HAL open science

Diffusion d'un théorème : l'exemple d'un théorème de Robert de Montessus de Ballore, de 1902 à nos jours.

Hervé Le Ferrand

To cite this version:

Hervé Le Ferrand. Diffusion d'un théorème : l'exemple d'un théorème de Robert de Montessus de Ballore, de 1902 à nos jours.. 2010. hal-00521135v2

HAL Id: hal-00521135

https://hal.science/hal-00521135v2

Preprint submitted on 19 Oct 2010 (v2), last revised 28 May 2015 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Diffusion d'un théorème : l'exemple d'un théorème de Robert de Montessus de Ballore, de 1902 à nos jours

Hervé Le Ferrand *

19 octobre 2010

Résumé Nous nous intéressons à la diffusion d'un théorème de Robert de Montessus de Ballore, démontré en 1902 et portant sur la convergence d'une certaine fraction continue associée à une fonction analytique à l'origine et méromorphe dans un domaine contenant l'origine. Grâce d'une part à une recherche dans différentes bases de données proposant des documents numérisés et, d'autre part à des lettres faisant partie de la correspondance de Robert de Montessus que nous avons pu recueillir auprès de sa famille, nous montrons la genèse du théorème. Puis, nous mettons en v́idence le fait que ce résultat s'est rapidement diffusé parmi les mathématiciens travaillant dans ce domaine. Nous présentons une partie de notre travail sous la forme d'un graphe représentant les auteurs citant le théorème. Nous faisons en dernier lieu l'analyse du graphe.

Mots clés Robert de Montessus, diffusion d'un théorème, fractions continues, approximants de Padé, graphe.

Abstract During the year 1902, Robert de Montessus de Ballore proved his famous theorem on the convergence of Padé's approximants of meromorphic functions. We investigate the circulation of this theorem. First of all, the genesis of the theorem is described. We have recovered letters adressed to Robert de Montessus by differents mathematicians. Extracts of some letters will be done in that paper. Particularly, Henri Padé and Robert de Montessus corresponded by letter during the years 1901-1902.

In a second part, we deal with authors who mention the theorem.The theorem was rapidly cited by mathematicians like Nörlund and Perron. It is quite interesting to remark that Walsh cited the theorem from 1935 and after the World War II. We show that the Robert de Montessus theorem remains of a great interest. Many generalizations of the theorem exist as it can be seen in the -non exhaustive- list of papers.

Graph theory is used to present our results.

Key words Robert de Montessus, circulation of a theorem, continued fractions, Padé's approximants, graph.

1 Introduction

L'objectif de ce travail est d'étudier la diffusion d'un théorème, en l'occurence un résultat prouvé en 1902 dans le domaine des Fractions Continues. L'auteur, Robert de Montessus de Ballore([20]) alors âgé de trente-deux ans, poursuit une thèse à la faculté des Sciences de Paris. Son travail est suivi par Paul Appell. Robert de Montessus soutient sa thèse le 8 Mai 1905 [1] Signalons que ses recherches sur les Fractions Continues furent récompensées par le Grand Prix de l'Académie des Sciences Mathématiques en 1906. Le grand prix fut partagé entre Robert de Montessus, Henri Padé et André Auric.

L'origine de notre travail, en dehors de l'intérêt pour la vie et l'oeuvre scientifique de Robert de Montessus, vient de deux observations :

a) comme nous le verrons plus loin dans les références que nous donnerons, il n'est pas rare de trouver dans les publications actuelles, dans des domaines comme par exemple celui de l'approximation par des fractions rationnelles, à une ou plusieurs variables, des résultats dont les libellés contiennent le nom Montessus de Ballore.

*Université de Bourgogne, Institut de Mathématiques de Bourgogne, 9 avenue Alain Savary, BP 47870, 21078 Dijon, France, courriel : leferran@u-bourgogne.fr

1. Le jury était composé de Paul Appell (président), Henri Poincaré et Edouard Goursat.

b) suite à la première observation et après de premières investigations, il nous est apparu que pendant une période d'une vingtaine d'années, entre 1907 et 1927, le résultat ne semblait pas cité.

Les ouvrages de C. Brezinski ([13]) et ([14]), nous ont servi de point de départ pour notre recherche. Il nous a semblé, ensuite, nécessaire d'étudier de plus près la diffusion dans le milieu des mathématiques du théorème de 1902. Pour cela nous avons consulté et utilisé plusieurs ressources électroniques : la base Jahrbuch ([2]], Numdam ([1]), Jstor ([3]), MathScinet ([5]), Gallica ([4]), Internet Archive ([6]), Göttinger Digitalisierungszentrums ([7]). Ainsi, nous avons pu nous assurer de façon rigoureuse que tel ou tel auteur faisait bien référence au théorème de Robert de Montessus. Par ailleurs, nous avons pu retrouver, grâce à sa famille, une correspondance qui permet de voir que Robert de Montessus était en rapport avec différents mathématiciens qui travaillaient sur la même thématique.

Dans la première partie, nous revenons sur le théorème de 1902 et son contexte. Dans une seconde partie, nous donnons une liste d'auteurs ayant fait référence au résultat de Robert de Montessus. Nous mettons en particulier en évidence que la période d'une vingtaine d'années, évoquée plus haut, comporte en réalité des citations au théorème. Nous présentons nos résultats sous la forme d'un graphe (2) construit à l'aide du logiciel Yed Graph Editor ([8]). Ce graphe est ensuite analysé en utilisant le logiciel Gephi ([9]).

