons que par choix de la fonction ψ le gradient de la fonction $v \mapsto v \cdot x + h(v)x_d$ au point $v = \psi$ est nul. Ainsi, nous avons

$$\hat{u} \cdot x + h(\hat{u})x_d = \psi \cdot x + x_d h(\psi) + \frac{1}{2}x_d \sum_{j,k} \frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_k}(\psi) u_j u_k + x_d O(\|u\|^3).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{[-x_d^{-\gamma}, x_d^{-\gamma}]^{d-1}} e^{i(\hat{u} \cdot x + h(\hat{u})x_d)} du \\ &= e^{i(\psi \cdot x + x_d h(\psi))} \int_{[-x_d^{-\gamma}, x_d^{-\gamma}]^{d-1}} e^{\frac{i}{2}x_d \sum_{j,k} \frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_k}(\psi) u_j u_k} e^{O(x_d \|u\|^3)} du \\ &= e^{i(\psi \cdot x + x_d h(\psi))} \int_{[-x_d^{-\gamma}, x_d^{-\gamma}]^{d-1}} e^{\frac{i}{2}x_d \sum_{j,k} \frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_k}(\psi) u_j u_k} (1 + O(x_d^{1-3\gamma})) du \\ &= e^{i(\psi \cdot x + x_d h(\psi))} \left(\int_{[-x_d^{-\gamma}, x_d^{-\gamma}]^{d-1}} e^{\frac{i}{2}x_d \sum_{j,k} \frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_k}(\psi) u_j u_k} du + O(x_d^{1-3\gamma-(d-1)\gamma}) \right). \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $v = x_d^{1/2}u$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{[-x_d^{-\gamma}, x_d^{-\gamma}]^{d-1}} e^{\frac{i}{2}x_d \sum_{j,k} \frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_k}(\psi) u_j u_k} du \\ &= x_d^{-(d-1)/2} \int_{[-x_d^{1/2-\gamma}, x_d^{1/2-\gamma}]^{d-1}} e^{\frac{i}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 h}{\partial v_j \partial v_k}(\psi) v_j v_k} dv. \end{aligned}$$

Nous notons $H(u)$ la matrice hessienne de $-ih$ au point u , et H sa valeur particulière au point ψ :

$$H = H(\psi) := -i \left[\frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_k}(\psi(y/x_d)) \right]_{1 \leq j, k \leq d-1}.$$

Puisque le vecteur ψ est proche de zéro, la matrice H est proche de la matrice diagonale de coefficients diagonaux $iq_j/\|m\|$, $1 \leq j \leq d-1$. En considérant la détermination principale de $z^{1/2}$ dans le demi-plan $\text{Re}(z) > 0$, nous pouvons considérer l'intégrale gaussienne complexe

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{\frac{i}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 h}{\partial v_j \partial v_k}(\psi) v_j v_k} dv = (2\pi)^{(d-1)/2} (\det(H))^{-1/2},$$

et nous obtenons

$$\int_{[-x_d^{-\gamma}, x_d^{-\gamma}]^{d-1}} e^{\frac{i}{2}x_d \sum_{j,k} \frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_k}(\psi) u_j u_k} du = \left(\frac{2\pi}{x_d} \right)^{(d-1)/2} (\det(H))^{-1/2} + o(x_d^{-(d-1)/2}).$$

Finalement, si nous avons choisi γ tel que $\gamma > \frac{d+1}{2(d+2)}$, nous avons $1 - 3\gamma - (d-1)\gamma < -(d-1)/2$, et nous arrivons à

$$\int_{[-x_d^{-\gamma}, x_d^{-\gamma}]^{d-1}} e^{i(\hat{u} \cdot x + h(\hat{u})x_d)} du = \left(\frac{2\pi}{x_d} \right)^{(d-1)/2} (\det(H))^{-1/2} e^{i(\psi \cdot x + x_d h(\psi))} (1 + o(1)),$$

et

$$(13) \quad \int_{[-x_d^{-\gamma}, x_d^{-\gamma}]^{d-1}} e^{i(\hat{u} \cdot x + h(\hat{u})x_d)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(\hat{u}, h(\hat{u})) \right)^{-1} du \\ = \left(\frac{2\pi}{x_d} \right)^{(d-1)/2} (\det(H))^{-1/2} e^{i(\psi \cdot x + x_d h(\psi))} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(\psi, h(\psi)) \right)^{-1} (1 + o(1))$$

