



HAL
open science

La tradition algébrique arabe d'al-Khwârizmî au Moyen Âge latin et la place de la géométrie

Marc Moyon

► **To cite this version:**

Marc Moyon. La tradition algébrique arabe d'al-Khwârizmî au Moyen Âge latin et la place de la géométrie. Barbin Évelyne; Bénard Dominique. Histoire et enseignement des mathématiques: rigueurs, erreurs, raisonnements, INRP, IREM de Clermont-Ferrand, pp.289-318, 2007, 978-2734210870. hal-00520812

HAL Id: hal-00520812

<https://hal.science/hal-00520812>

Submitted on 27 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La tradition algébrique arabe du traité d'Al-Khwârizmî au Moyen Âge latin et la place de la géométrie¹

Marc MOYON

IREM de Lille

Centre d'histoire des sciences et d'épistémologie

Université Lille1

Introduction

Nous nous sommes proposé de travailler sur la place de la géométrie dans le raisonnement algébrique à des moments distincts de l'histoire de l'algèbre classique : de sa naissance officielle avec le traité d'Al-Khwârizmî (780-850) jusqu'à son apparition puis son développement dans l'Europe médiévale. En effet, la question transversale sera le rôle de la géométrie euclidienne dans le développement de cette discipline. Euclide (III^e siècle av. J.-C.), considéré comme référence du raisonnement hypothético-déductif, va marquer de façon déterminante le recours à la géométrie avec ses objets et sa rigueur propres dans un raisonnement qui se veut algébrique.

Notons dès à présent l'importance de la géométrie dans les pratiques mathématiques avec les propos d'Ibn Khaldûn (1322-1406) dans sa *Muqaddima* [Prolégomènes] : « Nos maîtres disaient : “La pratique de la géométrie est à la pensée ce que le savon est au vêtement, dont il lave les souillures et nettoie les saletés et les taches”. Cela est dû à l'ordre et à la clarté de cette science². »

Le chapitre se décompose en quatre parties chronologiques. Pour chacune d'entre elles, une introduction générale sera apportée pour

¹ NDA : ce texte n'étant pas exclusivement destiné aux spécialistes des mathématiques arabes, nous n'avons pas utilisé les signes conventionnels de translittération des mots et des noms arabes. Les voyelles longues sont notées à l'aide d'un accent circonflexe et les lettres emphatiques d, t, s, h et z sont laissées telles quelles. L'impression s'en trouve facilitée.

² Ibn Khaldûn, *Le livre des exemples*, Paris : Gallimard, 2002, p. 954.

ensuite s'attarder sur les textes en proposant une analyse mathématique succincte accompagnée de quelques commentaires. Les textes étudiés sont, dans l'ordre, le livre II des *Éléments* d'Euclide, le traité d'algèbre d'Al-Khwârizmî ainsi que celui d'Abû Kâmil (mort en 930) et enfin le *Liber Restauracionis*, un texte algébrique du XII^e siècle d'Al-Andalus.

Les *Éléments* d'Euclide : une interprétation algébrique du livre II

Ce premier travail doit être compris comme un préambule aux parties suivantes. Certains y verront certainement une première approche des pratiques algébriques ; et d'autres n'y verront qu'une activité purement géométrique.

Généralités : présentation succincte de la méthode des aires exposée dans le livre I et introduction au livre II

Il est fondamental d'avoir en mémoire que tous les résultats et procédures du livre II d'Euclide sont géométriques : les rectangles et les carrés sont des figures et l'égalité entre deux objets n'est démontrée qu'à partir de ces figures et des règles démontrées au livre I.

Cependant, il est possible d'interpréter algébriquement les dix premières propositions du livre II des *Éléments* d'Euclide³. Ces propositions s'intéressent aux équivalences entre aires rectangulaires déterminées par des segments résultant de la section et/ou du prolongement d'une ligne droite⁴. L'« algébrisation » de ces propriétés repose sur une correspondance entre opérations d'une part et situations géométriques d'autre part. Ainsi, l'addition de deux nombres correspond à la juxtaposition consécutive de deux droites ou à la réunion disjointe de deux aires selon le cas. Le produit de deux

³ Héron d'Alexandrie (II^e s.), commentateur d'Euclide, est le premier à adopter une « méthode algébrique » sans figure pour démontrer les propositions du livre II de la seconde à la dixième incluse ; Thomas L. Heath, *Euclid, the thirteen books of the elements*, New York : Dover, 1956, p. 373.

⁴ Euclide, *Les Éléments*, trad. par B. Vitrac, Paris : PUF, 1990, vol. I, p. 323.

nombre coïncide avec le rectangle contenu par les droites auxquelles correspondent ces deux facteurs ; en particulier, le carré arithmétique d'un nombre correspond au carré décrit sur la droite à laquelle correspond ce nombre. Enfin, il faut aussi s'autoriser à écrire⁵ $a - b = c$ si $a > b$ et si $a = b + c$.

Les propositions du livre II peuvent alors se traduire par les identités suivantes :

- Prop.1 $a(a + b + c + \dots) = ma + mb + mc + \dots$
- Prop.2 $(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2$
- Prop.3 $(a + b)a = ab + a^2$
- Prop.4 $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ba$
- Prop.5 $ab + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$ ou
- $ab = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$
- Prop.6 $(a + b)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2$ ou
- $(a + b)b = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$
- Prop.7 $a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$ ou
- $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- Prop.8 $(a - b)^2 + 4ab = (a + b)^2$
- Prop.9 $a^2 + b^2 = 2\left(\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$
- Prop.10 $(a + b)^2 + b^2 = 2\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$

⁵ Lire les commentaires de B. Vitrac ; *ibid.*, p. 324.

fois la figure entièrement construite, la démonstration peut se décliner de la façon suivante :

(a) $AC = CB$ donc $ACLK = CLHB$ (Prop. I. 36)⁸

(b) Le complément $CLHB$ est égal au complément $HGFM$ (Prop. I. 43)⁹

(c) $AKLC = HGFM$ (Prop. I. 36)

(d) $AKLC + CLMD = HGFM + CLMD$ (n.c. 2)¹⁰

(e) $AKLC + CLMD = AKMD$,

$AKMD = \text{gnomon (LHG)}$ (Def. II. 2)¹¹

(f) $AKMD = AD \times BD$;

donc $\text{gnomon (LHG)} = AD \times BD$

(g) $AD \times BD + LEGH = \text{gnomon (LHG)} + LEGH$
(n.c. 2)

(h) $LEGH = BD^2$

donc $AD \times BD + BC^2 = \text{gnomon (LHG)} + LEGH$

(i) $\text{gnomon (LHG)} + LEGH = CDFE = CD^2$

(j) Finalement, $AD \times BD + BC^2 = CD^2$

Le *Mukhtasar* d'Al-Khwârizmî (780-850)

Introduction

⁸ Euclide I. 36 : « les parallélogrammes qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux. » ; Euclide, *Les Éléments*, trad. par B. Vitrac, p. 263.

⁹ Euclide I. 43 : « Dans tout parallélogramme les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale sont égaux entre eux. » ; *ibid.*, p. 272.

¹⁰ Euclide, notion commune 2 : « Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les tous sont égaux. » ; *ibid.*, p. 178.

¹¹ Euclide déf. II. 2 : « Dans tout aire parallélogramme, que l'un quelconque des parallélogrammes qui entourent la diagonale pris avec les deux compléments soit appelé *gnomon*. » ; *ibid.*, p. 325.

Muhammad ibn Mûsâ al-Khwârizmî publie à Bagdad son *Kitâb al-mukhtasar fî hisâb al-jabr wa al-muqâbala* [livre abrégé du calcul par la restauration et la comparaison] entre 813 et 833 sous le califat abbasside d'Al-Ma'mûn¹². Dès l'introduction, l'auteur donne explicitement ses intentions concernant la rédaction de son manuel qu'il désire clair et pratique : « [C'est un abrégé] englobant les plus fines et les plus nobles opérations du calcul dont les hommes ont besoin pour leurs héritages et leurs donations, pour leurs partages et leurs jugements, pour leurs commerces et pour toutes les transactions qu'ils ont entre eux [comme] l'arpentage des terres, le creusement des canaux, ainsi que d'autres aspects et d'autres techniques¹³. »

Il est à noter dès à présent que ce livre marque la naissance de l'algèbre comme discipline avec non seulement un nom, des objets et des outils, mais aussi des algorithmes de résolution et surtout, pour la première fois à notre connaissance, des preuves. Al-Khwârizmî n'a, *a priori*, aucune prétention à innover même s'il est conscient d'apporter une nouveauté. En effet, l'utilisation du mot *abrégé* suppose l'existence de travaux antérieurs. Mais, pour la première fois, le mot *jabr* est associé à une opération de calcul. S'adaptant à la classification existante des sciences et notamment à la hiérarchisation des savoirs, il place son ouvrage parmi ceux de la science du calcul en créant une sous-catégorie : le calcul qui utilise la restauration et la comparaison¹⁴.