2 Robert de Montessus et les fractions continues

2.1 Genèse

Robert de Montessus obtient la licence ès Sciences-Mathématiques le 24 Octobre 1901 [2]. Il débute ensuite une thèse de doctorat d'état sous la direction de Paul Appell [3]. Une lettre de Charles-Ange Laisant [4] datée du 30/10/1900 [5] montre que Robert de Montessus cherchait à se rapprocher de Paul Appell :

> *Cher collègue,*
> *Une fois la rentrée faite, en Novembre, j'espère voir M. Appell et lui parler de vous, selon votre désir. Nous vous ferons signe le moment venu [...]*

En 1902, il est chargé de cours à la faculté catholique de Lille, puis en 1903, nommé Maître de conférences rémunéré et chargé des cours de Mathématiques spéciales et mécanique rationnelle. Ainsi dans le procès verbal de la séance du 7 Novembre 1902 du conseil de la Faculté des Sciences de l'Université Faculté de Lille [6], Robert d'Adhémar, qui à l'époque est maître de conférence dans cette faculté, indique, que devant enseigner l'Analyse, il a besoin d'un suppléant pour l'enseignement des Mathématiques Spéciales. Il propose le nom de Robert de Montessus [7] Le travail de Robert de Montessus s'inscrit dans le domaine de l'Analyse. Sur cet aspect, on pourra se référer à ([21]) et ([15]).

Les premiers signes de l'existence de son théorème semblent se trouver dans une lettre de Henri Padé du 26 Novembre 1901 [8] :

> *[...] J'ai d'ailleurs vu M. Appell au commencecement ce mois, il m'a parlé de vous et m'avait fait parvenir votre lettre.*
> *La théorie des fractions continue offre un champ très vaste de recherches, mais où il n'est pas toujours facile de se rendre compte à l' avance des difficultés que l'on rencontrera. C'est donc avec toutes sortes de réserves que je vous indiquerai, comme devant présenter un grand intérêt, une étude approfondie de la généralisation des fractions continues. Je n'ai fait qu'effleurer le sujet dans un*

2. D'après ce qui est inscrit dans le procès verbal de la thèse.
3. Paul Emile Appell (Strasbourg 1855 - Paris 1930). L'expression *directeur de thèse* est un peu anachronique. Paul Appell aidera Robert de Montessus durant sa carrière.
4. Charles-Ange Laisant, 1841-1920, polytechnicien, mathématicien, homme politique français, fondateur de l'*Intermédiaire des mathématiciens*.
5. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettres de C. A. Laisant.
6. Les procès verbaux des séances de la Faculté des Sciences de l'Université Catholique de Lille pour les années 1886 à 1924 sont conservés aux archives de cette université sous la cote S7E.
7. On retrouve tous ces éléments dans le dossier de carrière aimablement numérisé par le service des Archives de l'Université Catholique de Lille. Nous avons à notre disposition différents courriers.
8. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettres Padé.

mémoire qui a paru, il y a quelques années dans le journal de M. Jordan, que je me fais un plaisir de vous envoyer en même temps que cette lettre. Vous y trouverez l'indication d'un mémoire de M. Hermite, sur le même sujet. Dans ce mémoire, M. Hermite arrive à la méthode des polynômes associés par des considérations [...] de calcul intégral : il serait, sans doute, aussi bien intéressant d'approfondir d'avantage le rapport entre le calcul intégral et les lois de récurrence de la théorie des fractions continues.

Le résultat que vous m'annoncez avoir obtenu me paraît des plus remarquables, mais doit être soumis à des exceptions assez nombreuses. Je lirait avec plaisir votre démonstration quand vous l'aurez publiée. [...]

D'ailleurs, peu de temps après cette lettre de Henri Padé, dans une lettre datée du 3 Décembre 1901 [9], Paul Appell écrit :

Vos résultats me semblent intéressants et je suis d'avis que vous les indiquiez [...] dans une note à la Société Mathématique [...]

Parallélement, Robert de Montessus est en contact avec Eugène Fabry comme l'attestent les lettres de Fabry du 12 Octobre 1901 et du 7 Janvier 1902. La notice nécrologique sur Eugène Fabry par Emile Borel, Académie des Sciences, séance du 23 Octobre 1944 [10] donne un panorama complet des recherches de Fabry. En particulier, on y lit :

Eugène Fabry consacra ensuite ses recherches à un problème important et difficile, déjà abordé avant lui par de nombreux mathématiciens, notamment par notre éminent Confrère Jacques Hadamard. Il s'agit de chercher et d'étudier les points singuliers situés sur le cercle de convergence d'un développement de Taylor, qui définit une fonction analytique à l'intérieur du cercle. L'idée originale de Fabry fut de substituer à l'étude de la suite complète des coefficients de la série de Taylor, celle de suites partielles de coefficients extraites de cette suite complète.

Les deux lettres de Fabry, en réponse à Robert de Montessus, portent sur ce thème :

(lettre du 12 Octobre 1901) *Le théorème que vous m'indiquez ne peut pas être exact sous la forme la plus générale. Il est possible que le second énoncé soit exact mais le premier ne l'est pas. Si la série n'a qu'un point singulier sur la circonférence de convergence, on ne peut affirmer que* $\frac{s_n}{s_{n+1}}$ *ait une limite. Cela résulte des théorèmes que j'ai indiqué () dans les Acta Math (Tome 22, page 86). J'ai en effet montré qu'il existe des séries incomplètes n'ayant qu'un seul point singulier sur la circonférence de convergence.* $\frac{s_n}{s_{n+1}}$ *a alors des valeurs nulles et infinie, et ne peut avoir aucune limite. L'exemple que j'ai donné est le suivant :*

$$\sum x^n e^{n\left[-1+\cos(Ln)^\theta\right]} \quad 0<\theta<1$$

[...]

En résumé, je ne peux pas vous donner de réponse absolument précise sur l'exactitude du théorème que vous énoncez; mais je ne serais pas étonné qu'il soit exact en prenant le second énoncé.

Cette question me parait très intéressante et doit conduire à des résultats importants.

puis

(lettre du 7 Janvier 1902) *[...] Si vous voulez avoir une idée des travaux publiés sur la série de Taylor, vous pourrez trouver des renseignements très complets dans un petit traité publié par M. Hadamard au mois de mai dernier sur " la série de Taylor et son prolongement analytique" dans la collection Scienta (...).*

Deux autres lettres de Henri Padé [11] montrent que Robert de Montessus a fait part de ses résultats à ce mathématicien alors professeur à l'Université de Poitiers ([13]) [12] [13]. Donnons-en des extraits :

9. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettres Appell.
10. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, 1944, Bibliothèque Nationale de France, Gallica.
11. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettres Padé.
12. Nous pensons en fait que Robert de Montessus et Henri Padé ont pu se rencontrer lors du congrès international des mathématiciens en Août 1900 à Paris. Robert de Montessus a reçu un exemplaire signé de la communication faite par Henri Padé à ce congrès, intitulée *Aperçu sur les développements récents de la théorie des fractions continues.*
13. Notons que Paul Appell faisait partie du jury de thèse de Henri Padé. Il fut aussi un de ses professeurs à Paris.