En rassemblant (1), (11), (12) et (13), nous obtenons

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S^{(n)} = x) \sim \frac{-i}{(2\pi x_d)^{(d-1)/2}} (\det(H))^{-1/2} e^{i(\psi \cdot x + x_d h(\psi))} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(\psi, h(\psi)) \right)^{-1}.$$

Pour obtenir la conclusion du théorème, nous devons transformer cette expression. Nous avons $x_d = x \cdot m / \|m\|$ et, quand y/x_d tend vers zéro,

$$\det(H) \sim \det(H(0)) = \sigma^2 \|m\|^{-d+1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(\psi, h(\psi)) \sim \frac{\partial \varphi}{\partial t_d}(0, h(0)) = -i \|m\|.$$

D'où

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S^{(n)} = x) \sim \frac{\|m\|^{d-2}}{\sigma(2\pi)^{(d-1)/2}} \frac{1}{(x \cdot m)^{(d-1)/2}} \exp\left((x \cdot m) \lambda\left(\frac{y}{x \cdot m}\right)\right),$$

avec, pour z dans un voisinage de zéro dans \mathbb{C}^{d-1} ,

$$\lambda(z) = \frac{i}{\|m\|} (\psi(\|m\|z) \cdot \|m\|z + h(\psi(\|m\|z))).$$

Pour conclure, calculons le terme principal du développement en zéro de cette fonction analytique.

Nous avons

$$\psi(w) \cdot w = \left(\sum_{j=1}^{d-1} w_j \frac{\partial \psi}{\partial w_j}(0) \right) \cdot w + O(\|w\|^3) = i \|m\| \sum_{j=1}^{d-1} \frac{1}{q_j} w_j^2 + O(\|w\|^3),$$

d'après la forme connue de la matrice jacobienne de ψ en zéro.

Nous avons

$$\frac{\partial h \circ \psi}{\partial w_j}(w) = \sum_{\ell=1}^{d-1} \frac{\partial h}{\partial u_\ell}(\psi(w)) \frac{\partial \psi_\ell}{\partial w_j}(w) = - \sum_{\ell=1}^{d-1} w_\ell \frac{\partial \psi_\ell}{\partial w_j}(w),$$

d'après la construction de ψ . Les dérivées partielles d'ordre 1 de $h \circ \psi$ sont donc nulles en zéro, et

$$\frac{\partial^2 h \circ \psi}{\partial w_j \partial w_k}(w) = - \frac{\partial \psi_k}{\partial w_j}(w) + \sum_{\ell=1}^{d-1} w_\ell \frac{\partial^2 \psi_\ell}{\partial w_j \partial w_k}(w).$$

En particulier

$$\frac{\partial^2 h \circ \psi}{\partial w_j \partial w_k}(0) = - \frac{\partial \psi_k}{\partial w_j}(0) = -i \|m\| \frac{1}{q_j},$$

et donc

$$h(\psi(w)) = -\frac{1}{2} i \|m\| \sum_{j=1}^{d-1} \frac{1}{q_j} w_j^2 + O(\|w\|^3).$$

Ces expressions donnent la forme annoncée à la fonction λ .

RÉFÉRENCES

- [1] CARLSSON, HASSE ; WAINGER, STEPHEN, On the multidimensional renewal theorem. *J. Math. Anal. Appl.* 100 (1984), no. 1, 316–322.
- [2] LECOUCVEY, CÉDRIC ; LESIGNE, EMMANUEL ; PEIGNÉ, MARC, Random walks in Weyl chambers and crystals. En préparation.
- [3] RICHTER, VOLFGANG, Local limit theorems for large deviations. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)* 115 1957 53–56.

(Cédric Lecouvey, Emmanuel Lesigne et Marc Peigné) LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE THÉORIQUE (UMR CNRS 6083), UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS TOURS, FÉDÉRATION DE RECHERCHE DENIS POISSON, PARC DE GRANDMONT, 37200 TOURS, FRANCE

E-mail address: `cedric.lecouvey@lmpt.univ-tours.fr`, `emmanuel.lesigne@lmpt.univ-tours.fr`, `marc.peigne@lmpt.univ-tours.fr`