¹² Nous ne sommes pas certains de ce titre qui sera pourtant adopté par la suite par les premiers historiens des mathématiques. Nous pouvons néanmoins affirmer que, dans l'introduction, l'auteur précise qu'il s'agit d'un *Mukhtasar fî hisâb al-jabr wa l-muqâbala*.

¹³ Ahmed Djebbar, *L'algèbre arabe, genèse d'un art*, Paris : Vuibert Adapt, 2005, p. 25 et Frederic Rosen, *The algebra of Muhammad ibn Musa al-Khwârizmî*, Londres : Oriental translation foundation, 1831, p. 3. Les extraits présentés lors de ce chapitre sont tirés des traductions d'A. Djebbar lorsqu'elles ont été publiées. Les références à la traduction anglaise de F. Rosen seront systématiquement données. Sinon, nous avons traduit personnellement le texte latin de Gérard de Crémone à partir de l'édition de B. Hughes ; Barnabas Hughes, « Gerard of Cremona's translations of al-Khwârizmî's al-jabr », *Mediaeval Studies*, 1986, n° 48, p. 211-263.

¹⁴ De façon générale, dans la classification arabe des sciences, 'Ilm al-hisâb [science du calcul] correspond à la science de la résolution des problèmes.

En algèbre, la *restauration*, traduction de *jabr*, correspond à l'opération nécessaire pour arriver à des expressions où seules des quantités à ajouter¹⁵ interviennent. Par exemple,

$$3x^2 - 2x + 9 = 2x^2 + 5x$$

$$3x^2 - 2x + 2x + 9 = 2x^2 + 5x + 2x$$

$$3x^2 + 9 = 2x^2 + 7x$$

En calcul, la *restauration* est l'opération qui consiste à ramener une quantité fractionnaire en une quantité entière. Par exemple,

$$\frac{x^2}{2} + 5x = 28$$

$$x^2 + 10x = 56$$

Quant à la *comparaison*, traduction de *muqâbala*, il s'agit de l'opération qui consiste à regrouper les quantités de même espèce. Par exemple,

$$3x^2 + 9 = 2x^2 + 7x$$

$$3x^2 - 2x^2 + 9 = 2x^2 - 2x^2 + 7x$$

$$x^2 + 9 = 7x$$

Après une introduction très riche, Al-Khwârizmî expose la numération décimale de position, puis définit les objets de l'algèbre qui sont de trois espèces :

« J'ai trouvé que les nombres dont on a besoin, dans le calcul par le *jabr* et la *muqâbala*, sont de trois sortes qui sont les racines, les biens et le nombre seul qui n'est rapporté ni à la racine, ni au bien. La racine est tout ce qui est multiplié par lui-même, comme un, les nombres [entiers] qui lui sont supérieurs et les fractions qui lui sont inférieures. Le bien est tout ce qui résulte de la racine multipliée par elle-même. Le nombre

Elle englobe traditionnellement la science des nombres (à savoir l'arithmétique), la méthode des grandeurs proportionnelles (règle de trois) et les méthodes de fausse position.

¹⁵ Bien sûr, la notion de nombres relatifs n'existe pas, et est même loin d'être imaginée. On utilisera alors l'expression « quantités à retrancher » pour les nombres négatifs d'aujourd'hui par opposition aux « quantités à ajouter » pour les nombres positifs.

seul est tout ce qui, parmi les nombres, est exprimable et qui n'est ni rapporté à une racine ni à un bien¹⁶. »

Liens entre les travaux d'Euclide et la tradition arabe : les traductions

Nous ne pouvons pas assurer qu'Al-Khwârizmî ait eu connaissance de l'œuvre d'Euclide puisqu'il ne s'y réfère jamais. Cependant, nous savons que les *Éléments* d'Euclide étaient traduits au moment de l'écriture du *Mukhtasar* puisque Al-Hajjâj ibn Matar (mort en 830) en a édité une traduction à deux reprises. L'une d'entre elles est éditée pour Hârûn ar-Rashîd (785-809) et l'autre pour Al-Ma'mûn (813-833)¹⁷. Une autre traduction est faite dans la seconde moitié du IX^e siècle par Abu Ya'qub Ishâq ibn Hunayn (mort en 910), et est révisée par Thâbit ibn Qurra (836-901)¹⁸. Nous savons aussi que les versions d'Al-Hajjâj et celle d'Ishâq ibn Hunayn sont présentes en Andalus au X^e siècle¹⁹.

Le silence d'Al-Khwârizmî à propos de l'œuvre d'Euclide peut s'expliquer par le désir de se détacher de ce savoir savant en ne cherchant des références que dans un savoir traditionnel. Son intention est délibérément de se limiter à un savoir local en se restreignant aux outils et objets d'un corpus mathématique utilitaire²⁰.

Le traité d'Al-Khwârizmî

La classification des équations

Une fois les objets propres à l'algèbre définis, ainsi que les opérations fondamentales qui vont caractériser la discipline exposée, Al-

¹⁶ Ahmed Djebbar, *L'algèbre...*, p. 27 et Frederic Rosen, *The algebra...*, p. 5-6.

¹⁷ Dimitri Gutas, *Pensée grecque, culture arabe*, Paris : Aubier, 2005, p. 177.

¹⁸ John Lennart Berggren, *Episodes in the mathematics of medieval Islam*, Berlin : Springer-Verlag, 1986, p. 5 et Euclide, *Les Éléments*, trad. par B. Vitrac, p. 61.

¹⁹ Sâ'id al-Andalusî, *Kitâb Tabakât al-Umam* [Livre des catégories des nations], trad. par R. Blachère, Paris : Larose, 1935, p. 130.

²⁰ Ahmed Djebbar, *L'algèbre...*, p. 35.

Khwârizmî donne, sous une forme exclusivement rhétorique, sa classification des équations de degré inférieur ou égal à deux. À notre connaissance, c'est la première fois qu'une telle classification est donnée. Al-Khwârizmî fait apparaître six types d'équations qui se répartissent en deux groupes suivant la nature et le nombre d'éléments qui composent les deux membres des équations. Le premier groupe correspond aux trois équations simples, c'est-à-dire ne faisant intervenir que deux des trois objets de l'algèbre : le bien, la racine ou le nombre. Le second groupe rassemble les équations à trois termes dites mixtes ou composées. En écriture moderne, mais sans anachronisme, les six types d'équations peuvent s'écrire de la façon suivante²¹ :

I	II	III	IV	V	VI
$aX = b\sqrt{X}$	$aX = c$	$b\sqrt{X} = c$	$aX + b\sqrt{X} = c$	$aX + c = b\sqrt{X}$	$b\sqrt{X} + c = aX$

Avec un changement de variable $x^2 = X$, on obtient les équations suivantes que nous retiendrons pour la suite

I	II	III	IV	V	VI
$ax^2 = bx$	$ax^2 = c$	$bx = c$	$ax^2 + bx = c$	$ax^2 + c = bx$	$bx + c = ax^2$

Al-Khwârizmî suit toujours le même principe pour traiter, tour à tour, les six équations. Elles sont d'abord annoncées d'une manière générale, puis formulées à l'aide de coefficients numériques²². De plus, pour chaque type, trois équations sont données avec le coefficient du terme de plus haut degré égal, supérieur ou inférieur à l'unité. Ainsi, pour l'équation de type IV, Al-Khwârizmî donne trois exemples :

²¹ Frederic Rosen, *The algebra...*, p. 6-8.