(lettre du 17/12/1901) *Je ne vois que des compliments à vous adresser, et la communication que vous proposez de faire à la société mathématiques me semble devoir être des plus intéressantes.*

Vous considérez, d'après votre lettre, les réduites qui forment la "ligne horizontale de rang p". Je pense qu'il s'agit des réduites pour lesquelles le degré du dénominateur est p. [...]

Enfin, vous savez que dans mes derniers travaux j'ai changé cette notation et la notion de tableau [...]

Dans cette situation, les fractions qui convergent vers la fonction seraient toutes celles qui correspondent à une même valeur de μ [...]

Henri Padé suggère à Robert de Montessus d'adopter ses nouvelles notations, ce qu'il ne fera pas. Robert de Montessus note la réduite (n, p), qui correspond à l'approximant de Padé (n, p) de la fonction $f(x)$ en question, par $\frac{U_p^n}{V_n^p}$ avec U_p^n un polynôme de degré égal à n et V_n^p un polynôme de degré égal à p (dans le cas d'une table normale).

(lettre du 20/6/1902) *Pour ce qui touche le numéro 1 de votre note, sur lequel vous me demandez particulièrement mon avis, je vous fais confidence que c'est un point que j'ai déjà cherché à élucider moi-même. J'ai présenté à ce sujet une note à l'académie [...]*

Cette coïncidence n'a pas lieu de vous étonner, n'est-ce-pas, et nous ne pouvons pas espérer, que travaillant les mêmes questions, il n'arrivera jamais que nous parvenions aux mêmes résultats.

Henri Padé fait référence à son article paru en 1902, *Recherches nouvelles sur la distribution des fractions approchées d'une fonction*, Annales Scientifiques de l'ENS, 3 ième série, tome 19, 1902, pp 153-189. La dernière phrase de l'extrait est à mettre en perspective avec la controverse de priorité qui s'est installée entre Robert de Montessus et Henri Padé dont nous ne ferons pas l'écho ici (on pourra lire la lettre de Robert de Montessus ([22]) [14]). D'autre part, dans un dossier nommé *Fractions continues* [15], des notes de Robert de Montessus nous éclairent sur le début de ses travaux :

Note du 29 Mars 1901

M. Hermite a donné l'expression de la réduite générale de la fonction exp *[...]*

et dans la suite de cette note,

Sur la fraction de Stieltjes 19 Avril [...]

Sur la note, dans la marge, sont d'ailleurs indiqués les noms *Hurwitz* et *Minkowski*. Signalons aussi que Robert de Montessus connaissait les travaux de S. Pincherle [16] et était en contact avec A. Pringsheim [17]

2.2 Le théorème

La conclusion de Robert de Montessus à son étude dans l'article de 1902 est :

[...] qu'étant une série de Taylor représentant une fonction $f(x)$ dont les p pôles les plus rapprochés de l'origine sont intérieurs à un cercle (C) lui-même intérieur aux pôles suivants, chaque pôle multiple étant compté pour autant de pôles simples qu'il existe d'unités dans son degré de multiplicité, la fraction continue déduite de la ligne horizontale de rang p du Tabelau de M. Padé, ce tableau étant composé de réduites normales, représente la fonction $f(x)$ dans un cercle de rayon $|\alpha_{p+1}|$, où α_{p+1} est l'affixe du pôle le plus rapproché de l'origine parmi tous ceux qui sont extérieurs au cercle (C).

14. Dans une lettre datée du 1/1/1908 (fond Famille Robert de Montessus), Emile Picard écrit :

J'avais bien reçu, par l'intermédiaire de M. Gauthier-Villars, la lettre dont vous me parlez [...]

Je ne nie pas par ailleurs qu'il puisse y avoir dans cette affaire des questions de priorité ou au moins de simultanéité [...]

15. Recueil de documents de Robert de Montessus, période 1897-1937.

16. Dossier Fractions continues, recueil de documents de Robert de Montessus, période 1897-1937., *Sur la généralisation de systèmes récurrents au moyen d'une équation différentielle*, Acta Mathematica, 16,1892

17. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettre de A. Pringsheim du 4/2/1901.

L'hypothèse sur les pôles s'écrit :

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots \leq |\alpha_p| < |\alpha_{p+1}| \leq |\alpha_{p+2}| \leq \cdots$$

Robert de Montessus utilise des résultats de Jacques Hadamard ([16]) sur le comportement de polynômes dits *polynômes de Hadamard*. On trouve dans l'ouvrage de P. Henrici ([18]), pp 622-633, un exposé sur la question.

Dans l'article de E.B. Saff (voir l'intitulé plus loin), le théorème de Robert de Montessus est donné sous la forme :

> *Let $f(z)$ be analytic at $z = 0$ and meromorphic with precisely ν poles (multiplicity counted) in the disk $|z| < \tau$. Let D the domain obtained from $|z| < \tau$ by deleting the ν poles of $f(z)$. Then, for all n sufficiently large, there exits a unique rational function $R_{\mu,\nu}$, of type (μ, ν), which interpolates to $f(z)$ in the point $z = 0$ considered of multiplicity $\eta + \nu + 1$. Each $R_{\eta,\nu}$ has precisely ν finite poles and, as $n \to \infty$, these pole approach, respectively, the ν poles of $f(z)$ in $|z| < \tau$. The sequence $R_{\mu,\nu}$ converges throughout D to $f(z)$, uniformly on any compact subset of D.*

Les fractions $R_{\mu,\nu}$ sont les approximants de Padé (μ, ν) de f. Le développement de $f(z)$ et celui de $R_{\mu,\nu}$ coïncident jusqu'à l'ordre $z^{\mu+\nu}$ inclus. On renvoie aussi à l'ouvrage ([19]).

3 Des auteurs faisant référence au théorème de Robert de Montessus.

Dans les deux paragraphes suivants, nous avons listé un certain nombre d'auteurs faisant soit référence à l'article de Robert de Montessus paru en 1902, soit citant son nom dans le corps de l'article pour son théorème ou une généralisation (extension) du théorème. Nous avons indiqué essentiellement des articles et seulement quelques ouvrages. Nous ne prétendons pas non plus à être exhaustif, pour la période débutant après la seconde guerre mondiale. Nous souhaitons surtout mettre en évidence la diffusion du théorème avant 1940 et son actualité.

3.1 Avant 1940

Nous avons déjà vu que le résultat de Robert de Montessus a été dès 1902 connu de Henri Padé. En 1905, après la soutenance de sa thèse, Robert de Montessus prend contact avec Mittag-Leffler [18]. C'est en 1909 que ses résultats sur les fractions continues paraîtront dans Acta Mathematica. L'obtention d'une partie du Grand Prix de l'Académie des Sciences de 1906 lui a assuré certainement une diffusion de son résultat. Notons que le Grand Prix de 1906 correspond en fait à une remise en jeu d'un Grand Prix proposé en 1904. Nous avons retrouvé par ailleurs deux éléments qui sont intervenus dans la diffusion du théorème de 1902. Tout d'abord une lettre de N.E. Nörlund de 1910 [19], dans laquelle on peut lire :

> *Les " Rendiconti di Palermo" ne se trouvent à aucune bibliothèque publique de Copenhague, mais j'ai obtenu aujourd'hui vos thèses.*
>
> *Je suis heureux maintenant de pouvoir citer votre mémoire en reconnaissant votre priorité. Le mémoire dont j'ai eu l'honneur de vous envoyer un tirage à part, ne paraîtra que dans le tome 34 des Acta Mathematica en 1911 [...]*

Il s'agit de *Fractions continues et différences réciproques* , un mémoire de plus de cent pages. Ensuite le mathématicien anglais R. Wilson prend contact avec Robert de Montessus en 1923 [20] :

> (lettre du 19/10/1923) *I am interested in the developement of M. Padés work on the representation of a function by means of a continued fractions, and find that you have contributed much recent to this subject [...]*

et

18. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettre de Mittag-Leffler du 30/12/1905. Robert de Montessus a noté sur la lettre *mémoire non envoyé*.

19. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettre de N.E. Nörlund du 29/3/1910.

20. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettres de Wilson des 19/10/1923 et 31/10/1923.

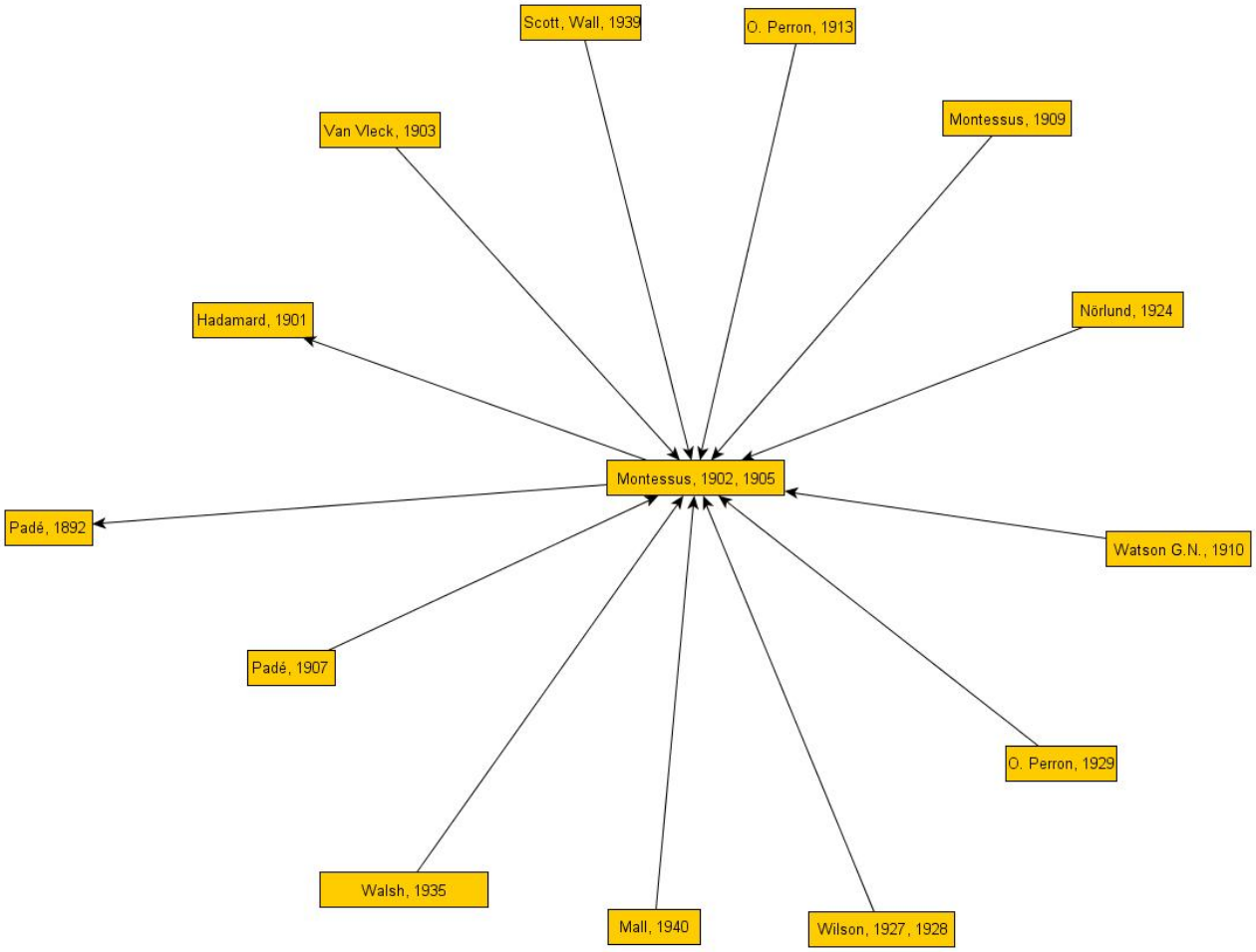

FIGURE 1 – graphe auteurs avant 1940

(lettre du 31/10/1923) *Your important work on the continued fraction, and the singularities of this function, is special interest to me [...]*