²² Il faut bien comprendre qu'en l'absence d'un quelconque symbolisme algébrique, les coefficients numériques donnés par Al-Khwârizmî revêtent un caractère générique. D'ailleurs, ces équations sont plus que de simples exemples mais deviennent canoniques. Elles seront utilisées comme de véritables modèles dans l'enseignement de l'algèbre. Nous les retrouverons trois siècles plus tard – au moins – dans les algèbres médiévales.

$$x^2 + 10x = 39$$

$$2x^2 + 10x = 48$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$$

Évidemment, grâce à la classification d'Al-Khwârizmî, toute autre équation ne sera résolue qu'après avoir été ramenée à l'un des six types précédents ; c'est à ce moment que les deux opérations fondamentales de *jabr* et de *muqâbala* interviennent.

Démonstration des algorithmes du second degré : l'exemple de l'équation de type IV

Pour chacune des trois équations composées, Al-Khwârizmî donne, toujours sous forme rhétorique, un algorithme de résolution²³.

L'objectif est de comprendre l'algorithme de résolution de l'équation de type IV, à savoir²⁴ $x^2 + px = q$, ainsi que les démonstrations à caractère géométrique que l'auteur en donne. L'équation canonique $x^2 + 10x = 39$ est proposée sous la forme : « Quant aux biens et aux racines qui sont égaux au nombre, c'est comme lorsque tu dis : un bien et dix de ses racines égal trente neuf dirhams²⁵. » L'algorithme de résolution est donné ainsi :

« La règle est de prendre les moitiés des racines qui, dans cette recherche, sont cinq. Multiplie-les entre elles et cela donnera 25. Auxquelles tu ajoutes trente-neuf, et elles deviendront soixante-quatre. Tu prends la racine qui est 8. Ensuite, enlève-lui les moitiés des racines qui sont cinq. Il reste donc trois qui est la racine du bien. Et le bien est neuf²⁶. »

Autrement dit,

²³ Ces algorithmes ne sont pas nouveaux par rapport aux pratiques antérieures, qu'elles soient babyloniennes, chinoises ou diophantiennes. Cependant, réitérons qu'en dressant sa classification, Al-Khwârizmî est novateur puisqu'il exprime clairement une volonté de standardisation.

²⁴ Nous ne traiterons par la suite que des équations unitaires.

²⁵ Ahmed Djebbar, *L'algèbre...*, p. 28 et Frederic Rosen, *The algebra...*, p. 8.

²⁶ Barnabas Hughes, « Gerard of... », p. 234.

Pour l'équation $x^2 + 10x = 39$	Pour l'équation $x^2 + px = q$
Prendre la moitié des racines ; 5	$p \rightarrow \frac{p}{2}$
Les multiplier par elles-mêmes ; 25	$\frac{p}{2} \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2$
Leur ajouter trente-neuf ; 64	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$
En prendre la racine ; 8	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \rightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
Lui enlever les moitiés des racines ; 3	$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$
C'est la racine du bien : 3	$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$
Le bien est 9	$x^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}\right)^2$

Al-Khwârizmî est le premier à justifier l'existence de la solution positive de l'équation de type IV grâce à une représentation géométrique de l'équation. D'ailleurs, l'auteur ne se contente pas de donner une seule démonstration de l'algorithme de résolution de l'équation $x^2 + 10x = 39$ mais il en donne deux qui répondent à deux interprétations géométriques distinctes de la même équation.

Première démonstration : « Quant à la justification de “un bien et dix racines égalent trente-neuf dirhams”, sa figure est une surface carrée de côtés inconnus, et c'est le bien que tu veux connaître et dont tu veux connaître la racine. C'est la surface (AB), et chacun de ses côtés est la racine. Chacun de ses côtés, si tu le multiplies par un nombre parmi les nombres, quels que soient les nombres, sera des nombres de racines, chaque racine étant comme la racine de cette surface. Comme on a dit qu'avec le bien il y a dix de ses racines, nous prenons le quart de dix – et c'est deux et un demi – et nous transformons chacun de ses quarts [en segment] avec l'un des côtés de la surface. Il y aura ainsi, avec la

première surface, qui est la surface (AB), quatre surfaces égales, la longueur de chacune d'elles étant comme la racine de la surface (AB) et sa largeur deux et un demi, et ce sont les surfaces (H), (T), (K), (J). Il [en] résulte une surface à côtés égaux, inconnue aussi, et déficiente dans ses quatre coins, chaque coin étant déficient de deux et demi par deux et demi. Alors, ce dont on a besoin comme ajout afin que la surface soit carrée, sera deux et demi par lui-même, quatre fois ; et la valeur de tout cela est vingt-cinq.

Or, nous avons appris que la première surface, qui est la surface du bien, et les quatre surfaces qui sont autour de lui et qui sont dix racines, sont [égales à] trente-neuf en nombre. Si on leur ajoute les vingt-cinq qui sont les quatre carrés qui sont dans les coins de la surface (AB), la quadrature de la surface la plus grande, et qui est (DE), sera alors achevée. Or nous savons que tout cela est soixante-quatre, et que l'un de ses côtés est sa racine, et c'est huit. Si on retranche de huit l'équivalent de deux fois le quart de dix – et c'est cinq –, aux extrémités du côté de la surface la plus grande qui est la surface (DE), il reste son côté trois, et c'est la racine de ce bien²⁷. »

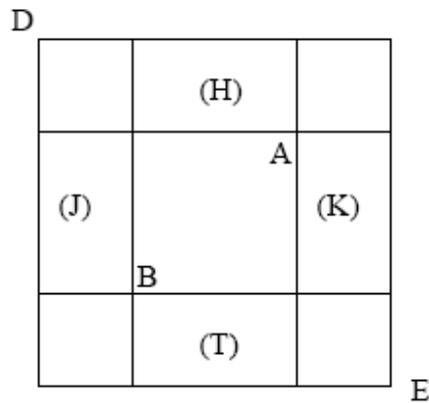


FIG. 2 – Première démonstration de l'algorithme de résolution de l'équation de type IV [Al-Khwârizmî]

L'interprétation géométrique de l'équation de type IV peut se traduire à l'aide du tableau suivant qui reprend pas à pas la démonstration de l'algorithme.

²⁷ Ahmed Djebbar, *L'algèbre...*, p. 28-29 et Frederic Rosen, *The algebra...*, p. 13-15.

équation $x^2 + 10x = 39$	cas général $x^2 + px = q$
<p>Soit (AB) un carré de côté inconnu x. Chaque côté du carré correspond à l'inconnue x.</p> <p>Nous prenons le quart de 10 qui devient la largeur des surfaces rectangulaires (J), (H), (T) et (K) collées à chacun des côtés de (AB) ;</p> $(AB) + (J) + (H) + (T) + (K) = x^2 + 4 \times \frac{10}{4} x = x^2 + 10x = 39$ <p>Nous complétons la figure pour obtenir un carré (DE) à l'aide de 4 carrés de côtés $\frac{10}{4}$, soit $4 \times \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 25$.</p> <p>Il s'en suit que $(DE) = 4 \times \left(\frac{10}{4}\right)^2 + 39 = 64$.</p> <p>Le côté de ce carré est la racine de (DE), à savoir 8.</p> <p>En enlevant les deux quarts de dix, on obtient la racine du carré (AB) : $8 - 2 \times \frac{10}{4} = 3$.</p>	$\rightarrow \frac{p}{4}$ $\rightarrow x^2 + 4 \times \frac{p}{4} = q$ $\rightarrow 4 \times \left(\frac{p}{4}\right)^2$ $\rightarrow (DE) = 4 \times \left(\frac{p}{4}\right)^2 + q$ $\rightarrow \sqrt{4 \times \left(\frac{p}{4}\right)^2 + q}$ $x = \sqrt{4 \times \left(\frac{p}{4}\right)^2 + q} - 2 \times \frac{p}{4}$ $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$

Deuxième démonstration : « Que la surface AB soit le bien. Nous voulons donc ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous démidierons donc dix et cela fera cinq. Et, nous en faisons deux surfaces sur deux parties de AB ; ainsi, elles sont deux surfaces G et D dont les largeurs sont chacune égales à un côté de la surface AB, et leur longueur est cinq, la moitié de dix. Il nous reste alors à construire, à partir de la surface AB, un carré cinq par cinq, cinq étant la moitié des 10 racines. Nous l'ajoutons aux deux surfaces précédentes [G et D]. Nous savons alors que la première surface est le bien, et que les deux surfaces qui sont construites sur ses deux côtés sont dix de ses racines. Et le tout est trente-neuf. Après cela, il est clair que la surface carrée la

plus grande a été complétée à soixante-quatre avec tout ce qui lui a été adjoint. Prends alors sa racine qui est un côté de la surface la plus grande : lequel est 8. Nous lui retranchons alors l'équivalent de ce que nous lui avons ajouté, ce qui est cinq ; il reste trois. Ce qui est le côté de la surface AB qui est le bien. Lui-même est de fait sa racine, et le bien est neuf²⁸. »