Dans la liste ci-dessous apparaît J.L. Walsh. J. L. Walsh se trouve à Paris en 1920-1921 où il travaille avec Paul Montel. J. L Walsh soutient sa thèse en 1927 sous la direction de Maxime Bôcher, lui-même ayant eu pour directeur de thèse F. Klein. J.L Walsh dirigera la thèse de E. B. Saff (1968). Maxime Bôcher séjourne d'ailleurs à Paris durant l'année universitaire 1913-1914 dans le cadre d'un échange entre les université de Harvard et Paris. Signalons aussi que E.B. Van Vleck soutient une thèse en 1893 sous la direction de F. Klein et encadre la thèse de H.S. Wall en 1927. On voit donc qu'il y a des liens très forts entre ces différents mathématiciens.

1902 théorème de Robert de Montessus,*Sur les fractions continues algébriques*, Bulletin de la SMF, tome 30, p 28-36, 1902.

1903 Van Vleck E.B., *Selected topics in the theory of divergent series and of continued fractions.*, in Lectures on mathematics deivered from September 2 to 5, 1903, before members of the american mathematical society in connexion with the summer meeting hed at the MIT Boston, mass., published for the american mathematical society by the Macmillan company London, 1905.

1905 thèse de Robert de Montessus,Paris, *Sur les fractions continues algébriques*, librairie scientifique A. Hermann 1905 , mémoire extrait du tome XIX (1905), pp. 185-257, des Rendiconti del Circolo Matematico

di Palermo.

1907 Padé H, *Sur la généralisation des formules de Sylvester relatives aux fonctions qui se présentent dans l'application du théorème de Sturm, et sur la convergence des réduites d'une fraction rationnelle*, Annales scientifiques de l'ENS, 3 ième série, tome 24, 1907, p 519-534.

1907 Padé H, *Recherches sur les développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions*, Annales Scientifiques de l'ENS, 3 ième série, tome 24, 1907, p 341-400.

1909 de Montessus de Ballore R., *Les fractions continues algébriques.*, Acta mathematica, 32, p 257-282, 1909.

1910 Watson G. N., *The solution of a certain transcendental equation.*, [J] Lond. M. S. Proc. (2) 8, 162-177.

1913 Perron O. *Die Lehre von den Kettenbruchen*, Leipzig und Berlin, Druck und Verlag von B.G. Teubner 1913.

1924 Nörlund N. E., *Vorlesungen uber Differenzenrechnung.* Berlin Verlag von Julius Springer, 1924.

1927 Wilson R., *Divergent continued fractions and polar singularities*, Proceedings L. M. S. (2) 26, 159-168, 1927.

1928 Wilson R., *Divergent continued fractions and polar singularities*, ,Proceedings L. M. S. (2) 27, 497-512 ; (2) 28, 128-144 (1928).

1929 Perron O. *Die Lehre von den Kettenbruchen*, Second edition, revised. Leipzig and Berlin, Teubner, 1929.

1935 Walsh J.L., *Interpolation and approximation in the complex domain*, New York, American Mathematical Society (Amer. Math. Soc. ColloquiumPubl. Vol. XX), 1935.

1939 Scott W.T., Wall H.S.,*Continued Fractions*, National Mathematics Magazine, Vol. 13, No. 7 (Apr., 1939), pp. 305-322.

1940 Mall J. (élève de O. Perron), *Beitrag zur Theorie der mehrdimensionalen Padéschen Tafel*,[J] Math. Z. 46, 337-349,1940.

3.2 Entre 1945 et 1975

Nous retrouvons J. L. Walsh, puis on doit à son é'lève E.B. Saff plusieurs articles citant Robert de Montessus.

1964 Walsh J.L.,*The convergence of sequences of rational functions of best approximation*, Mathematische Annalen, (page(s) 252 - 264), 1964.

1965 Walsh J.L.,*The convergence of sequences of rational functions of best approximation II*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 116 (Apr., 1965), pp. 227-237.

1967 Walsh J.L., *On the convergence of sequences of rational functions*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 4, No. 2 (Jun., 1967), pp. 211-221.

1968 Wynn P., *Upon the Padé Table derived from a Stieltjes series.*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 5, No. 4 (Dec., 1968), pp. 805-834.

1969 Saff E.B, *On the row convergence of the Walsh array for meromorphic functions*, Transactions of the AMS, vol 246, pp 241-257.

1972 Gragg W.B., *The Padé table and its relation to certain algorithms of numerical analysis.*, SIAM Review, Vol. 14, No. 1 (Jan., 1972), pp. 1-62.

1972 Saff E. B, *An extansion of Montessus de Ballore's theorem on the convergence of interpoling rational functions*, Journal of approximation theory, vol 6, num. 1, pp 63-67, 1972.

1972 Wynn P., *Upon a convergence result in the theory of Padé table.*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 165 (Mar., 1972), pp. 239-249.

1974 Wynn P., *Some recents developpements in the theories of continued fractions and the Padé table*, Rocky mountain Journal of Mathematics, Volume 4, Number 2, Spring 1974, pp 297-323.

1975 Chisholm J.S.R., Grave-Morris P.R., *Generalizations of the theoreme of de Montessus to two-variable approximants.*, Proc. R. Soc. Lond. A. 342, 341-372 (1975).