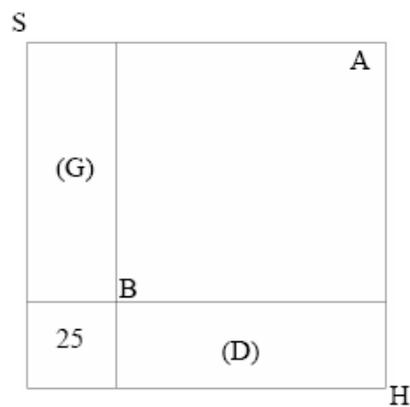


FIG. 3 – Deuxième démonstration de l’algorithme de résolution de l’équation de type IV [Al-Khwārizmī]

²⁸ Barnabas Hughes, « Gerard of... », p. 237-238.

$$\text{équation } x^2 + 10x = 39$$

$$\text{cas général : } x^2 + px = q$$

Soit (AB) un carré de côté inconnu x .

Chaque côté du carré correspond à l'inconnue x .

Nous prenons la moitié de 10 afin de construire deux rectangles (G) et (D) de côtés x et 5.

$$\rightarrow \frac{p}{2}$$

$$(AB) + (G) + (D) = x^2 + 2 \times 5x = x^2 + 10x = 39.$$

$$\rightarrow x^2 + 2 \times \frac{p}{2} x = q$$

Donc, il reste un carré opposé au sommet du carré (AB) de côtés $\frac{10}{2} = 5$ qu'on ajoute afin de former le grand carré (SH).

$$\rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\text{Il s'en suit que (SH)} = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39 = 64.$$

$$\rightarrow (\text{SH}) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

Le côté de ce carré est la racine de (SH), à savoir 8.

$$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

En enlevant la moitié de dix, on obtient la racine du carré (AB), à savoir : $x = 8 - \frac{10}{2} = 3$.

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$$

Commentaires

Le recours à la géométrie apparaît là comme un chemin possible, sinon le seul, vers la validation de l'algorithme utilisé. En ce sens, Al-Khwârizmî se place dans la filiation directe de la tradition grecque. Cependant, en faisant appel à la géométrie, l'auteur se met en difficulté. En effet, ces considérations géométriques l'empêchent d'entrevoir l'existence d'une seconde solution loin d'imaginer une quantité négative²⁹.

²⁹ Notons que pour l'équation de type V, à savoir $x^2 + c = bx$, Al-Khwârizmî met en évidence l'existence des deux solutions positives et discute non seulement du nombre mais aussi de la nature des solutions en

fonction de la position de $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ par rapport à c .

D'ailleurs, Al-Khwârizmî lui-même formule des doutes sur le type de démonstrations auquel il a recours. En effet, lorsqu'il s'agit de valider l'identité :

$$(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2) = 150 - 10x - x^2,$$

la démarche de l'auteur n'aboutit pas. C'est un échec : « Il n'y a pas de figure [géométrique] qui lui convienne car elle est constituée de trois genres différents – des biens, des racines et un nombre – qui ne sont pas égalés à quelque chose qui aurait permis qu'elle soit figurée. Nous avons abouti, pour elle, à une figure ; mais, elle n'est pas satisfaisante. Quant à la validité rhétorique de [l'expression], elle est évidente³⁰. »

D'une part, notons que pour Al-Khwârizmî, la démonstration par la parole apparaît triviale. Pourtant, n'avait-il pas à cette occasion, la possibilité et les moyens de formaliser une « démonstration algébrique » ?

D'autre part, cette remarque est fondamentale comme témoignage de l'état de l'algèbre en tant que discipline mathématique. En effet, Al-Khwârizmî jouit d'un statut scientifique et social puissant, son texte sera lu dans tout l'empire musulman. S'il laisse cet exemple de raisonnement inachevé, c'est parce qu'il est certain qu'aucun de ses contemporains ne peut aller plus loin. L'algèbre, qui naît officiellement avec ce mathématicien reconnu de la Maison de la sagesse³¹, apparaît alors comme une théorie mathématique inachevée.

Le Kâmil d'Abû Kâmil (ca. 850-930)

Introduction

Abû Kâmil, surnommé le calculateur égyptien, nous laisse plusieurs ouvrages de mathématiques³². En particulier, nous avons son traité

³⁰ Ahmed Djebbar, *L'algèbre...*, p. 29 et Frederic Rosen, *The algebra...*, p. 33-34.

³¹ Dimitri Gutas, *Pensée grecque, culture arabe*, Paris : Aubier, 2005, p. 102.

³² Le biobibliographe Ibn An-Nadîm (mort en 995) donne une liste des ouvrages écrits par Abû Kâmil dans son *Kitâb al-Fihrist* [Le catalogue]. H. Suter a traduit la partie mathématique de l'ouvrage ; Heinrich Suter, « Das

d'algèbre, le *Kitab al-kâmil fî al-jabr wa'l-muqâbala* [Livre complet sur la restauration et la comparaison] qui s'inscrit dans le prolongement des travaux d'Al-Khwârizmî. Cet ouvrage va jusqu'aux équations du second degré et l'auteur consacre la deuxième partie de son livre à la détermination des éléments de figures polygonales. Il est à noter qu'Abû Kâmil fait apparaître pour certaines de ses équations des coefficients et des racines irrationnels quadratiques et biquadratiques.

**Algorithmes de résolution de l'équation de type IV :
similitudes et différences avec le traité d'Al-Khwârizmî**

Notons dès à présent qu'à plusieurs occasions, Abû Kâmil se réfère explicitement à son prédécesseur Al-Khwârizmî. Par exemple, dans les premières lignes de son traité, au moment de définir les objets de l'algèbre, on peut lire : « Ce qui est nécessaire, en premier lieu, dans ce livre, le mien, ce sont les trois espèces dont a fait mention Mahammed filius Moysi Algorismi dans son livre. Elles sont les racines, les biens, et le nombre³³. »

Néanmoins, outre les prolongements de l'œuvre d'Al-Khwârizmî déjà mentionnés ci-dessus, Abû Kâmil apporte une originalité dans le traitement des équations du second degré. En effet, il expose deux algorithmes de résolution : l'un donnant la racine de l'équation, l'autre donnant le carré de la racine. Nous nous sommes donc attachés à

Mathematiker-Verzeichniss in Fihrist des Ibn Abû Ya'qub an-Nadîm », *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*, 1900, vol. VI.

³³ Les traductions du livre d'Abû Kâmil sont toutes des traductions personnelles d'après la version latine éditée par J. Sesiano. Le principe adopté est de conserver les corrections apportées par Sesiano pour l'intelligibilité du texte ainsi que, dans la mesure du possible, les parties présentes dans le texte arabe mais omises dans le texte latin. Néanmoins, nous avons supprimé certains passages qui, n'apportaient rien à la compréhension générale pour le sujet qui nous intéressait. Jacques Sesiano, « La version latine médiévale de l'Algèbre d'Abû Kâmil », in M. Folkerts et J. P. Hogendijk, *Vestigia Mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard*. Amsterdam et Atlanta : Rodopi, 1993, p. 325.

comprendre ces deux algorithmes et leur démonstration dans le cas de l'équation de type IV.

L'algorithme donnant la racine

« Quant au chemin qui te conduit à la connaissance de la racine, Mahamed filius Moysi Algorismi le raconte déjà dans son livre. Tu divises les racines par moitié, c'est-à-dire : en deux parties égales ; dans cette question, elles deviendront 5. Et, tu les multiplies entre elles, et elles feront 25 ; que tu ajoutes à 39, et elles seront 64. Ce nombre accepte une racine, qui est 8. De cela, enlève les racines démiées, à savoir 5, et il reste 3. C'est la racine du bien, et le bien est 9^{34} . »

Il n'est pas nécessaire de revenir sur cet algorithme qui, comme le précise Abû Kâmil lui-même, est identique à celui exposé par Al-Khwârizmî. Cela étant, la démonstration que donne l'égyptien est différente et ne s'appuie pas sur la même figure.