1975 Chisholm J.S.R., Jones R.H., *Relative scale covariance of N-variable approximants.*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 344, No. 1639 (Aug. 12, 1975), pp. 465-470.

1975 Goncar A.A., *On the convergence of generalized Padé approximants of meromorphic functions.*, MATH USSR SB, 1975, 27 (4), 503Ŭ514.

3.3 Après 1975

Grâce à liste suivante -rappelons qu'elle n'est pas exhaustive-, on voit bien que le théorème de Robert de Montessus est toujours cité. De plus, on voit apparaître dans des travaux sur de nouvelles formes d'approximants, comme par exemple les approximants de Padé vectoriels ou les approximants de Padé à plusieurs variables, des théorèmes du *type Montessus de Ballore*.

1977 Edrei A., *Equidistribution of the arguments of the zeros od Padé numerators*, Lecture Notes in Mathematics, 1977, Volume 599/1977, 30-39.

1981 Suetin S.P., *On Montessus de Ballore's theorem for rational approximants of orthogonal expansions*, Mat. Sb., N. Ser. 114(156), 451-464 (1981).

1981 Karlsson J., Saff E.B., *Singularities of functions determined by the poles of Padé approximants* , Lecture Notes in Mathematics, 1981, Volume 888/1981, 239-254.

1983 Lubinsky D.S., Sidi A., *Convergence of linear and nonlinear Padé approximants from series of orthogonal polynomials.*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 278, No. 1 (Jul., 1983), pp.333-345.

1983 Ralitza Krumova Kovaceva (Sofia), *The roots of unity and the m-meromorphic extension of functions.*, Lecture Notes in Mathematics, 1983, Volume 1039/1983, 264-275.

1984 Ellacott S.W, Saff E.B.,*Computing with the Faber transform.*, Lecture Notes in Mathematics, 1984, Volume 1105/1984, 412-418.

1984 Graves-Morris P.R., Saff E.B., *A de Montessus theorem for vector valued rational interpolants.*, Lecture Notes in Mathematics, 1984, Volume 1105/1984, 227-242.

1985 Lutterodt C.H., *On covergence of (μ,ν)-sequences of unisolvent rational approximants to meromorphic functions in $\mathbb{C}^n$*, Internat. J. Math. and Math. Sci., Vol. 8 No. 4 (1985) 641-652.

1988 Piedra R., *On simul taneous rational interpolants of type (α,β)* , Lecture Notes in Mathematics, 1988, Volume 1354/1988, 188-198.

1990 W.B. Jones, O. Njastad, E.B. Saff, *Szegö polynomials associated with Wiener-Levinson filters*, Journal of Computational and Applied Mathematics 32 (1990) 387-406.

1991 Brezinki C., *History of continued fractions and Padé approximants*, Springer Verlag, Berlin, 1991.

1991 Graves-Morris P.R., Saff E.B.,*Divergence of vector valued rational interpolants to meromorphic functiuons*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol 21, num. 1, pp 245-261, 1991.

1995 Liu X., *Generalizations of MontessusŠs theorem on the row convergence of rational interpolations*, Methods and Applications of Analysis 2 (4) 1995, pp. 442Ŭ465.

1996 Cuyt A., Lubinsky D.S.,*On the convergence of multivariate Padé approximants*, Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin Suppl., 51-61 (1996).

1997 Cuyt A., Lubinsky D.S., *A de Montessus theorem for multivariate homogeneous Padé approximants.*, Annals of numerical mathematics 4 (1997), pp 217-228.

1997 Graves-Morris P., Van Iseghem J., *Row Convergence Theorems for Vector-Valued Padé Approximants*, Journal of Approximation Theory Volume 90, Issue 2, August 1997, Pages 153-173.

2000 Baker G.A., *Defects and the Convergence of Padé Approximants*, Acta Applicandae Mathematicae 61 : 37Ŭ52, 2000.

2000 Daras N.J., *Padé and Padé-Type Approximation for 2π-Periodic L^p Functions.*, Acta Applicandae Mathematicae 62 : 245Ű343, 2000.

2000 Garcia Z., *On Rational Interpolation to Meromorphic Functions in Several Variables*, Journal of Approximation Theory 105, pp 211-237 (2000).

2001 Lorentzen L., Lubinsky D.S., *Convergence versus correspondence for sequences of rational functions*, Indag. Mathem., N.S., 12 (l), 213-219, 2001.

2002 Roberts D.E., *The vector epsilon algorithm Ű a residual approach*, Numerical Algorithms 29 : 209Ű227, 2002.

2002 Putinar M., *On a diagonal Pad approximation in two complex variables*, Numer. Math. (2002) 93 :131-152.

2002 Boichu D., Robin V., *Multivariate Padťe-Bergman approximants*, Numer. Math. (2002) 93 : 223Ű238.

2004 Adukov V.M., *On the Set of Uniform Convergence for the Last Intermediate Row of the Padé Table.*, arXiv, Nov. 2004.

2004 J-J. Sinou, F. Thouverez and L. Jézéquel, *Methods to Reduce Non-Linear Mechanical Systems for Instability Computation*, Arch. Comput. Meth. Engng. Vol. 11, 3, 257-344 (2004)

2005 V. I. Buslaev and S. F. Buslaeva, *Poincaré Theorem for Difference Equations.*, Mathematical Notes, vol. 78, no. 6, 2005, pp. 877Ű882. Translated from Matematicheskie Zametki, vol. 78, no. 6, 2005, pp. 943Ű947.

2006 Pindor M., *Padé Approximants*, J.-D. Fournier et al. (Eds.) : Harm. Analysis and Ratio. Approx., LNCIS 327, pp. 59Ű69, 2006.

2006 S. L. Skorokhodov, D. V. Khristoforov, *Calculation of the Branch Points of the Eigenfunctions Corresponding to Wave Spheroidal Functions.*, Mathematics and Mathematical Physics, 2006, Vol. 46, No. 7, pp. 1132Ű1146.

2006 Jakimorski A., Sharma A., Szabados J., *Walsh Equiconvergence of Complex Interpolating Polynomials* , Springer Monographs in Mathematics 2006.

2008 Sidi A., *A de Montessus type convergence study for a vector-valued rational interpolation procedure.*, Israel Journal of mathematics 163 (2008), 189Ű215.

2009 Baratchart L., Yattselev M.,*Convergent Interpolation to Cauchy Integrals over Analytic Arcs*, Found Comput Math (2009) 9 : 675Ű715.

2009 Gutknecht M.H., Parlett B.N., *From QD to LR and QR, or, how were the QD and LR algorithms discovered ?*, IMA J Numer Anal (2010)

2009 Guillermo Lopez Lagomasino, Judit Minguez Ceniceros, *Fourier-Padé approximants for Nikishin systems.*, Constructive Approximation, 2009, vol. 30, n. 1, p. 53-69

2009 Suetin S.P., *On the Existence of Nonlinear Padé ŰChebyshev Approximations for Analytic Functions*, Mathematical Notes, 2009, Vol. 86, No. 2, pp. 264Ű275.

2010 Pere Masjuan Queralt, *Rational Approximations in Quantum Chromodynamics*, thèse, arXiv, Jun. 2010.

3.4 Analyse du graphe

Le graphe (voir la figure (2)) est un graphe orienté dont les sommets sont les auteurs et, où un arc indique une citation d'un auteur (extrémité) par un autre auteur (origine). Un auteur peut très bien faire référence à un des ses propres articles : nous avons évité en général d'indiquer un tel lien. La figure (3) représente le même graphe mais donné avec le logiciel Gephi qui permet de calculer quelques paramètres. Le graphe possède 60 sommets et 111 arêtes. Le sommet *Montessus, 1902, 1905* est un sommet dominant. Le diamètre du graphe est 3. Dans son ouvrage ([12]), A. Bonato revient sur les notions de *densité*, de *power law degree distribution* et *d'effet "petit monde"*. Gephi propose comme coefficient pour la densité $0,031$, ce qui correspond à la formule habituelle. Le graphe est donc creux. Dans la notion de *power law*, on regarde pour un entier k donné (lié au graphe), le rapport entre le nombre de sommets de degré k et l'ordre du graphe. S'il existe une constante réelle $\beta > 1$, telle que ce rapport, pour tous les degrés k, soit équivalent à $k^{-\beta}$, on est dans le cadre de *power law*.

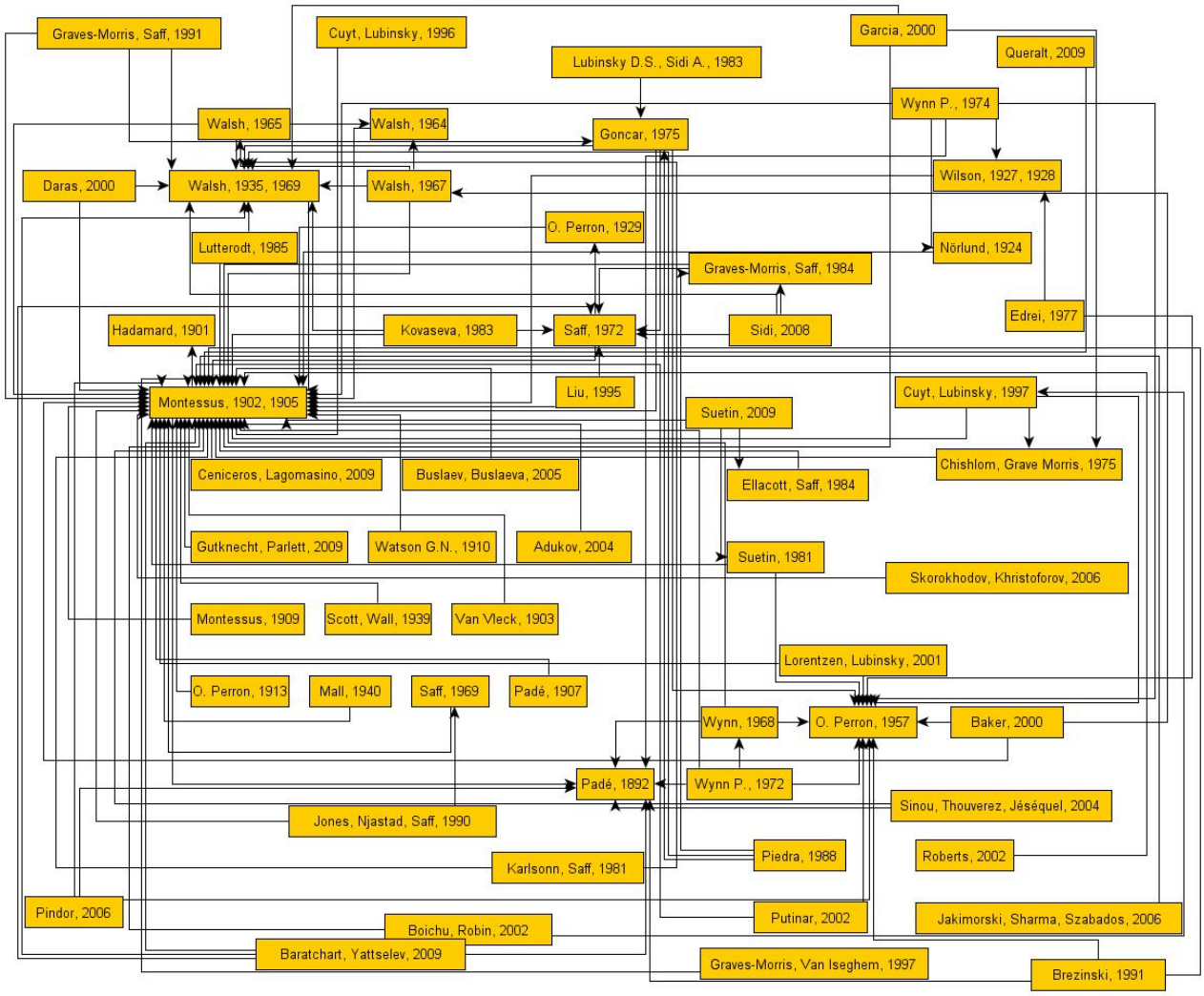

FIGURE 2 – graphe auteurs

Gephi donne deux coefficients β (le graphe est orienté), à savoir $1,463$ et $3,656$. Cela signifie en fait que la plupart des sommets ont un petit nombre de liens et que quelques sommets ont un grand nombre de liens.