« Le chemin qui te conduit à la connaissance de la racine est celui par lequel nous faisons une surface carrée pour le bien, construite sur A, B, G, D. Nous lui ajoutons les racines qui sont avec lui, à savoir 10 racines, qui sont la surface ABEU. Il est donc évident que la ligne BE est 10 en nombre : parce que la racine de la surface ABGD, qui est AB, multipliée par un en nombre produit donc une racine de la surface ABGD, et en la multipliant par 10, elle produit 10 racines de la même surface ; or, elle est multipliée par la ligne BE, et elle produit 10 racines de cette même surface, ainsi la surface ABEU devient 10 racines ; donc, la ligne BE est 10. Quant à la surface EGDU, elle est 39 correspondant à un bien et 10 racines. Et, elle est produite par la multiplication de la ligne EG par la ligne GD. Et, la ligne GD est comme la ligne GB. Donc, la multiplication de la ligne EG par la ligne GB est 39. Divise alors la ligne BE, qui est 10, en deux parties égales au point H. Ce qui est divisé en deux au point H est ajouté à la ligne BG en longueur. Alors, la multiplication de la ligne EG par la ligne GB avec celle de la ligne HB par elle-même est comme la multiplication de la ligne HG par elle-même, comme a dit Euclide dans le second traité de son livre. Or, la multiplication de la ligne EG par la ligne GB est 39, et la multiplication de la ligne HB par elle-même est 25. Donc, la multiplication de la ligne HG par elle-même est 64. Donc, la ligne HG est 8. Et la ligne HB est 5. Donc, la ligne GB restante est 3. C'est la racine du bien, et le bien est 9.

³⁴ *Ibid.*, p. 327.

Or si tu veux que je t'expose ce que j'ai dit qu'il apparaît à l'œil : sur la ligne GH, je fais une surface carrée, qu'elle soit la surface HCRG. Et je produis le point Y dans le prolongement de la ligne BA. Et, la ligne GH sera comme la ligne GR, et la ligne BG comme la ligne GD. Il reste la ligne BH comme la ligne DR. Et, la surface AH comme la surface AR. Et, la surface HA est comme la surface ME. La surface ME est alors comme la surface AR. Donc, les trois surfaces MB, BD, DY sont 39. Mais, la surface AC est 25, parce qu'elle résulte de HB, qui est 5, multipliée par elle-même. Donc, la surface totale GC est 64. Et, la ligne GH est sa racine. Elle est donc 8. Et ceci est ce que nous voulions exposer³⁵. »

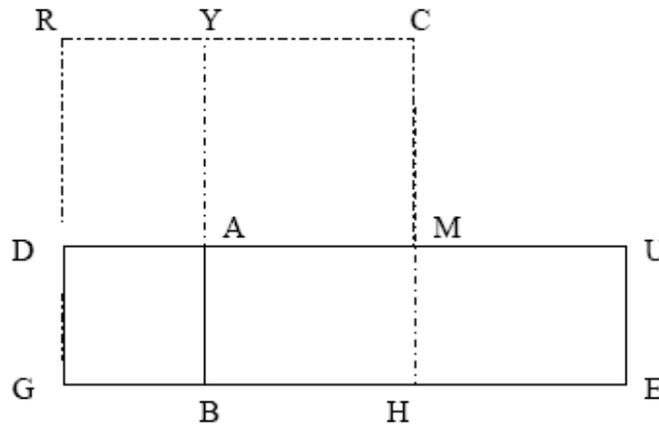


FIG. 4 – *Algorithme de résolution de l'équation de type IV donnant la racine [Abû Kâmil]*

L'analyse mathématique de cette démonstration peut être transcrite sous la forme suivante :

³⁵ *Ibid.*, p. 328-329.

équation $x^2 + 10x = 39$	Cas général : $x^2 + px = q$
Soit ABGD un carré	\rightarrow $ABGD = x^2$
À partir du côté AB, on construit la surface ABEU telle que $ABEU = 10x$.	\rightarrow $AB = x$
$ABEU = AB \times BE$.	\rightarrow $ABEU = p \times x = px$
Donc, $BE = 10$	\rightarrow $BE = p$
$EGDU = x^2 + 10x = 39$	\rightarrow $EGDU = x^2 + px = q$
Or, $EGDU = EG \times GD$, et $GD = GB$.	\rightarrow $EG \times GB = x^2 + px = q$
Donc, $EG \times GB = 39$	
On construit le milieu H de [BE].	\rightarrow $BH = \frac{p}{2}$
Donc, $BH = 5$	
D'après la proposition 6 du livre II des <i>Éléments</i> d'Euclide :	
$EG \times GB + HB^2 = HG^2$.	
Comme $EG \times GB = 39$ et $HB = 5$,	\rightarrow $HG^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$
$39 + 5^2 = HG^2$; soit $64 = HG^2$.	
HG est le côté du carré HG^2 , donc $HG = 8$.	\rightarrow $HG = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
Mais $HG = GB + BH$, donc,	\rightarrow $BG = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$
$BG = 8 - 5 = 3$ d'où $x = 3$.	

Alors qu'Abû Kâmil pouvait cesser sa démonstration à ce stade, il continue son raisonnement pour démontrer explicitement le résultat de la proposition 6 du livre II des *Éléments* d'Euclide. Il complète la figure pour se ramener à la figure canonique euclidienne et avoir ainsi toutes les grandeurs géométriques nécessaires³⁶. Même si Abû Kâmil n'a pas la même terminologie (compléments, gnomon) qu'Euclide, les étapes de la démonstration ne diffèrent pas de celles du mathématicien grec.

L'algorithme donnant le carré de la racine

³⁶ Voir lignes pointillées dans la figure 4.

« Mais le chemin te conduisant à la connaissance du bien est celui pour lequel tu multiplies les racines 10 entre elles, elles produisent 100. Et, multiplie par 39, ce qui égale le bien et les racines, et elles seront 3 900. Divise ces mêmes 100 par moitié, et il en sort 50. Tu les multiplies par eux-mêmes, et il en résulte 2 500. Et ajoute-les au 3 900, et ils seront 6 400. Ce nombre accepte une racine, et il sort 80. Et retire-les de 50, qui sont la moitié de 100, et de 39, qui égalent le bien et les racines, qui à eux deux sont 89, et il reste 9 ; ce qui est le bien³⁷. »

Autrement dit,

Pour l'équation : $x^2 + 10x = 39$	Cas général : $x^2 + px = q$,
$10 \times 10 = 100$	$p \rightarrow p \times p = p^2$
$100 \times 39 = 3\,900$	$p^2 \rightarrow p^2 \times q$
$100/2 = 50$	$p^2 \rightarrow \frac{p^2}{2}$
$50 \times 50 = 2\,500$	$\frac{p^2}{2} \rightarrow \left(\frac{p^2}{2}\right) \times \left(\frac{p^2}{2}\right) = \left(\frac{p^2}{2}\right)^2$
$2\,500 + 3\,900 = 6\,400$	$\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{p^2}{2}\right)^2 + p^2 \times q$
$\sqrt{6\,400} = 80$	$\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 + p^2 \times q \rightarrow \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 + p^2 \times q}$
$(50 + 39) - 80 = 9$	$x^2 = \left(q + \frac{p^2}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 + p^2 \times q}$
$x^2 = 9$	

Abû Kâmil propose une démonstration de cet algorithme, fondée une nouvelle fois sur la proposition 6 du livre II des *Éléments* d'Euclide.