Pour le phénomène *"petit monde"*, Gephi propose le coefficient suivant (*clustering coefficient*) : $0,1934$. Ce coefficient est celui de Watts et Strogatz ([12] pp 26-27 (pour un graphe complet, ce coefficient vaut 1).

4 Conclusion

On peut donc constater que le théorème de convergence de Robert de Montessus s'est rapidement diffusé. La notoriété acquise grâce à l'obtention d'un Grand Prix, le thème même du sujet, très porteur à l'époque et la qualité des mathématiciens qui s'y sont au départ intéressés, ont permis cette diffusion. Robert de Montessus n'a plus, à partir de 1909, publié de résultats dans le domaine des fractions continues. Après la première guerre mondiale, on retiendra les noms de Wilson et Walsh. Ce dernier sera un lien entre les années précédant la seconde guerre mondiale et celles qui la suivirent.

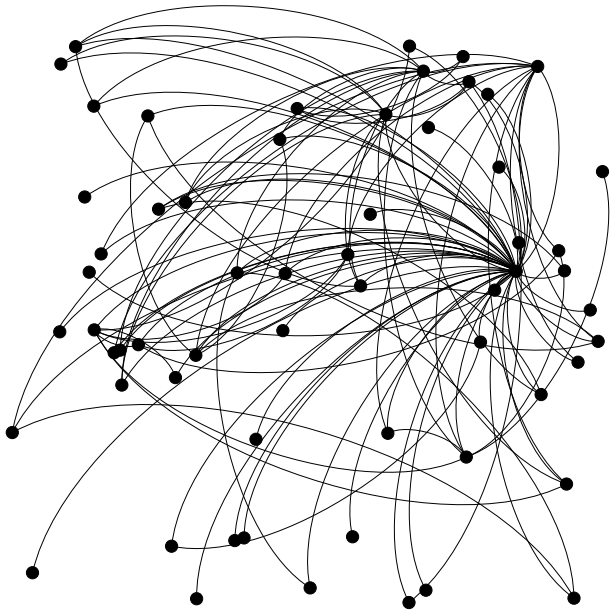

FIGURE 3 – graphe auteurs sous Gephi

On notera que Robert de Montessus a publié ses résultat dans deux revues étrangères, ce qui n'était pas très courant au sein de la communauté mathématique française de l'époque (([15] pp 154-155).

Pour conclure, donnons un extrait de la lettre de recommandation écrite par Paul Appell en 1907 [21] suite à la candidature de Robert de Montessus à un poste à l'Université de Fribourg en Suisse :

> *Les travaux de M. de Montessus sur les fractions continues algébriques sont de premier ordre : c'est non seulement mon avis personnel, mais celui de mes collègues de l'Académie des Sciences, notamment MM. Poincaré et E. Picard. La théorie des fractions continues algébriques a fait de grands progrès en France depuis une vingtaine d'années ; le regretté Laguerre s'en est occupé avec des idées tout à fait neuves ; M. Padé actuellement doyen de la Faculté des Sciences de Bordeaux a, dans une thèse très remarquable, posé les principes généraux de la théorie. M. de Montessus a continué et étendu ces recherches en traitant la question difficile du domaine de convergence. L'Académie des Sciences vient de couronner ses travaux qui se rattachent aux questions les plus profondes de l'Analyse moderne.*

Références

[1] http ://www.numdam.org/

21. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettre de Paul Appell du 4/6/1907.

[2] http ://www.emis.de/MATH/JFM/JFM.html

[3] http ://www.jstor.org/

[4] http ://gallica.bnf.fr/

[5] http ://www.ams.org/mathscinet/

[6] http ://www.archive.org/

[7] http ://gdz.sub.uni-goettingen.de/en/

[8] http ://www.yworks.com/en/index.html

[9] http ://gephi.org/

[10] Registre AJ/16/5514, Procès verbaux d'examens, Doctorats d'état, du 1/11/1895 au 11/11/1907, numéro d'ordre 1187, Archives Nationales, CRAN, Paris.

[11] Registre AJ/16/5538, rapports de thèses Faculté des Sciences de Paris, Archives Nationales, CRAN, Paris.

[12] Bonato A., A course on the Web graph, Graduate studies in Mathematics, vol 89, AMS 2008.

[13] Brezinski Claude, H. Padé, Oeuvres, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1984.

[14] Brezinski Claude, History of continued fractions and Padé approximants, Springer Verlag, Berlin, 1991.

[15] Gispert H., La France mathématique, La société mathématique de France (1870-1914), Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, numéro 34, 1991.

[16] Hadamard J., Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, JMPA, 8, pp 101-186, 1892.

[17] Hadamard J., La série de Taylor et son prolongement analytique, Scienta Phys. Math., 12, 1901.

[18] P. Henrici, Applied and computational complex analysis, volume I, John Wiley and sons, New York, 1988.

[19] Jones W.B., Thron W.J., Continued Fractions, Analytic theory and applications, Encyclopedia of mathematics ans its applications, Addison-Wesley, 1980.

[20] Notice sur la vie et l'oeuvre de Robert de Montessus de Ballore, in Dictionnaire biographoque de la Faculté des Sciences de Paris 1808-1940, INRP, à paraître en 2011.

[21] Leloup J., L'entre-deux-guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2009.

[22] De Montessus Robert, Sur les fractions continues algébriques (extrait d'une lettre adressée à la rédaction), Annales Scientifique de l'ENS, 3ième série, tome 25, 1908, p 195-197

[23] De Montessus Robert, notice parue dans le Journal de Mathématiques pures et Appliquées, tome 16, 1937

[24] De Montessus Robert, Sur les fractions continues algébriques, Bulletin de la SMF, tome 30 (1902), p 28-36