« Quant au moyen t'amenant à la connaissance du bien, il est indiqué que nous posons pour le bien la ligne AB. Nous y ajoutons 10 de ses

³⁷ Jacques Sesiano, « La version... », p. 329.

racines, qui sont la ligne BG³⁸. Et, la ligne AG deviendra 39. Nous voulons savoir combien est la ligne AB. Nous faisons donc sur la ligne BG une surface carrée, qui sera la surface DEGB. Celle-ci sera donc 100 biens, c'est-à-dire cent fois autant que la ligne AB³⁹ (...) parce que la ligne BG est 10 racines de AB, et 10 racines d'une chose qu'on multiplie par elles-mêmes produisent comme cent fois cette chose. Nous construisons alors la surface AH comme la surface carrée, c'est-à-dire égale au carré BE. Et, en fait, HA est comme la multiplication de la ligne AB par une de ces unités qui sont à cet endroit, c'est-à-dire avec AB, soit cent. [Donc, la ligne AM est 100]. Nous complétons la surface AN ; et elle sera 3 900, à cause du fait que la ligne AG est 39 et AM est 100, et que ces lignes enferment la surface AN en question. Quant à la surface AH, elle est autant que la surface BE. Donc, la surface DN est 3 900. C'est ce qui résulte du produit de la ligne NE par EG, avec la ligne EG correspondant à la ligne ED. Et, la ligne GN est 100, qui correspond à la ligne AM. Nous divisons alors la ligne GN en deux parties égales au point L. [...] Donc, la multiplication de toute la ligne NE par EG ajoutée à la multiplication de la ligne GL par elle-même est autant que la multiplication de la ligne LE par elle-même, comme le dit Euclide dans le second traité de son livre. Or la multiplication de la ligne NE par la ligne EG est 3 900, et la multiplication de la ligne GL par elle-même est 2 500. Et les deux liées ensemble produisent 6 400. Et, elles sont comme la multiplication de la ligne LE par elle-même. Donc, la multiplication de la ligne LE par elle-même est 6 400 ; dont la racine est 80. Quand alors nous retirons la ligne LG et la ligne BG, qui sont 80, de la ligne AG, soit 39, et GL, soit 50, qui sont 89 ; il reste la ligne AB 9, qui est le bien. Et ceci est ce que nous voulions exposer⁴⁰. »

³⁸ Là, une ligne représente les racines et non plus le bien.

³⁹ En glose, un ajout : « en fait, une racine par une racine produit un bien, (puis) par 10 produit donc 10 biens ; donc 10 biens par 10 produisent 100 biens. »

⁴⁰ Jacques Sesiano, « La version... », p. 329.

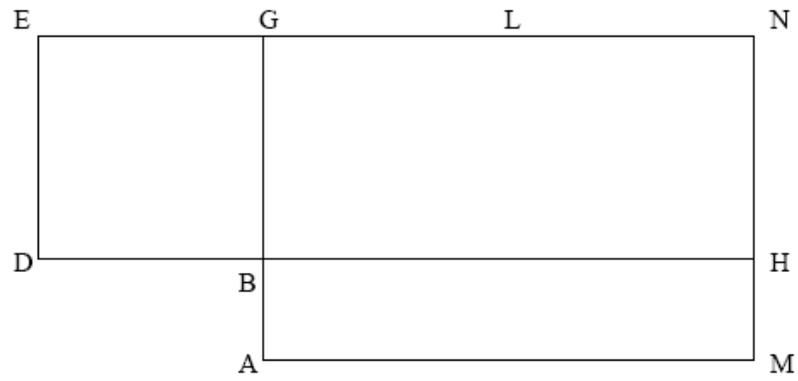


FIG. 5 – *Algorithme de résolution de l'équation de type IV donnant le bien*
[Abû Kâmil]

équation $x^2 + 10x = 39$	$x^2 + px = q$
Soit AB une ligne correspondant au bien, soit BG une seconde ligne dans le prolongement correspondant à $10x$.	$\rightarrow AB = x^2$ $\rightarrow BG = px$
On construit le carré DEGB à partir du côté BG, soit $(10x)^2 = 100x^2$.	$\rightarrow DEGB = p^2x^2$
On construit la surface AH pour qu'elle soit égale à la surface EB, soit $100x^2$.	$\rightarrow AH = EB = p^2x^2$
Ainsi, comme la surface AH est $AB \times MA$; alors $MA = 100$.	$\rightarrow MA = p^2$
On place N pour compléter la surface; ainsi, la surface AN est 3 900 puisque construite sur $AG = 39$ et $MA = 100$.	$\rightarrow AN = q \times p^2$
Mais, par construction, $AH = BE$. Donc, $DN = AN = 3\,900$.	$\rightarrow DN = AN = p^2 \times q$
Soit L le milieu de la ligne GN,	$\rightarrow GL = \frac{p^2}{2}$
d'après la proposition 6 du livre II des <i>Éléments</i> d'Euclide : $NE \times GL + GL^2 = LE^2$.	
Autrement dit, $DN + GL^2 = LE^2$, soit $LE^2 = 3\,900 + 2\,500 = 6\,400$,	$\rightarrow LE^2 = \left(\frac{p^2}{2}\right)^2 + p^2 \times q$
d'où $LE = 80$,	$\rightarrow LE = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 + p^2 \times q}$
$AG + GL = 89$ et $LG + BG = 80$, donc, en soustrayant la deuxième somme de la première : $AB = 9$.	$x^2 = \left(q + \frac{p^2}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 + p^2 \times q}$

Commentaires

La lecture des deux démonstrations d'Abû Kâmil amène à formuler plusieurs remarques qui ont été commentées. Tout d'abord, l'auteur nous expose un raisonnement géométrique qui semble, encore au X^e siècle, être la seule véritable voie pour écrire une démonstration. Contrairement à Al-Khwârizmî, Abû Kâmil se réfère explicitement au canon de la rigueur, l'œuvre d'Euclide, dans les deux démonstrations

qu'il énonce. Ensuite, pour la validation géométrique de l'algorithme donnant directement le carré, notre attention doit être portée sur la manière dont il traite des règles communes d'homogénéité des grandeurs. En effet, il est amené à considérer une ligne pour représenter le *bien*, c'est-à-dire qu'il représente un carré arithmétique par un segment. Aucun élément ne nous permet d'expliquer cette considération quelque peu singulière.

Un élément de la tradition algébrique latine : le *Liber Restauracionis*⁴¹

Histoire(s) des textes d'Al-Khwârizmî et d'Abû Kâmil : les traductions

Il est intéressant de lire Ibn Khaldûn qui dans sa *Muqaddima* écrit :

« Le premier auteur à écrire sur cette discipline [l'algèbre] est Al-Khwârizmî, suivi d'Abû Kâmil. Puis les savants marchèrent sur les traces de ce dernier. Son livre sur les six problèmes de l'algèbre est un des meilleurs ouvrages en la matière. De nombreux savants andalous en ont fait de bons commentaires [...]»⁴². »

Ce témoignage est sans équivoque : c'est une preuve de la circulation de l'algèbre d'Al-Khwârizmî et de celle d'Abû Kâmil qui sont connues dans tout l'empire musulman qui s'est étendu, rappelons-le, de Samarkand à Saragosse.

En effet, l'ouvrage d'Al-Khwârizmî circule et est transmis à l'Occident musulman où il sera favorablement accueilli comme le montrent les traductions latines qui en seront faites à partir du XII^e siècle. Néanmoins, il ne sera pas traduit dans son intégralité pour des questions culturelles et cultuelles. En effet, les traductions dont

⁴¹ Le *Liber Restauracionis* a fait l'objet d'une analyse mathématique, d'une édition et d'une traduction ; Marc Moyon, *Matériaux pour l'histoire des mathématiques en Europe du XII^e au XV^e siècle : exemple du Liber Restauracionis (ms. Vat. Lat. 4606)*. Mémoire de Master 2, Histoire et épistémologie des mathématiques, Université Lille 1-Lille 3, 2005. Les références données pour ce chapitre renvoient systématiquement à ce travail ainsi qu'au manuscrit Vat. Lat. 4606 (Bibliothèque du Vatican, département des manuscrits occidentaux) lui-même.

⁴² Ibn Khaldûn, *Le livre...*, p. 951.

nous disposons, celle de Robert de Chester (*ca.* 1145) et celle de Gérard de Crémone (1114-1187), sont toutes les deux tronquées de la dernière partie concernant les problèmes d'héritage et de donation⁴³.

Quant au traité d'Abû Kâmil, deux informations sur sa circulation en Europe méritent d'être mentionnées. D'une part, il bénéficie d'un commentaire hébraïque de Mordecai Finzi (mort en 1475) qui semble avoir été fait à partir d'une version espagnole. Cependant, aucune traduction ni commentaire en espagnol n'ont encore été retrouvés. D'autre part, au XIV^e siècle, le texte d'Abû Kâmil est encore une référence : nous avons une copie d'une partie de la traduction latine datant probablement du XII^e siècle⁴⁴. Faute de documents supplémentaires, nous n'avons pas d'autres renseignements.

Le Liber Restauracionis : présentation générale

La structure générale et les thèmes exposés dans ce texte sont identiques à ceux des ouvrages antérieurs et particulièrement à celui d'Al-Khwârizmî ou bien encore celui d'Abû Kâmil que nous avons étudiés précédemment. En effet, le début du texte est consacré aux définitions des objets de l'algèbre (les nombres, l'inconnue et son carré). Ensuite, les six équations canoniques sont exposées dans le même ordre que dans les deux traités précédents. Les démonstrations des algorithmes algébriques sont présentées pour les trois derniers types d'équations. L'auteur du manuscrit Vat. Lat. 4606 prétend que les démonstrations des trois premiers types ne sont pas nécessaires. Afin d'utiliser convenablement les algorithmes précités et de se ramener toujours à l'un des six types énoncés, des règles de calcul sur les objets de l'algèbre sont données. Ainsi, des chapitres sur la multiplication, puis sur les racines carrées, se succèdent. Enfin, ces algorithmes et ces opérations sont appliqués dans le cadre de

⁴³ Ce type de problème est fortement lié à la question complexe de la répartition des héritages et des lois successorales en pays d'islam. Cette situation n'a pas d'équivalent dans la culture chrétienne latine.

⁴⁴ Ahmed Djebbar, *L'algèbre...*, p. 107. L'édition du ms. Lat.7377a (Paris, Bibliothèque nationale de France) a été réalisée par Jacques Sesiano, « La version... ».

problèmes d'application classiques – un partage de dix – avec pour une majorité les mêmes coefficients que chez Al-Khwârizmî. Afin de mener au mieux notre étude, nous nous sommes intéressé aux informations concernant les équations de type IV.

L'algorithme de résolution de l'équation de type IV

« De la manière avec laquelle on égale le bien et les racines à nombre. Si quelqu'un donne des drachmes égales au bien avec les choses, Carre la moitié des choses, ajoute le carré aux drachmes, De la racine, soustrais alors la moitié des choses, Et le reste montrera la racine du bien recherché. Par exemple, dans la recherche proposée, les racines sont 10 ; en prenant la moitié de celles-ci, à savoir 5, au carré, elles seront 25 ; ajoutes-y les drachmes, qui sont 39, et tu réaliseras 64 ; lequel a l'habitude de recevoir une racine, à savoir 8. Soustrais les choses divisées par moitié, d'où il reste 3, ce qui est la racine ; quant au bien, il est 9. Quant à toutes les fois qu'il est proposé dans la question plus ou moins qu'un bien, convertis-le en un unique bien. Je convertis les restes de la même façon que le bien soit en augmentant, soit en enlevant. Par exemple, si sont proposés deux biens et dix racines égalant 48 drachmes, par conversion on égalera un bien et 5 racines à 24 drachmes. Ou encore, si la moitié du bien et 5 racines égalent 12, par conversion le bien entier et 10 racines égalent 24⁴⁵. »

Démonstration des algorithmes de résolution : l'exemple de l'équation de type IV

« Je pose le carré abgd comme le bien, dont la racine dg est multipliée par 10 drachmes, qui sont la ligne ge continuant directement la ligne bg, et il résulte donc la surface de. Comme on égale le bien plus 10 de ses racines à 39 drachmes, il est nécessaire que la surface ae réalise 39 drachmes. Ainsi, divise par moitié la ligne ge au point z qui est dans la continuité directe de la ligne bg, par la sixième [proposition] du second élément, la surface obtenue à partir de eb par gb, c'est-à-dire la surface ae qui égale 39, et du carré gz égale le carré bz. Donc, je multiplie les racines démiées qui sont 5 par elles-mêmes, d'où il devient le carré gz, auquel j'ajoute la multiplication eb par gb qui est 39 drachmes, et on

⁴⁵ Marc Moyon, *Matériaux...* p. 100-101 ; Vat. Lat. 4606, fol. 72v, Bibliothèque du Vatican, département des manuscrits occidentaux.

recueil 64, duquel on prend la racine qui est bz dont je retranche les racines démiées, c'est-à-dire gz , et dont le reste est bg , à savoir la racine du bien énoncé⁴⁶. »

De façon plus précise, nous résumons dans le tableau suivant le raisonnement de l'auteur du *Liber Restauracionis* dans le cas de l'équation $x^2 + 10x = 39$ que nous pouvons étendre, sans être anachronique, au cas général de l'équation $x^2 + px = q$.

équation $x^2 + 10x = 39$	Cas général : $x^2 + px = q$
Soit $abgd$ un carré. dg est le côté du carré. On pose maintenant e tel que $ge = 10$ et e dans le prolongement de bg du côté de g . $(de) = dg \times ge$ c'est-à-dire $(de) = 10 \times x$. Mais $(ae) = abgd + (de)$, donc $(ae) = 39$. On construit le milieu z de $[ge]$. Donc, $gz = \frac{ge}{2} = \frac{10}{2} = 5$. D'après la proposition 6 du livre II des <i>Éléments</i> d'Euclide ⁴⁷ : $eb \times gb + gz^2 = bz^2$ ou encore $(ae) + gz^2 = bz^2$, donc $39 + 5^2 = bz^2$ $39 + 25 = bz^2$, soit $64 = bz^2$. bz est le côté du carré bz^2 , donc $bz = 8$. Mais $bg = bz - gz$, donc, $bg = 8 - 5 = 3$ d'où $x = 3$.	$\rightarrow abgd = x^2$ $\rightarrow dg = x$ $\rightarrow ge = p$ $\rightarrow (de) = p \times x = px$ $\rightarrow gz = \frac{p}{2}$ $\rightarrow bz^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$ $\rightarrow bz = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$ $\rightarrow x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$

⁴⁶ *Ibid.*, p. 102 ; Vat. Lat. 4606, fol. 73r.

⁴⁷ Cette référence est non seulement dans le texte (Vat. Lat. 4606, fol. 73r.), mais aussi explicitement reformulée en glose dans la marge.

Cette démarche est explicitement associée à la figure suivante, soit par l'auteur lui-même soit par le copiste ou par un lecteur postérieur⁴⁸.

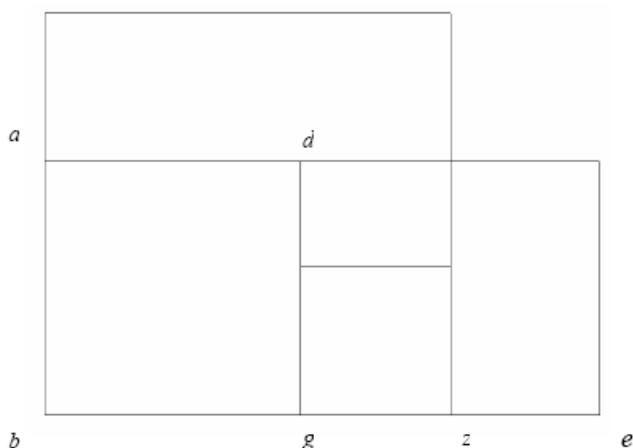


FIG. 6 – Algorithme de résolution de l'équation de type IV [Vat. Lat. 4606]

Le symbolisme algébrique dans le *Liber Restauracionis*

Il n'était pas question dans ce chapitre de développer une histoire, et encore moins une épistémologie du symbolisme algébrique. Cependant, nous avons été amené à réfléchir sur le rôle d'un tel symbolisme dans l'autonomie progressive de la discipline algébrique vis-à-vis de la géométrie. Il se trouve qu'une telle question était prématurée dans cette étude.

Néanmoins, il nous a semblé important de travailler le paragraphe du *Liber Restauracionis* entièrement consacré à la présentation d'un symbolisme algébrique. Nous le retranscrivons ici sans commentaires supplémentaires⁴⁹.

« De la manière de représenter le bien, les racines et les drachmes.

Dans la suite, chaque calcul qu'on pratique dans la restauration de ce qui est retranché ou dans la répartition du surabondant, est susceptible de changement pour l'un des six chapitres. Afin qu'il devienne plus

⁴⁸ Vat. Lat. 4606, fol. 73r.

⁴⁹ Marc Moyon, *Matériaux...*, p. 103-104 ; Vat. Lat. fol. 73v. Voir les analyses et commentaires de Marc Moyon (*ibid.*, p. 68-73).

facile à apprendre : nous donnons à certains les règles pour écrire et pour multiplier, lesquelles concernent tour à tour la multiplication de la chose entière, et aussi des choses dont on diminue un nombre ou on l'ajoute, ou bien encore des choses qui diminuent un nombre ou qui s'y ajoutent, en sachant que de la multiplication de la chose par la chose résulte autant qu'un bien, et de la multiplication de la chose par un nombre, ne résulte qu'un nombre de choses.

En effet, on détient cette règle d'écriture : en-dessous du nombre de biens, on place la lettre c, en-dessous du nombre de racines, on place la lettre r, avec une petite ligne encore plus bas. Mais les drachmes ont une petite ligne sans lettre toutes les fois où elles sont proposées sans diminution⁵⁰. Par exemple, deux biens, trois racines et 4 drachmes sont représentés ainsi.

2	3	4
<u>c</u>	<u>r</u>	<u>d</u>

Deux tiers du bien, trois quarts de la racine, quatre cinquièmes d'une drachme sont représentés suivant cette règle.

2	3	4
3	4	5
<u>c</u>	<u>r</u>	<u>d</u>

Mais, à chaque fois qu'on considère quelque'une [catégorie] diminuée d'une autre, on écrit l'autre en bas de celle-ci avec un point à la place de la petite ligne indiquant ainsi la diminution. Par exemple, deux biens moins trois racines, deux biens moins 4 drachmes, 5 racines moins 2 biens, 5 racines moins 4 drachmes sont notés ainsi. »

2	2	5	5
<u>c</u>	<u>c</u>	<u>r</u>	<u>r</u>
3	4	2	4
r	d	c	d
.	.	.	.

Commentaires

⁵⁰ Cette information n'est pas validée par l'exemple apporté ensuite. En effet, les nombres – drachmes – semblent être représentés par un « d ».

L'algorithme pour l'équation de type IV du *Liber restauracionis* s'inspire largement de celui d'Al-Khwârizmî, aussi énoncé dans le traité d'Abû Kâmil. De plus, l'auteur du *Liber restauracionis* ne propose pas, comme Abû Kâmil, l'algorithme donnant directement le carré de la racine. Nous serions donc facilement tentés de conclure sur une filiation directe avec Al-Khwârizmî et non pas avec Abû Kâmil. Néanmoins, l'analyse de la démonstration de l'algorithme exposée dans le *Liber restauracionis* montre une ressemblance frappante avec le traité d'Abû Kâmil (références explicites à Euclide, raisonnements similaires). Nous ne pouvons pas pour autant affiner nos hypothèses. En effet, en étudiant les figures du *Liber restauracionis* avec celles d'Abû Kâmil, nous remarquons des différences. La construction présente dans le Vat. Lat. 4606 est originale. Elle semble réfléchie et conçue afin d'utiliser au mieux la proposition 6 du livre II des *Eléments*. Cette figure n'est présente ni chez Al-Khwârizmî, ni chez Abû Kâmil. Plusieurs conjectures sont alors permises : parmi celles-ci, cette représentation géométrique peut être issue d'un des nombreux commentaires au traité d'Al-Khwârizmî perdus encore aujourd'hui ou elle peut provenir de la tradition locale de l'Andalus du XII^e siècle⁵¹. Le paragraphe sur le symbolisme vient renforcer cette deuxième hypothèse. Quoi qu'il en soit, l'auteur du *Liber restauracionis* affiche sa volonté de donner à l'algèbre, science de l'inconnue, une vérité voire même une réalité géométrique.

Conclusion

Dès sa naissance, l'algèbre classique – par opposition à l'algèbre des structures – est une discipline disjointe de la géométrie que ce soit par sa nature, par ses outils propres ou par ses domaines d'application. Cependant, dans la continuité du *Mukhtasar* d'Al-Khwârizmî et du *Kâmil* d'Abû Kâmil, le *Liber restauracionis* montre la place importante de la géométrie dans le raisonnement algébrique. En effet, il semble encore inévitable pour un auteur du XII^e siècle – époque de l'émergence de l'algèbre en Europe – de recourir à un raisonnement à

⁵¹ Nous avons plusieurs raisons de croire que le *Liber restauracionis* est la traduction d'un manuel d'algèbre destiné à l'enseignement écrit au XII^e siècle. Voir Marc Moyon, *Matériaux...*

support géométrique pour valider une assertion algébrique. Les références à Euclide relevées dans le texte confirment que cet auteur s'inscrit nettement dans la tradition euclidienne. Ainsi, tous les algorithmes sont établis par un raisonnement géométrique construit sur le modèle hypothéticodéductif des premières propositions du livre II des *Éléments*. Dans la suite du *Liber restauracionis*, son auteur utilisera naturellement le même type de démonstration pour des identités algébriques. Seulement, la limite d'un tel raisonnement, déjà pressentie par Al-Khwârizmî, est flagrante à l'occasion de la démonstration de l'identité⁵² $\sqrt{200} - 10 + (20 - \sqrt{200}) = 10$. En effet, canoniquement, l'auteur du *Liber restauracionis* s'appuie sur une représentation géométrique qui devrait dicter toutes les étapes de la démonstration. Cela étant, les analyses de cette démonstration et de la figure présente dans la marge du manuscrit mettent en évidence un pur raisonnement arithmétique où la figure ne peut être considérée que comme une simple illustration. L'auteur est amené à considérer $(10 - \sqrt{200})$ comme un véritable segment. De manière anachronique, il représente donc une « longueur négative ». Mais, quel degré de vérité alors accorder à cette représentation ? Ne faut-il pas, comme lorsqu'Abû Kâmil ne respecte pas les règles d'homogénéité, prendre de la distance avec la géométrie et poursuivre un raisonnement purement arithmétique, voire algébrique ? Le symbolisme algébrique ne va-t-il pas aider les algébristes dans leur prise de distance avec la géométrie ?

Bibliographie

- AL-ANDALUSÎ Sâ'id. *Kitâb Tabakât al-Umam* [Livre des catégories des nations], trad. par R. Blachère. Paris : Larose, 1935.
- BERGGREN John Lennart. *Episodes in the mathematics of medieval Islam*. Berlin : Springer-Verlag, 1986.
- DJEBBAR Ahmed. *L'algèbre arabe, genèse d'un art*. Paris : Vuibert Adapt, 2005.

⁵² *Ibid.*, p. 106 ; Vat. Lat. fol. 74rv.

- EUCLIDE. *Les Éléments*, trad. par B. Vitrac. Paris : Presses universitaires de France, 1990.
- FOLKERTS Menso. *The Development of Mathematics in Medieval Europe*. Aldershot : Ashgate Variorum, 2006.
- GUTAS Dimitri. *Pensée grecque, culture arabe*. Paris : Aubier, 2005.
- HEATH Thomas L. *Euclid, the thirteen books of the elements*. New York : Dover, 1956.
- HEATH Thomas L. *A history of Greek mathematics*. New York : Dover, 1981.
- HUGHES Barnabas. « Gerard of Cremona's translations of al-Khwârizmî's al-jabr ». *Mediaeval Studies*, 1986, n° 48, p. 211-263.
- KHALDÛN Ibn. *Le livre des exemples*. Paris : Gallimard, 2002.
- LEVEY Martin. *The algebra of Abû Kâmil*. Madison, Milwaukee et Londres : The University of Wisconsin Press, 1966.
- MOYON Marc. *Matériaux pour l'histoire des mathématiques en Europe du XII^e au XV^e siècle : exemple du Liber Restauracionis (ms. Vat. Lat. 4606)*. Mémoire de Master 2, Histoire et épistémologie des mathématiques, Université Lille 1-Lille 3, 2005.
- PROCLUS DE LYCIE. *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*. Bruges : Desclée de Brouwer, 1948.
- ROSEN Frederic. *The algebra of Muhammad ibn Musa al-Khwârizmî*. Londres : Oriental translation fundation, 1831.
- SESIANO Jacques. « La version latine médiévale de l'Algèbre d'Abû Kâmil ». In M. Folkerts et J. P. Hogendijk. *Vestigia Mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard*. Amsterdam et Atlanta : Rodopi, 1993, p. 315-452.
- SUTER Heinrich. « Das Mathematiker-Verzeichniss in Fihrist des Ibn Abû Ya'qub an-Nadîm ». *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*, 1900, vol. VI.
- YOUSCHKEVITCH Adolf. *Les mathématiques arabes (VIII^e-XV^e siècles)*. Paris : J. Vrin, 1976.